KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: Veeltermen

(Versie 2026/08/25H.55)

Inhoudsopgave

1 Veeltermen (ZomercursusZ) 1.1

1.1 Eerstegraadsveeltermen . . . 1.1
1.2 Tweedegraadsveeltermen . . . 1.4
1.3 Veeltermen . . . 1.9
1.4 Deling van veeltermen . . . 1.12
1.5 Algoritme voor Euclidische deling . . . 1.14
1.6 Deling door $x - a$ . . . 1.19
1.7 Het schema van Horner . . . 1.22

2 Veeltermen (extra FEB) 2.1

2.1 Het schema van Horner . . . 2.1
2.2 Wat zijn vergelijkingen? . . . 2.3
2.3 Eerstegraadsvergelijkingen . . . 2.4
2.4 Lineaire vergelijkingen in twee onbekenden . . . 2.7

3 Veeltermen (extra FIIW) 3.1

3.1 Vergelijkingen . . . 3.1
3.2 Ontbinden in factoren . . . 3.4

4 Veeltermen (extra niet gebruikt ?) 4.1

4.1 Eerstegraads- en tweedegraadsveeltermen . . . 4.1

5 Veeltermen in andere folders 5.1

5.1 Veeltermfuncties . . . 5.1
5.2 Ongelijkheden met veeltermen . . . 5.5
5.3 Tekenverloop van veeltermen . . . 5.8

1.1 Eerstegraadsveeltermen

De meest eenvoudige veeltermen zijn die van de *eerste graad*. We bespreken hier enkele eigenschappen, en leggen het verband tussen de verwante begrippen *veelterm*, *functie* en *vergelijking*.

Definitie 1.1.1. Voor reële getallen a en b met $a \neq 0$ geldt:

- Een **eerstegraads*veelterm* in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
  $ax + b$ Vb: $2x - 3$
- Aan dergelijke veelterm is volgende **eerstegraads*functie*** geassocieerd:
  $x \mapsto ax + b$ Vb: $x \mapsto 2x - 3$
- Een **eerstegraads*vergelijking*** (of ook ***lineaire* vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
  $ax + b = 0$ Vb: $2x - 3 = 0$

Opmerking 1.1.1.

- Het woord *lineair* betekent in eerste instantie 'zoals een *lijn*', dus 'zoals een rechte'. Omdat een rechte een vergelijking heeft van de eerste graad, is het gebruik van het woord *lineair* uitgebreid naar 'van de eerste graad'. Voor vergelijkingen zijn 'lineair' en 'van de eerste graad' dus synoniemen. Maar voor functies heeft het begrip lineair in de wiskunde een beperktere en meer technische betekenis. Een functie is *lineair* als voor alle getallen a en b geldt dat $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$. In die betekenis is de functie $x \mapsto 2x$ wel degelijk lineair, maar de functie $x \mapsto 2x + 1$ is *niet* lineair. Daarom vermijden we het gebruik van het woord *lineair* voor functies en spreken we steeds over *eerstegraadsfuncties*. In sommige handboeken worden echter andere afspraken gemaakt.
- In de uitdrukking $ax + b$ heeft de letter x de rol van *variabele* of *onbekende*, terwijl de letters a en b *parameters* of *constanten* zijn en dus *willekeurige getallen* voorstellen. In plaats van x worden soms ook y, z of t gebruikt, en voor a en b komen ook $k, l, p, q, m, \alpha, \beta, \ldots$ dikwijls voor.

  Bij functies moet je dus steeds duidelijk aangeven *welke letter* de rol van variabele of onbekende heeft, en welke letters als parameters worden gebruikt. De notatie $x \mapsto ax + b$ zegt precies dat x de variabele is, terwijl z de variabele is in $z \mapsto pz + q$, en a de variabele is in $a \mapsto 2a + 3$.

Eigenschap 1.1.1. Voor een eerstegraadsfunctie $x \mapsto ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, geldt:

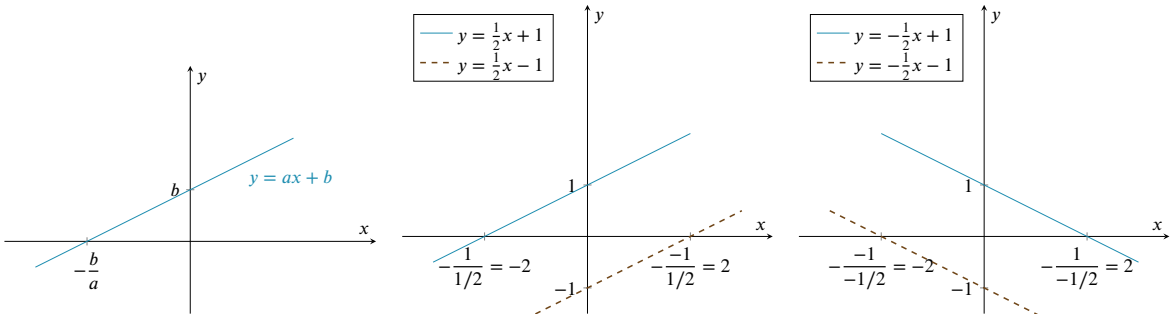
- de grafiek van de functie is een *rechte* met vergelijking $y = ax + b$ en **richtingscoëfficiënt** a.
- als a positief is, is de functie strikt *stijgend* en als a negatief is de functie strikt *dalend*.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de y-as is het punt $(0, b)$.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de x-as is het punt $(-\frac{b}{a}, 0)$. Het getal $-\frac{b}{a}$ is ook het (enige) *nulpunt* van de functie, en de (enige) oplossing van de vergelijking $ax + b = 0$.

Dit leidt tot volgend **tekenverloop** (ook *tekentabel*) voor de functie $x \mapsto ax + b$:

x		$-b/a$	
$ax + b$ met $a > 0$	$-$	0	$+$
$ax + b$ met $a < 0$	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Eerstegraadsveeltermen



Opmerking 1.1.2.

- We spreken meestal van *nulpunten* van een functie, *oplossingen* van een vergelijking en *wortels* van veeltermen, maar deze begrippen betekenen hetzelfde.
- als $a = 0$ reduceert de functie zich tot $x \mapsto 0x + b = b$, en dat is geen eerstegraadsfunctie maar een *constante* functie. De grafiek is dan de *horizontale* rechte met vergelijking $y = b$. Deze functie heeft *geen nulpunten* (en de grafiek dus geen snijpunten met de x-as), tenzij ook $b = 0$. In dat laatste geval zijn er *oneindig veel nulpunten* (en dus snijpunten), want dan is de functie de nulfunctie $x \mapsto 0$.

Voorbeeld 1.1.1.

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $8 - 4x < 0$.

Uitwerking: Je kan het tekenverloop maken van de functie $x \mapsto ax + b = -4x + 8$.
Het nulpunt is $-b/a = 8/4 = 2$, en de coëfficiënt $a = -4$ is negatief, dus is de tekentabel

x		2	
$8 - 4x$	$+$	0	$-$

De oplossingsverzameling is dus $V =]2, +\infty[$.

In dit geval kan je natuurlijk veel beter de ongelijkheid oplossen via

$$\begin{aligned} 8 - 4x < 0 &\iff 8 < 4x \\ &\iff 2 < x \end{aligned}$$

De tekentabel wordt pas nuttig in meer ingewikkelde gevallen om eenvoudig een boekhouding bij te houden van de verschillende nulpunten en tekens.

Definitie 1.1.2. Een **eerstegraadsvergelijking** (of **lineaire vergelijking**) **in twee onbekenden** x, y is een uitdrukking van de vorm

$ax + by + c = 0$ Vb: $2x + 3y - 4 = 0$

met $a, b, c \in \mathbb{R}$ waarbij a en b niet beide nul zijn.

Eigenschap 1.1.2.

De verzameling van alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan de vergelijking $ax + by + c = 0$ vormen een rechte:

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Eerstegraadsveeltermen

- Als $b \neq 0$ is kan je beide leden delen door b :

$$y = -\frac{1}{b}(ax + c) \quad \text{of} \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

dit is de grafiek van de reële functie $x \mapsto mx + q$ met $m = -\frac{a}{b}$ en $q = -\frac{c}{b}$.

Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan de vergelijking $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ vormen dus een rechte met richtingscoëfficiënt $-\frac{a}{b}$ en snijpunt met de y-as $-\frac{c}{b}$.

- Als $b = 0$ is de vergelijking $ax + c = 0$, of dus $x = -\frac{c}{a}$. Merk op dat er geen voorwaarde is op y, en y kan dus alle mogelijke waarden aannemen. Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan $x = -\frac{c}{a}$ vormen bijgevolg de verticale rechte $x = -\frac{c}{a}$.

Opmerking 1.1.3. We bespreken hier telkens *één* lineaire vergelijking. Meerdere vergelijkingen *tegelijk* oplossen (met mogelijk ook meer dan twee onbekenden) noemen we *stelsels van lineaire vergelijkingen* oplossen en behoort tot de zogenaamde *lineaire algebra*.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Tweedegraadsveeltermen

Vergelijkingen van de eerste graad in één onbekende hebben steeds één oplossing. Voor vergelijkingen van de tweede graad is de situatie iets ingewikkelder.

