KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Remediëring Wiskunde voor Burgerlijk Ingenieur, Wiskunde en Fysica

(Versie 2026/10/26.0)

Inhoudsopgave

1.1 Intro

Dit is de PDF versie van het online remediëringstraject wiskunde voor toekomstige studenten van de KU Leuven opleidingen

- fysica
- informatica
- wiskunde
- ingenieurswetenschappen
- ingenieurswetenschappen: architectuur

Niet geslaagd? Remediëring is verplicht.

Als toekomstig student is het belangrijk dat je je wiskundige vaardigheden en kennis goed inschat, ze opfrist en indien nodig opkrikt tot het verwachte niveau. Als je **niet geslaagd bent op de starttoets (ijkingtoets) fysica, informatica, wiskunde, ingenieurswetenschappen of ingenieurswetenschappen-architectuur** (of een compatibele toets) en toch die opleiding wil volgen, dan moet je een **verplichte remediëring** volgen en als bewijs daarvan na je inschrijving een attest indienen. Voor deze remediëring kan je kiezen tussen

- dit **online remediëringstraject** doorlopen, bij voorkeur minstens deels online wegens de oplossingen en feedback bij veel van de oefeningen, en daarna de **afsluitende toets** te maken. Aan het einde van de toets kan je een **remediëringsattest** downloaden dat je zal moeten opladen nadat je ingeschreven bent aan de KU Leuven. Je krijgt hiervoor automatisch een herinnering na je inschrijving.
- deelnemen aan de on-campus **zomercursus wiskunde**.
  Die on-campus zomercursus wiskunde is anders gestructureerd en uitgebreider dan dit online remediëringstraject. Ook als je de on-campus zomercursus gaat volgen kan het toch nuttig zijn eerst dit online remediëringstraject te doorlopen. De afsluitende toets hoef je dan niet af te leggen, maar het mag vrijblijvend wel.

Merk op dat dit remediëringstraject geen *deelname* aan een starttoets kan vervangen. Meer info daarover vind je via de website van de ijkingstoets.

Wel geslaagd? Voorbereiding is nuttig.

Ook als je wel geslaagd bent is een opfrissing wiskunde aangewezen, zeker bij een score lager dan 14/20. Je komt dan immers sterker en met meer vertrouwen aan de start.
Je kan ofwel de on-campus zomercursus volgen, dit online remediëringstraject doorlopen, of kiezen voor het handboek Zelfstudiemodule.

Structuur van dit remediëringstraject

Elk onderwerp wordt ingeleid met een gestructureerd overzicht (soms ook 'steekkaart' genoemd) van de leerstof, gevolgd door een aantal oude **ijkingstoetsvragen** van voorbije jaren.

Als je de leerstof niet kent, of je hebt er problemen mee, dan raden we sterk aan om eerst de theorie te bestuderen, bijvoorbeeld in de online zelfstudie cursus die de KU Leuven permanent ter beschikking stelt, en/of voor de jaarlijkse on-campus Zomercursus Wiskunde.

Per onderwerp bespreken we telkens uitvoerig één typische voorbeeldvraag, met **hints en gedetailleerde uitwerkingen**. Waar relevant geven we alternatieve oplossingsmethoden en wijzen we op mogelijke valkuilen. Dikwijls zijn er van de voorbeeldvraag ook varianten, waarbij je kan nagaan of je de besproken oplossingsmethode nu ook zelf kan toepassen. Voor een meer systematische behandeling van de leerstof zijn er verwijzingen naar de concrete theoriemodules uit de Zomercursus Wiskunde.

Hoewel de oorspronkelijke ijkingstoetsen meerkeuzevragen waren, zijn ze hier meestal als **open vragen** geformuleerd. De meeste examens, en de meeste problemen die je later in je beroepsleven zal moeten

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Intro

oplossen, hebben immers niet de mooie formulering van een meerkeuzeprobleem met precies één juiste oplossing.

Een overzicht van alle steekkaarten vind je online of in PDF. Er is ook een uitgebreidere collectie, in een andere volgorde, die gebruikt wordt in de Zomercursus.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Intro

Nog enkele algemene tips (hoewel je die mogelijk toch niet leest, en indien wel misschien toch niet gelooft)

- Besteed voldoende tijd aan het **zelf vinden van de oplossing**.
  Zelf zoeken is bijna nooit verloren tijd, ook niet als je de oplossing uiteindelijk toch niet zelf vindt. Zelf zoeken is enkel nutteloos als je de gebruikte begrippen niet kent, problemen hebt met basisrekenvaardigheden of onder tijdsdruk staat omdat het morgen examen is. Je studeert dan eerst de theorie en maakt eenvoudige basisoefeningen.
- Gebruik de **hints** zo nuttig mogelijk. Dat is meestal niet door ze allemaal in één keer te lezen.
  We geven trouwens niet altijd hints naar de meest efficiënte oplossing, maar wel een optie waar je zelf mogelijk ook aan zou kunnen denken. In sommige gevallen leidt dat voor deze concrete oefening echter tot niets, en dan wijzen we je daar ook op. De uitwerkingen bevatten soms ook extra aandachtspunten of alternatieve oplossingsmethoden.
- Besteed na het vinden of lezen van de oplossing voldoende tijd aan het **analyseren** ervan.
  Hoe zit de oplossing precies in elkaar, waarom heb ik dat niet zelf gevonden, wat is de cruciale stap die ik moet onthouden of nog verder moet inoefenen, . . . ? Je maakt deze oefeningen immers niet zozeer om de concrete oplossingen te kennen, maar om zelf gelijkaardige en moeilijkere oefeningen te leren oplossen.

Deze cursustekst is beschikbaar in meerdere vormen:

(a) als online applicatie, met interactieve functionaliteiten zoals hints en feedback.

(b) als online PDF, op je computer of smartphone, waarbij je in de tekst kan zoeken, allerlei interne hyperlinks werken, en waarbij de QR-codes aanklikbaar zijn.

(c) als afgedrukte PDF, met QR-codes die je telkens bij de online versie brengen.

CC BY-NC-SA 4.0

Hoeken en rechten

Hoeken

scherpe hoek

rechte hoek

stompe hoek

Verwante hoeken

complementaire hoeken: $\alpha + \beta = 90°$

en dus $\beta = 90° - \alpha$

supplementaire hoeken: $\alpha + \beta = 180°$

en dus $\beta = 180° - \alpha$

anticomplemantaire hoeken: $\beta - \alpha = 90°$

en dus $\beta = 90° + \alpha$

antisupplementaire hoeken: $\beta - \alpha = 180°$

en dus $\beta = 180° + \alpha$

Hoeken bij evenwijdige rechten en een snijlijn

Overstaande hoeken zijn *gelijk*
net zoals
overeenkomende *binnen*hoeken en
overeenkomende *buiten*hoeken

Aanliggende hoeken zijn *supplementair*:

Afstand tussen een punt P en een rechte l

De **afstand** $d(P,l)$ tussen een punt en een rechte is de kortste afstand tussen dit punt P en een punt van de rechte en is dus de afstand tussen P en de loodrechte projectie van P op de rechte l.

Bissectrice of deellijn

De **bissectrice** of **deellijn** van een hoek is de rechte die de hoek in **twee gelijke hoeken** verdeelt.

→ De afstand van een punt van de bissectrice tot de benen van de hoek is gelijk.
→ Twee snijdende rechten hebben *twee* bissectrices.

Middelloodlijn van een lijnstuk

De **middelloodlijn** van een lijnstuk $[AB]$ is de loodlijn op het lijnstuk door het midden M van het lijnstuk.

→ Voor elk punt P van de middelloodlijn van het lijnstuk $[AB]$ is de afstand tot punt A gelijk aan de afstand tot punt B.

Stelling van Thales

Evenwijdige projectie behoudt de verhouding van evenwijdige lijnstukken: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

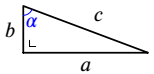
CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Driehoeken

Rechthoekige driehoeken

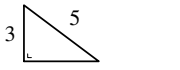
De stelling van **Pythagoras**:
Een driehoek met zijden a, b, c is rechthoekig in de hoek tegenover $c \iff a^2 + b^2 = c^2$

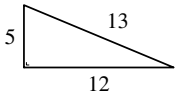


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Schuine zijde}} \quad \text{SOS} \quad a = c \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Aanliggende zijde}}{\text{Schuine zijde}} \quad \text{CAS} \quad b = c \cdot \cos\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Aanliggende zijde}} \quad \text{TOA} \quad a = b \cdot \tan\alpha$$





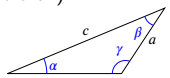
Willekeurige driehoeken

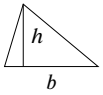
De **som van de hoeken** van een driehoek meet $180°$ (of π radialen).

Sinusregel $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Cosinusregel $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Oppervlakte $A = \frac{bh}{2}$

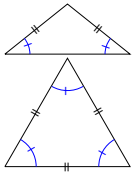




Gelijkbenige en gelijkzijdige driehoeken

Een **gelijkbenige driehoek** heeft twee gelijke basishoeken.

Een **gelijkzijdige driehoek** heeft drie gelijke hoeken, van elk $60°$ of dus $\frac{\pi}{3}$ radialen.

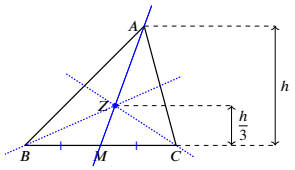


zwaartelijn - zwaartepunt

De **zwaartelijn** van de driehoek ABC uit het hoekpunt A is de rechte door het **hoekpunt** A en het **midden** M **van de overstaande zijde** BC. De drie zwaartelijnen snijden in het **zwaartepunt** Z van de driehoek.

Eigenschap: $|ZM| = \frac{|AM|}{3}$.

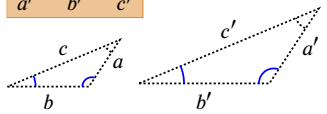
Gevolg: De afstand van het zwaartepunt tot een zijde is een derde van de hoogte op die zijde: $d(Z, BC) = \frac{h}{3}$.



Gelijkvormige en congruente driehoeken

Bij **gelijkvormige driehoeken** zijn de hoeken gelijk en de overeenkomstige zijden met eenzelfde factor geschaald.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



- Aantonen dat **twee hoeken** gelijk zijn, is voldoende om gelijkvormigheid aan te tonen.
  HH hoek-hoek

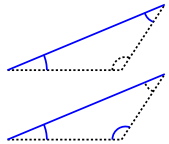
Bij **congruente** driehoeken zijn **alle zijden** en **overeenkomstige hoeken** gelijk. Onderstaande kenmerken zijn voldoende om congruentie aan te tonen.
Twee driehoeken zijn congruent als



- de **drie zijden** gelijk zijn.
  ZZZ zijde-zijde-zijde



- **twee zijden** en hun **ingesloten hoek** gelijk zijn.
  ZHZ zijde-hoek-zijde
  → Voor een rechthoekige driehoek moet de rechte hoek niet ingesloten zijn:
  90RS rechte hoek-rechthoekszijde-schuine zijde



- **één zijde** en **twee overeenkomstige hoeken** gelijk zijn.
  → aanliggende hoeken: HZH hoek-zijde-hoek
  → aanliggende en overstaande hoek:
  ZHH zijde-hoek-hoek

Wanneer kan je alle zijden en hoeken van een driehoek berekenen? Het antwoord is analoog aan de congruentiekenmerken.

- ZZZ: Als je de drie zijden kent, kan je de hoeken berekenen via de cosinusregel.
- ZHZ of 90RS: Als je de lengte van twee zijden en de ingesloten hoek kent, dan kan je eerst de lengte van de derde zijde en dan de andere hoeken berekenen met de cosinusregel. Enkel bij een rechthoekige driehoek hoeft de gekende (rechte) hoek niet ingesloten te zijn en kan je de stelling van Pythagoras toepassen.
- HZH of ZHH: Als je een zijde en twee hoeken kent, is de derde hoek direct te bepalen via de som van de hoeken in een driehoek. Via de sinusregel bepaal je de lengtes van de andere zijden.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Cirkels

Begrippen

Definitie: De **cirkel** met **middelpunt** M en **straal** r is de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt M liggen.
Een **raaklijn** aan een cirkel heeft slechts **één punt** gemeenschappelijk met de cirkel, dit punt noemen we het **raakpunt**. De afstand van het middelpunt van de cirkel tot een raaklijn is gelijk aan de straal. Een belangrijke eigenschap van een **raaklijn** is dat ze **loodrecht op de straal** naar het raakpunt staat.
Een driehoek gevormd door het middelpunt van de cirkel en twee punten op de cirkel is **gelijkbenig**, en heeft bijgevolg twee **gelijke basishoeken**.
De **lengte van een boog** s die een middelpuntshoek α afsnijdt op een cirkel met straal r is gegeven door $s = \alpha \cdot r$ (hoek α in radialen). De omtrek van een volledige cirkel is $2\pi r$.
Het gebied omsloten door een cirkel noemen we een **schijf** en heeft **oppervlakte** $A = \pi r^2$.
Elke **omtrekshoek** meet de helft van de **middelpuntshoek** die op dezelfde boog staat. $\beta = \alpha/2$
Gevolg: Elke **driehoek op een diameter met derde hoekpunt op de cirkel** is **rechthoekig**.

Ingeschreven en omgeschreven cirkel van een driehoek

ingeschreven cirkel:
→ De ingeschreven cirkel raakt aan de zijden van de driehoek.
→ Het middelpunt van de ingeschreven cirkel is het snijpunt van de drie deellijnen van de hoeken.

omgeschreven cirkel:
→ De omgeschreven cirkel bevat de hoekpunten van de driehoek.
→ Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de drie middelloodlijnen van de zijden.

Onderlinge ligging van een cirkel en een rechte

snijdend $d(M, \text{rechte}) < r$ | rakend $d(M, \text{rechte}) = r$ | disjunct $d(M, \text{rechte}) > r$

Onderlinge ligging van twee cirkels

volledig buiten elkaar liggend $|M_1M_2| > r_1 + r_2$ | uitwendig rakend $|M_1M_2| = r_1 + r_2$ | snijdend $|r_1 - r_2| < |M_1M_2| < r_1 + r_2$ | inwendig rakend $r_1 \neq r_2$ en $|M_1M_2| = |r_2 - r_1|$ | volledig binnen mekaar liggend $|M_1M_2| < |r_2 - r_1|$ | concentrisch $M_1 = M_2$ | samenvallend $r_1 = r_2$ en $M_1 = M_2$.

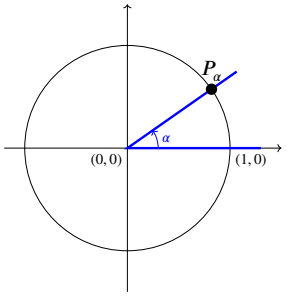
CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)

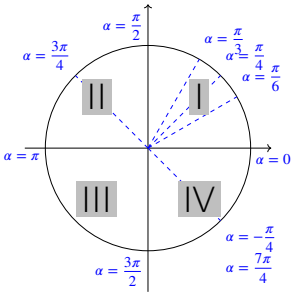
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Goniometrie

Goniometrische cirkel

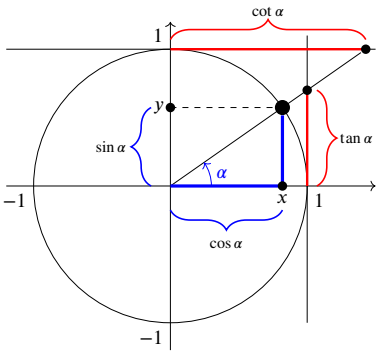
De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong, verdeeld in vier **kwadranten**, genummerd van rechtsboven tegen de klok in met Romeinse cijfers I, II, III, IV.
Elke hoek α komt overeen met een uniek **beeldpunt** P_α op deze cirkel (en vice versa).
De booglengte van de boog tussen $(1,0)$ en P_α is de hoek in radialen. Bijgevolg komt een hoek van $180°$ overeen met de booglengte van een halve cirkel: $180° = \pi$.



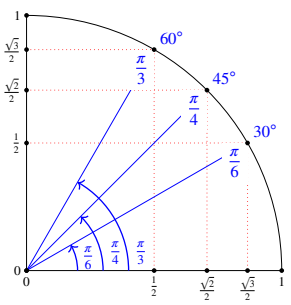


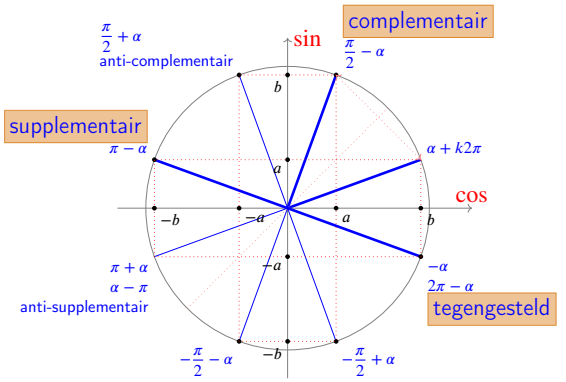
De **cosinus** en **sinus** van α zijn per definitie de coördinaten van P_α: $P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$
Verder definiëren we

tangens	$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	secans	$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
cotangens	$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	cosecans	$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$



Gekende goniometrische getallen en verwante hoeken





Goniometrische formules

Hoofdformule van de goniometrie:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

en dus $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$

$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \csc^2\alpha$

Som

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

en dus $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

en dus $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

en dus $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

t-Formules: $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ en dus $\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$ met $t = \tan\frac{\alpha}{2}$

Simpson:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Omgekeerde Simpson:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

2.5 Goniometrie: verwante hoeken

Voorbeeld 2.5.1. (IJkingstoets september 2018)

Als van een hoek θ in het tweede kwadrant geweten is dat $\tan\theta = -\frac{1}{3}$,

dan is $\dfrac{1}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sin(\pi-\theta)} = \ldots\ldots$

Hint 1. Dit type opgave kan je op twee manieren aanpakken:
- vertrek van de opgave, en gebruik ten gepasten tijde de gegevens.
- vertrek van de gegevens en leid daaruit zaken af die je dichter bij de opgave brengen.

In dit geval lijkt het aangewezen te vertrekken met de opgave want de sinussen van $\theta+\frac{\pi}{2}$ en $\pi-\theta$ kan je vereenvoudigen.

Hint 2. De eigenschappen van verwante hoeken laten toe de termen $\frac{\pi}{2}$ en π weg te werken.

Hint 3. Je bekomt $\dfrac{1}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sin(\pi-\theta)} = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$.

Wat zijn mogelijke volgende stappen?

Hint 4. Omdat $\tan\theta$ gegeven is, kan je proberen om $\dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$ te herschrijven in functie van $\tan\theta$. Er zullen echter steeds sinussen of cosinussen overblijven.

Je kan je afvragen of je $\sin\theta$ en $\cos\theta$ kan berekenen als je $\tan\theta$ kent.

Hint 5. De formule $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ levert onmiddellijk het verband $3\sin\theta = -\cos\theta$.

De hoofdformule van de goniometrie geeft ook een verband tussen sinus en cosinus van een hoek. Door beide formules te combineren kan je vooruitgang maken.

Hint 6. Eén mogelijkheid is de hoofdformule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ te herschrijven als $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ (door alles te delen door $\cos^2\theta$).

Je vindt $\cos\theta = \pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ en $\sin\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Hoe bepaal je de juiste tekens?