Definitie 1.2.1. Voor reële getallen a, b, c met $a \neq 0$ geldt:

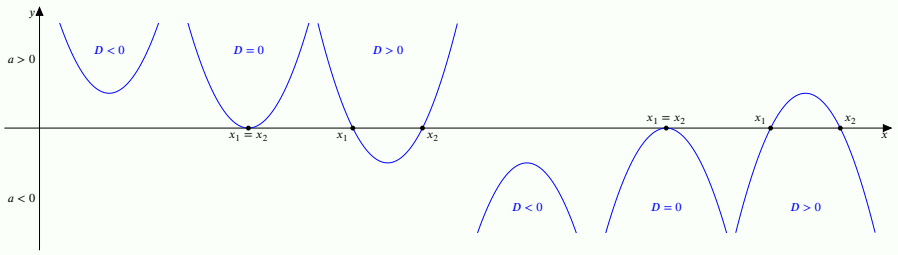
- Een **tweedegraadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
  $ax^2 + bx + c$ Vb: $2x^2 - 3x + 4$
- Aan dergelijke veelterm is volgende **(kwadratische) functie** geassocieerd:
  $x \mapsto ax^2 + bx + c$ Vb: $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$
- Een **tweedegraadsvergelijking** (ook **vierkantsvergelijking** of **kwadratische vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
  $ax^2 + bx + c = 0$ Vb: $2x^2 - 3x + 4 = 0$

Eigenschap 1.2.1. Voor de functie $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ geldt:

- de grafiek van f is een **parabool** met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$.
- als a negatief is, is dat een **bergparabool**, als a positief is, is dat een **dalparabool**.
- de nulpunten van f zijn de oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, en die vinden we met behulp van de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ waarbij geldt dat
  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende reële** nulpunten.
  - Als $D = 0$ zijn er **twee gelijke reële** nulpunten.
  - Als $D < 0$ zijn er **geen reële** nulpunten.
- als $D \geq 0$ worden de nulpunten (of wortels) gegeven door

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(wortelformule)}$$

  Deze nulpunten zijn de snijpunten van de grafiek van $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ met de x-as. Als $D = 0$ is $x_1 = x_2$ en hebben we slechts 1 snijpunt met de x-as.
- de functie f heeft volgend **tekenverloop** (of **tekentabel**):



  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende nulpunten** $x_1 < x_2$, en volgend tekenverloop:

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

1.2 Tweedegraadsveeltermen

– Als $D = 0$ zijn er **twee samenvallende nulpunten** $x_1 = x_2$, en volgend tekenverloop:

x		$x_1 = x_2$	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$-$

– Als $D < 0$ zijn er **geen nulpunten**, en volgend tekenverloop:

x	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$

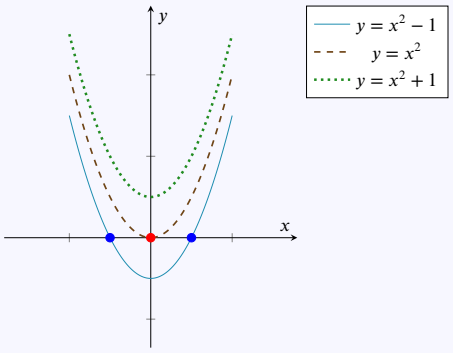
- de **top** van de parabool heeft als coördinaten $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- bij een bergparabool is $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ het **maximum** van f, bij een dalparabool het **minimum**.
- de **symmetrie-as** is de verticale rechte door de top, dus met vergelijking $x = -\frac{b}{2a}$.
- het bereik van een kwadratische functie gaat van min oneindig tot het maximum voor een bergparabool en van het minimum tot plus oneindig voor een dalparabool.
- de parabool snijdt de y-as in het punt $(0, c)$. (Vul $x = 0$ in in de vergelijking $ax^2 + bx + c$.)
- de parabool snijdt de x-as in de nulpunten van f. (Per definitie van het begrip nulpunt.)

Voorbeeld 1.2.1.

1. Bereken de nulpunten van de functies $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 - 1$ en $x \mapsto x^2 + 1$, en maak een tekening.

Uitwerking: De nulpunten van $x \mapsto x^2$ zijn 0 (twee keer, maar aan elkaar gelijk), die van $x \mapsto x^2 - 1$ zijn ± 1, en $x \mapsto x^2 + 1$ heeft geen reële nulpunten.

De grafieken van de overeenkomstige functies – waarop het aantal nulpunten direct afleesbaar is – zijn:



2. Geef de oplossingen van de vergelijking $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Uitwerking: De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -2$ en $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -3$.

3. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Tweedegraadsveeltermen

Uitwerking: We vinden dat $D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$. Dus $x_1 = x_2 = \frac{-6}{2 \cdot 9} = \frac{-1}{3}$.

4. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$.

Uitwerking: De nulpunten zijn -2 en -3. De coëfficiënt $a = 1$ is positief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = -3$		$x_2 = -2$	
$x^2 + 5x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$.

Eigenschap 1.2.2.

Als x_1 en x_2 de wortels zijn van $ax^2 + bx + c$, dan kunnen we deze veelterm **ontbinden in factoren**:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ Vb: $2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2)$

Voorbeeld 1.2.2. Ontbind $2x^2 + 5x + 3$ in factoren.

Uitwerking:

De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \frac{-5+1}{4} = -1$ en $x_2 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2}$, en dus

$$2x^2 + 5x + 3 = 2\,(x - (-1))\left(x - (-\tfrac{3}{2})\right) = 2\,(x+1)\left(x + \tfrac{3}{2}\right) = (x+1)\,(2x+3)$$

Opmerking 1.2.1. Een veelgemaakte fout bij het ontbinden van factoren is het vergeten van de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm. Herneem vorig voorbeeld: Zowel $(x+1)(x+\frac{3}{2})$ als $2(x+1)(x+\frac{3}{2})$ hebben nulpunten -1 en $-\frac{3}{2}$, maar enkel $2(x+1)(x+\frac{3}{2}) = 2x^2 + 5x + 3$.
Je kan narekenen dat $(x+1)(x+\frac{3}{2}) = x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \neq 2x^2 + 5x + 3$.

Opmerking 1.2.2. Omdat $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2$ vind je door gelijkstelling van de gelijknamige coëfficiënten van x ook dat

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{(product van de wortels)}$$

Het is dus niet nodig om de wortels zelf te berekenen als je enkel geïnteresseerd zou zijn in de som of het product van de wortels: die kan je immers beide direct afleiden uit de vergelijking.

Als $a = 1$ (en daar kan je altijd voor zorgen door te delen door a) is de vergelijking van de vorm $x^2 + bx + c = 0$ en worden de formules eenvoudiger:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad \text{(wortels)}$$

$$x_1 + x_2 = -b \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = c \qquad \text{(product van de wortels)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2.A Oefeningen eerste- en tweedegraadsveeltermen

Oefening 1.2.1. Los de volgende veeltermvergelijkingen op naar x.

1. $3x - 5 = x + 9$ $x = \ldots\ldots$

2. $5x^2 + 2x - 5 = 3x^2 + 4x + 7$ $x = -2$ of $x = 3$

3. $x^2 - x + 1 = -5 + x$ Er zijn geen reële oplossingen voor x. $(D < 0)$

4. $x + 10 = -2x + \frac{1}{2}$ $x = \ldots\ldots$

5. $2x + 1 = 2x^2 - 3$ $x = -1$ of $x = 2$

Oefening 1.2.2. Geef het tekenverloop van de functie f met het gegeven functievoorschrift. (Bepaal het nulpunt/ de nulpunten van de functie en vul de correcte tekens aan in de tabel.)

1. $f(x) = -x + 8$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$+$	0	$-$

2. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$

x	
$f(x)$	$-$

3. $f(x) = x^2 + 5x - 6$

x		$\ldots\ldots$		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

4. $f(x) = x^2 - 6x + 9$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$+$	0	$+$

5. $f(x) = -(x - 2)(x + 2)$

x		$\ldots\ldots$		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

6. $f(x) = 3x + 2$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$-$	0	$+$

Oefening 1.2.3. Ontbind in factoren

1. $x^2 + x - 6 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2.A Oefeningen eerste- en tweedegraadsveeltermen

2. $3x^2 + 12x - 15 = \ldots\ldots$

Oefening 1.2.4. Geef de oplossingen van volgende kwadratische vergelijkingen in onbekende x.

1. $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3}(1-p) = 0$. Hierin is $p > 0$ een zekere constante.

2. $yx^2 + x - y = 0$. Hierin is $y \neq 0$ een zekere constante.

Oefening 1.2.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $e^{2x} + e^x - 6 = 0 \qquad x = \ldots\ldots$

2. $e^x - 4e^{-x} = 3 \qquad x = \ldots\ldots$

Oefening 1.2.6. Los volgende ongelijkheden op:

1. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $x^2 > 1$. Maak ook een tekening. Antwoord: $\ldots\ldots$

2. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $x^2 - 3 > 2x$. Maak een tekening. Antwoord: $\ldots\ldots$

3. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $x^2 > 2x$. Maak een tekening. Antwoord: $\ldots\ldots$

4. Bereken welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $-2x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$. Antwoord: $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Veeltermen

Een veelterm in x is een som van veelvouden van machten van x zoals $x^{1302} + 11x^7 + 1830$:

Definitie 1.3.1 (Veelterm)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \dots a_n \in \mathbb{R}$ met $a_n \neq 0$.

- Een n**-de graadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  De $a_i x^i$ zijn **termen** van de veelterm, de a_i zijn **coëfficiënten**, en n is de **graad**.
  Men noteert de graad van $p(x)$ soms met $\text{gr}(p(x)) \stackrel{\text{def}}{=} n$.

- Met deze veelterm $p(x)$ kunnen we een **veeltermfunctie** p associëren:

$$p : x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Een n**-de graadsvergelijking in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

- De **getalwaarde** van $p(x)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ is het getal $p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$.

Voorbeeld 1.3.1.

De veelterm $p(x) = x^{1302} + 11x^7 + 1830$ heeft drie termen, met coëfficiënten $1, 11$ en 1830. Hij heeft graad 1302, en zijn getalwaarde in 1 is $p(1) = 1^{1302} + 11x^7 + 1830 = 1 + 11 + 1830 = 1842$. Zijn functiewaarde $p(2) = 2^{1302} + 11 \cdot 2^7 + 1830$ is een tamelijk groot natuurlijk getal, maar de getalwaarde in 0 daarentegen is eenvoudig $p(0) = 0 + 0 + 1830 = 1830$.

Voorbeeld 1.3.2.

- $2x + 3$ is een eerstegraadsveelterm.
- $5x^2 + 7x + 1$ is een tweedegraadsveelterm.
- $x^{2022} - 1$ is een veelterm van graad 2022.
- 7 is een veelterm van graad 0.
- $ax + b$ is een veelterm met 'parameters' of 'constanten' a en b in plaats van concrete getallen. Als $a \neq 0$ is het een eerstegraadsveelterm.
- $\sqrt{\pi}x^5 - e^y + \alpha^2$ is een veelterm in x van de vijfde graad, met parameters y en α.
- $x^2 - e^x$ is *geen* veelterm in x wegens de exponentiële functie.

Je kan ook veeltermen in andere letters tegenkomen: $5t^2 + 3t$ en $t + \cos\alpha$ zijn veeltermen in t, en $e^{2x}u^2 - 1$ is een veelterm in u (maar niet in x).

Opmerking 1.3.1.

- De nulveelterm 0 is de enige veelterm waarvoor de graad *niet bepaald* is.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Veeltermen

- Volgens deze definitie is een veelterm dus een formele *uitdrukking* (of een *formule*: een reeks letters, cijfers en enkele symbolen zoals + en −). We *rekenen* met dergelijke uitdrukkingen volgens voor de hand liggende rekenregels zoals:

$$2x + 3x = 5x$$

$$2 \cdot (5x) = 10x$$

$$(2x) \cdot (5x) = 10x^2$$

- Veeltermen zijn de functies die met enkel de elementaire bewerkingen optellen en vermenigvuldigen kunnen worden berekend. In meer gevorderde cursussen wiskunde wordt aangetoond dat erg veel functies goed kunnen worden *benaderd* door veeltermen.
- Een veelterm met één term noemen we een *term*, *éénterm* of *monoom*. Een veelterm met twee termen is een *tweeterm* of *binoom*. En één met *veel termen* is dus een *veel*term of *polynoom*.
- De getalwaarde van een veelterm in 0 is precies de constante term a_0 van de veelterm:

$$p(0) = a_n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + \ldots + a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0$$

- Met het sommatieteken kunnen we een veelterm ook schrijven als

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Zoals voor meer algemene functies definiëren we ook voor veeltermen *nulpunten* en *factoren*:

Definitie 1.3.2 (Nulpunten van veeltermen)**.**

Een **nulpunt** (ook **nulwaarde** of **wortel**) van een veelterm $p(x)$ is een reëel getal a waarvoor $p(a) = 0$.

Het zoeken van nulpunten is precies hetzelfde als het oplossen van vergelijkingen:

Eigenschap 1.3.1 (Verband tussen nulpunten en oplossingen van vergelijkingen)**.**

De *nulpunten* van een veelterm zijn de *oplossingen* van de *vergelijking* $p(x) = 0$.

Voorbeeld 1.3.3 (Nulpunten van eenvoudige veeltermen)**.**

1. Het getal 3 is een nulpunt van $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ omdat $p(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$
2. Veelterm $x - 5$ heeft 5 als nulpunt(en).
3. Veelterm $x^2 - 4$ heeft -2 en 2 als nulpunt(en).
4. Veelterm $x^2 + 4$ heeft geen enkel reëel getal als nulpunt(en).

Er zijn relatief eenvoudige procedures om nulpunten te vinden van eerstegraadsveeltermen en tweedegraadsveeltermen. Er bestaan ook (ingewikkeldere) algoritmes voor veeltermen van de derde en vierde graad. Evariste Galois heeft in het begin van de negentiende eeuw aangetoond dat er voor vijfdegraadsveeltermen *geen* algemene procedure *kan* bestaan die alleen gebruik maakt van zogenaamde algebraïsche bewerkingen: optellen/aftrekken, vermenigvuldigen/delen en machtsverheffen/worteltrekken.

Een veelterm $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is per definitie een *som* van termen (vandaar de naam *veel-term*). Het is dikwijls handig om dergelijke som van termen ook te kunnen schrijven als een *product* van factoren. De

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Veeltermen

uitdrukking 'ontbinden in factoren' betekent precies het schrijven van dergelijke som als een product:

Definitie 1.3.3 (Factoren van veeltermen)**.**

Een veelterm $d(x)$ is een **factor** van een veelterm $p(x)$ als we $p(x)$ kunnen schrijven als een product van $d(x)$ met een andere veelterm.

Dus: $d(x)$ is een *factor* van $p(x)$ als $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$.

Een factor van de nulde graad (dus een getal) is een **triviale factor**. We beschouwen die meestal niet als 'echte' factor.

Een veelterm $p(x)$ **ontbinden in factoren** betekent hem schrijven als een product van zo veel mogelijk niet-triviale factoren.

Voorbeeld 1.3.4 (Factoren van veeltermen)**.**

1. $x+1$ is een factor van x^2-1 want $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

2. $x+2$ is geen factor van x^2-1 want voor elke getal $a \in \mathbb{R}$ is $x^2-1 \neq (x+2)(x+a)$.

3. De veelterm $x^2-1=(x+1)(x-1)$ is ontbonden in factoren.

Men kan volgende eigenschap bewijzen:

Eigenschap 1.3.2 (Verband tussen factoren en nulpunten voor veeltermen)**.**

Een getal a is nulpunt van een veelterm $p(x)$ als en slechts als $x-a$ een factor is van $p(x)$.

In formules: $p(a)=0 \iff p(x)=(x-a)q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$

Deze eigenschap leert dus dat het zoeken van *nulpunten* hetzelfde is als het zoeken van *lineaire factoren*. En het zoeken van lineaire factoren heeft natuurlijk te maken met ontbinden in factoren.

Opmerking 1.3.2.

Men kan bewijzen dat over de complexe getallen elke veelterm kan ontbonden worden in lineaire factoren. Dat is de zogenaamde Hoofdstelling van de Algebra.

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Deling van veeltermen

Als we veeltermen met elkaar kunnen vermenigvuldigen, zal het waarschijnlijk ook mogelijk zijn ze door elkaar te *delen*.

Voorbeeld 1.4.1 (Delen-met-rest voor natuurlijke getallen.)**.** Zeggen dat de deling van 13 door 4 gelijk is aan 3 met rest 1, betekent dat

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

omdat 4 hoogstens 3 keer in 13 kan, en er blijft dan nog 1 over.

Op dezelfde manier betekent 20 delen door 3 dat

$$20 = 6 \cdot 3 + 2$$

of met symbolen: als we *deeltal* D delen door *deler* d, krijgen we *quotiënt* q en *rest* r als volgende formule geldt:

$$D = q \cdot d + r \text{ met } r < d.$$

Daarbij is het erg belangrijk dat $r < d$: als dat niet het geval is, heb je nog niet ver genoeg gedeeld, want je kan dan de rest r nog verder delen door d.

Als de rest gelijk is aan 0, dan zeggen we dat d een *deler* is van D, en we noteren $d|D$. Merk op dat in dat geval ook het quotiënt q een deler is van D (dus ook $q|D$), en dat we D dus kunnen schrijven als een product

$$D = q \cdot d$$

Dus, 5 en 7 zijn allebei delers van 35 want $35 = 5 \cdot 7$.

Men kan voor veeltermen volgende eigenschap bewijzen:

Eigenschap 1.4.1 (Euclidische deling)**.**

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn,

dan bestaan er unieke veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ zodat volgende gelijkheid geldt

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x) \quad \text{met } \mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$$

Voorbeeld 1.4.2 (Voorbeelden deling van veeltermen)**.**

$p(x) = x^2 + 2x$	en	$d(x) = x + 2$,	dan is $q(x) = x$ en $r(x) = 0$
$p(x) = x^2 + x$	en	$d(x) = x^2$,	dan is $q(x) = 1$ en $r(x) = x$
$p(x) = x + 1$	en	$d(x) = x$,	dan is $q(x) = 1$ en $r(x) = 1$
$p(x) = x$	en	$d(x) = x^2$,	dan is $q(x) = 0$ en $r(x) = x$

Definitie 1.4.1 (Euclidische deling van veeltermen)**.**

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn, en $q(x)$ en $r(x)$ zijn de bijhorende unieke veeltermen zodat $p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$, waarbij $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$,

dan noemen we $p(x)$ het **deeltal**, $d(x)$ de **deler**, $q(x)$ het **quotiënt** en $r(x)$ de **rest**.

Als $r(x)$ de nulveelterm is zegt men: $p(x)$ **is deelbaar door** $d(x)$ en $d(x)$ **is een deler van** $p(x)$.

We noteren dat als

$$d(x) \mid p(x) \iff \text{er bestaat een veelterm } q(x) \text{ zodat } p(x) = q(x)d(x)$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Deling van veeltermen

Opmerking 1.4.1.

(a) Let op de strikte ongelijkheid $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x))$. Dus $\text{gr}(r(x))$ mag niet gelijk zijn aan $\text{gr}(d(x))$.

(b) Het is natuurlijk mogelijk dat $q(x)$ en/of $r(x)$ nul zijn of van de nulde graad (en dus getallen).

(c) We hebben het woord **deler** hier in 2 betekenissen gebruikt:

(i) bij de Euclidische deling: we delen het deeltal $p(x)$ door de deler $d(x)$. In deze context is $d(x)$ niet noodzakelijk een deler van $p(x)$

(ii) wanneer $p(x)$ deelbaar is door $d(x)$ is $d(x)$ een deler van $p(x)$ en noteren we $d(x) \mid p(x)$.

(d) Als $d(x)$ een deler is van $p(x)$ en dus $p(x) = q(x) \cdot d(x)$, dan is automatisch ook het quotiënt $q(x)$ een deler van $p(x)$. We noemen $p(x)$ ook een **veelvoud** van $d(x)$ (en van $q(x)$).

(e) Er bestaat een algoritme, de zogenaamde Euclidische deling, om voor een willekeurige veelterm en deler het quotiënt en de rest te berekenen. De methode is volledig analoog aan de gekende staartdeling voor gewone getallen.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Algoritme voor Euclidische deling

Het **algoritme van Euclides** berekent voor veeltermen $p(x)$ en $d(x)$ het quotiënt $q(x)$ en de rest $r(x)$ zodat

$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$, met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x))$ Vb: $x^2 - 4x + 3 = (x+2)(x-6) + 15$, met $\text{gr}(15) < 1$

net zoals de staartdeling voor getallen D en d twee nieuwe getallen q en r oplevert zodat

$D = q \cdot d + r$ met $r < d$ Vb: $17 = 5 \cdot 3 + 2$ met $2 < 5$

Met de staartdeling 17 delen door 5 geeft $12 = 5 \cdot 3 + 2$, dus quotiënt 3 en rest 2.
Met de Euclidische deling $x^2 - 4x + 3$ delen door $x + 2$ levert $x^2 - 4x + 3 = (x+2) \cdot (x-6) + 15$, met quotiënt $x - 6$ en rest 15.

We geven eerst twee voorbeelden die in detail worden uitgewerkt, het eerste per video, het tweede per tekst. Daarna volgt de algemene procedure.