Hint 7. Op de goniometrische cirkel kan je direct nagaan dat voor hoeken met grootte tussen $\frac{\pi}{2}$ en π geldt dat $\cos\theta < 0$ en $\sin\theta > 0$.

Invullen geeft dan $\dfrac{1}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sin(\pi-\theta)} = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{-\sqrt{10}}{3} + \sqrt{10} = \dfrac{2}{3}\sqrt{10}$

Uitwerking: Je kan $\dfrac{1}{\sin(\theta+\frac{\pi}{2})} + \dfrac{1}{\sin(\pi-\theta)}$ vereenvoudigen met de eigenschappen van verwante hoeken, die je afleest op de goniometrische cirkel:

$$\begin{aligned} \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\theta && \text{(anti-complementaire hoeken)} \\ \sin(\pi-\theta) &= \sin(-\pi-\theta) = -\sin(\pi+\theta) = \sin\theta && \text{(supplementaire hoeken)} \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Goniometrie: verwante hoeken

Om de opgave op te lossen volstaat het dus $\sin\theta$ en $\cos\theta$ te vinden voor de hoek θ met $\tan\theta = -\frac{1}{3}$. Een verband tussen cos en tan volgt onmiddellijk door de hoofdformule van de goniometrie $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ te delen door $\cos^2\theta$:

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Hierin $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ invullen geeft $\cos^2\theta = \frac{9}{10}$, en dus opnieuw via de hoofdformule dat $\sin^2\theta = \frac{1}{10}$.

Je kent dus de cosinus en de sinus op het teken na (omdat er twee vierkantswortels zijn).

Omdat θ in het tweede kwadrant ligt, zie je op de dat $\cos\theta < 0$ en $\sin\theta > 0$, en dus:

$$\cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}} \qquad \text{en} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Dus geldt

$$\frac{1}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = \frac{-\sqrt{10}}{3} + \sqrt{10} = \frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

Oefening 2.5.1. Variant van vorige opgave.

De hoek α uitgedrukt in radialen ligt *niet* in het derde kwadrant. Verder is gegeven dat $\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos(-\alpha)$.

Dan is $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha) = \sqrt{5}$

Uitwerking: Merk allereerst op dat de termen in de laatste expressie herschreven kunnen worden via verwante hoeken:

$$\begin{array}{lll} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) & = \cos(\alpha) & \text{(complementaire hoeken)} \\ \sin(\pi - \alpha) & = \sin(\alpha) & \text{(supplementaire hoeken)} \end{array}$$

We kunnen het probleem oplossen als we de cosinus en sinus van α kennen. We exploreren daarvoor verder het gegeven $\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos(-\alpha)$ via verwante hoeken. Omdat $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (het gaat om tegengestelde hoeken), krijgen we

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

Substitueren we nu $\sin\alpha$ in de hoofdformule van de goniometrie, dan krijgen we:

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{4}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{5}{4}\cos^2\alpha$$

waaruit volgt dat $\cos^2\alpha = \frac{4}{5}$. Omdat de cosinus en sinus hetzelfde teken hebben (de factor $\frac{1}{2}$ verandert niets) en er gesteld wordt in de opgave dat de hoek α niet behoort tot het derde kwadrant, kunnen we besluiten dat de hoek α in het eerste kwadrant moet liggen (i.e. zowel de cosinus als sinus moet een positief teken hebben). We vinden dus:

$$\sin\alpha = +\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{en} \qquad \cos\alpha = +\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Deze waarden invullen in de opgave geeft:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha) = 2\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Goniometrie: goniometrische vergelijkingen

Voorbeeld 2.6.1. (IJkingstoets 2022)

Als $t > 0$ de kleinste waarde is waarvoor $2\cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$, dan is $\sin(t) = \ldots\ldots$

Hint 1. Het lijkt misschien een aantrekkelijk idee om uit $2\cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right)$ onmiddellijk $\sin(t)$ te berekenen, en je kan dat eventueel proberen, bijvoorbeeld met verwante hoeken.

Je zal vaststellen dat dat toch niet zo eenvoudig is.

Maar, als je t zou kunnen berekenen, dan ken je natuurlijk ook $\sin(t)$. En het berekenen van t uit $2\cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$ heet het oplossen van goniometrische vergelijkingen.

Hint 2. Zoek dus de kleinste positieve t waarvoor $\cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Hint 3. Op de goniometrische cirkel zie je dat de cosinus gelijk is aan $\frac{1}{2}$ voor de hoeken $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Wat zegt dat over de mogelijke waarden van t?

Hint 4. Is er iets mis met volgende redenering? Zo ja, wat precies?

$$\begin{array}{rcl} \cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right) & = & \frac{1}{2} \\ & \Updownarrow & \\ 2t - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} & \text{of} & 2t - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \\ & \Updownarrow & \\ 2t = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} & \text{of} & 2t = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ & \Updownarrow & \\ t = \frac{\pi}{6} & \text{of} & t = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

De kleinste strikt positieve t is dus $\frac{\pi}{6}$, en dus is de eindoplossing $\sin(t) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Hint 5. De redenering in vorige hint geeft hier weliswaar het juiste resultaat, maar ze is toch onvolledig, en dus *fout*.

In het bijzonder de eerste equivalentie $\cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \iff 2t - \frac{2\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3}$ is *fout*.

De juiste equivalentie is $\cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \iff 2t - \frac{2\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$.

In het bijzonder omdat je verder de hoek moet delen, is de term $+2k\pi$ mogelijk erg belangrijk: aan de vergelijking $\cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ voldoen *meer* hoeken dan enkel $t = \pi/2$ of $t = \pi/6$. Inderdaad, ook bv. de hoek $t = \frac{3\pi}{2}$ voldoet aan de vergelijking.

Omdat je in deze opgave enkel de *kleinste* t nodig hebt, is het hier – eerder toevallig – niet fataal als je de term $+2k\pi$ zou vergeten. Maar bij de eerste wolkenkrabber die je bouwt als ingenieur, de eerste pandemie die je bestrijdt als viroloog of de eerste financiële crisis die je te lijf moet als economist, is het misschien precies de oplossing $t = \frac{3\pi}{2}$ die je eeuwige roem kan bezorgen. Het zou zowel voor jezelf als voor de mensheid jammer zijn als je die oplossing dan zou missen.

Uitwerking: Los eerst de goniometrische vergelijking $\cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ op. Omdat je op de goniometri-

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Goniometrie: goniometrische vergelijkingen

sche cirkel de sinus en cosinus kent van de standaardhoek $\frac{\pi}{3}$, zie je dat een cosinus gelijk is aan een half voor de hoeken $\pm\frac{\pi}{3}$. Om *alle mogelijke* oplossingen te vinden van goniometrische vergelijkingen is het belangrijk steeds *alle* maatgetallen van hoeken mee te nemen in je redeneringen. In dit geval betekent dat:

$$\begin{aligned} 2t - \frac{2\pi}{3} &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}, \quad \text{en dus} \quad t = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z} \quad \text{of} \\ 2t - \frac{2\pi}{3} &= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}, \quad \text{en dus} \quad t = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

De kleinste positieve oplossing is bijgevolg $t = \frac{\pi}{6}$, en dus is de gevraagde $\sin t = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Oefening 2.6.1. (IJkingstoets september 2016)

De hoeken α_1 en α_2 zijn twee verschillende hoeken uitgedrukt in radialen die liggen in het interval $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Bovendien zijn deze hoeken oplossingen van volgende vergelijking in α:

$$\sin 2\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha$$

Dan is $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) =$ $\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}\checkmark}$

Uitwerking: We zoeken eerst alle hoeken α in het interval $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ waarvoor $\sin(2\alpha) = \sqrt{3}\cos(\alpha)$.

Het linkerlid kan herschreven worden met de formule van dubbele hoek, waardoor er zowel links als rechts een factor $\cos\alpha$ komt te staan:

$$2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sqrt{3}\cos(\alpha)$$

Als $\cos(\alpha)$ zou nul zijn, dan is α al onmiddellijk een oplossing van de vergelijking. En $\cos\alpha = 0$ voor hoek $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ of $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Dus $\alpha = \frac{\pi}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ is al een eerste oplossing van de vergelijking. Vergeet deze oplossing niet!

Als $\cos(\alpha) \neq 0$ kan die factor worden weggedeeld, en dan wordt de vergelijking

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De oplossingen zijn $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ en $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. Enkel de eerste hoek behoort tot het voorgeschreven interval $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

De twee oplossingen zijn dus $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ en $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$ en bijgevolg is

$$\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \overset{(*)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

waarbij $(*)$ de gelijkheid $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$ voor anti-complementaire hoeken is.

CC BY-NC-SA 4.0

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)

Functies

Definities

Een reële **functie** $f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ is een procedure die met elk getal $x \in A \subset \mathbb{R}$ het uniek gedefinieerde getal $f(x)$ associeert.

Een **functievoorschrift** van een functie f is een *formule* die $f(x)$ berekent voor elke $x \in A$.

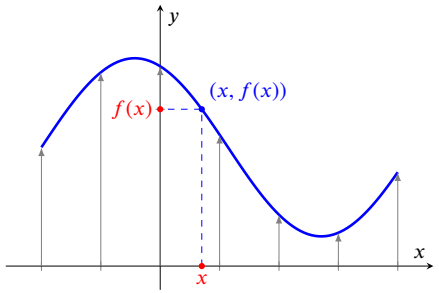
Het **domein** $\operatorname{dom} f$ is de verzameling A van alle mogelijke inputs van de functie.

Het **bereik** $\operatorname{bld} f$ is de verzameling van alle mogelijke outputs van de functie.

De **grafiek** van een functie is de verzameling $\{(x, f(x)) | x \in A)\} \subset \mathbb{R}^2$, en is typisch een kromme in het xy-vlak die elke verticale rechte hoogstens één keer snijdt.

Een **constante functie** is een functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op eenzelfde reëel getal c. De grafiek is een horizontale rechte op hoogte $y = c$.

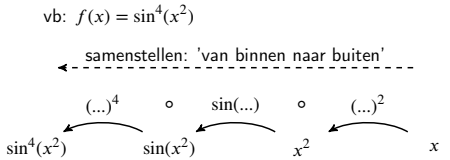
De **nulfunctie** is de constante functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op 0.
De graad van de nulfunctie is onbepaald, alle andere constante functies zijn veeltermfuncties van graad 0.



Samenstellen van functies

Bij het **samenstellen van functies** wordt de output van één functie de input van een volgende functie:

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x)), \quad \text{waarbij} \quad (f \circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)) \quad \text{(lees als: } f \textit{ na } g \text{ van } x\text{)}.$$



Transformaties van grafieken

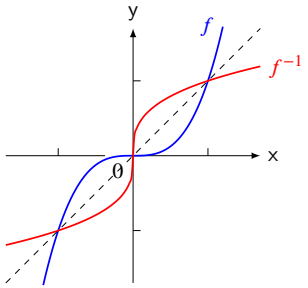
Grafieken verschuiven, schalen of spiegelen kan door samenstelling met enkele eenvoudige functies.
Voor een korte visuele opfrissing over deze transformaties verwijzen we naar de applet.

applet: https://eng.kuleuven.be/media/DSB/applet_transformatie_grafieken

Inverse functies

Soms kan een functie worden 'ongedaan gemaakt' door haar **inverse** f^{-1} die uit de output van f terug de input berekent. Voor elke y in het bereik van f waarvoor een *unieke input* bestaat, geldt: $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$. Dit is equivalent aan de voorwaarden $f^{-1}(f(x)) = x$ en $f(f^{-1}(x)) = x$.

Als de schaal op beide assen van de grafiek identiek is, kan de grafiek van de inverse functie gevonden worden door spiegeling t.o.v. de eerste bissectrice.



Pas op:

de waarde van de inverse functie	$f^{-1}(x)$	is meestal niet gelijk aan
het inverse (of omgekeerde) van de functiewaarde	$(f(x))^{-1} = 1/f(x)$.	

Let dus op de plaats van de exponent.

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

3.2 Overzicht exponentiële en logaritmische functies

Exponentiële en logaritmische functies

Definities

De **exponentiële functie met grondtal** a (met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$),
is de reële functie $\exp_a : x \mapsto \exp_a(x) = a^x$
De **logaritmische functie met grondtal** a (met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}_0^+$),
is de reële functie $\log_a : x \mapsto \log_a x$ met $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
Beide functies zijn elkaars inverse:

$$\log_a(\exp_a x) = x \quad \text{of} \quad \log_a a^x = x \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\exp_a(\log_a x) = x \quad \text{of} \quad a^{\log_a x} = x \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

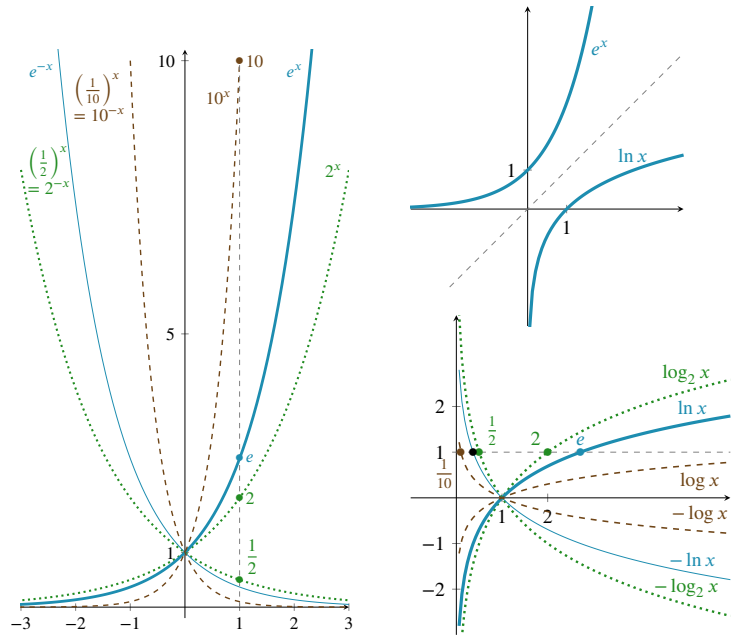
Notatie speciale grondtallen:

$\log x \overset{\text{def}}{=} \log_{10} x$

$\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$ met $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182$ **(getal van Euler)** .

$\exp x \overset{\text{def}}{=} e^x$

Grafieken van exponentiële en logaritmische functies



Rekenregels

$a^x a^y$	$=$	a^{x+y}	$\log_a(x \cdot y)$	$=$	$\log_a x + \log_a y$
$(a^x)^y$	$=$	a^{xy}	$\log_a(x^y)$	$=$	$y \cdot \log_a x$
$\frac{1}{a}$	$=$	a^{-1}	$\log_a \frac{1}{x}$	$=$	$\log_a x^{-1} = -\log_a x$
$\frac{a^x}{a^y}$	$=$	a^{x-y}	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$=$	$\log_a x - \log_a y$
a^x	$=$	$b^{x \cdot \log_b a}$	$\log_a x$	$=$	$\log_a b \cdot \log_b x$
					het geval $x = a$ geeft $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
a^x	$=$	$e^{x \cdot \ln a}$	$\log_a x$	$=$	$\frac{\ln x}{\ln a}$
$\frac{de^x}{dx}$	$=$	e^x	$\frac{d \ln x}{dx}$	$=$	$\frac{1}{x}$
$\frac{da^x}{dx}$	$=$	$\ln a \cdot a^x$	$\frac{d \log_a x}{dx}$	$=$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$

Eigenschappen van exponentiële functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff a^x < a^y$
Hoe *groter* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek stijgt.
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff a^x > a^y$
Hoe *kleiner* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek daalt.

(3) Het **domein** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$: a^x is gedefinieerd voor alle reële getallen x
(4) Het **beeld** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: a^x kan alleen strikt positieve waarden aannemen

De grafiek van $\exp_a$
(5) snijdt **de x-as** niet: a^x is nooit gelijk aan 0
(6) snijdt **de y-as** in het punt $(0, 1)$: $a^0 = 1$
(7) snijdt **de rechte $x = 1$** in het punt $(1, a)$: $a^1 = a$

Eigenschappen van logaritmische functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff \log_a x < \log_a y$
Hoe *kleiner* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek stijgt.
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff \log_a x > \log_a y$
Hoe *groter* het grondtal, hoe *sneller* de grafiek daalt.

(3) Het **domein** van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: $\log_a x$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$
(4) Het **beeld** van $\log_a$ is $\mathbb{R}$: $\log_a x$ kan alle reële waarden aannemen

De grafiek van $\log_a$
(5) snijdt **de x-as** in het punt $(1, 0)$: $\log_a 1 = 0$
(6) snijdt **de y-as** niet: voor $x = 0$ is $\log_a x$ niet gedefinieerd
(7) snijdt **de rechte $y = 1$** in het punt $(a, 1)$: $\log_a(a) = 1$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Goniometrische en cyclometrische functies

Goniometrische functies

Bij goniometrische functies wordt de hoek steeds in radialen genomen!
Volgende functies zijn goniometrische functies:

$$\begin{array}{lll}
\sin: & \mathbb{R}\to[-1,1] & : x\mapsto \sin(x)\\
\cos: & \mathbb{R}\to[-1,1] & : x\mapsto \cos(x)\\
\tan: & \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\to\mathbb{R} & : x\mapsto \tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad k\in\mathbb{Z}\\
\cot: &]k\pi,(k+1)\pi[\to\mathbb{R} & : x\mapsto \cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad k\in\mathbb{Z}\\
\sec: & \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\to]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[& : x\mapsto \sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}, \quad k\in\mathbb{Z}\\
\operatorname{cosec}: &]k\pi,(k+1)\pi[\to]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[& : x\mapsto \operatorname{cosec}(x)=\frac{1}{\sin(x)}, \quad k\in\mathbb{Z}
\end{array}$$

Cyclometrische functies

Volgende cyclometrische functies zijn de inversen van de goniometrische functies als we het domein van die goniometrische functies gepast beperken:

$\operatorname{asin}: [-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]: x\mapsto \operatorname{asin}(x)$ is invers van $\sin: \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]: x\mapsto \sin(x)$

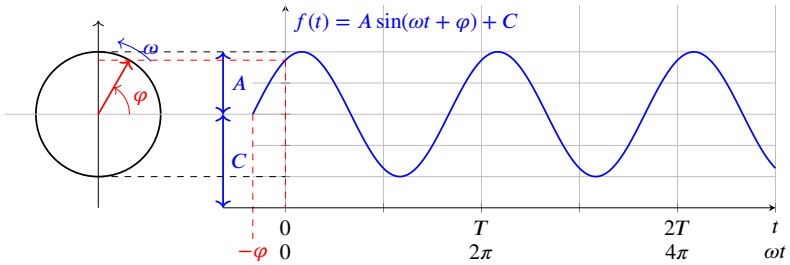
$\operatorname{acos}: [-1,1]\to [0,\pi] : x\mapsto \operatorname{acos}(x)$ $\quad$ $\cos: [0,\pi]\to[-1,1]: x\mapsto \cos(x)$

$\operatorname{atan}: \mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[: x\mapsto \operatorname{atan}(x)$ $\quad$ $\tan: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R} : x\mapsto \tan(x)$

Cyclometrische functies geven *altijd* de waarde van een hoek uitgedrukt in radialen.
Verschillende notaties zijn in gebruik voor de cyclometrische functies. Zo wordt voor boogsinus zowel bgsin, Bgsin, arcsin als asin gebruikt.