Voorbeeld 1.5.1 (Euclidische deling per video uitgelegd)**.**

Bereken quotiënt en rest van de deling van veelterm $10x^3 + 21x^2 - 11x - 7$ door veelterm $5x + 3$.

Uitwerking: We zoeken dus veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x)) = 1$ zodat

$$10x^3 + 21x^2 - 11x - 7 = q(x) \cdot (5x+3) + r(x).$$

De procedure wordt in detail en in minder dan 8 minuten uitgelegd in volgende video (met dank aan de ons verder onbekende meneer MDO):

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=vlARWbDqJOA

Het algoritme voor de Euclidische deling leidt dus tot volgende schema:

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 10x^3 & + & 21x^2 & - & 11x & - & 7 & 5x+3 \\
\cline{9-9}
- & 10x^3 & + & 6x^2 & & & & & 2x^2+3x-4 \\
\cline{2-4}
 & & & 15x^2 & - & 11x & - & 7 & \\
 & & - & 15x^2 & + & 9x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & - & 20x & - & 7 & \\
 & & & & - & 20x & - & 12 & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & 5 &
\end{array}$$

Eindresultaat: $10x^3 + 21x^2 - 11x - 7 = (2x^2 + 3x - 4)(5x + 3) + 5$

Voorbeeld 1.5.2 (Euclidische deling stap per stap uitgelegd)**.**

Bereken quotiënt en rest van de deling van veelterm $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ door veelterm $x - 3$.

Uitwerking: We zoeken dus veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x)) = 1$ zodat

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = q(x) \cdot (x-3) + r(x).$$

We gebruiken een aangepaste vorm van de staartdeling van natuurlijke getallen. Bestudeer het schema samen met de uitleg.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Algoritme voor Euclidische deling

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 2x^3 & + & x^2 & - & 5x & + & 2 & x-3 \\
(b)- & 2x^3 & - & 6x^2 & & & & & \hline \\
 & & & 7x^2 & - & 5x & + & 2 & 2x^2+7x+16 \\
(d)- & & & 7x^2 & - & 21x & & & (a)\quad (c)\quad (e) \\
 & & & & & 16x & + & 2 & \\
(f)- & & & & & 16x & - & 48 & \\
 & & & & & & & 50 & \\
 & & & & & & & (g) &
\end{array}
$$

(a) Deel de hoogstegraadsterm van $p(x)$ door de hoogstegraadsterm van $d(x)$. Dus deel $2x^3$ door x. Schrijf dit 'voorlopig quotiënt' $2x^3/x = 2x^2$ in de rechterkolom.

(b) Vermenigvuldig de deler $x-3$ met het 'voorlopig quotiënt' $2x^2$ en schrijf dit product $(x-3)\cdot 2x^2 = 2x^3-6x^2$ onder het deeltal. Trek dit product $2x^3-6x^2$ af van het deeltal $2x^3+x^2-5x+2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen tegen elkaar weg. De 'voorlopige rest' is $2x^3+x^2-5x+2-(2x^3-6x^2) = 7x^2-5x+2$. Die 'voorlopige rest' is nog te groot, want de graad 2 van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad 1 van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(c) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de 'voorlopige rest' (dus $7x^2$) door de hoogstegraadsterm van de deler $x-3$, dus door x. Voeg deze component $7x^2/x = 7x$ toe aan het 'voorlopig quotiënt' in de rechterkolom.

(d) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met deze nieuwe component $7x$ en schrijf het product $7x\cdot(x-3)$ onder de 'voorlopige rest' $7x^2-5x+2$. Trek het product $7x^2-21x$ af van de 'voorlopige rest' $7x^2-5x+2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen weer tegen elkaar weg. De nieuwe 'voorlopige rest' is $7x^2-5x+2-(7x^2-21x) = 16x+2$. Deze 'voorlopige rest' $16x+2$ is nog te groot, want de graad van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(e) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de nieuwe 'voorlopige rest' $(16x)$ door x. Voeg 16 toe als nieuwe component van het 'voorlopig quotiënt'.

(f) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met die nieuwe component 16 en trek het product $16(x-3)$ af van de huidige 'voorlopige rest' $16x+2$. Dit geeft de nieuwe 'voorlopige rest' 50.

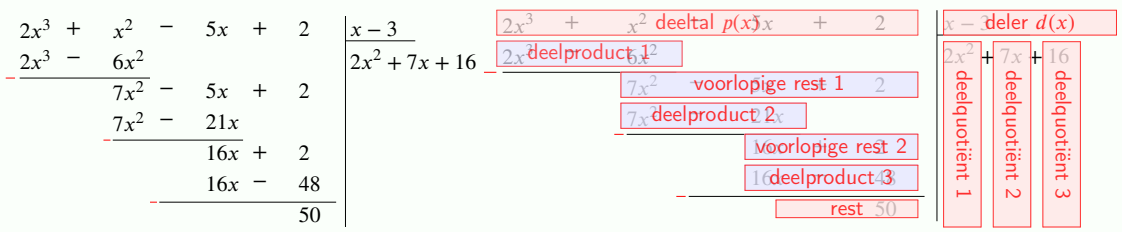
(g) Omdat de graad van deze 'voorlopige rest' strikt kleiner is dan de graad van de deler, is het onmogelijk dat we de rest nog kunnen schrijven als een product van de deler met nog iets. Dit beëindigt dus de procedure. 50 is de uiteindelijke rest, en $2x^2+7x+16$ is het uiteindelijke quotiënt.

Eindresultaat: $2x^3+x^2-5x+2 = (2x^2+7x+16)(x-3)+50$

De algemene procedure een een veelterm $p(x)$ te delen door een veelterm $d(x)$ is als volgt:

Algoritme 1.5.1 (Algoritme Euclidische deling)**.**

Bereken $q(x)$ en $r(x)$ zodat $p(x) = q(x)\cdot d(x)+r(x)$ (met $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$).



(a) Plaats deeltal $p(x)$ en deler $d(x)$ in een *deelschema* volgens dalende machten van x. Gebruik voor eventuele ontbrekende machten in $p(x)$ nullen of open plaatsen.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Algoritme voor Euclidische deling

(b) Deel de hoogstegraadsterm van het deeltal door hoogstegraadsterm van de deler.
In het voorbeeld: $2x^3$ gedeeld door x is $2x^2$.

(c) Schrijf dit eerste *deelquotiënt* op de quotientplaats.
In het voorbeeld: $2x^2$.

(d) Schrijf het product van dit deelquotiënt met de deler $d(x)$ onder het deeltal $p(x)$.
In het voorbeeld: $2x^2 \cdot (x-2) = 2x^3 - 6x^2$.

(e) Schrijf het *verschil* van deeltal en dit product als *voorlopige rest*.
In het voorbeeld: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 - (2x^3 - 6x^2) = 7x^2 - 5x + 2$.

(f) Deel de hoogstegraadsterm van de voorlopige rest door hoogstegraadsterm van de deler, en voeg het resultaat als deelquotiënt toe aan het (voorlopige) quotiënt.
In het voorbeeld: $7x^2$ gedeeld door x is $7x$.

(g) Schrijf het product van dit extra deelquotiënt met de deler onder de recentste voorlopige rest.
In het voorbeeld: $7x \cdot (x-2) = 7x^2 - 21x$.

(h) Schrijf het verschil van vorige voorlopige rest en dit deelproduct als nieuwe voorlopige rest.
In het voorbeeld: $7x^2 - 5x + 2 - (7x^2 - 21x) = 16x + 2$.

(i) Herhaal de vorige drie stappen tot de graad van de voorlopige rest strikt kleiner is dan de graad van de deler.
In het voorbeeld: na één keer herhalen is de rest een constante, dus met graad kleiner dan 1.

Voorbeeld 1.5.3. Deel $2x^3 - 8$ door $x + 2$.

Uitwerking:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
2x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 8 & x+2 \\
\cline{8-8}
2x^3 & + & 4x^2 & & & & & 2x^2 - 4x + 8 \\
\cline{1-3}
 & - & 4x^2 & + & 0x & - & 8 & \\
 & - & 4x^2 & - & 8x & & & \\
\cline{2-4}
 & & & & 8x & - & 8 & \\
 & & & & 8x & + & 16 & \\
\cline{4-6}
 & & & & & - & 24 &
\end{array}$$

Besluit: $2x^3 - 8 = (2x^2 - 4x + 8)(x + 2) - 24$

Oefening 1.5.1. Deel $-x^3 + 9x + 2$ door $x + 4$.

Uitwerking:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
- & x^3 & + & 0x^2 & + & 9x & + & 2 & x+4 \\
\cline{9-9}
- & x^3 & - & 4x^2 & & & & & -x^2 + 4x - 7 \\
\cline{1-4}
 & & & 4x^2 & + & 9x & + & 2 & \\
 & & & 4x^2 & + & 16x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & - & 7x & + & 2 & \\
 & & & & - & 7x & - & 28 & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & & 30 &
\end{array}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Algoritme voor Euclidische deling

Besluit: $-x^3+9x+2=(-x^2+4x-7)(x+4)+30$

Oefening 1.5.2. Deel $4x^4+x^3+2x+1$ door $2x^2+1$.

Uitwerking:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
4x^4 & + & x^3 & + & 0x^2 & + & 2x & + & 1 & 2x^2+1 \\
\cline{10-10}
-\,4x^4 & & & + & 2x^2 & & & & & 2x^2+\tfrac{1}{2}x-1 \\
\cline{1-9}
 & & x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & + & 1 & \\
 & & -\,x^3 & & & + & \tfrac{1}{2}x & & & \\
\cline{3-9}
 & & & - & 2x^2 & + & \tfrac{3}{2}x & + & 1 & \\
 & & & - & 2x^2 & & & - & 1 & \\
\cline{3-9}
 & & & & & & \tfrac{3}{2}x & + & 2 &
\end{array}$$

Besluit: $4x^4+x^3+2x+1=\left(2x^2+\frac{1}{2}x-1\right)(2x^2+1)+\left(\frac{3}{2}x+2\right)$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.A Oefeningen Euclidische deling

Oefening 1.5.3. Zoek het quotiënt en de rest van volgende delingen met behulp van een Euclidische deling.