Sinusoïdale functies

Sinusoïdale functies worden gebruikt om periodieke verschijnselen te modelleren. Ze kunnen beschreven worden als $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+C$,
met A : de amplitude
T : de periode
$\omega=\frac{2\pi}{T}$: de hoekfrequentie of de pulsatie
φ : de fase
C : de offset of de verticale verschuiving.



Merk op dat de cosinusfunctie een sinusfunctie is met fase $\frac{\pi}{2}$: $\cos(\omega t)=\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

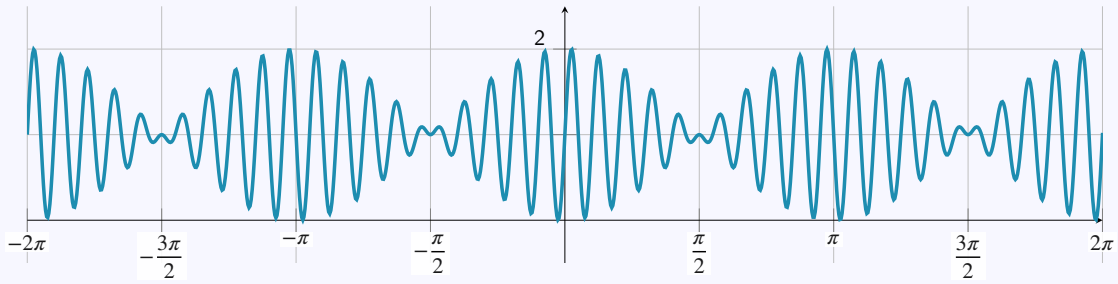
3.4 Functies: grafieken

Voorbeeld 3.4.1. (IJkingstoets 2013, Oef 17)

Een klassieke manier om informatie (draadloos) door te sturen is de amplitude van een golf veranderen over de tijd. In de volgende figuur wordt de grafiek van de golffunctie $f(t)$ getoond.

Het functievoorschrift voor f is

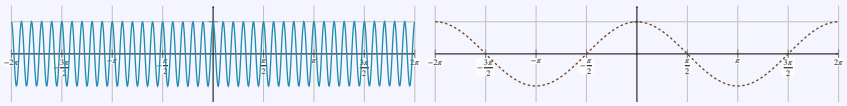
$f(t) = 1 + \cos(20t)\sin(20t)$	$f(t) = 1 + \sin(20t)\cos(t)$	$f(t) = \cos(20t)\cos(t)$	$f(t) = \Big(1 + \cos(20t)\Big)\sin(t)$
$f(t) = \Big(1 + \sin(20t)\Big)\cos(t)$			



Feedback: Inderdaad, de snelle trilling is een $\sin(20t)$, die is vermeningvuldigd met $\cos(t)$ zodat je de globale vorm van een cosinus krijgt. En de term $+1$ zorgt ervoor dat de grafiek één eenheid naar boven is verschoven.

Hint 1. De antwoordmogelijkheden bevatten enerzijds $\sin(t)$ of $\cos(t)$ en anderzijds $\sin(20t)$ of $\cos(20t)$. Wat is het verband tussen de grafieken van bijvoorbeeld $t \mapsto \cos(t)$ en $t \mapsto \cos(20t)$?

Hint 2. De linkse grafiek hieronder is $t \mapsto \cos(20t)$ en de rechtse grafiek is $t \mapsto \cos(t)$.



Hint 3. Omdat $\sin(20t)$ en $\cos(20t)$ veel 'sneller' trillen dan $\sin(t)$ of $\cos(t)$, kan je vermoeden dat de 'snelle' trilling te maken heeft met de factor met $20t$, en de 'trage' trilling met de factor met t.

De 'snelle' trilling is op tijdstip $t = 0$ gelijk aan 0, en wordt dus beschreven door $\sin(20t)$.

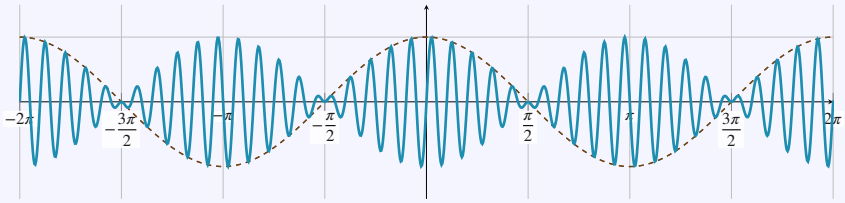
Hint 4. De 'trage' trilling is op tijdstip $t = 0$ maximaal, op tijdstip $t = \dfrac{\pi}{2}$ minimaal en wordt dus beschreven door $\cos(t)$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Functies: grafieken

Hint 5. De grafiek van $\sin(20t)$ heeft maxima gelijk aan $+1$ in de punten $20t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$, of dus in de punten $t = \frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{10} = \frac{1+4k}{40}\pi$.

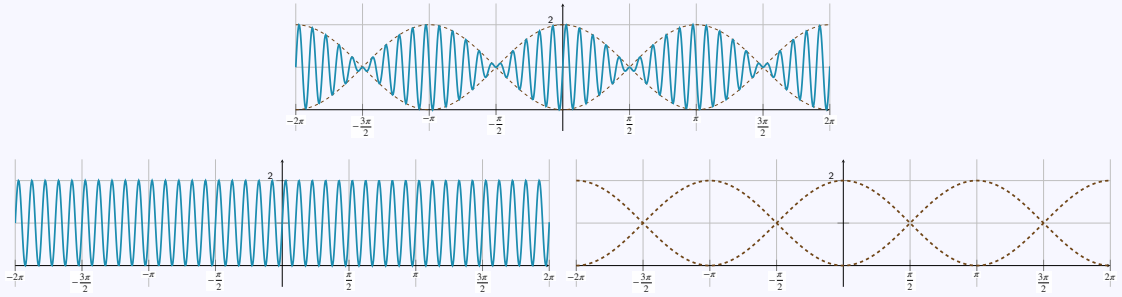
Door $\sin(20t)$ te vermenigvuldigen met $\cos(t)$ zijn die maxima in $t = t_o$ niet langer 1, maar $1 \cdot \cos(t_o) = \cos(t_o)$, en dus volgen de maxima van het product $\sin(20t)\cos(t)$ mooi de grafiek van $\cos(t)$ waar die cosinus positief is, en de grafiek van $-\cos(t)$ waar de cosinus negatief is.



Hint 6. De gegeven functie trilt echter niet rond $y = 0$, maar rond $y = 1$, en is dus één eenheid in de hoogte verschoven.

Uitwerking:

Je kan opmerken dat de grafiek een combinatie lijkt van twee trillingen: er is een 'snelle' trilling, waarvan echter ook de hoogte varieert als een golffunctie.



De snelle trilling heeft geen uitwijking voor $x = 0$, en bereikt 20 keer terug die toestand tussen $x = 0$ en $x = \pi$. Dergelijke trilling is de grafiek van een sinus die met een factor 20 in de x-richting is samengedrukt, en wordt beschreven door $y = \sin 20x$. In dit geval is de grafiek echter één eenheid naar boven geschoven, hoort hij dus bij de functie $y = 1 + \sin 20x$.

Om de amplitude te variëren, volstaat het de $\sin 20x$ te vermenigvuldigen met een gepaste factor. Die factor moet één zijn voor $x \in \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$, en nul voor $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$. De factor wordt dus beschreven door een cosinusfunctie $\cos x$.

De gegeven grafiek hoort dus bij de functie $y = 1 + \cos x \sin 20x$.

Dit wordt ook uitgelegd in volgend filmpje:

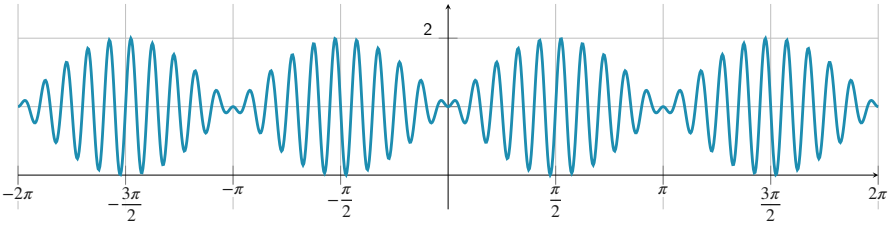
Je vindt de theorie en extra voorbeelden in het hoofdstuk over transformaties van functies.

Oefening 3.4.1. Geef het functievoorschrift dat hoort bij volgende grafieken:

1. $1 + \sin x \sin 20x$✓

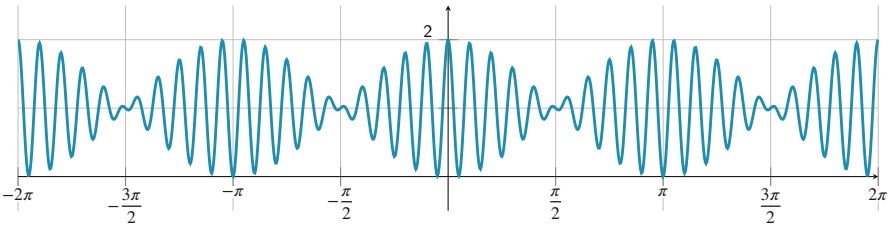
CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Functies: grafieken



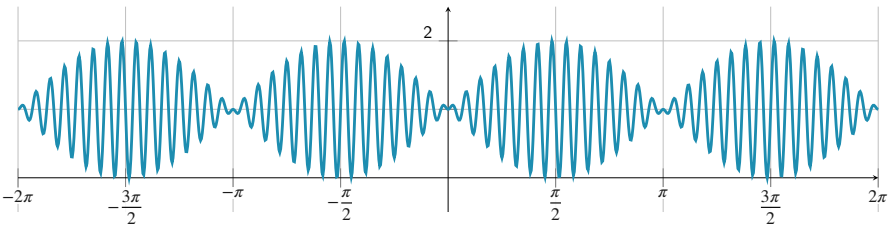
Feedback: Inderdaad, de 'trage' golf is duidelijk een sinus (met nulpunten in $0, \pi, 2\pi$), en de 'snelle' golf is ook een sinus (bijvoorbeeld omdat de grafiek symmetrisch is rond 0)

2. $1 + \cos x \cos 20x$✓

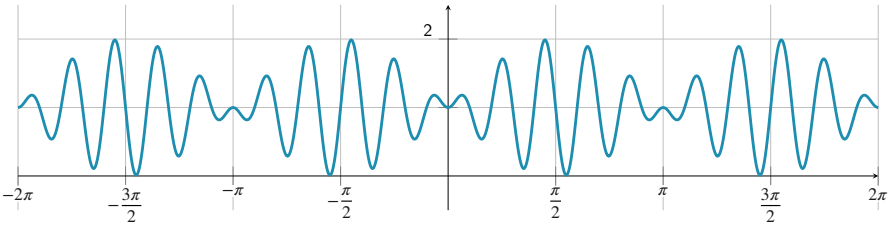


Feedback: Inderdaad, de 'trage' golf is een cosinus (met nulpunten in $-\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$), de 'snelle' golf is symmetrisch rond 0, en dus geen sinus.

3. $1 + \sin x \sin 30x$✓



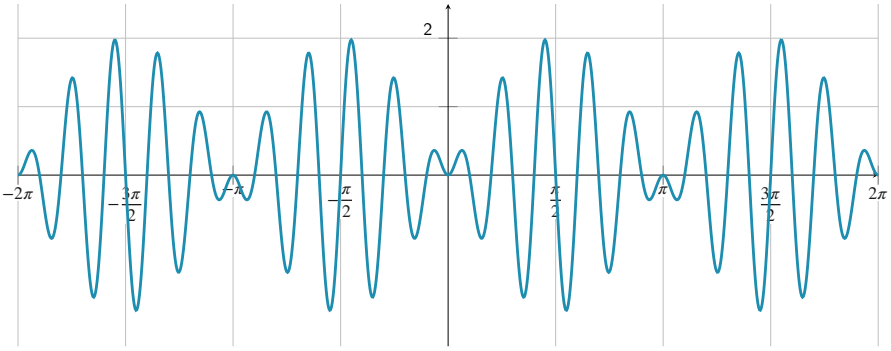
4. $1 + \sin x \sin 10x$✓



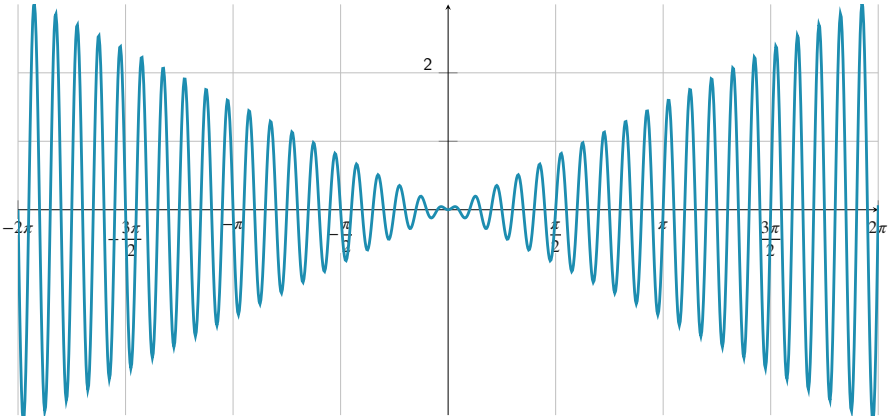
5. $2 \sin x \sin 10x$✓

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Functies: grafieken



6. $\frac{x \sin 20x}{2}$ ✓

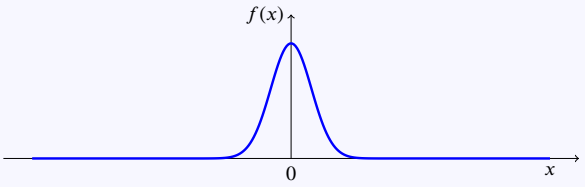


CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Functies: samenstellen en verschuiven

Voorbeeld 3.5.1. (IJkingstoets 2021)

Een lichtpuls plant zich voort in een lange rechte glasvezelkabel. We kiezen de x-as volgens de lengterichting van deze kabel. Op een bepaald ogenblik is het verband tussen de signaalsterkte I_0 en de positie x gegeven door $I_0 = f(x)$, met maximale signaalsterkte $f(0)$ in het punt met $x = 0$. De grafiek van de functie f is gegeven in onderstaande figuur.



Op tijdstip t is de puls verschoven en minder sterk geworden. De signaalsterkte is nu gegeven door

$$I(x) = e^{-\frac{2t}{\tau}}\ f(x + vt),$$

waarbij zowel τ als v strikt positieve constanten zijn.

Welke van onderstaande uitspraken is waar op tijdstip $t = \tau \ln 3$?

De puls is verschoven

(a) in de richting van grotere x en de maximale signaalsterkte is 8 keer kleiner.

(b) in de richting van grotere x en de maximale signaalsterkte is 9 keer kleiner.

(c) in de richting van kleinere x en de maximale signaalsterkte is 8 keer kleiner.

(d) in de richting van kleinere x en de maximale signaalsterkte is 9 keer kleiner.

Hint 1. Lees de vraag aandachtig, en beslis welke van volgende functies hier relevant is:

- $e^{-\frac{2t}{\tau}} f(x + vt)$ als functie van t (in de omgeving van $t = \tau \ln 3$)
- $3^{-2} f(x + a)$ als functie van x (met een zekere positieve a)
- $2^{-3} f(x + a)$ als functie van x (met een zekere positieve a)
- $-3^2 f(x + a)$ als functie van x (met een zekere positieve a)
- $-2^3 f(x + a)$ als functie van x (met een zekere positieve a)
- dit heeft niets met functies te maken, want het gaat over pulsen en signaalsterkte

Feedback: De relevante functie is $x \mapsto 3^{-2} f(x + a)$, want je moet een uitspraak nagaan op tijdstip $t = \tau \ln 3$.

Voor $t = \tau \ln 3$ wordt de exponentiële factor

$$e^{-\frac{2t}{\tau}} = e^{-2 \ln 3} = 3^{-2} = \frac{1}{9}, \qquad \text{want } e^{\ln 3} = 3$$

De factor $f(x + vt)$ wordt dan $f(x + vt) = f(x + v\tau \ln 3) = f(x + a)$ met $a = v\tau \ln 3 > 0$.

De te onderzoeken uitspraak vergelijkt dus de puls van de functie $I(x)$ op tijdstip $t = 0$, dus

$$I_0(x) = e^0 f(x + v\dot{0}) = f(x)$$

met die van $I(x)$ op tijdstip $t = \tau \ln 3$, dus (met $a > 0$)

$$3^{-2} f(x + a)$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Functies: samenstellen en verschuiven

Hint 2. Er moeten twee dingen worden bepaald: naar waar de puls verschuift en hoeveel de puls verkleint. Bekijk eerst het verkleinen van de puls.

Hint 3. Het functievoorschrift $x \mapsto 3^{-2} f(x+a)$ zegt dat de functie $x \mapsto f(x+a)$ wordt vermenigvuldigd met een factor $3^{-2} = 1/9$, en dus globaal 9 keer kleiner wordt dan $x \mapsto f(x+a)$.

Hint 4. Onderzoek nu waar het maximum ligt van de functie $x \mapsto 3^{-2} f(x+a)$ als – zoals gegeven is – het maximum van de functie $x \mapsto f(x)$ zich bevindt in het punt $x = 0$.

Hint 5. Het maximum van f wordt bereikt in $f(0)$, dus is de functie $f(x+a)$ maximaal als $x + a = 0$, dus als $x = -a$. Omdat a positief is, is $-a$ negatief, en ligt het maximum dus links van de oorsprong. De puls verschuift in de richting van *kleinere* x.

Uitwerking:

De puls bevindt zich in het maximum van de functie $x \mapsto e^{-\frac{2t}{\tau}} f(x+vt)$.

We zijn enkel geïnteresseerd in deze functie op het tijdstip $t = \tau \ln 3$, dus dat wordt

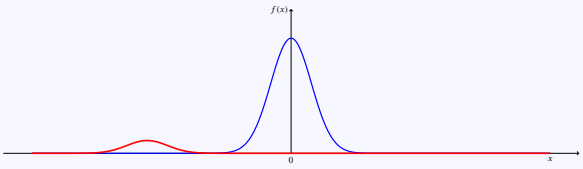
$$x \mapsto e^{-\frac{2\tau \ln 3}{\tau}} f(x + v\tau \ln 3) = 3^{-2} f(x+a)$$

waarbij we gebruiken dat $e^{\ln 3} = 3$. Om de formules wat te vereenvoudigen kiezen we ervoor de letter $a = v\tau \ln 3 > 0$ in te voeren.

De functie $x \mapsto f(x)$ bereikt volgens de gegeven figuur haar maximum in $x = 0$, dus bereikt $x \mapsto f(x+a)$ haar maximum als $x + a = 0$, of dus in $x = -a$. En dat betekent dat de puls naar links, dus naar kleinere x verschuift.

Omdat de functie wordt vermenigvuldigd met een factor $1/9$, wordt de signaalsterkte 9 keer kleiner.

Het correct antwoord is dus (d): de puls is verschoven in de richting van kleinere x en de maximale signaalsterkte is 9 keer kleiner.



Meer uitleg en voorbeelden vind je in het deel over transformaties van functies.

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Functies: inverse functies

Voorbeeld 3.6.1. (IJkingstoets juni 2016)

Beschouw de functie f met als voorschrift

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \begin{cases} x \mapsto f(x) = -x^2 + 6x - 3 & \text{als } x \leq 3 \\ x \mapsto f(x) = 2x & \text{als } x > 3. \end{cases}$$

De waarde van de inverse van f in het punt 5 is dan $f^{-1}(5) = \ldots\ldots$

Hint 1. Maak een tekening, of minstens een schets.

Hint 2. Je zou een functievoorschrift kunnen zoeken voor f^{-1} om dan met dat voorschrift $f^{-1}(5)$ te berekenen. Door erg concreet op te schrijven wat het betekent dat $f^{-1}(5) = a$ kan je het opstellen van het functievoorschrift van f^{-1} echter vermijden.

Hint 3. $f^{-1}(5) = a \iff f(a) = 5$

Hint 4. Je zoekt dus de a zodat $f(a) = 5$. Dergelijk getal a kan nooit groter zijn dan 3. Waarom?

Hint 5. Omdat dus zeker $a \leq 3$, zoek je $a \leq 3$ zodat $f(a) = 5$, dus $-a^2 + 6a - 3 = 5$.

Hint 6. Los de vergelijking $-x^2 + 6x - 8 = 0$ op.

Hint 7. Je vindt de oplossingen $x_1 = \dfrac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{-2} = 2$ en $x_2 = \dfrac{-6 - \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{-2} = 4$.

Omdat je al weet dat $a \leq 3$, moet je dus $x_1 = 2$ weerhouden. Dus $f(2) = 5$, en $f^{-1}(5) = 2$.

Uitwerking:

(a) Omdat de functie f een meervoudig voorschrift heeft, en ook omdat voor $x \leq 3$ het voorschrift een tweedegraadsveelterm is, kan je niet onmiddellijk een voorschrift vinden voor de inverse functie f^{-1}. Het is zelfs niet onmiddellijk duidelijk of de functie f inverteerbaar is, en zo ja of 5 wel tot het domein van de inverse behoort. Dat zou je eventueel wel kunnen afleiden uit de formulering van de vraag.

(b) Het is bij deze opgave nuttig om na te gaan hoe de waarde van de inverse functie precies is gedefinieerd: $f^{-1}(b) = a$ als en slechts als $f(a) = b$. Je zoekt hier dus een getal a zodat $f(a) = 5$, en de vraagstelling impliceert eigenlijk al dat dergelijk getal bestaat, en bovendien uniek is.

(c) Het is duidelijk dat voor $x > 3$ onmogelijk $f(x) = 5$ kan zijn, want voor $x > 3$ is het functievoorschrift $f : x \mapsto 2x$, en is $f(x)$ dus steeds groter dan 6.

(d) Je weet dus dat het gezochte getal a kleiner of gelijk is aan 3, en dus is het relevante functievoorschrift $f : x \mapsto -x^2 + 6x - 3$.
Je zoekt dus $a \leq 3$ waarvoor $f(a) = 5$, of dus $-a^2 + 6a - 3 = 5$, of dus $-a^2 + 6a - 8 = 0$, en dus een oplossing van de tweedegraadsvergelijking $-x^2 + 6a - 8 = 0$ die kleiner of gelijk is aan 3.
Je vindt alle oplossingen met de gekende formule $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2}, \text{ dus } x_1 = 2 \text{ en } x_2 = 4$$

(e) Er is één oplossing kleiner dan 3, namelijk $x_1 = 2$, en dat is de gezocht waarde van $f^{-1}(5)$.

Eindoplossing: $f^{-1}(5) = 2$.

Extra bedenkingen bij deze opgave:

CC BY-NC-SA 4.0

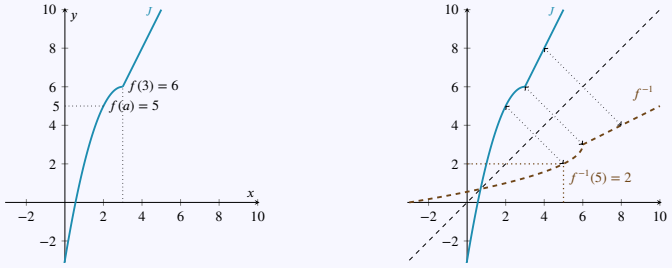
3.6 Functies: inverse functies

(a) Hoewel hier niet strikt nodig, is een schets van de grafiek van de functie hier zeker nuttig.

(b) Je kan onmiddellijk zien dat de grafiek op het deel $x > 3$ een rechte is (namelijk met vergelijking $y = 2x$), en voor $x \leq 3$ een bergparabool (een *berg*parabool omdat voor erg grote x de functiewaarde $-x^2 + 6x - 3$ wordt bepaald door de hoogstegraadsterm $-x^2$, en dus erg negatief is. Als een parabool erg *negatief* wordt voor grote x, kan dat alleen een *berg*parabool zijn).

(c) Je kan opmerken dat voor de grenswaarde $x = 3$ beide deel-voorschriften aan elkaar gelijk zijn, want $2 \cdot 3 = -3^2 + 6 \cdot 3 - 3 = 6$. Dus, de functie f maakt geen sprong in het punt $x = 3$. Dat is in deze oefening niet van belang, maar zou in andere gevallen kunnen verklaren waarom de vraag *geen oplossing* heeft.

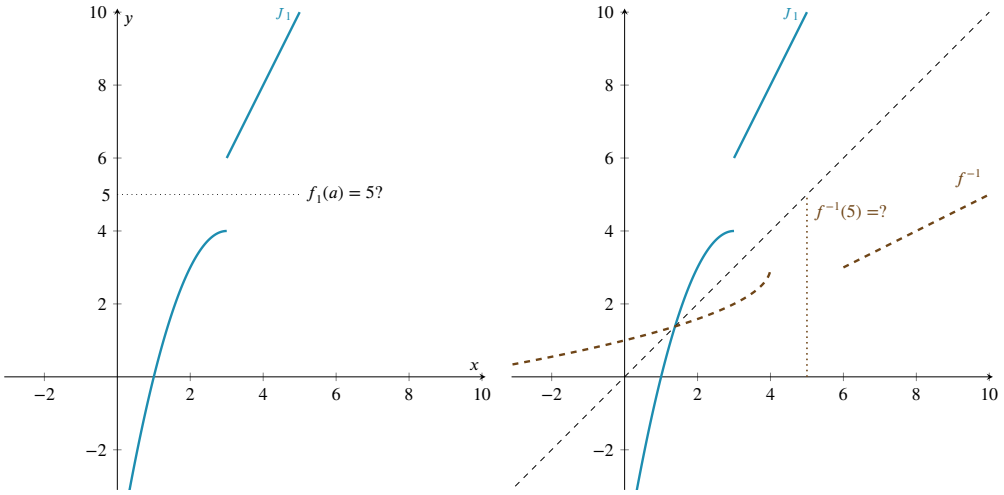
(d) De functie f heeft volgende grafiek, de grafiek van f^{-1} is de gespiegelde t.o.v. de eerste bissectrice.



Oefening 3.6.1. Varianten van vorig voorbeeld:

1. Bepaal indien mogelijk $f_1^{-1}(5)$ voor $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \begin{cases} x \mapsto f_1(x) = -x^2 + 6x - 5 & \text{als } x \leq 3 \\ x \mapsto f_1(x) = 2x & \text{als } x > 3. \end{cases}$

Uitwerking: De uitdrukking $f_1^{-1}(5)$ heeft geen betekenis, want 5 behoort niet tot het beeld van f_1 (en dus zeker ook niet tot het domein van f_1^{-1}).



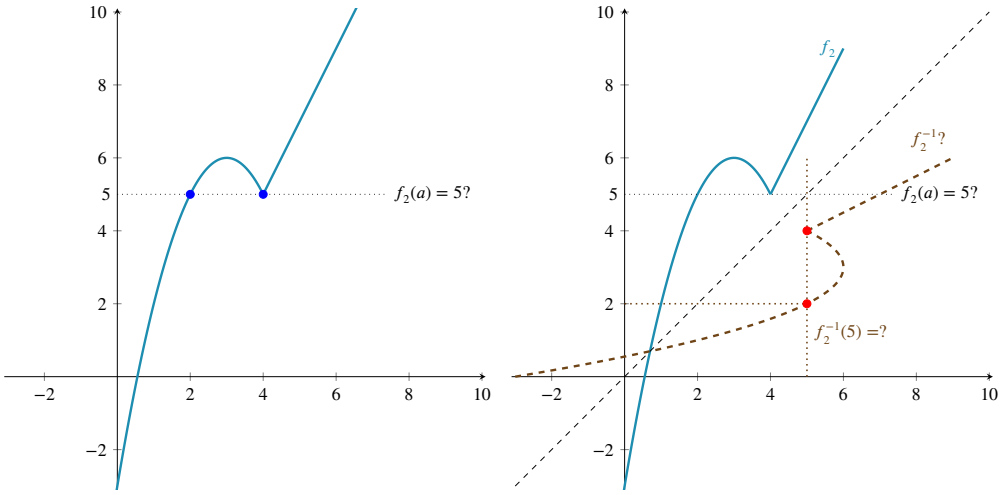
Merk op dat f_1 wel inverteerbaar is, maar dat het domein van de inverse functie bestaat uit $\mathbb{R} \setminus]4, 6] =]-\infty, 4] \cup]6, +\infty[$.

2. Ga na of een uniek inverse element a bestaat zodat $f_2^{-1}(5) = a$ voor $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \begin{cases} x \mapsto f_2(x) = -x^2 + 6x - 3 & \text{als } x \leq \\ x \mapsto f_2(x) = 2x - 3 & \text{als } x > \end{cases}$

Uitwerking: De uitdrukking $f_1^{-1}(5)$ heeft geen betekenis, want f_2 is niet inverteerbaar: er is *meer dan één* waarde die op 5 wordt afgebeeld.

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Functies: inverse functies



Merk op dat f_2 inverteerbaar wordt als je het domein geschikt beperkt, bijvoorbeeld tot één van de intervallen $]-\infty, 3]$, $[3, 5]$, $[5, \infty[$, of ook bv. $[0, 2]$.

Oefening 3.6.2. (IJkingstoets juli 2021)

De grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is de rechte door de punten $(-2, 0)$ en $(0, 1)$.
Verder is de functie g gegeven met $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = (f(x))^3$.

Dan is $g^{-1}(8) = 2$.

Uitwerking: Zie deze link:

CC BY-NC-SA 4.0

Limieten en asymptoten

Basislimieten

	$x \to -\infty$	$x \xrightarrow{<} 0$	$x \to 0$	$x \xrightarrow{>} 0$	$x \to +\infty$
$x \mapsto x$	$-\infty$	0	0	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	0	$-\infty$	\	$+\infty$	0
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$x \mapsto e^x$	0	1	1	1	$+\infty$
$x \mapsto \ln x$	\	\	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Rekenregels voor oneindig $(+\infty, -\infty)$

$$
\begin{array}{rcll}
(+\infty)+(+\infty) & = & +\infty & \\
(-\infty)+(-\infty) & = & -\infty & \\
(+\infty)\cdot(+\infty) & = & +\infty & = (-\infty)\cdot(-\infty) \\
(+\infty)\cdot(-\infty) & = & -\infty & = (-\infty)\cdot(+\infty) \\
(\pm\infty)+a & = & \pm\infty & = a+(\pm\infty) \qquad a \in \mathbb{R} \\
\dfrac{a}{+\infty} & = & 0 & = \dfrac{a}{-\infty} \qquad a \in \mathbb{R} \\
(\pm\infty)\cdot a & = & \pm\infty & = a\cdot(\pm\infty) \qquad a > 0 \\
(+\infty)^a & = & +\infty & \qquad a > 0 \\
(\pm\infty)\cdot a & = & \mp\infty & = a\cdot(\pm\infty) \qquad a < 0 \\
(+\infty)^a & = & 0 & \qquad a < 0 \\
a^{(+\infty)} & = & +\infty & \qquad a > 1 \\
a^{(-\infty)} & = & 0 & \qquad a > 1 \\
a^{(+\infty)} & = & 0 & \qquad 0 < a < 1 \\
a^{(-\infty)} & = & +\infty & \qquad 0 < a < 1
\end{array}
$$

MAAR volgende uitdrukkingen zijn onbepaald:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$$

Definities en eigenschappen

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ — lees je als: de **limiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent: als x nadert naar c dan nadert $f(x)$ tot L

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} c} f(x) = L$ — lees je als: de **linkerlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent: als $x \to c$ langs links (dus met $x < c$), dan $f(x) \to L$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} c} f(x) = L$ — lees je als: de **rechterlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent: als x nadert naar c **langs rechts** (dus met $c < x$), dan nadert $f(x)$ tot L

In de uitdrukking $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ zijn zowel c als L een reëel getal of het symbool $+\infty$ of $-\infty$.

Limieten bestaan *niet* voor alle functies f en getallen c, bijvoorbeeld $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x}$ bestaan niet.

Op de grafiek lees je x en c op de x-as (dus links-rechts) en $f(x)$ en L op de y-as (dus hoog-laag).

Eigenschap: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \xrightarrow{<} c} f(x) = L$ en $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} c} f(x) = L$

Voor een functie f geldt: de functie f is continu $\equiv f(c)$ bestaat en $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

De meeste voorschriften geven functies die continu zijn op hun domein, en dan geldt de regel: als je c kan invullen in $f(x)$ zonder problemen zoals $\frac{a}{0}, \frac{0}{0}$ of $\pm\infty$, dan is $f(c)$ de limiet van f in c.

Rekenregels voor limieten

Voor continue functies f, g waarvoor $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ en $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ bestaan, gelden volgende (reken-)regels:

$$\lim_{x \to c}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) \qquad \lim(\text{som}) = \text{som}(\lim\text{s})$$

$$\lim_{x \to c}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) \qquad \lim(\text{verschil}) = \text{verschil}(\lim\text{s})$$

$$\lim_{x \to c}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) \qquad \lim(\text{product}) = \text{product}(\lim\text{s})$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} \quad (\text{voor } \lim_{x \to c} g(x) \neq 0) \qquad \lim(\text{quotiënt}) = \text{quotiënt}(\lim\text{s})$$

Asymptoten

Een **asymptoot** is een rechte waartoe de grafiek van een functie willekeurig dicht nadert.
Men spreekt van **horizontale asymptoot (HA), verticale asymptoot (VA) of schuine asymptoot (SA)** als de rechte respectievelijk horizontaal, verticaal of schuin is.

Rechte $y = a$ is een **horizontale asymptoot** van f asa $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ of $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.

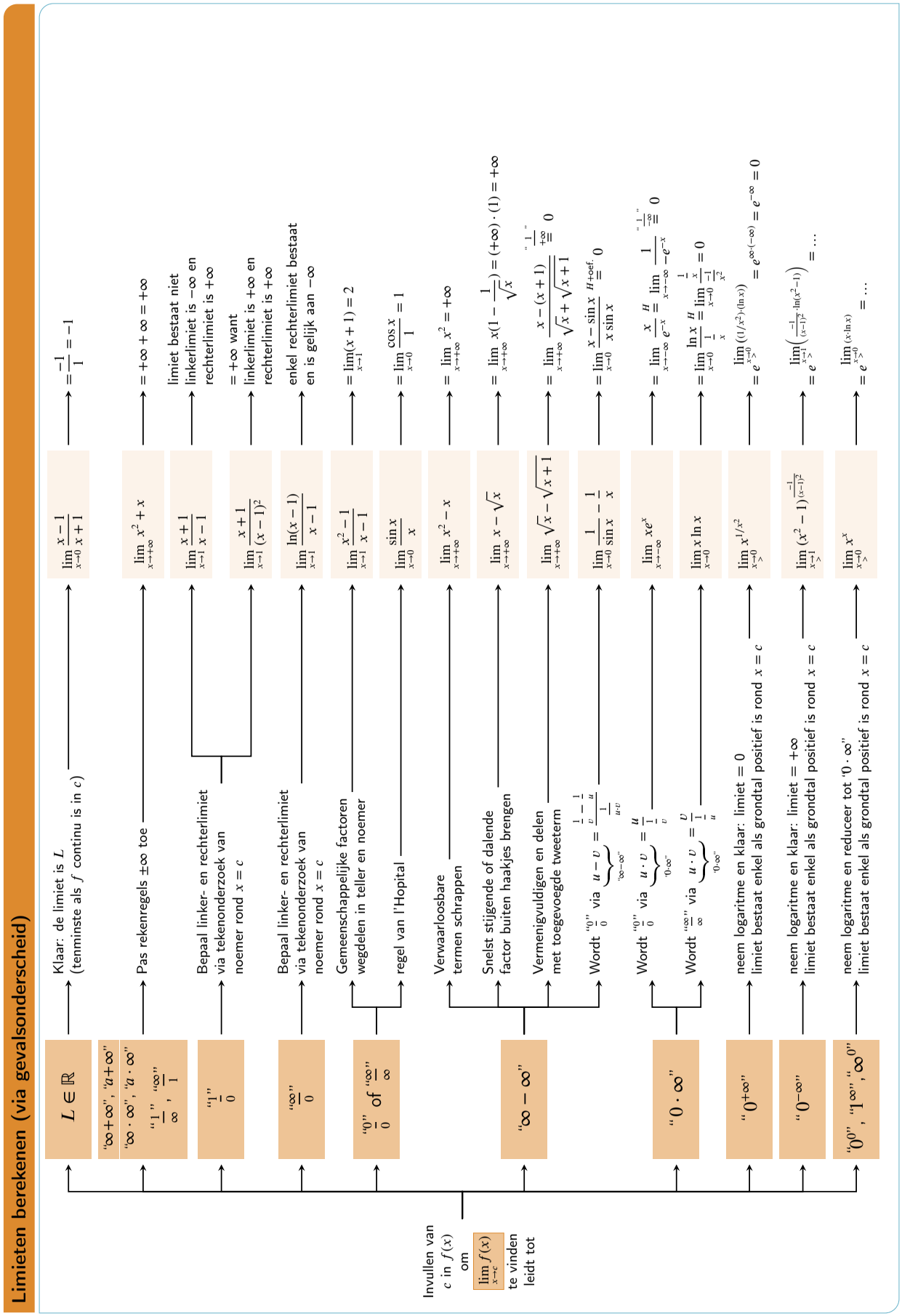
Rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** van f asa $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = \pm\infty$ of $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = \pm\infty$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

4.2 Overzicht limieten berekenen



KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

4.3 Limieten: berekenen

Voorbeeld 4.3.1. (IJkingstoets 2016)

Bereken de limiet $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+5}{(x^2-1)^3} = \ldots\ldots$.

Hint 1. Als eerste stap vul je (voorzichtig ...) de waarde in waar je de limiet wil berekenen, en je hoopt dat dat gewoon werkt.

In dit geval leidt $x = 1$ invullen tot de uitdrukking $\dfrac{0}{0}$.

Wat zijn mogelijke volgende stappen?

Hint 2. Je kan voor de onbepaaldheid "$\frac{0}{0}$" meestal de regel van de l'Hôpital gebruiken, maar hier is het makkelijk een gemeenschappelijke factor weg te delen uit teller en noemer.

Omdat de teller en de noemer veeltermen zijn, betekent het feit dat beide nul zijn voor $x = 1$ immers dat $x - 1$ een gemeenschappelijke factor is van teller en noemer. Je kan deze gemeenschappelijke factor wegdelen, en opnieuw $x = 1$ invullen.