1. Deel $2x^4 - 1$ door $x - 1$.

2. Deel $4x^3 + 4x^2 - 5x - 3$ door $2x^2 - x - 1$.

3. Deel $5x^3 + 125$ door $x + 5$.

4. Deel $3x^3 + 8x^2 - x + 1$ door $3x + 2$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Deling door $x-a$

De meest eenvoudige delers van een veelterm, en dikwijls ook de meest interessante, zijn de delers van de *eerste graad*, dus die van de vorm $x-a$, met $a \in \mathbb{R}$.

Voor dergelijke delers van de eerste graad zijn er enkele specifieke eigenschappen en rekenregels. We onderzoeken eerst voor welke a de veelterm $x-a$ mogelijk een deler kan zijn van een veelterm $p(x)$.

Eigenschap 1.6.1 (Rest bij deling door $x-a$)**.**

Bij deling van een veelterm $p(x)$ door $x-a$ is de rest gelijk aan de getalwaarde $p(a)$ van $p(x)$ in a.

Bewijs Uit de formule van de Euclidische deling volgt dat $p(x) = (x-a)q(x)+r(x)$ met $q(x)$ het quotiënt en $r(x)$ de rest met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(x-a) = 1$. De rest $r(x)$ is dus een veelterm van graad nul, een getal. Noteer de rest dus als $r \in \mathbb{R}$, en bereken de getalwaarde van $p(x)$ in a: $p(a) = (a-a)q(a)+r = 0+r = r$, en dus $p(a) = r$. De rest is dus inderdaad gelijk aan de getalwaarde van $p(x)$ in a. ■

Eigenschap 1.6.2 (Deelbaarheidscriterium)**.**

Een veelterm is deelbaar door $x-a$ als en slechts als zijn getalwaarde in a gelijk is aan nul.

In formules:

$$x-a \mid p(x) \quad \Leftrightarrow \quad p(a) = 0.$$

Bewijs Uit vorige eigenschap volgt dat de rest van de deling van een veelterm $p(x)$ door $x-a$ gelijk is aan $p(a)$. Dus de rest is nul als en slechts als $p(a) = 0$, en dat is precies het te bewijzen. ■

Opmerking 1.6.1. We kunnen deze eigenschap ook anders formuleren:

$x-a$ is een factor is van de veelterm $p(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van $p(x)$.

In formules: $p(x) = (x-a)q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$ $\iff$ $p(a) = 0$

Het komt regelmatig voor dat we één, enkele of alle delers willen vinden van een bepaalde veelterm. In het algemeen is dat een erg moeilijk probleem. Voor het tamelijk speciale maar toch veel voorkomend geval van veeltermen met *gehele* coefficiënten bestaat er wel een procedure voor de delers van de vorm $x-a$ met *gehele* a:

Eigenschap 1.6.3.

Als $x-a$ met a een *geheel getal* een deler is van een veelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ *met gehele coëfficiënten* a_i,

dan is a *een gehele deler van de constante term* a_0 van deze veelterm $p(x)$.

Bewijs Uit vorige eigenschap volgt dat voor een deler $x-a$ geldt dat $p(a) = 0$. Welnu, a invullen in $p(x)$ en de constante term naar het rechterlid brengen levert dan

$$a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots a_1 a = -a_0$$

waarbij in het linkerlid een factor a kan worden afgezonderd. Dat betekent precies dat a een deler is van $-a_0$, en dus ook van a_0. ■

Dit betekent dus dat *alle mogelijke delers* $x-a$ *met* a *geheel* te vinden zijn in de (eindige) verzameling van delers van de constante term a_0.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.55)

1.6 Deling door $x-a$

Voorbeeld 1.6.1. Bepaal voor x^4-10x^2+9 alle delers van de vorm $x-a$ met gehele a.

Uit vorige eigenschap volgt dat enkel delers van de constante term in aanmerking komen, dus $\pm1, \pm3, \pm9$:

$$\begin{array}{lll} (x-1) \mid p(x) & \text{omdat} & p(\ 1) = 0 \\ (x+1) \mid p(x) & \text{omdat} & p(-1) = 0 \\ (x-3) \mid p(x) & \text{omdat} & p(\ 3) = 0 \\ (x+3) \mid p(x) & \text{omdat} & p(-3) = 0 \\ (x-9) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(\ 9) \neq 0 \\ (x+9) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(-9) \neq 0. \end{array}$$

We vinden hier 4 delers van de vorm $x-a$. Een 4de-graadsveelterm kan maximaal 4 delers van de vorm $x-a$ hebben. $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3) = x^4-10x^2+9$, dus we hebben de veelterm x^4-10x^2+9 volledig ontbonden in factoren.

Voorbeeld 1.6.2. Bepaal voor x^3-2x^2+x-2 alle delers van de vorm $x-a$ met gehele a.

Uit vorige eigenschap volgt dat enkel delers van de constante term in aanmerking komen, dus ±1 en ±2:

$$\begin{array}{lll} (x-1) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(\ 1) \neq 0 \\ (x+1) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(-1) \neq 0 \\ (x-2) \mid p(x) & \text{omdat} & p(\ 2) = 0 \\ (x+2) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(-2) \neq 0. \end{array}$$

We vinden hier slechts 1 deler van de vorm $x-a$, namelijk $x-2$. Het quotiënt van de deling van x^3-2x^2+x-2 door $x-2$ kunnen we bepalen met het algoritme van de Euclidische deling, maar in dit speciale geval van een deler van de eerste graad is het rekenschema van Horner een alternatieve en meestal snellere manier om het quotiënt te bepalen.

Algoritme 1.6.2 (Delen door $x-a$ met a een geheel getal)**.**

Voor veeltermen met *gehele* coëfficiënten kan je de delers van de vorm $x-a$ (met $a \in \mathbb{Z}$) en hun bijhorende quotiënten als volgt bepalen:

(a) Bepaal *de delers van de constante term* van de veelterm.

(b) Bepaal *de getalwaarde van de veelterm* voor deze delers.

(c) Als voor een deler a deze getalwaarde 0 is, dan is $x-a$ een deler van de veelterm.

(d) Bepaal het quotiënt via de Euclidische deling of via het rekenschema van Horner.

Merk op: deze eigenschap geldt ENKEL voor *gehele* getallen a en veeltermen met *gehele* coëfficiënten.

Zodra je één deler van de vorm $x-a$ kan vinden, kan je een derdegraadsveelterm ontbinden in factoren:

Voorbeeld 1.6.3. Ontbind de veelterm x^3-7x-6 in factoren.

Uitwerking: We proberen een lineaire factor $x-a$ te vinden van $p(x) = x^3-7x-6$. Hiervoor moet a een deler zijn van de constante term. De mogelijkheden zijn dus $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

We berekenen $p(1) = 1-7-6 \neq 0, p(2) = 8-14-6 \neq 0$, maar $p(3) = 27-21-6 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3-7x-6 = (x-3)q(x)$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Deling door $x - a$

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 1x^3 & + & 0x^2 & - & 7x & - & 6 & x-3 \\
\cline{9-9}
- & 1x^3 & - & 3x^2 & & & & & x^2+3x+2 \\
\cline{2-4}
 & & & 3x^2 & - & 7x & - & 6 & \\
 & & - & 3x^2 & - & 9x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & & 2x & - & 6 & \\
 & & & & - & 2x & - & 6 & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Hieruit volgt dat $x^3-7x-6=(x-3)(x^2+3x+2)$. Nu moet de factor x^2+3x+2 nog verder worden ontbonden. Dat kan via een berekening van de nulpunten met de discriminant: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = -2, -1$.

We vinden de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x+1)(x+2)$.

Merk op: in dit geval had je ook voor de overige delers van de constante term 6 de getalwaarde van $p(x)$ kunnen berekenen, en vinden dat $p(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$ en ook $p(-2) = -8 + 14 - 6 = 0$. De drie nulpunten van $p(x)$ zijn dus $3, -1$ en -2, en daaruit volgt ook dadelijk de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x+1)(x+2)$. Dat werkt hier omdat *alle* nulpunten geheel zijn, de methode met de discriminant werkt ook voor niet-gehele nulpunten (maar wel enkel als de overblijvende factor van de tweede graad is).

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Het schema van Horner

In principe is het eenvoudig om de getalwaarde $p(7)$ van de veelterm $p(x) = x^9 + x^5 + 1$ te berekenen door $p(7) = 7^9 + 7^5 + 1$ uit te rekenen. Je moet daarvoor wel hoge machten berekenen.

Er bestaat een algoritme dat de berekening van $p(a)$ voor willekeurige veeltermen $p(x)$ en getallen a reduceert tot eenvoudigere vermenigvuldigingen en optellingen. Het algoritme heeft bovendien het bijzondere neveneffect dat het ook het quotiënt van de deling van $p(x)$ door $(x-a)$ oplevert. Dat algoritme is gekend onder de naam **Rekenschema van Horner**. We leggen het hier uit aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 1.7.1. Deel $2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ door $x - 2$.

Noem de veelterm $p(x)$. We gebruiken het schema van Horner om de waarde van $p(x)$ in het punt $x = 2$ te berekenen, en we krijgen het quotiënt er dan gratis bij. Je kan natuurlijk $p(2)$ ook met je rekenmachine berekenen, maar dan moet je toch Horner of Euclidische Deling toepassen als je het quotiënt nodig hebt.

Het startschema ziet eruit als volgt

	2	−4	5	−7
2				

waarbij de coëfficiënten van $p(x)$ in de bovenste rij staan. We laten nu de eerste coëfficiënt (dus 2) zakken, vermenigvuldigen die met de 2 links, en schrijven het resultaat op de tweede rij, onder de tweede coëfficiënt (dus onder -4):

	2	−4	5	−7
2		4		
	2			

We tellen de -4 en 4 bij elkaar op, schrijven het resultaat $-4+4=0$ onderaan en vermenigvuldigen 0 met de linkse 2 en schrijven het resultaat 0 weer op de tweede rij, onder de 5, en tellen dan 0 op bij die 5:

	2	−4	5	−7
2		4	0	
	2	0	5	

We vermenigvuldigen opnieuw de onderste 5 met de linkse 2, schrijven het product 10 onder de -7, tellen op en krijgen rechts onderaan het getal 3:

	2	−4	5	−7
2		4	0	10
	2	0	5	3

Het schema is nu volledig, en men kan bewijzen dat het meest rechtse getal onderaan altijd de getalwaarde van de veelterm is in het punt 2, en dat de overige getallen in de onderste rij steeds de coëfficiënten zijn van het quotiënt van $p(x)$ gedeeld door $x - 2$.