Hint 3. Je moet nu $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-5}{(x-1)^2(x+1)^3}$ berekenen, en $x = 1$ invullen leidt tot "$\frac{-4}{0}$". Het volstaat in dit geval na te gaan of de linker- en rechterlimiet van de noemer naar $x = 1$ hetzelfde teken hebben. Is dat hier het geval?

Hint 4. Omdat de factor $x - 1$ met een *even* macht voorkomt in de noemer, is de noemer altijd positief in de buurt van $x = 1$.

Uitwerking: De limiet leidt tot de *onbepaalde vorm* $\dfrac{0}{0}$.

Die onbepaaldheid kan meestal worden opgelost met de regel van de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-6x+5}{(x^2-1)^3} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x-6}{3(x^2-1)^2\cdot(2x)}$$

maar hier leidt dat tot een limiet van de vorm $\dfrac{-4}{0}$, en moet dus de linker- en rechterlimiet worden bekeken. Omdat in de omgeving van $x = 1$ de teller negatief is, en de noemer steeds positief, is $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x-6}{6x(x^2-1)^2} = -\infty$.

In dit geval kan je het gebruik van de regel van de l'Hôpital vermijden door de gemeenschappelijke nulpunten in $x = 1$ uit teller en noemer te verwijderen.

De teller kan je schrijven als $(x-1)(x-5)$ en de noemer als $((x-1)(x+1))^3$, en dat geeft

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-6x+5}{(x^2-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-5)}{((x-1)(x+1))^3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-5}{(x-1)^2(x+1)^3} \overset{\frac{-4}{0}}{=} -\infty,$$

Extra bedenkingen:

Merk op dat de limiet van deze functie voor $x \to -1$ *niet bestaat*, want

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-6x+5}{(x^2-1)^3} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x-5)}{((x-1)(x+1))^3} = \lim_{x\to -1} \frac{x-5}{(x-1)^2(x+1)^3},$$

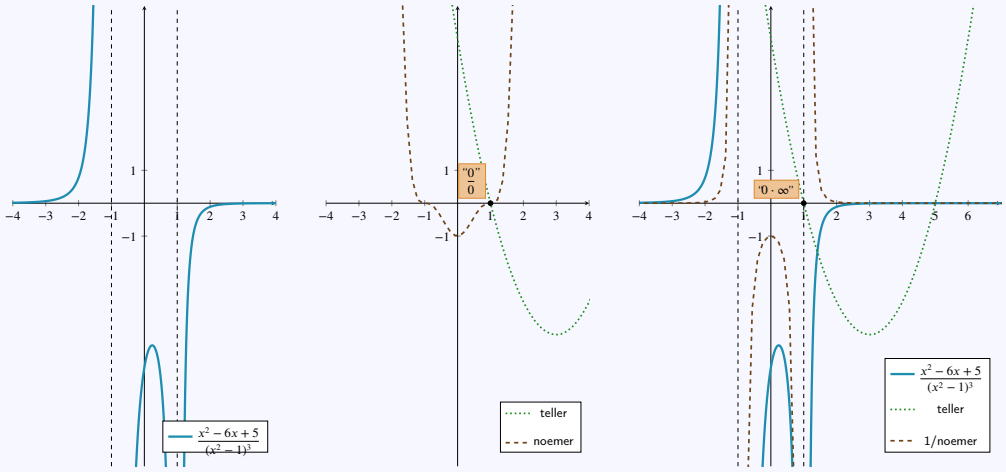
leidt tot de vorm $\dfrac{-6}{0}$ en in de buurt van $x = -1$ verandert de noemer $(x-1)^2(x+1)^3$ *wel* van teken omdat de macht van de factor $x + 1$ oneven is. De linker- en rechterlimiet gaan respectievelijk naar $+\infty$ en $-\infty$, zoals je ook op de onderstaande tekening kan verifiëren.

Zowel in $x = 1$ als in $x = -1$ is er een verticale asymptoot, en $y = 0$ is een horizontale asymptoot.

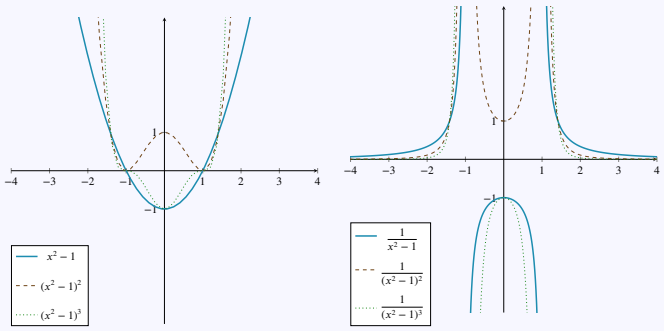
Een grafiek van de rationale functie geeft de situatie weer:

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Limieten: berekenen



Hieronder vind je ter herinnering de grafieken van x^2-1, $(x^2-1)^2$ en $(x^2-1)^3$ en hun omgekeerden.



De functie $(x^2-1)^n$ heeft voor $n \geq 1$ nulpunten in $x = \pm 1$, en stijgt steeds naar $+\infty$ voor $x \to \pm\infty$.

De afgeleide $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1)^n = 2nx(x^2-1)^{n-1}$ heeft nulpunten in $x = -1, 0, 1$ zodra $n \geq 2$, en dus kan de grafiek enkel in die drie punten extrema hebben. Voor n even is de functiewaarde in $x = 0$ steeds gelijk aan 1, voor n oneven is ze -1. Hoe groter n, hoe sneller de grafiek stijgt, maar hoe vlakker de grafiek rond de extrema.

De omgekeerde functie $(x^2-1)^{-n} = \dfrac{1}{(x^2-1)^n}$ heeft verticale asymptoten in de nulpunten $x = \pm 1$ van $(x^2-1)^n$.

Oefening 4.3.1.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-6x+5}{(x^2-1)^2} =$ Bestaat niet✓

Feedback: Inderdaad, de limiet bestaat niet, want de linkerlimiet is $+\infty$ en de rechterlimiet is $-\infty$.

Uitwerking: Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\dfrac{\text{“}0\text{”}}{0}$. De gemeenschappelijke factor $x-1$ wegdelen geeft

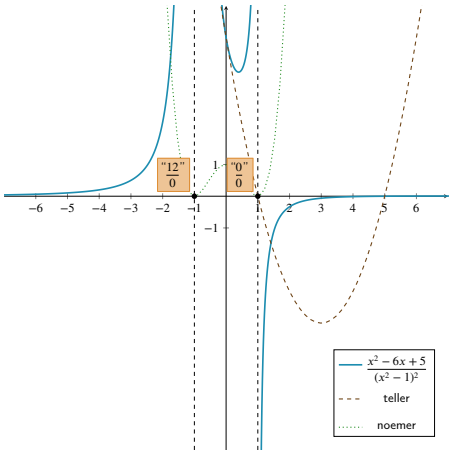
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-6x+5}{(x^2-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)^2(x+1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-5}{(x+1)^2\cdot(x-1)}$$

Deze limiet is van de vorm $\dfrac{\text{“}a\text{”}}{0}$, waarbij de noemer echter van teken verandert in de omgeving van $x = 1$. Dat impliceert dat de linkerlimiet verschilt van de rechterlimiet, net zoals in het prototypische geval $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

Merk op dat hier de limiet voor $x \to -1$ *wel* bestaat, en gelijk is aan $+\infty$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Limieten: berekenen



2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} =$ -2✓

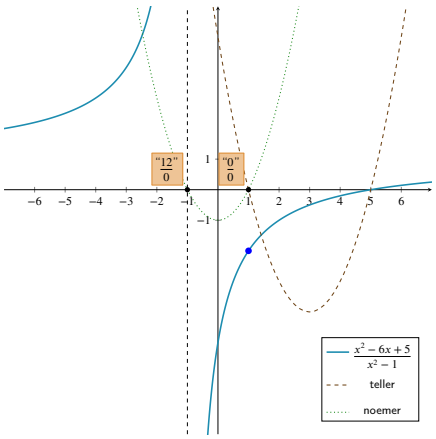
Feedback: Inderdaad, de limiet kan ofwel berekend worden met de regel van de l'Hôpital, ofwel door het gemeenschappelijk nulpunt in teller en noemer te schrappen.

Uitwerking: Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid "$\frac{0}{0}$". De regel van de l'Hôpital geeft hier

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-6x+5}{x^2-1} \overset{\text{H?}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x-6}{2x} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Je kan ook hier teller en noemer ontbinden in factoren en daarna vereenvoudigen:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-6x+5}{(x^2-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-5}{x+1} = \frac{-4}{2} = -2.$$



3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x^2-6x+5)(x-1)^3}{(x^2-1)^3} =$ 0✓

Feedback: Inderdaad, als je alle gemeenschappelijke factoren wegdeelt, krijg je een limiet van de vorm $\frac{0}{a}$, en dergelijke limiet is 0.

Merk op dat deze limiet (veel) ingewikkelder zou zijn indien de teller en noemer volledig uitgewerkt zouden zijn! Dan zou je het algoritme van Horner moeten gebruiken.

4. $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x^2-6x+5)(x-1)}{(x^2-1)^9} =$ Bestaat niet✓

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Limieten: berekenen

Feedback: Inderdaad, als je alle gemeenschappelijke factoren wegdeelt, krijg je een limiet van de vorm $\frac{a}{0}$, en omdat de overblijvende macht van $x-1$ in de noemer *oneven* is, zijn linker- en rechterlimiet verschillend.

CC BY-NC-SA 4.0

Afgeleiden

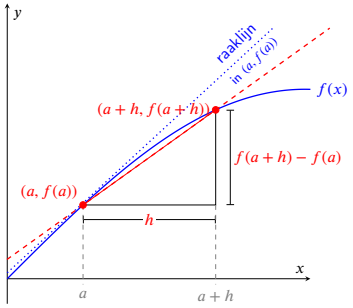
Definitie en grafische betekenis

De **afgeleide** van een reële functie f **in een punt** a van haar domein wordt genoteerd met $f'(a)$ of $Df(a)$ of $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_a$ en is de waarde van de limiet $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, als deze limiet *bestaat* en *eindig* is.

Een functie f is **afleidbaar** of **differentieerbaar** in een gebied als de afgeleide bestaat in dit gebied. De **afgeleide functie** van f wordt genoteerd met f' of Df of $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$: $f' : x \mapsto f'(x)$

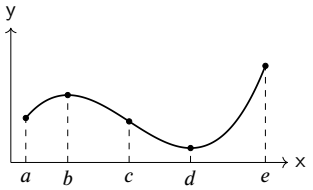
De **afgeleide** in a is de **richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek** in $(a, f(a))$.

De raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ heeft dus als vergelijking $y = f(a) + f'(a)(x-a)$



Functieverloop

x	a		b		c		d		e
$f'(x)$		+	0	−	−	−	0	+	
$f''(x)$		−	−	−	0	+	+	+	
$f(x)$	rel. min.	bol stijgend	rel. max.	bol dalend	buigpunt	hol dalend	abs. min.	hol stijgend	abs. max.



Een **absoluut** minimum/maximum (abs. min./abs. max.): de functiewaarde is minimaal/maximaal over het volledige domein van de functie.
Een **relatief** minimum/maximum (rel. min./ rel. max.): de functiewaarde is minimaal/maximaal in een omgeving rond het punt.
Een **extremum** is een minimum of een maximum.

Afgeleiden van enkele functies

$f(x)$	$f'(x)$
c $(c \in \mathbb{R})$	0
x^q $(q \in \mathbb{Q})$	qx^{q-1}
e^x	e^x
a^x $(a>0,\ a\neq 1)$	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sec x$	$\tan x \ \sec x$
$\csc x$	$-\cot x \ \csc x$
$\arcsin x$ $(\lvert x\rvert<1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$ $(\lvert x\rvert<1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x$ $(\lvert x\rvert>1)$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arccsc} x$ $(\lvert x\rvert>1)$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

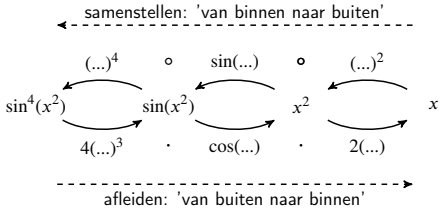
Rekenregels

Voor afleidbare reële functies f en g, en constante $c \in \mathbb{R}$ geldt:

$(cf)'(x) = cf'(x)$	**scalair veelvoud** $(5x)' = 5(x)' = 5$
$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	**somregel** $(x+x^2)' = 1 + 2x$
$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$	**productregel** $\left((5x+2)\cdot x^2\right)' = 5\cdot x^2 + 2x\cdot(5x+2)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	**quotiëntregel** $\left(\frac{x^7+1}{x^2+1}\right)' = \frac{7x^6\cdot(x^2+1) - (x^7+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$
$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$	**kettingregel** $(\sin^4(x^2))' = 4\sin^3(x^2)\ \cos(x^2)\ 2x$
$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	**inverse** $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

voorbeeld kettingregel

$f(x) = \sin^4(x^2)$



$f'(x) = 4\sin^3(x^2)\ \cos(x^2)\ 2x$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie
KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

5.2 Afgeleiden: meetkundige interpretatie

Voorbeeld 5.2.1. (IJkingstoets september 2018)

Als de raaklijn aan de grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = e^x - x$
in een zeker punt $(a, f(a))$ door de oorsprong gaat,
dan is de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn gelijk aan ... .

Geef een *exact* antwoord, eventueel met uitdrukkingen zoals $1 + \sqrt{2}$, π of $e^2 + 2$.

Hint 1. Richtingscoëfficiënten van raaklijnen doen aan afgeleiden denken. Maar aan welke afgeleide precies in dit concrete geval? $f'(a)$.

Feedback: De afgeleide $f'(a)$ is inderdaad de gezochte richtingscoëfficiënt. Het is natuurlijk wel zo dat we a (nog) niet kennen.

De afgeleide $f'(0)$ heeft met de zaak niets te maken (tenzij zou blijken dat $a = 0...$). De formule $f'(x) = e^x - 1$ geeft inderdaad de afgeleide van de functie f, maar om deze opgave op te lossen heb je $f'(a)$ nodig. Allicht zal $f'(x) = e^x - 1$ ook relevant kunnen zijn.

Hint 2. In dit soort oefening is het altijd nuttig om het probleem ook visueel te proberen vatten via een tekening. In dit geval is dat een grafiek van de functie $x \mapsto e^x - x$, die erg eenvoudig te schetsen is.

Hint 3. Van a weten we dat de raaklijn in $(a, f(a))$ (dus in $(a, e^a - a)$) door de oorsprong gaat. Het lijkt dus nuttig de vergelijking van die raaklijn op te schrijven.

Hint 4. De algemene vergelijking van de raaklijn in het punt $(a, f(a))$ aan de grafiek van een functie f is

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

In dit geval wordt dat

$$y - (e^a - a) = (e^a - 1)(x - a) \text{ of } y = (e^a - 1)x + (1 - a)e^a.$$

Wanneer gaat deze raaklijn door de oorsprong?

Hint 5. Een rechte met vergelijking $y = mx + q$ gaat door de oorsprong als de constante term q nul is. In dit geval wordt de voorwaarde $(1 - a)e^a = 0$.

Wat is dus a ?

Hint 6. Een product is enkel nul als één van de factoren nul is, en e^x is nooit nul, dus is $(1-a)e^a$ enkel nul voor $a = 1$.

Wat is dan de gezochte richtingscoëfficiënt?

Hint 7. $f'(a) = f'(1) = e^1 - 1 = e - 1$

Oefening 5.2.1. Gegeven is de parabool met vergelijking

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

en $a \in \mathbb{R}$ zodat de raaklijnen in de twee punten $P_1(a, f(a))$ en $P_2(-a, f(-a))$ van de parabool loodrecht op elkaar staan.

Dan heeft het snijpunt van deze twee raaklijnen de coördinaten $\left(0, \frac{7}{8}\right)$.

Uitwerking:

De raaklijnen hebben richtingscoëfficiënten $f'(a)$ en $f'(-a)$, en die staan loodrecht op elkaar als

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Afgeleiden: meetkundige interpretatie

$$f'(a)f'(-a) = -1$$

Omdat $f'(x) = 4x$ betekent dit:

$$(4a)(-4a) = -1, \text{ of } a = \pm\frac{1}{4}.$$

Omdat de opgave symmetrisch is in a en $-a$, kunnen we aannemen dat $a = \frac{1}{4}$ en $-a = -\frac{1}{4}$. Dan is $f'(a) = 1, f'(-a) = -1$ en $f(a) = f(-a) = f(\frac{1}{4}) = \frac{9}{8}$.

De twee raaklijnen zijn dus

$$\begin{cases} y - \frac{9}{8} = x - \frac{1}{4} \\ y - \frac{9}{8} = -\left(x + \frac{1}{4}\right) = -x - \frac{1}{4} \end{cases}$$

Door de rechterleden aan elkaar gelijk te stellen, vinden we dat $x = 0$. Invullen in één van de vergelijkingen geeft de y-coördinaat voor het snijpunt:

$$y - \frac{9}{8} = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{7}{8}$$

Het snijpunt van de twee rechten is dus het punt $\left(0, \frac{7}{8}\right)$.

Oefening 5.2.2. Een (halve) ellips heeft als algemene vergelijking $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, met a en b de lengtes van de halve assen van de ellips.

Als gegeven is dat de verticale raaklijnen van een bepaalde dergelijke ellips vergelijkingen $x = 5$ en $x = -5$ hebben en dat de rechte $y = 4$ een horizontale raaklijn is, dan is de x-coördinaat van het snijpunt van de raaklijn aan de ellips in $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$ met de x-as gelijk aan $\frac{25}{3}$.

Uitwerking: Uit de vergelijking $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ volgt door invullen onmiddellijk dat de ellips door $(0, b)$ gaat en door $(-a, 0)$ en $(a, 0)$.

Uit gekende eigenschappen (of een tekening) van de ellips volgt onmiddellijk dat in de snijpunten met de assen de raaklijnen $x = \pm a$ en $y = \pm b$ zijn.

Wie twijfelt kan eventueel expliciet de afgeleide berekenen en nagaan waar $f'(x) = 0$ voor de horizontale raaklijn(en) en $f'(x) \to \infty$ voor de verticale raaklijn(en).
Je kan ook argumenteren dat de snijpunten van de ellips met de rechte $y = b$ de oplossingen zijn van de vergelijking $b = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. De enige oplossing is $x = 0$, met multipliciteit twee. En dus is de rechte $y = b$ een horizontale raaklijn.

De vergelijking van de gegeven ellips is dus:

$$y = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$$

Stel nu de raaklijn op in het punt $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$, door eerst de afgeleide te berekenen:

$$f'(x) = \frac{4}{5}\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}$$

en die te evalueren in het punt $x = 3$:

$$f'(3) = -\frac{3}{5}.$$

De vergelijking van de raaklijn door P is dus

$$y - \frac{16}{5} = \frac{-3}{5}(x - 3),$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Afgeleiden: meetkundige interpretatie

en het snijpunt van deze raaklijn met de x-as vind je door $y = 0$ te stellen:

$$-\frac{16}{5} = \frac{-3}{5}(x - 3).$$

Oplossen naar x geeft dan $x = \frac{25}{3}$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Afgeleiden: rekenregels

Voorbeeld 5.3.1. (IJkingstoets september 2018)

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sin^2\left(x^3\right)$.

De afgeleide $f'(x)$ is gelijk aan ... .

Hint 1. De functie $x \mapsto \sin^2\left(x^3\right)$ is in eerste instantie een kwadraat van iets. Dergelijke samengestelde functie leid je af met de kettingregel

Hint 2. Voor een samenstelling van een samenstelling pas je twee keer de kettingregel toe.

Hint 3. Na toepassing van de kettingregel kan je de bekomen uitdrukking nog vereenvoudigen. Je herkent een goniometrische formule die toelaat een product van een sinus en een cosinus te vervangen door één goniometrisch getal.

Uitwerking: De functie $x \mapsto \sin^2\left(x^3\right)$ is het kwadraat van de sinus van de derde macht van de veranderlijke. De kettingregel zegt dat je dergelijke samenstelling van-buiten-naar-binnen afleidt als afgeleide-van-het-kwadraat maal afgeleide-van-de-sinus maal afgeleide-van-de-derdemacht:

$$f'(x) = \underbrace{2\sin(x^3)}_{\text{afg. kwadraat}} \cdot \underbrace{\cos(x^3)}_{\text{afg. sinus}} \cdot \underbrace{(3x^2)}_{\text{afg. } x^3}.$$

In $2\sin(x^3)\cos(x^3)$ herken je nu de formules voor dubbele hoeken $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, en dus wordt

$$f'(x) = 2\sin(x^3)\cdot\cos(x^3)\cdot(3x^2) = 3x^2\sin(2x^3).$$

Oefening 5.3.1.

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \cos^2\left(\dfrac{x}{x^2+3}\right)$.

De afgeleide $f'(x)$ is gelijk aan $\dfrac{x^2-3}{(x^2+3)^2} \cdot \sin\left(\dfrac{2x}{x^2+3}\right)$.

Uitwerking: Pas de kettingregel toe voor een samenstelling van drie functies:

$$f'(x) = -2\cos\left(\frac{x}{x^2+3}\right)\sin\left(\frac{x}{x^2+3}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+3}\right)$$

De eerste termen kan je samennemen via de formule voor de sinus van een dubbele hoek. Voor de laatste term pas je quotiëntregel toe:

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{2x}{x^2+3}\right)\cdot\frac{1\cdot(x^2+3)-x(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2-3}{(x^2+3)^2}\cdot\sin\left(\frac{2x}{x^2+3}\right)$$

Oefening 5.3.2.

Gegeven de functie $f :]-7,0[\cup]0,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \ln^2\left(\dfrac{x^4}{x+7}\right)$

De waarde $f'(1)$ is gelijk aan: $-\dfrac{93}{4}\ln(2)$✓ .

Uitwerking: Pas de kettingregel toe op deze samengestelde functie, die in eerste instantie een kwadraat is:

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Afgeleiden: rekenregels

$$f'(x) = 2\ln\left(\frac{x^4}{x+7}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{x^4}{x+7}\right)\right)$$

De laatste afgeleide kan je eventueel zien als samenstelling van een logaritmische en rationale functie. Het rekenwerk kan hier echter te vereenvoudigd worden door eerst enkele rekenregels voor logaritmen toe te passen:

$$f'(x) = 2\ln\left(\frac{x^4}{x+7}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(4\ln(x) - \ln(x+7)\right) = 2\ln\left(\frac{x^4}{x+7}\right)\left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x+7}\right)$$

Evaluatie van de functie in $x = 1$ geeft:

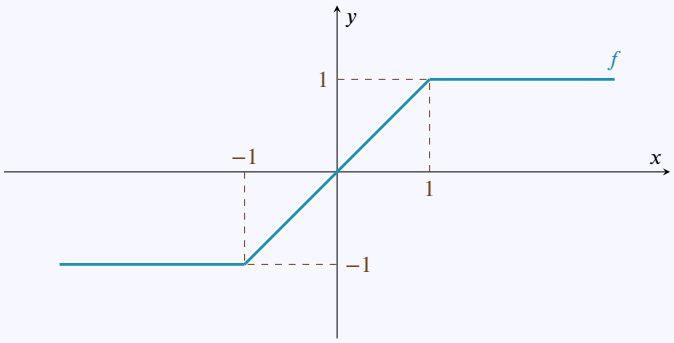
$$f'(1) = 2\ln\left(\frac{1}{8}\right)\left(4 - \frac{1}{8}\right) = (-6\ln 2) \cdot \frac{31}{8} = -\frac{93}{4}\ln(2)$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Afgeleiden: samengestelde functie en grafiek

Voorbeeld 5.4.1. (IJkingstoets 2015)

Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met onderstaande grafiek.



Verder is de volgende functie gegeven:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = f\left(\frac{\cos x}{4}\right)$$

Dan is $g'(\pi/4) =$ .....

Hint 1. Een specifieke moeilijkheid bij deze oefening is dat we geen voorschrift hebben van de functie f. Je kan die moeilijkheid hier omzeilen door op te merken dat de afgeleide een lokale eigenschap is.

Hint 2. Je moet $g'(\pi/4)$ berekenen. Dan volstaat het de functie f te kennen in de buurt van $\cos(\pi/4)/4$.

Hint 3. Omdat de cosinus tussen -1 en 1 ligt, gebruik je f dus nooit op getallen buiten het interval $[-1, 1]$. Het functievoorschrift van f op dat interval is $x \mapsto x$. Wat leert dat over de afgeleide van g in $\pi/4$?

Hint 4. Als je met de vorige hints de afgeleide van g nog steeds niet kan berekenen, ligt dat misschien aan de hints. Hetzelfde kan voorkomen als je zelf een oplossing zoekt: het wordt alsmaar ingewikkelder, en je krijgt er geen vat op. Een optie is dan opnieuw vanaf het begin te beginnen, en te kijken of je een nieuw en beter idee vindt.

De functie g is een samengestelde functie. Hoe bereken je de afgeleide van een samengestelde functie?

Hint 5. Een samengestelde functie leid je af met de kettingregel. Hier wordt dat dus $g'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x)$ met $h(x) = \ldots$

Hint 6. $g'(\pi/4) = f'(\cos(\pi/4)/4) \cdot \frac{1}{4} \cdot (-\sin(\pi/4))/4.$

De afgeleide van f in $\frac{\cos(\pi/4)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ kan je direct aflezen op de gegeven grafiek.

Uitwerking: Met de notatie $h(x) = \frac{\cos x}{4}$ kan je g schrijven als een samengestelde functie $g = f \circ h$.

De afgeleide wordt berekend met de kettingregel, dus $g'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x)$, en we hebben enkel de waarde nodig in $\pi/4$, dus

$$g'(\pi/4) = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right).$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Afgeleiden: samengestelde functie en grafiek

Maar, in de buurt van $\frac{\sqrt{2}}{8}$ heeft de grafiek constante helling 1, en de afgeleide van f is daar dus overal gelijk aan de constante 1. De oplossing is

$$g'(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Als je toch een functievoorschrift van f wil opstellen in de omgeving van $-\frac{\sqrt{2}}{8}$, dan is dat voorschrift $x \mapsto x$. Dus verandert *in de omgeving van* $\frac{\pi}{4}$ de samenstelling met f functie g niet, en is g gegeven door

$$g : x \mapsto \frac{\cos x}{4}$$

en dus volgt ook op deze manier dat

$$g'(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

.

Nog anders uitgelegd: het beeld van de functie $x \mapsto h(x) = \frac{\cos x}{4}$ is het interval $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Enkel op die beeldwaarden moet de functie f worden toegepast, en op dat beeld is f de *identieke* functie $x \mapsto x$, en dus is $g = f \circ h = h$, en dus is ook $g' = h'$.

$$g'(x) = h'(x) = -\frac{\sin(x)}{4}$$

Evaluatie in $\frac{\pi}{4}$ geeft:

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

CC BY-NC-SA 4.0

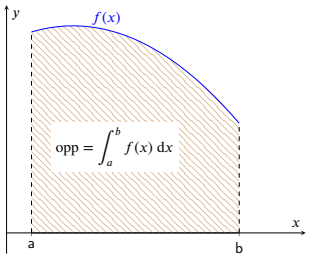
Integralen

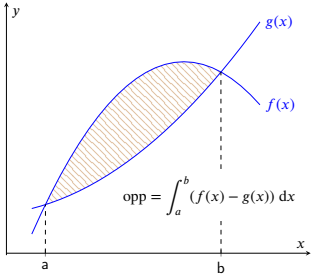
Definities

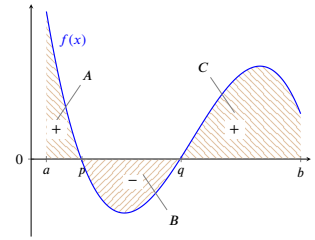
De **onbepaalde integraal** van een functie f is de verzameling van functies F zodat $F' = f$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{met} \quad F'(x) = f(x).$$

De **bepaalde integraal** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ is de oppervlakte onder de grafiek van f tussen a en b.







Oppervlaktes *onder* de x-as worden *negatief geteld* door de bepaalde integraal:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x + \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x + \int_q^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

Eigenschappen van de bepaalde integraal

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \text{(Hoofdstelling van de integraalrekenenig)}$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c \qquad \text{(Gevolg van de Hoofdstelling, } c = -F(a)\text{)}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Omwisselen integratiegrenzen)}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Opsplitsen integratieinterval)}$$

Basisintegralen, som en scalair veelvoud

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c \quad \text{met } c \in \mathbb{R} \qquad \int \mathrm{d}x = x + c$$
$$\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$
$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + c$$
$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int r \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = r \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Substitutiemethode

Voor reële, afleidbare functies f en g waarvoor der samenstelling $f(g(x))$ bestaat, geldt:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{g(x)=u}{=} \int f(u)\,\mathrm{d}u \qquad \textbf{(substitutie } u = g(x)\textbf{)}$$

Of ook: $\int f(u)\mathrm{d}u = \int f(u(x))d(u(x)) = \int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x \quad (\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x \text{ want } \frac{du}{\mathrm{d}x} = u'(x))$

Voorbeeld:

$$\int e^{x^2}\,2x\,\mathrm{d}x \overset{u(x)=x^2}{=} \int e^{u(x)}u'(x)\mathrm{d}x = \int e^u\mathrm{d}u = e^u + c = e^{u(x)} + c = e^{x^2} + c$$

Partiële integratie

Voor reële, afleidbare functies f en g geldt:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{P.I.}{=} f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(partiële integratie)}$$

Of ook: $\int u\,\mathrm{d}v \overset{P.I.}{=} uv - \int v\,\mathrm{d}u \qquad (\text{want } \mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x)$

Voorbeeld:

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\sin x \overset{P.I.}{=} x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

6.2 Integralen: rekenregels

Voorbeeld 6.2.1. (IJkingstoets september 2020)

Bereken de integraal $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \ldots\ldots$

Hint 1. Welke integratietechnieken zijn mogelijk toepasbaar?

Hint 2. Partiële integratie (dus $\int f\,dg = fg - \int g\,df$) is in principe mogelijk met bijvoorbeeld $f(x) = \frac{1}{1+\ln(x)}$. Dan moet $g(x)$ zodanig zijn dat $dg = \frac{1}{x}dx$, en dus $g(x) = \ln(x)$. Dat lijkt op het eerste zicht veelbelovend omdat zowel f als g functies worden met $\ln(x)$. Maar je moet de afgeleide van $f(x)$ berekenen, en die wordt eerder ingewikkeld. De 'partiële integraal' $\int g\,df$ lijkt moeilijker te worden dan de oorspronkelijke $\int f\,dg$.

Dat is een duidelijke aanwijzing om minstens eerst een andere strategie te overwegen.

Hint 3. Ook substitutie (dus $\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$) is mogelijk, bv met $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Hint 4. Met $u'(x) = \frac{1}{x}$ is $u(x) = \ln(x)$. De (onbepaalde) integraal wordt dan

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \int \frac{du}{1+u}.$$

Bereken deze integraal, en bekijk wat nog nodig is om de bepaalde integraal te berekenen.

Hint 5. Omdat $\int \frac{du}{1+u} = \ln(u+1)$, is met $u = \ln(x)$ ook

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \int \frac{du}{1+u} = \ln(1+u) + c = \ln(1+\ln(x)) + c.$$

Hoe bereken je nu $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln(x))}$?

Hint 6. Het volstaat in $\int \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \int \frac{du}{1+u} = \ln(1+u) + c = \ln(1+\ln(x))$ de grenzen in te vullen:

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \ln(1+\ln(x))\Big|_1^e = \ln(1+\ln(e)) - \ln(1+\ln(1))$$
$$= \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln(2) + 0 = \ln(2).$$

Uitwerking: Met substitutie $u = 1+\ln(x)$ en dus $du = \frac{1}{x}\,dx$ kan de onbepaalde integraal worden berekend. Voor de bepaalde integraal zijn er twee opties:

- schrijf de uitkomst van de onbepaalde integraal in de oorspronkelijke veranderlijke (dus x), en vul de oorspronkelijke grenzen in:
  $$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \ln(1+\ln(x))\Big|_1^e = \ln(1+\ln(e)) - \ln(1+\ln(1)) = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln(2) + 0 = \ln(2).$$
- bereken de onbepaalde integraal met de nieuwe veranderlijke $u = \ln x$, en vul de grenzen in in termen van u die horen bij $x = 1$ resp. $x = e$: bij $x = 1$ hoort $u = 1+\ln(1) = 1$, bij $x = e$ hoort $u = 1+\ln(e) = 2$,

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Integralen: rekenregels

en dus

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \int_1^2 \frac{1}{u}\, du = \ln u\Big|_1^2 = \ln 2$$

Extra bedenkingen bij deze opgave:

- je kan als substitutie ook $u_1(x) = \ln(x)$ nemen. Dan is (net zoals hierboven) $du_1 = \frac{dx}{x}$, maar de grenzen worden bij $x = 1$ dan $u_1 = \ln(1) = 0$, en bij $x = e$ wordt het $u_1 = \ln(e) = 1$. Dus

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \int_0^1 \frac{1}{1+u_1}\, du_1 = \ln(1+u)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln(1) = \ln(2)$$

- Merk op dat gelijkheden als

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \int \frac{du}{1+u}$$

erg subtiel zijn. Je kan met recht beweren dat dergelijke gelijkheden betekenisloos zijn, want het linkerlid stelt een (verzameling van) functie(s) in x voor, en het rechterlid een (verzameling van) functie(s) in u, en de precieze betekenis van *gelijkheid* van dergelijke functies (of verzamelingen van functies) is voor discussie vatbaar.

Enkel als je op het gepaste moment, hier *na* het uitrekenen van de onbepaalde integraal, de letter u vervangt door de functie-in-x $u(x)$ stelt ook het rechterlid iets voor 'in x', en heeft de gelijkheid zin. In dit geval:

$$\int \frac{du}{1+u} = \ln(u+1) + c, \text{ met } u \text{ een letter die dienst doet als integratievariabele}$$

en

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln(x))} \overset{?}{=} \int \frac{du}{1+u} = \ln(u+1) + c \overset{?}{=} \ln(u(x)+1) + c = \ln(\ln(x)+1) + c \text{ als functies van } x$$

waarbij dus de $\overset{?}{=}$ eigenlijk gelijkheden zijn die met de nodige voorzichtigheid moeten worden geïnterpreteerd. Strikt genomen hebben de symbolen x en u in de beide leden van $\overset{?}{=}$ telkens een andere betekenis. Deze wat dubieuze notatie wordt desalniettemin frequent gebruikt in de wiskunde.

Voorbeeld 6.2.2. (IJkingstoets september 2015) Bereken volgende bepaalde integraal:

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, \mathrm{d}x = \ldots\ldots$$

Hint 1. Probeer in de term e^{-x} de (vervelende) negatieve exponent te verwijderen.

Hint 2. Als je teller en noemer vermenigvuldigt met e^x dan krijg je:

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, \mathrm{d}x$$

Hint 3. Probeer substitutie te gebruiken om dit verder op te lossen.

Hint 4. Herschrijf e^{2x} als $(e^x)^2$. Vind je nu een gepaste substitutie?

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Integralen: rekenregels

Hint 5. Gebruik de substitutie $t = e^x$. We krijgen dan

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Moet je de grenzen nog aanpassen of niet?

Hint 6. Bij substitutie met aanpassen van de grenzen levert $x = 0$ de grens $u = e^0 = 1$ en $x = \ln\left(\sqrt{3}\right)$ de grens $u = e^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} = \sqrt{3}$. We krijgen dan

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Met welke integratiemethode kan je deze integraal oplossen? Is hij makkelijker dan de opgave?

Hint 7. In deze formule herken je de basisintegraal $\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{bgtan}(t) + c$, zodat

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt = \mathrm{bgtan}\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Integralen: oppervlakte

Voorbeeld 6.3.1. (IJkingstoets augustus 2020) Beschouw het xy-vlak met daarin de kromme K met vergelijking $y = \sqrt{x+9}$ en de rechte met vergelijking $x = p$ met $p > -9$. Bepaal de waarde van p zodat de oppervlakte van het gebied ingesloten door de kromme K, de x-as en de rechte $x = p$ gelijk is aan één achtste van de oppervlakte van het gebied ingesloten door de kromme K, de x-as en de y-as.

Dan ligt p in het interval | $-7{,}25 < p \leq -7$ | $-7 < p \leq -6{,}75$ | $-6{,}75 < p \leq -6{,}5$ | $-6{,}5 < p \leq -6{,}25$ |.

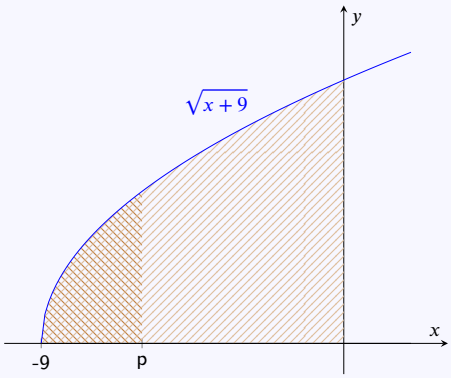
Hint 1. Maak een tekening.

Hint 2. De tekening en een oplossingsmethode worden besproken op deze link:

Hint 3. Een oppervlakte leidt tot een bepaalde integraal, en een gelijkheid van oppervlakten leidt dus tot een gelijkheid van bepaalde integralen. In dit geval kan je beide bepaalde integralen oplossen met substitutie.

Uitwerking:

De grafiek van $x \mapsto \sqrt{x+9}$ is de verschuiving van de grafiek van $x \mapsto \sqrt{x}$ waarbij het nulpunt nu in $x = -9$ komt te liggen. We zoeken het punt p zodat de oppervlakte onder de grafiek tussen -9 en p één achtste is van de oppervlakte tussen -9 en 0.



Die oppervlakten worden berekend met integralen, en we zoeken dus p zodat

$$\int_{-9}^{p} \sqrt{x+9}\, dx = \frac{1}{8}\left(\int_{-9}^{0} \sqrt{x+9}\, dx\right)$$

Je kan de integralen oplossen met de substitutie $u = x + 9$:

$$\int_{0}^{p+9} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{8}\left(\int_{0}^{9} \sqrt{u}\, du\right)$$

dus

$$\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^{p+9} = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^{9}$$

of ook

$$\frac{2}{3}(p+9)^{3/2} = \frac{1}{8}\frac{2}{3}9^{3/2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Integralen: oppervlakte

Verder uitwerken geeft

$$(p+9)^{3/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

of dus

$$p+9 = \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

en dus is $p = \frac{9}{4} - 9 = -\frac{27}{4} = -6\,,75$

Het correcte antwoord is $-7 < p \leq -6\,,75$.