Het quotiënt is dus $2x^2 + 0x + 5$ en de rest is 3, of

$$2x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = (x-2)(2x^2+5) + 3$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Het schema van Horner

Voorbeeld 1.7.2. Als voorbeeld op de Euclidische deling hebben we $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ gedeeld door $x - 3$. We kunnen deze deling ook uitvoeren met het rekenschema van Horner:

	2	1	−5	2
3		6	21	48
	2	7	16	50

Dus: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (2x^2 + 7x + 16)(x - 3) + 50$.

Merk op dat de rest 50 dus ook de getalwaarde van het deeltal voorstelt voor $x = 3$, want

$$p(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 5 \cdot 3 + 2 = 50$$

Voorbeeld 1.7.3. Vind alle delers van $p(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$.

Merk al direct op dat dit dezelfde opgave is als 'ontbind deze veelterm in factoren'.

Voor kandidaat-delers van $p(x)$ van de vorm $x - a$, met a een geheel getal, moet a een deler zijn van 24. Een mogelijke manier om deze oefening op te lossen is om van alle gehele delers van 24 na te gaan of de getalwaarde nul is. Wie bij de kleinste begint, heeft al direct geluk, want $p(1) = 1 - 15 - 10 + 24 = 0$, en dus is $x - 1$ een deler van $p(x)$. We kunnen nu verder de getalwaarde zoeken van delers $-1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12, 24$ en -24, maar eenvoudiger is om met Horner te berekenen dat

	1	0	−15	−10	24
1		1	1	−14	−24
	1	1	−14	−24	0

en dus $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x - 1)(x^3 + x^2 - 14x - 24)$. We herhalen de vraag voor de veelterm $x^3 + x^2 - 14x - 24$. Het eindresultaat wordt $p(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x - 4)$. Dit wordt erg duidelijk en volledig uitgelegd in volgende video, waar in het begin ook de regel van Horner zelf nog eens wordt uitgelegd.

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=P88ZvVsuLIA

Voorbeeld 1.7.4. In het stukje over lineaire delers hebben we $x^4 - 10x^2 + 9$ ontbonden in factoren.

Omdat $p(-3) = 0$ is $x - (-3) = x + 3$ een deler van $x^4 - 10x^2 + 9$.

We berekenen het quotiënt met het rekenschema van Horner.

	1	0	−10	0	9
−3		−3	9	3	−9
	1	−3	−1	3	0

Het quotiënt is dus $x^3 - 3x^2 - x + 3$ en de rest is 0.

We zoeken nu verder naar nulpunten van $x^3 - 3x^2 - x + 3$, en vinden (na nog wat rekenwerk) dat $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.

Merk op: in dit geval kan de veelterm (veel) eenvoudiger worden ontbonden door alle nulpunten te zoeken.

CC BY-NC-SA 4.0

1.7.A Oefeningen Horner

Oefening 1.7.1. Bepaal voor onderstaande veeltermen telkens een *geheel* nulpunt a. Schrijf vervolgens de veelterm in de vorm $(x-a)q(x)$.

1. x^4-2x^3+1 heeft geheel nulpunt $\ldots\ldots$ en kan dus geschreven worden als $(x-\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

2. x^3-x^2-5x+6 heeft geheel nulpunt $\ldots\ldots$ en kan dus geschreven worden als $(x-\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

Oefening 1.7.2. Ontbind de volgende veeltermen in factoren.

1. $x^4-2x^3+x^2-2x=\ldots\ldots$

2. $x^3+4x^2-3x-18=\ldots\ldots$

3. $3x^3-5x^2-10x-6=\ldots\ldots$

4. $x^4-2x^3+2x-1=\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Het schema van Horner

Het **rekenschema van Horner** berekent voor een nulpunt a van een veelterm $p(x)$ een veelterm $q(x)$ zodat

$p(x) = (x-a)q(x)$ Vb: $x^3+x+2 = (x+1)(x^2-x+2)$

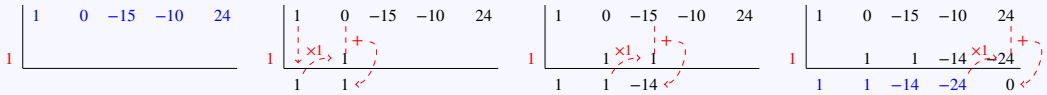
Vervolgens het schema toepassen op $q(x)$ geeft in goede gevallen een ontbinding in factoren van $p(x)$.

Voorbeeld 2.1.1. Vind veelterm $q(x)$ zodat voor $p(x) = x^4-15x^2-10x+24$ geldt $p(x) = (x-1)q(x)$.

Uitwerking:

Merk op dat 1 inderdaad een nulpunt is van $p(x)$, want $p(1) = 1^4 - 15\cdot 1^2 - 10\cdot 1 + 24 = 1-15-10+24 = 0$.

Het schema van Horner zegt dan dat je $q(x)$ als volgt kan berekenen:



(a) Zet de coëfficiënten van $p(x)$ in de eerste rij, volgens dalende machten van x.
Gebruik voor eventuele ontbrekende machten in $p(x)$ nullen.

(b) Plaats het nulpunt $a = 1$ op de tweede rij, links van de verticale streep.

(c) Breng de eerste coëfficiënt op de eerste rij op de derde rij (onder de horizontale streep).

(d) Schuif één kolom naar rechts

(e) Plaats op de tweede rij het product van a met het getal op de derde rij van de kolom ervoor.

(f) Plaats op de derde rij de som van de twee waarden erboven.

(g) Herhaal vorige drie stappen voor alle kolommen.

(h) Als a een nulpunt is van $p(x)$ dan moet de laatste waarde uiterst rechts onder de horizontale streep een 0 zijn. Zoniet maakte je een rekenfout of is a toch geen nulpunt.

(i) Onder de horizontale streep vind je nu de lijst met coëfficiënten van $q(x)$ volgens dalende machten van x, waarbij je de laatste nul negeert.
Hier is $q(x) = x^3+x^2-14x-24$.

Het algoritme van Horner leert dus dat $x^4-15x^2-10x+24 = (x-1)(x^3+x^2-14x-24)$.

Dit wordt erg duidelijk en volledig uitgelegd in het eerste deel van volgend filmpje:

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=P88ZvVsuLIA

Door het schema van Horner opnieuw toepassen, nu op de veelterm $x^3+x^2-14x-24$, vind je

$$x^3+x^2-14x-24 = (x+2)(x^2-x-12)$$

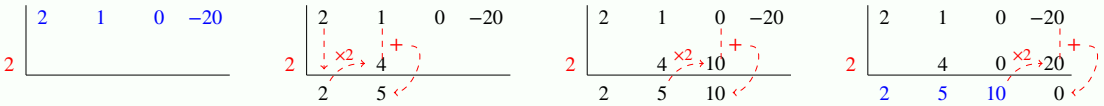
en de factor x^2-x-12 kan je ontbinden met de discriminant (of ook, zoals in het filmpje, met de eigenschap van som en product van de wortels). De volledige ontbinding in factoren wordt $p(x) = (x-1)(x+2)(x+3)(x-4)$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Het schema van Horner

De algemene procedure om $p(x)$ te schrijven als veelvoud van $x-a$ (met $p(a)=0$) is als volgt:

Algoritme 2.1.3 (Rekenschema van Horner)**.** Bereken $q(x)$ zodat $p(x)=(x-a)q(x)$.
(Hier uitgewerkt met voorbeeld voor $a=2$ en $p(x)=2x^3+x^2-20=(x-2)q(x)$.)



(a) Zet de coëfficiënten van $p(x)$ in de eerste rij, volgens dalende machten van x.
Gebruik voor eventuele ontbrekende machten in $p(x)$ nullen.
In het voorbeeld is dat voor de veelterm $2x^3+x^2-20$ de rij $2,1,0,-20$

(b) Plaats het nulpunt a op de tweede rij, links van de verticale streep. In het voorbeeld is dat 2.

(c) Breng de eerste coëfficiënt op de eerste rij op de derde rij (onder de horizontale streep).

(d) Schuif één kolom naar rechts

(e) Plaats op de tweede rij het product van a met het getal op de derde rij van de kolom ervoor.

(f) Plaats op de derde rij de som van de twee waarden erboven.

(g) Herhaal vorige drie stappen voor alle kolommen.

(h) Als a een nulpunt is van $p(x)$ dan moet de laatste waarde uiterst rechts onder de horizontale streep een 0 zijn. Zoniet maakte je een rekenfout of is a toch geen nulpunt.

(i) Onder de horizontale streep vind je nu de lijst met coëfficiënten van $q(x)$ volgens dalende machten van x, waarbij je de laatste nul negeert.
In het voorbeeld is $q(x)=2x^2+5x+10$.

Het algoritme van Horner leert dus dat $2x^3+x^2-20=(x-2)(2x^2+5x+10)$.

Oefening 2.1.1. Ontbind de veelterm $p(x)=x^4-10x^2+9$ in factoren.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Wat zijn vergelijkingen?

Het oplossen van vergelijkingen is een praktische wiskundige vaardigheid. Vooraleer we illustreren hoe vergelijkingen op te lossen, preciseren we nog wat we juist bedoelen met een *vergelijking*.

Definitie 2.2.1. Een vergelijking drukt uit dat twee wiskundige uitdrukkingen aan elkaar gelijk zijn door een gelijkheidsteken tussen de uitdrukkingen te plaatsen.

Voorbeeld 2.2.1.

$$5x^3 + 2x = 8x^2 + 17$$

De uitdrukking voor het gelijkheidsteken noemt met het linkerlid, de andere uitdrukking noemt men het rechterlid.

In een vergelijking staat altijd minstens één onbekende die met een letter wordt aangeduid. Dikwijls wordt hiervoor de letter x gebruikt maar een onbekende kan met eender welke letter worden aangeduid. Het oplossen van een vergelijking komt erop neer dat je die waarden voor de onbekende (of onbekenden) zoekt waarvoor het linkerlid inderdaad gelijk is aan het rechterlid.

Definitie 2.2.2. De **graad van een veeltermvergelijking** is de hoogste macht van de onbekende die in de vergelijking voorkomt.

Definitie 2.2.3. In deze nota's beperken we ons tot **veeltermvergelijkingen**, dat zijn vergelijkingen waarbij zowel het rechterlid als het linkerlid veeltermen zijn, zoals in het voorbeeld hierboven.

Er bestaan echter ook andere vergelijkingen.

Voorbeeld 2.2.2. De vergelijkingen

$$3\sin(x+2) = x^3 - 4x - 1$$

en

$$\frac{1}{2}e^{-\pi y} - 4 = 37\cos(y^2 + 1)$$

zijn géén veeltermvergelijkingen.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Eerstegraadsvergelijkingen

We zullen het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen verduidelijken met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 2.3.1.

$$5x + 3 = 3x + 1$$

Het oplossen van de vergelijking komt er eigenlijk op neer dat je de vergelijking herschrijft op een zodanige manier dat je in één lid, en alleen daar, de onbekende hebt staan. Op die manier kan je de oplossing direct aflezen. Het herschrijven van de vergelijking kan je doen door op het linkerlid en het rechterlid steeds dezelfde bewerkingen uit te voeren, op die manier blijft de gelijkheid tussen linkerlid en rechterlid gelden.
In bovenstaande vergelijking kunnen we van beide leden $3x$ aftrekken:

$$5x + 3\mathbf{-3x} = 3x + 1\mathbf{-3x}$$

dit geeft

$$2x + 3 = 1$$

Vervolgens trekken we van beide leden 3 af:

$$2x + 3\mathbf{-3} = 1\mathbf{-3}$$

dit geeft

$$2x = -2$$

Om nu in het linkerlid alleen nog de onbekende over te houden kunnen we linkerlid en rechterlid delen door 2:

$$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{-2}{\mathbf{2}}$$

dit geeft

$$x = -1$$

als oplossing van de vergelijking.

Opmerking 2.3.1.

- Het uitvoeren van dezelfde optelling of aftrekking op het linker- en rechterlid komt erop neer dat je termen van het ene lid naar het andere verplaatst. Hierbij moet je er wel op letten dat het teken van de term verandert bij overbrenging naar het andere lid.
- Het uitvoeren van dezelfde deling (of vermenigvuldiging) op linker- en rechterlid komt neer op het overbrengen van een factor naar het andere lid. Hierbij wordt een vermenigvuldiging een deling en omgekeerd.
- Soms wordt de oplossing van een vergelijking genoteerd als een verzameling S. Voor het

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Eerstegraadsvergelijkingen

hierboven uitgewerkte voorbeeld schrijven we dan als oplossingenverzameling

$$S = \{-1\}$$

Voorbeeld 2.3.2.

$$5y + 4 = 5y - 1$$

We gaan opnieuw op dezelfde manier te werk. We kunnen bijvoorbeeld de term $5y$ uit het rechterlid overbrengen naar het linkerlid:

$$5y + 4 \mathbf{-5y} = -1$$

ofwel

$$4 = -1$$

Dit is natuurlijk onzin!
Er is geen enkele waarde voor y die ervoor kan zorgen dat $4 = -1$, deze vergelijking heeft geen oplossingen...
Dit kan men ook noteren door te schrijven dat de oplossingenverzameling leeg is:

$$S = \varnothing$$

Voorbeeld 2.3.3.

$$2(x - 4) = 7(3x - 1)$$

De eerste stap is hier het uitwerken van de haakjes:

$$2(x - 4) = 7(3x - 1) \Leftrightarrow 2x - 8 = 21x - 7$$

Vervolgens verplaatsen we de -8 naar rechts (min wordt plus):

$$2x = 21x - 7 + 8 \Leftrightarrow 2x = 21x + 1$$

Nu verplaatsen we de $21x$ van rechts naar links (plus wordt min):

$$2x - 21x = 1 \Leftrightarrow -19x = 1$$

Dan brengen we -19 over naar het rechterlid (pas op: teken verandert niet!):

$$x = \frac{1}{-19} = -\frac{1}{19}$$

Opmerking 2.3.2. Een goed stappenplan voor het oplossen van een eerstegraadsvergelijking is:

(a) Reken alle haakjes uit.

(b) Verplaats alle termen met onbekenden in naar een lid, alle termen zonder onbekenden naar het andere lid.

- Elke bewerking die je links uitvoert, moet je rechts ook uitvoeren.
- Termen kan je overbrengen door het teken te veranderen: min wordt plus, plus wordt min.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.55)

2.3 Eerstegraadsvergelijkingen

- Factoren verplaats je door te delen of te vermenigvuldigen: een vermenigvuldiging wordt een deling en omgekeerd.

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Lineaire vergelijkingen in twee onbekenden

Definitie 2.4.1. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$ of $b \neq 0$ (dus a en b niet beide nul).
Een **eerstegraadsvergelijking** (of **lineaire vergelijking**) **in twee onbekenden** x, y is een uitdrukking van de vorm

$$ax + by + c = 0$$

Eigenschap 2.4.1.

De verzameling van alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan de vergelijking $ax + by + c = 0$ vormen een rechte:

- als $b = 0$ wordt de vergelijking $ax + c = 0$, waaruit volgt dat $x = -\frac{c}{a}$. Merk op dat er geen voorwaarde is op y, y kan alle mogelijke waarden aannemen. Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan deze vergelijking vormen bijgevolg de verticale rechte $x = -\frac{c}{a}$.
- Als $b \neq 0$ is kunnen we de vergelijking ook schrijven als

  $$y = -\frac{1}{b}(ax + c) \text{ of } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

  We hebben reeds opgemerkt dat de grafiek van een reële functie $x \mapsto mx + q$ hetzelfde is als de oplossingsverzameling van de vergelijking $y = mx + q$.

  Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan de vergelijking $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ vormen dus een rechte met richtingscoëfficiënt $-\frac{a}{b}$ en snijpunt met de y-as $-\frac{c}{b}$.

Voorbeeld 2.4.1. Beschouw de volgende eerstegraadsvergelijking in twee onbekende x en y

$$10x + 2y = 6$$

Dit is eigenlijk de *vergelijking van een rechte*. Immers, we kunnen dit ook schrijven als:

$$y = -5x + 3$$

Voor elke x-waarde kunnen we dan een y-waarde berekenen, bv. voor $x = 0$ vinden we $y = 3$. Dit zijn de oplossingen van de vergelijking. Het is niet mogelijk om een volledige lijst van koppels expliciet op te lijsten als dé oplossing. Elk punt op de rechte is eigenlijk een oplossing van de vergelijking. De oplossingenverzameling is wel te schrijven als:

$$S = \{(x, y) \mid y = -5x + 3, x \in \mathbb{R}\}$$

Merk op dat de *oplossing van de vergelijking* een oneindige verzameling van koppels (x, y) is, en niet één specifieke x-waarde zoals bij het oplossen van vergelijkingen met één onbekende x.

Opmerking 2.4.1. We bespreken hier telkens *één* lineaire vergelijking. Meerdere vergelijkingen *tegelijk* oplossen (met mogelijk ook meer dan twee onbekenden) noemen we *stelsels van lineaire vergelijkingen* oplossen en behoort tot de zogenaamde *lineaire algebra*.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Vergelijkingen

Het *oplossen van vergelijkingen* is een steeds weerkerend thema in de wiskunde. We bespreken hier kort de terminologie en enkele algemene principes die daarmee samenhangen.

Definitie 3.1.1.

- Een **gelijkheid** is een uitdrukking die precies één gelijkheidsteken = bevat. Het **linkerlid** van de gelijkheid is het deel van de uitdrukking vòòr het gelijkheidsteken, het **rechterlid** is het deel erachter.
- Een gelijkheid die enkel getallen en gekende functies bevat kan **waar** zijn (ook **juist**, bijvoorbeeld $1+1=2$ of $\sqrt{4}=2$) of **vals** (ook **fout**, bijvoorbeeld $1+1=3$ of $\sqrt{4}=-2$) of **zonder betekenis** (bijvoorbeeld $1+=3$ of $\sqrt{-4}=2$).
- Een gelijkheid die ook *letters* bevat, kan erg uiteenlopende betekenissen hebben:
  - als $a=1$ dan is de gelijkheid $2a+4=6$ waar. We noemen in deze context a een **constante**.
  - als x en y variabelen zijn, dan is de gelijkheid $y=2x+4$ de **vergelijking van een rechte** in het vlak: de *voorwaarde* waaraan getallen x en y moeten voldoen opdat het punt (x,y) op die rechte zou liggen.
  - als x een **onbekende** is, dan is $2x+4=0$ (ook) een **vergelijking** waarvan we oplossingen kunnen zoeken: de gelijkheid $2x+4=0$ is *waar* als en slechts als $x=-2$.
  - als a een reëel getal is en x een onbekende, dan is $y=ax+4$ de vergelijking van een rechte waarbij a een **parameter** is: voor elke waarde van a krijgen we een *andere* rechte.
  - als x en y een **variabelen** zijn, dan is $y=2x+4$ een formule voor de **functie** $f: x \mapsto 2x+4$ waarbij x de *onafhankelijke* variabele is en y de *afhankelijke* variabele. We kunnen dan ook schrijven dat $y=f(x)$ of $f(x)=2x+4$. De gelijkheid $y=2x+4$ is dan ook de vergelijking van de *grafiek* van de functie f in het vlak.

  Het onderscheid tussen 'variabelen' en 'onbekenden', en tussen 'constanten' en 'parameters' is niet altijd strikt, en de begrippen worden soms door elkaar gebruikt.
- Als de uitdrukking dus *letters* bevat, noemen we die letters **variabelen, onbekenden, parameters of constanten** naargelang de context of de rol die de letters vervullen. Voor variabelen en onbekenden worden dikwijls de letters x en y gebruikt, maar ook andere letters komen voor (bijvoorbeeld t als de onbekende of variabele de tijd is, n als het een natuurlijk getal is, of z als het een complex getal is). Voor parameters en constanten kiezen we dikwijls $a,b,c\ldots$ of $k,l,m,\ldots$ of griekse letters $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$. Als er letters te kort zijn, gebruiken we indices (of subscripts) $x_0,x_1,x_i,x_n,\alpha_1,\ldots$.
- Een **vergelijking** is dus een *gelijkheid met onbekenden of variabelen*. **Een oplossing** (soms ook wortel (Engels: 'root', Frans: 'racine') van de vergelijking is een waarde van de onbekende(n) waarvoor de vergelijking een gelijkheid wordt. De **oplossingsverzameling** van de vergelijking is de verzameling van *alle* oplossingen.
- We noemen twee vergelijkingen **equivalent** als ze dezelfde oplossingsverzameling hebben. Beide vergelijkingen moeten dan zeker evenveel onbekenden hebben.