CC BY-NC-SA 4.0

Matrices

Definitie

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

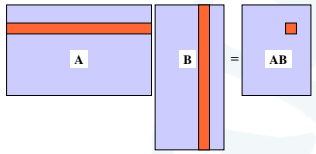
- De **matrixelementen** (of *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{11}, \ldots a_{ij}, \ldots, a_{mn}$.
- Men noteert ook $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij.

Vermenigvuldiging van matrices

Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ met element c_{ij} op de i-de rij en de j-de kolom gelijk aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Het product $\mathbf{AB}$ bestaat enkel als het aantal kolommen van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal rijen van $\mathbf{B}$.



De volgorde van de matrices mag in het algemeen niet omgewisseld worden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot -1+2\cdot 1 \\ -2\cdot 1+0\cdot 3 & -2\cdot -1+0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+-1\cdot -2 & 1\cdot 2+-1\cdot 0 \\ 3\cdot 1+1\cdot -2 & 3\cdot 2+1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

In het algemeen geldt dus dat $\mathbf{AB}$ *niet gelijk is* aan $\mathbf{BA}$.

Inverse van een vierkante matrix

Twee vierkante matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn elkaars **inverse** als:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

Als voor een gegeven $\mathbf{A}$ dergelijke $\mathbf{B}$ bestaat dan is die uniek, en we noteren die als $\mathbf{A}^{-1}$.
Er geldt dus

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Merk op: niet elke matrix heeft een inverse. Er geldt $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Transponeren van matrices

De **getransponeerde matrix** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ is de $n \times m$ matrix $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$.
De *rijen* van de getransponeerde $\mathbf{A}^T$ zijn de *kolommen* van $\mathbf{A}$. Er geldt $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Voorbeeld:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Determinant van een vierkante matrix

De **determinant** van een *vierkante* 2×2 matrix is *een getal* dat belangrijke eigenschappen van die matrix weergeeft, in de eerste plaats of de matrix al dan niet *inverteerbaar* is

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\text{notatie}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} ad - bc \in \mathbb{R}.$$

De determinant van een 3×3 matrix is het getal

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

De coëfficiënten komen telkens uit de eerste rij en de bijhorende 2×2 determinanten worden bekomen door de rij en de kolom van de betreffende coëfficiënt te schrappen.

Voor een vierkante $n \times n$ matrix geldt dat $\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A}$ inverteerbaar

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26:0)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

7.2 Matrices: rekenregels

Voorbeeld 7.2.1. (IJkingstoets juli 2022) Gegeven de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, dan is $A^5 =$ .....

Hint 1. A^5 uitrekenen lijkt op het eerste zicht veel werk. Tenzij je snel een alternatief zou vinden, begin je er best toch aan.

Hint 2.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Er geldt dus $A^2 = I$. Wat is dus A^5, zonder verder rekenwerk?

Hint 3. Omdat $A^5 = A^2 \cdot A^2 \cdot A = I \cdot I \cdot A = A$, staat hier al het antwoord.

Uitwerking: Omdat $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ is $A^5 = A^2 \cdot A^2 \cdot A = I \cdot I \cdot A = A$.

Oefening 7.2.1.

Gegeven de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ k & 0 \end{bmatrix}$. Voor welke waarde(n) van $k \in \mathbb{R}$ geldt dat $A^2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$.

Meerkeuze:

(a) De gelijkheid geldt enkel voor $k = -2$.

(b) De gelijkheid geldt enkel voor $k = -3$.

(c) Er zijn verschillende waarden van k waarvoor de gelijkheid geldt.

(d) Er is geen enkele waarde van k waarvoor de gelijkheid geldt. ✓

Uitwerking:

Bereken eerst A^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1+2k & 2 \\ k & 2k \end{bmatrix}$$

en dus moeten de verschillende matrixelementen gelijk zijn, en dus moet tegelijk $k = -2$ en $k = -3$, en dat kan niet.

Conclusie: er bestaan geen dergelijke getallen k.

Alternatieve redenering: Als $A^2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ dan moet ook

$$(\det(A))^2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$$

en dus $4k^2 = 18$, of dus $k = \pm\sqrt{\frac{18}{4}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Maar ook voor $k = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ kan de gelijkheid niet gelden, want omdat k maar één keer voorkomt in A kunnen in A^2 nooit machten van k staan, en dus kan de vierkantswortel niet verdwijnen. (en de determinant moet afhangen van k, want voor $k = 0$ is de determinant nul).

Je kan natuurlijk ook A^2 berekenen en vaststellen dat voor $k = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ de gelijkheid niet geldt.

Conclusie: geen enkele k voldoet.

CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Matrices: rekenregels

Oefening 7.2.2.

Gegeven de matrix $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, dan is $A^7 + A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Uitwerking: Bereken eerst A^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Merk op dat A^2 op tekens na gelijk is aan A. Dat lijkt niet onmiddellijk nuttig, dus bereken je A^3:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Omdat $A^3 = I$ moet je de hogere machten en inverse nu niet meer uitrekenen:

$$A^7 + A^{-1} = (A \cdot A^3 \cdot A^3) + (A^{-1} \cdot I) = (A \cdot I \cdot I) + (A^{-1} \cdot A^3) = A + A^2$$

en dus

$$A^7 + A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Stelsels: aantal oplossingen

Voorbeeld 7.3.1. (IJkingstoets juli 2017) Gegeven is volgend stelsel van lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 10 \\ 6x + 4y - 9z = 45 \\ 7x - 3y + z = -5 \end{cases}$$

Hoeveel oplossingen (x, y, z) zijn er waarvoor geldt dat het product xyz gelijk is aan 0?

Antwoord: .....

Hint 1. Het oplossen van een stelsel kan je doen via rijherleiden van de bijhorende matrix.

Hint 2. De uitgebreide matrix van het stelsel is $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 10 \\ 6 & 4 & -9 & 45 \\ 7 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right)$

Hint 3. Door veelvouden van bepaalde rijen bij elkaar op te tellen zorg je voor zoveel mogelijk nullen, zodat de oplossing van het overeenkomstige stelsel gewoon af te lezen is.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 10 \\ 6 & 4 & -9 & 45 \\ 7 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 6R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 3 & -15 \\ 0 & -10 & 15 & -75 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[R_1 \to 2R_1 + R_2]{R_3 \to R_3 - 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hint 4. Schrijf het gereduceerde stelsel nu terug in termen van vergelijkingen.

Hint 5. Het gegeven stelsel is equivalent met $\begin{cases} 2x - z = 5 \\ 2y - 3z = 15 \end{cases}$

Nu is $xyz = 0$ als minstens één (eventueel meer) van deze drie termen nul is.
Bekijk één voor één de drie gevallen.

Uitwerking: Herleid de uitgebreide matrix van het stelsel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 10 \\ 6 & 4 & -9 & 45 \\ 7 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 6R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 3 & -15 \\ 0 & -10 & 15 & -75 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to 2R_1 + R_2]{R_3 \to R_3 - 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Je krijgt dan het erg eenvoudig stelsel $\begin{cases} 2x - z = 5 \\ 2y - 3z = 15 \end{cases}$

Nu is $xyz = 0$ als minstens één (eventueel meer) van deze drie termen nul is. Beschouw de drie gevallen

- $x = 0$, dan is $z = -5$ en $y = 0$
- $y = 0$, dan is $z = -5$ en $x = 0$
- $z = 0$, dan is $x = 5/2$ en $y = 15/2$

Er zijn dus twee oplossingen die voldoen: $\begin{cases} x = y = 0, z = -5 \\ x = 5/2, y = 15/2, z = 0 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Stelsels: aantal oplossingen (met parameter)

Voorbeeld 7.4.1. (IJkingstoets 2021) Beschouw volgend stelsel in de reële onbekenden x, y, z:

$$\begin{cases} x+y+2z &= a \\ x-y+z &= 1 \\ 2x+3z &= a+1 \\ 2y+z &= -2 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen wanneer de parameter $a =$ ... .

Hint 1. Dit is een stelsel van 4 vergelijkingen met 3 onbekenden, en dergelijk stelsel heeft meestal geen oplossingen. Je kan dus verwachten dat er eerder geen of erg weinig waarden van a zijn waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.

Hint 2. Een stelsel met drie onbekenden heeft enkel oneindig veel oplossingen als er 'eigenlijk' maar ten hoogste twee vergelijkingen zijn. Je zoekt dus parameterwaarden a waarvoor sommige vergelijkingen lineaire combinatie zijn van andere.

Vind je hier een vergelijking die een combinatie is van de andere?

Hint 3. De derde vergelijking is de som van de eerste en de tweede, en kan dus worden geschrapt uit het stelsel (want elke oplossing van vergelijkingen één en twee is automatisch ook een oplossing van vergelijking drie).

Die som is in dit geval duidelijker zichtbaar als je de veranderlijken correct onder elkaar schrijft:

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x - y + z = 1 \\ 2x + 3z = a+1 \\ 2y + z = -2 \end{cases}$$

Hint 4. Wanneer zijn er eigenlijk maar twee vergelijkingen? Het *verschil* van de eerste twee vergelijkingen lijkt erg op de vierde vergelijking...

Hint 5. Elke oplossing van vergelijkingen één en twee voldoet automatisch ook aan het verschil van beide vergelijkingen, dus aan de vergelijking

$$2y + z = a - 1$$

Als dergelijke oplossingen ook voldoen aan de vierde vergelijking, moet dus gelden dat $2y+z = -2$. Dat kan alleen als $a = -1$ Dus als $a \neq -1$ heeft het stelsel geen oplossingen. Is daarmee de oefening opgelost?

Hint 6. Als $a = -1$ is de vierde vergelijking het verschil van de eerste twee. De derde vergelijking is altijd de som van de eerste twee. Dus, voor $a = -1$ zijn er maar twee onafhankelijke vergelijkingen in drie onbekenden, en zijn er dus oneindig veel oplossingen.

Uitwerking: Er zijn verschillende manieren om dit probleem aan te pakken:

Methode 1: vergelijkingen schrappen Je mag vergelijkingen in een stelsel schrappen wanneer ze een lineaire combinatie zijn van andere vergelijkingen in het stelsel.

De derde vergelijking kunnen we meteen elimineren. Het is immers de som van de eerste twee vergelijkingen:

$$\begin{array}{rrcl} & x+y+2z & = & a \\ + & x-y+z & = & 1 \\ \hline & 2x+3z & = & a+1 \end{array}$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Stelsels: aantal oplossingen (met parameter)

We willen ook de vierde vergelijking elimineren. Je merkt alvast dat het linkerlid het verschil is van de linkerleden van de eerste twee vergelijkingen:

$$\begin{array}{rrcl} & x+y+2z & = & a \\ - & x-y+z & = & 1 \\ \hline & 2y+z & = & a-1 \end{array}$$

Om de vierde vergelijking te schrappen moet het rechterlid gelijk zijn aan het verschil van de rechterleden van de eerste twee vergelijkingen: $a-1=-2$. Dat is het geval wanneer $a=-1$. Onder deze voorwaarde zijn er dus oneindig veel oplossingen voor het stelsel.

Methode 2: m.b.v. matrix

Deze methode komt in essentie overeen met de eerste methode, al schrijven we nu alles in matrixvorm. Voor de eenvoud is de volgorde van de vergelijkingen in de matrix wat veranderd: eerst staat de tweede, dan de vierde, vervolgens de eerste en dan de derde vergelijking. Dit wordt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & 3 & a+1 \end{array}\right)$$

Nu kunnen we rijoperaties toepassen zodat onder de eerste 1 enkel nullen voorkomen. Dit betekent dat we de eerste rij aftrekken van de derde rij en het dubbele van de eerste rij aftrekken van de vierde rij. Symbolisch wordt dit $R_3 \to R_3 - R_1$ en $R_4 \to R_4 - 2\cdot R_1$. Het resultaat is

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & a-1 \\ 0 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right)$$

Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen wanneer er drie gelijke rijen zijn. Dit is het geval wanneer $a-1=-2$ of $a=-1$.

Methode 3: m.b.v. substitutie

We kunnen het stelsel ook vereenvoudigen met behulp van substitutie. Daarvoor herschrijven we eerste de tweede vergelijking, zodat we ze eenvoudig kunnen substitueren in de derde en eerste vergelijking. Zo vinden we

$$\begin{cases} (1+y-z)+y+2z=a \\ x=1+y-z \\ 2\cdot(1+y-z)+3z=a+1 \\ 2y+z=-2 \end{cases} \tag{1}$$

Na uitwerken van de haakjes en omvormen wordt dit

$$\begin{cases} 2y+z=a-1 \\ x=1+y-z \\ 2y+z=a-1 \\ 2y+z=-2 \end{cases} \tag{2}$$

Er zijn drie vergelijkingen waarvan het linkerlid gelijk is. De enige manier waarop dit stelsel niet strijdig zou zijn, is de voorwaarde dat $a-1=-2$. Dit betekent dat wanneer $a=-1$, er oneindig veel oplossingen zijn.

Extra: meetkundige interpretatie

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Stelsels: aantal oplossingen (met parameter)

Elke vergelijking in het stelsel stelt een vlak voor in de driedimensionale ruimte. Er zijn vier mogelijkheden voor de onderlinge ligging van vier vlakken in $\mathbb{R}^3$:

- de vlakken hebben geen enkel punt gemeenschappelijk: de oplossingsverzameling is leeg ;
- de vlakken hebben één punt gemeenschappelijk: er is één oplossing;
- de vlakken hebben een gemeenschappelijke snijlijn: er zijn oneindig veel oplossingen;
- de vlakken vallen samen: er zijn oneindig veel oplossingen.

In deze opgave zijn de vier vergelijkingen verschillend en geen veelvoud van elkaar en dus de vlakken vallen zeker niet samen. We moeten bijgevolg kijken voor welke $a \in \mathbb{R}$ de vlakken een gemeenschappelijke snijlijn hebben. In dat geval kunnen we het stelsel reduceren tot twee vergelijkingen, die samen de vergelijking van de snijlijn vormen.

Oefening 7.4.1. (Varianten)

1. Beschouw volgend stelsel in de reële onbekenden x, y, z:

$$\begin{cases} x+y+2z &= a \\ x-y+z &= 1 \\ 2x+3z &= a+2 \\ 2y+z &= -2 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft nooit oneindig veel oplossingen✓.

2. Beschouw volgend stelsel in de reële onbekenden x, y, z:

$$\begin{cases} x+y+2z &= a^2 \\ x-y+z &= 1 \\ 2x+3z &= a^2+1 \\ 2y+z &= -2 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft nooit oneindig veel oplossingen✓.

Uitwerking: Dit stelsel kan in matrixvorm geschreven worden als $A\,[x,y,z]^T = b$, met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} a^2 \\ 1 \\ a^2+1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Je kan nagaan dat $\text{rang}(A) = 2$. Er zijn oneindig veel oplossingen als

$$\text{rang}[A \mid b] \;=\; \text{rang}(A) = 2.$$

Dan bevat de oplossingsruimte minstens één vrije parameter, wegens twee voorwaarden op drie onbekenden.

Er geldt bijvoorbeeld volgende lineaire relatie tussen de homogene vergelijkingen (dus zonder rechterlid):

$$-(\text{verg}_1) + (\text{verg}_2) + (\text{verg}_4) = 0$$

Opdat er oplossingen zouden kunnen zijn van het stelsel *met* rechterlid, moet dezelfde relatie daar gelden:

$$-a^2 + 1 + (-2) \;=\; -a^2 - 1 \;=\; 0,$$

wat de voorwaarde oplevert

$$a^2 = -1.$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Stelsels: aantal oplossingen (met parameter)

Daaruit volgt dat het stelsel enkel oplossingen kan hebben als $a^2 = -1$.
Over de reële getallen is dit onmogelijk.

Merk op dat over de complexe getallen wel oneindig veel oplossingen kunnen voorkomen, namelijk als $a = \pm i$.
Dan heeft de oplossingsverzameling één parameter:

$$(x, y, z) = \left(-\tfrac{3}{2}t,\ -\tfrac{1}{2}t - 1,\ t\right), \quad t \in \mathbb{C}.$$

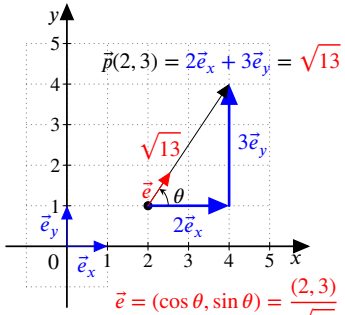
CC BY-NC-SA 4.0

Vectoren in de 2D ruimte

Definities

cartesiaans (of orthonormaal) assenstelsel:
x- en y-as loodrecht op mekaar
en gelijke eenheden op de assen.

Een **eenheidsvector** $\vec{e}$ is een vector met lengte 1
eenheidsvector $\parallel x$: $\vec{e}_x$
eenheidsvector $\parallel y$: $\vec{e}_y$



Een 2D-vector kan gekarakteriseerd worden door
- OFWEL **cartesiaanse coördinaten**: $\vec{p} = p_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y = (p_x, p_y)$ met $p_x, p_y \in \mathbb{R}$
- OFWEL **scalaire waarde** ($p \in \mathbb{R}$) en **richting en zin** (eenheidsvector $\vec{e}$): $\vec{p} = p\,\vec{e}$

Een **eenheidsvector** $\vec{e}$ kan bepaald worden op verschillende manieren:
→ via hoek θ die $\vec{e}$ maakt met één van de coördinaatasssen (positieve of negatieve x- of y-as):
als θ hoek met x-as: $\vec{e} = (\pm\cos\theta, \pm\sin\theta)$
als θ hoek met y-as: $\vec{e} = (\pm\sin\theta, \pm\cos\theta)$
De tekens hangen af van de gekozen as en de oriëntatie van de hoek, maak een figuur!

applet: https://www.ijkingstoets.be/ir-ww-applet

→ via een vector $\vec{p}$ met dezelfde richting en zin, $\vec{e} \parallel \vec{p}$: $\vec{e} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$

Het delen van een vector door zijn norm, noemen we het **normeren** van een vector.

→ via de richtingscoëfficiënt m van een rechte met de juiste richting: $\vec{e} = \pm\frac{(1,m)}{\|(1,m)\|}$.

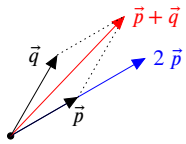
Bewerkingen

norm: $\|\vec{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$

product van vector $\vec{p}$ met scalar $k \in \mathbb{R}$: $k\vec{p} = (k\,p_x, k\,p_y)$

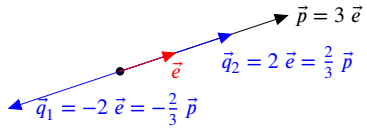
vectorsom: $\vec{p} + \vec{q} = (p_x + q_x, p_y + q_y)$

scalair product: $\vec{p} \cdot \vec{q} = p_x q_x + p_y q_y = \|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\|\,\cos\theta$
(met θ de ingesloten hoek tussen $\vec{p}$ en $\vec{q}$)



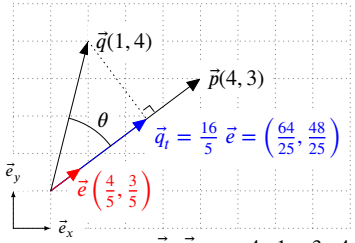
Evenwijdigheid, hoek, loodrechte projectie, loodrechte stand

vector $\vec{q}$ met norm $\|\vec{q}\|$, **evenwijdig** met vector $\vec{p}$:
$\vec{q} = q\,\vec{e}$, met $|q| = \|\vec{q}\|$ en $\vec{e} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$
als $q > 0$: $\vec{q}$ en $\vec{e}$ hebben dezelfde zin
als $q < 0$: $\vec{q}$ en $\vec{e}$ hebben tegengestelde zin



hoek θ tussen de vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$:
$\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\|}$

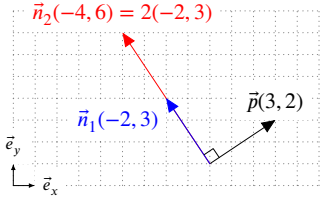
loodrechte projectie van $\vec{q}$ op de as bepaald door de eenheidsvector $\vec{e} \parallel \vec{p}$: $\vec{q}_t = q_t\,\vec{e}$
met $q_t = \vec{q}\cdot\vec{e}$



$\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\|} = \frac{4\cdot 1 + 3\cdot 4}{5\cdot\sqrt{17}}$

$q_t = \vec{q}\cdot\vec{e} = 1\cdot\frac{4}{5} + 4\cdot\frac{3}{5} = \frac{16}{5}$

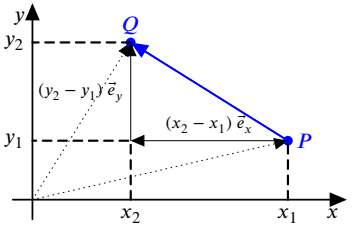
loodrechte stand: $\vec{p} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{n} = 0$
normaalvector (loodvector) op $\vec{p} = (p_x, p_y)$:
$\vec{n} = k(-p_y, p_x)$, $k \in \mathbb{R}$
$\vec{n} \perp \vec{p}$ want $\vec{n}\cdot\vec{p} = -kp_yp_x + kp_xp_y = 0$.
Slagzin: Wissel de twee coördinaten van $\vec{p}$, verander één coördinaat van teken, en schaal eventueel met een factor k.



Punten in het vlak

Een **punt** in het vlak kan beschreven worden als een vector van de oorsprong van het assenstelsel naar het punt: $P = \overrightarrow{OP}$.

De vector van $P(x_1, y_1)$ naar $Q(x_2, y_2)$ kan geschreven worden als $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = Q - P$
en heeft coördinaten $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



De **afstand** tussen het punt $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ kan bijgevolg berekend worden als
$d(P,Q) = |PQ| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q - P\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

8.2 Overzicht meetkunde (rechten)

Vergelijkingen van rechten in het vlak (cartesiaans assenstelsel Oxy)

Vormen

Een rechte door het punt $P(x_1, y_1)$ kunnen we beschrijven op verschillende manieren.
Een **cartesiaanse vergelijking** van een rechte is *een nodige en voldoende voorwaarde* opdat punten (x, y) op de rechte zouden liggen.

(A) $y = y_1 + m(x - x_1)$

expliciete vergelijking: y als functie van x
Het getal m is de **richtingscoëfficiënt** (rico) van de rechte.
Door $P = (0, q)$ te kiezen wordt de vergelijking $y = q + mx$.

vb: $y = 1 + 2x$ heeft rico 2.

(B) $n_x(x - x_1) + n_y(y - y_1) = 0$

impliciete vergelijking: verband tussen x en y
De vector $\vec{n}(n_x, n_y)$ is een **normaalvector** op de rechte.
De vergelijking kan ook geschreven worden als
$n_x\, x + n_y\, y + c = 0$ met c een constante.

vb: $2x - y + 1 = 0 \perp \vec{n} = (2, -1)$

Een **parametervergelijking** *genereert* alle punten van de rechte met behulp van een parameter:

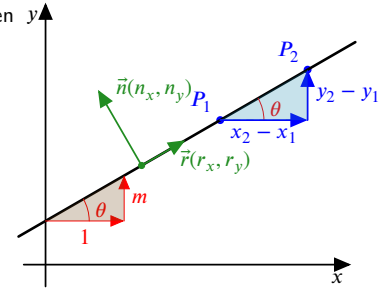
(C) $\begin{cases} x = x_1 + r_x\, t \\ y = y_1 + r_y\, t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

parametervergelijking: elke waarde voor de parameter t genereert een punt van de rechte
$\vec{r}(r_x, r_y)$ is een **richtingsvector** van de rechte.

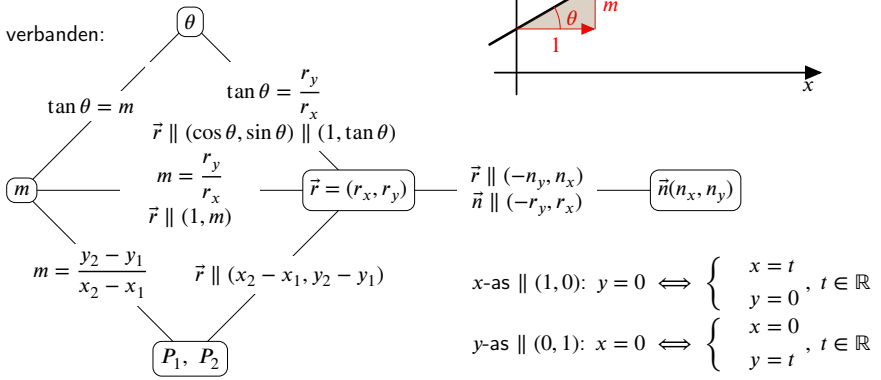
vb: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \| \ \vec{r} = (1, 2)$

Richting

De **richting** van een rechte kan gespecifieerd worden op verschillende manieren:
- met de **hoek** θ die de rechte maakt met de x-as
- met de **rico** m van de rechte
- met een **richtingsvector** $\vec{r}(r_x, r_y)$ van de rechte
- met een **normaalvector** $\vec{n}(n_x, n_y)$ op de rechte
- met **twee punten** $P_1(x_1, y_1)$ en $P_2(x_2, y_2)$



verbanden:



x-as $\| (1, 0)$: $y = 0 \iff \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

y-as $\| (0, 1)$: $x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Onderlinge ligging van rechten

De **snijpunten** van twee rechten zijn de oplossingen van een stelsel gevormd door de vergelijkingen van beide rechten. De vergelijkingen mogen gemengd worden wat betreft vorm.

Snijdend	één snijpunt	verschillende richting
Evenwijdig en niet samenvallend	geen snijpunten	gelijke richting
Samenvallend	elk punt is snijpunt	gelijke richting

Rechten staan **loodrecht op elkaar** als

hun richtingsvectoren loodrecht op elkaar staan.	$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$
het product van hun rico's gelijk is aan -1.	$m_1 \cdot m_2 = -1$ (volgt uit $(1, m_1) \cdot (1, m_2) = 0$)
hun normaalvectoren loodrecht op elkaar staan.	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
een normaalvector van de ene rechte evenwijdig is met een richtingsvector van de andere rechte.	$\vec{n}_1 = k\vec{r}_2 = 0, \ k \in \mathbb{R}$

Rechten zijn **evenwijdig** als

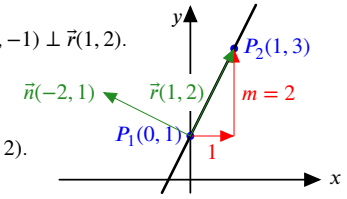
hun richtingsvectoren evenwijdig zijn.	$\vec{r}_1 = k\vec{r}_2, \ k \in \mathbb{R}$
hun rico's gelijk zijn.	$m_1 = m_2$
hun normaalvectoren evenwijdig zijn.	$\vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \ , \ k \in \mathbb{R}$
een normaalvector van de ene rechte loodrecht staat op een richtingsvector van de andere rechte.	$\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$

Omzetten van parametervergelijkingen en cartesiaanse vergelijkingen

Meetkundig:
Maak gebruik van de verbanden tussen de rico m, de richtingsvector $\vec{r}$ en de normaalvector $\vec{n}$.

vb: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$ gaat door het punt $(1, 3)$ en heeft richtingsvector $\vec{r}(1, 2) \perp \vec{n}(-2, 1)$.
$\iff -2\,(x - 1) + 1\,(y - 3) = 0 \iff -2x + y - 1 = 0$

vb: $2x - y + 1 = 0$ gaat door het punt $(0, 1)$ en heeft normaalvector $\vec{n}(2, -1) \perp \vec{r}(1, 2)$.
$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$



vb: $y = 2x + 1$ gaat door het punt $(0, 1)$ en heeft richtingsvector $\vec{r}(1, 2)$.
$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Algebraïsch:
- Een parameter $x = t$ invoeren (of $y = t$) schrijft een cartesiaanse vergelijking in parametervorm:

$$y = 3 + 2x \iff \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \overset{\text{of}}{\iff} \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

- De parameter t elimineren maakt van een parametervergelijking een cartesiaanse vergelijking:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \overset{t = x - 1}{\iff} y = 3 + 2(x - 1) \iff 2x - y + 1 = 0$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/10/26.0)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

8.3 Meetkunde: scalair product

Voorbeeld 8.3.1. (IJkingstoets augustus 2020)

Beschouw het vlak met cartesiaans assenstelsel xy met de x-as horizontaal naar rechts en de y-as verticaal naar boven. Bij conventie worden hoeken gemeten vanaf de positieve x-as en hoeken in tegenwijzerzin zijn positief.

De vector $\vec{a}$ met lengte 2 maakt een hoek van $60°$ met de positieve x-as.

De vector $\vec{b}$ heeft coördinaten $\left(\sqrt{3}, -5\right)$.

Dan is het inproduct (ook scalair product genoemd) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \ldots\ldots$

Hint 1. Er zijn twee formules om een scalair product van twee vectoren te berekenen. Welke formules zijn dat? Welke van beide zou je in deze oefening gebruiken, en waarom ?

Hint 2. Er geldt dat $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = ||\vec{x}_1|| \cdot ||\vec{x}_2|| \cdot \cos\theta$, met θ de hoek tussen $\vec{x}_1 = (a_1, b_1)$ en $\vec{x}_2 = (a_2, b_2)$.

De formule $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = a_1a_2 + b_1b_2$ gebruikt cartesiaanse coördinaten, terwijl

de formule $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = ||\vec{x}_1|| \cdot ||\vec{x}_2|| \cos\theta$ poolcoördinaten gebruikt (inderdaad, want $r = ||\vec{x}||$ is de lengte van $\vec{x}$).

Het optellen van vectoren is echter het makkelijkst in cartesiaanse coördinaten, en dus kies je er best voor om de poolcoördinaten van $\vec{a}$ om te rekenen naar cartesiaanse coördinaten.

Hint 3. Lees op een goniometrische cirkel de transformatieformules van poolcoördinaten naar cartesiaanse coördinaten af.

Hint 4. Met de transformatieformules $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ vind je voor $\vec{a}$ de cartesiaanse coördinaten $\vec{a} = (2\cos(60°), 2\sin(60°)) = (1, \sqrt{3})$.

Hint 5. Bereken nu de som $\vec{a} + \vec{b}$ en vervolgens het scalair product met $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, en vind dat $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$ $\boxed{4 - 4\sqrt{3}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3\sqrt{3}}$ $\boxed{4 + 4\sqrt{3}}$.

Uitwerking:

Uit de transformatieformules voor poolcoordinaten $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ volgt dat de vector $\vec{a}$ met lengte 2 en hoek van $60°$ te schrijven is als

$$\vec{a} = (2\cos(60°), 2\sin(60°)) = (1, \sqrt{3})$$

De coördinaten van de som $\vec{a} + \vec{b}$ zijn de som van coördinaten $\vec{a}$ en $\vec{b}$, dus

$$\vec{a} + \vec{b} = (1 + \sqrt{3}, \sqrt{3} - 5).$$

Uit de formule $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = a_1a_2 + b_1b_2$ voor het scalair product volgt dan

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3}(\sqrt{3} - 5) = 4 - 4\sqrt{3}$$

Extra bedenkingen bij deze opgave:

- Deze oefening wordt ook besproken in deze link: .

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Meetkunde: scalair product

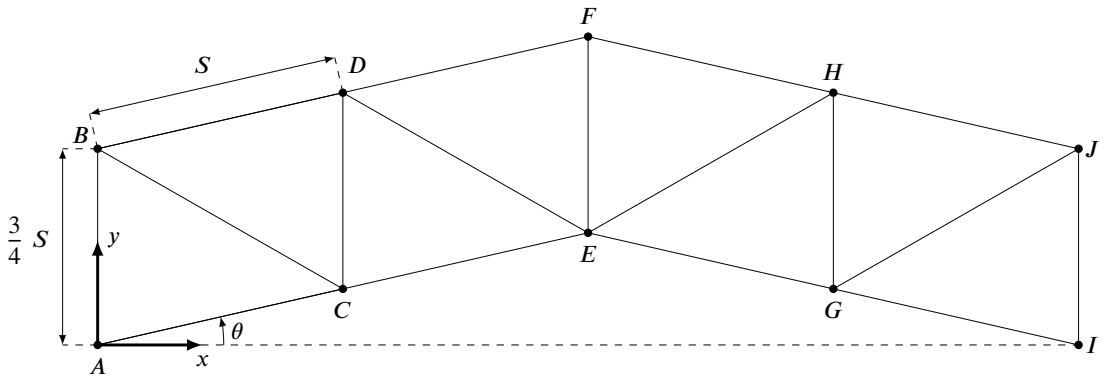
- Je zou ook de rekenregels van het scalair product kunnen gebruiken om het optellen van de twee vectoren te vermijden:

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||^2+\vec{a}\cdot\vec{b} = 4+\left(1\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot(-5)\right) = 4-4\sqrt{3}$$

  Het scalair product $\vec{a}\cdot\vec{b}$ zou je dan eventueel kunnen berekenen in poolcoördinaten, want de hoek θ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is het verschil tussen de hoeken van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met de positieve x-as.
- Hoewel het hier niet echt nodig is, kan je bij dit soort oefeningen altijd een schets te maken. Omdat $\vec{x}\cdot\vec{y} = ||\vec{x}||\cdot||\vec{y}||\cdot\cos\alpha$ en $||\vec{x}||\cos\alpha$ de grootte is van de projectie van $\vec{x}$ op de drager van $\vec{y}$, bepaalt $\vec{x}\cdot\vec{y}$ de grootte van de loodrechte projectie van $\vec{x}$ op $\vec{y}$ en ook de grootte van de projectie van $\vec{y}$ op $\vec{x}$.

Oefening 8.3.1. (IJkingstoets 2015)

Een reling van een brug over een rivier is ontworpen als een vakwerkconstructie zoals getoond in onderstaande figuur. De constructie bestaat uit 17 staven die onderling verbonden zijn. De verticale staven AB, CD, EF, GH en IJ hebben een lengte van $3/4S$. Staven AC, BD, CE en DF hebben een lengte S en maken een hoek θ met de horizontale. De gehele constructie is symmetrisch ten opzichte van de staaf FE.



Dan is de afstand tussen de punten B en E gelijk aan $S\sqrt{\frac{73}{16}-3\sin\theta}$✓

Uitwerking: Een afstand kan worden berekend met de afstandsformule in cartesiaanse coördinaten $d(A,B) = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$ die volgt uit de stelling van Pythagoras. De tekening suggereert al een cartesiaans assenstelsel met de oorsprong in A. Van punt E kunnen makkelijk de poolcoördinaten worden bepaald, want de hoek θ en de afstand tot de oorsprong zijn gegeven.
De cartesiaanse coördinaten van E zijn dus $(2S\cos\theta, 2S\sin\theta)$.

De coördinaten van B zijn $\left(0,\frac{3}{4}S\right)$. Dus is de afstand tussen B en E gelijk aan

$$d(B,E) = \sqrt{(0-2S\cos\theta)^2+\left(\frac{3}{4}S-2S\sin\theta\right)^2} = \sqrt{4S^2\cos^2\theta+\frac{9}{16}S^2-3S^2\sin\theta+4S^2\sin^2\theta}$$

Via de hoofdformule van de goniometrie $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$ wordt dit:

$$d(B,E) = \sqrt{4S^2+\frac{9}{16}S^2-3S^2\sin\theta} = \sqrt{\frac{73}{16}S^2-3S^2\sin\theta} = S\sqrt{\frac{73}{16}-3\sin\theta}$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Zelfstudiepakket cirkel

Het topic 'de cirkel' is een keuzetopic, ook in de richtingen met 'gevorderde wiskunde'. De vaardigheden die je opdoet bij oefeningen over de cirkel zijn van essentieel belang om vlot een aantal vakken te kunnen volgen in de opleidingen wiskunde, fysica, ingenieurswetenschappen en ingenieurswetenschappen: architectuur. Als je de cirkel niet gezien hebt, kan je met behulp van het zelfstudiepakket cirkel aan de slag.

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Afsluitende toets en attest

Start hieronder de afsluitende toets om je wiskundige competenties te verifiëren.

Aan het einde van de toets kan je een remediëringsattest (rapport) downloaden. Als je niet geslaagd was op de **verplichte ijkingstoets fysica, wiskunde, ingenieurswetenschappen en ingenieurswetenschappen-architectuur** heb je dat attest nodig om nadat je ingeschreven bent aan de KU Leuven te bewijzen dat je de verplichte remediëring hebt gevolgd. Als je het attest niet nodig hebt, kan je de toets ook anoniem afleggen.

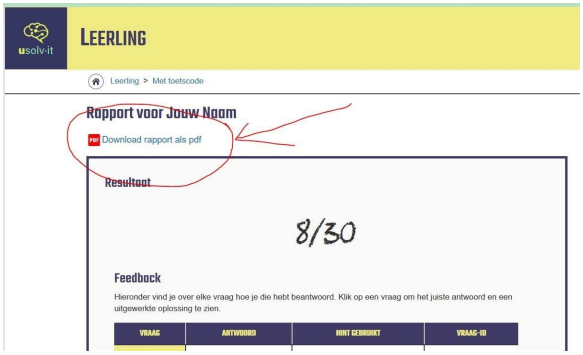
- **Gebruik je volledige officiële naam (zoals bij je inschrijving aan de KU Leuven)**
- Na het indienen van de test krijg je een rapport. **Download dit rapport als pdf**. Deze pdf kan je eens je ingeschreven bent aan KU Leuven indienen als **remediëringsattest**. Je krijgt op je **student.kuleuven.be**-e-mailadres instructies hoe je dit moet indienen.
- Je kan de afsluitende toets **meerdere malen** afleggen.

Start de afsluitende toets

START HIER de afsluitende toets in USOLV-IT :

Merk op:

- Download en bewaar het remediëringsattest. Download via de link zoals op volgende afbeelding:



- Je **score op deze afsluitende toets telt niet mee in je opleiding**. De score geeft je wel een indicatie van de groei van je competenties door het volgen van de remediëring.
- Je moet niet slagen voor de afsluitende toets om aan de remediëringsvoorwaarde te voldoen.
- Om te zorgen dat je sterk aan de start komt, is het uiteraard belangrijk dat je met het remediëringstraject je wiskundige competenties hebt kunnen versterken. Een goede score op de afsluitende toets is dan ook gewenst.

CC BY-NC-SA 4.0