Voorbeeld 3.1.1.

- In de gelijkheid
$$2x+6=10$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Vergelijkingen

wordt het linkerlid $2x+6$, met daarin de onbekende x, gelijkgesteld wordt aan het rechterlid 10. De gelijkheid bevat één onbekende, namelijk x, en is dus een vergelijking. Enkel $x=2$ is een oplossing van die vergelijking.

- In de gelijkheid
$$2x+6=3y+x$$
wordt het linkerlid $2x+6$, met daarin de onbekende x, gelijkgesteld wordt aan het rechterlid $3y+x$ met onbekenden x en y. Er zijn oneindig veel oplossingen, bijvoorbeeld $x=0$ en $y=2$, of ook $x=6$ en $y=4$. Bij elke y hoort precies één x zodat die x en y een oplossing vormen, namelijk $x=3y-6$. Je kan ook beweren dat bij elke x precies één y hoort, namelijk $y=x/3+2$.

- bij een vergelijking met één onbekende kunnen we soms tamelijk expliciet alle oplossingen opschrijven. Dat heet het 'oplossen van de vergelijking'. De oplossingen zijn dus de waarde of waarden voor de onbekende waarvoor het linkerlid en het rechterlid van de vergelijking aan elkaar gelijk zijn. Bijvoorbeeld:
$$x^2-1=0 \iff x\in\{-1,1\}$$
De oplossingsverzameling kunnen we dus schrijven als
$$\begin{aligned}\{x \mid x^2=1\} &= \{x \mid x=-1 \text{ of } x=1\}\\ &= \{-1,1\}\end{aligned}$$

- bij vergelijking met meerdere onbekenden wordt het geven van 'alle oplossingen' subtieler. Dikwijls zijn het er oneindig veel, en is de oplossingsverzameling bijvoorbeeld een kromme of een andere (meerdimensionale) meetkundige figuur:
$$x^2+y^2=1 \iff (x,y) \text{ liggen op de cirkel met oorsprong } (0,0) \text{ en straal } 1$$
De oplossingsverzameling kunnen we dus schrijven als
$$\begin{aligned}\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} &= \{(x,y) \mid y=\pm\sqrt{1-x^2}\}\\ &= \{(\cos t,\sin t) \mid t\in[0,2\pi]\}\\ &= \{(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}) \mid t\in\mathbb{R}\}\cup\{(-1,0)\}\end{aligned}$$

- soms is de vergelijking waar voor *alle* waarden van de onbekenden. Dan noemen we de vergelijking een **identiteit**. Dat geldt bijvoorbeeld voor de uitdrukking
$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
De oplossingsverzameling is hier meestal niet erg nuttig, want *alle* waarden zijn oplossingen:
$$\begin{aligned}\{(x,y) \mid (x+y)^2=x^2+2xy+y^2\} &= \{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}\\ &= \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Bij het oplossen van vergelijkingen is het dikwijls handig om dingen van het éne lid naar het andere te brengen. Dat kan op twee manieren, maar in concrete gevallen is meestal maar één van beide nuttig:

Eigenschap 3.1.1 (Eigenschappen van vergelijkingen)**.**

(a) De vergelijking $A=B$ is equivalent met de vergelijking $A-B=0$
('een term naar het linkerlid brengen')

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Vergelijkingen

(b) Als $B \neq 0$, dan is de vergelijking $A = B$ equivalent met de vergelijking $\frac{A}{B} = 1$
('delen door een niet-nul factor')

Hierbij is (a) de wiskundige vertaling van de evidente waarheid dat 'twee dingen aan elkaar gelijk zijn' als 'er geen verschil is'. En (b) is de vertaling van het feit dat 'twee dingen aan elkaar gelijk zijn' als 'hun verhoudig één is'. Daarbij moet worden opgelet dat een 'verhouding tot niets' (dus $\frac{A}{0}$) geen betekenis heeft, en je moet dus erg opletten niet met 'verhoudingen' te werken als er nullen in het spel kunnen zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Ontbinden in factoren

Een veelterm $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is per definitie een *som* van termen (vandaar de naam *veel-term*). Het is dikwijls handig om dergelijke som van termen ook te kunnen schrijven als een *product* van factoren. De uitdrukking 'ontbinden in factoren' betekent precies het schrijven van dergelijke som als een product:

Definitie 3.2.1 (Veeltermen ontbinden in factoren)**.**

Als we een veelterm $p(x)$ kunnen schrijven als een product van veeltermen $p_1(x)$ en $p_2(x)$ dan noemen we die veeltermen $p_1(x)$ en $p_2(x)$ **factoren** (of ook **delers**) van een veelterm $p(x)$:

$$p_1(x) \text{ is een factor van } p(x) \iff \text{er bestaat een veelterm } p_2(x) \text{ zodat } p(x) = p_1(x)p_2(x)$$

Een factor van de eerste graad is een **lineaire factor**. Een factor van de nulde graad (dus een getal) is een **triviale factor**, en die beschouwen we niet als 'echte' factor.

Een veelterm **ontbinden in factoren** is de veelterm schrijven als een *product* van zo veel mogelijk niet-triviale factoren. Als dezelfde factor meerdere keren voorkomt, schrijven we die als een macht.

Voorbeeld 3.2.1.

Veelterm $x^2 - 1$ kan ontbonden worden in de factoren $x - 1$ en $x + 1$ omdat $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Wegens volgende eigenschap is ontbinden in *lineaire* factoren eigenlijk hetzelfde als het vinden van de nulpunten:

Eigenschap 3.2.1. $x - a$ is een factor van een veelterm als en slechts als zijn getalwaarde in a gelijk is aan nul.

In formules: $p(x) = (x - a)q(x) \quad \Leftrightarrow \quad p(a) = 0.$

Om *gehele* nulpunten te vinden is volgende eigenschap dikwijls nuttig:

Eigenschap 3.2.2. Als $x - a$ met a *een geheel getal* een factor is van een veelterm *met gehele coëfficienten*,

dan is a *een gehele deler van de constante term* van deze veelterm.

Er bestaat *geen algemeen algoritme* om willekeurige veeltermen te ontbinden in factoren, maar vorige eigenschap en de Euclidische Deling (of het schema van Horner) laten soms wel toe om factoren te vinden.

Voorbeeld 3.2.2. Ontbind de veelterm $x^3 - 7x - 6$ in factoren.

Uitwerking: We proberen een lineaire factor $x - a$ te vinden van $p(x) = x^3 - 7x - 6$. Wegens eigenschap 3.2.2 moet a een deler zijn van de constante term, dus $a|6$. De mogelijkheden zijn dus $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

Wegens eigenschap 3.2.1 moet de getalwaarde $p(a)$ gelijk zijn aan nul. We berekenen $p(1) = 1 - 7 - 6 \neq 0, p(2) = 8 - 14 - 6 \neq 0$, maar $p(3) = 27 - 21 - 6 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)q(x)$.

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
1x^3 & + & 0x^2 & - & 7x & - & 6 & & x-3 \\
\cline{9-9}
-\,1x^3 & - & 3x^2 & & & & & & x^2+3x+2 \\
\cline{1-3}
 & & 3x^2 & - & 7x & - & 6 & & \\
 & - & 3x^2 & - & 9x & & & & \\
\cline{2-5}
 & & & & 2x & - & 6 & & \\
 & & & - & 2x & - & 6 & & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Ontbinden in factoren

Hieruit volgt dat $x^3-7x-6=(x-3)(x^2+3x+2)$. Nu moet de factor x^2+3x+2 nog verder worden ontbonden.

Dat kan via een berekening van de nulpunten met de discriminant: $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=-2,-1$, of door 'met de hand' nulpunten te zoeken door delers te proberen van de constante term 2.

We vinden telkens de ontbinding $x^3-7x-6=(x-3)(x+1)(x+2)$.

Merk op: in dit geval had je ook voor de overige delers van de constante term 6 de getalwaarde van $p(x)$ kunnen berekenen, en vinden dat $p(-1)=-1+7-6=0$ en ook $p(-2)=-8+14-6=0$. De drie nulpunten van $p(x)$ zijn dus $3,-1$ en -2, en daaruit volgt ook dadelijk de ontbinding $x^3-7x-6=(x-3)(x+1)(x+2)$. Dat werkt hier omdat *alle* nulpunten geheel zijn, de methode met de discriminant werkt ook voor niet-gehele nulpunten (maar wel enkel als de overblijvende factor van de tweede graad is).

Oefening 3.2.1. Ontbind de volgende veeltermen in factoren:

1. $x^2-4=\ldots\ldots$

2. $4x^2-4=\ldots\ldots$

3. $x^2-2=\ldots\ldots$

4. $x^2-2x+1=\ldots\ldots$

5. $x^3-6x^2+11x-6=\ldots\ldots$

6. $x^3-x^2-5x+5=\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Eerstegraads- en tweedegraadsveeltermen

De meest eenvoudige veeltermen zijn die van de *eerste graad*. We bespreken hier enkele eigenschappen, en leggen het verband tussen de verwante begrippen *veelterm*, *functie* en *vergelijking*.

Definitie 4.1.1. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$.

- Een **eerstegraads*veelterm* in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax + b$$
- Aan dergelijke veelterm is volgende **eerstegraads*functie*** geassocieerd:
$$x \mapsto ax + b$$
- Een **eerstegraads*vergelijking*** (of ook ***lineaire* vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax + b = 0$$

Voorbeeld 4.1.1.

- $7x + 9$ is een eerstegraadsveelterm (in x).
- $x \mapsto 7x + 9$ is een eerstegraadsfunctie (met variabele x).
- $7x + 9 = 0$ is een eerstegraadsvergelijking (in één onbekende x).

Eigenschap 4.1.1.

Het oplossen van een eerstegraadsvergelijking $ax + b = 0$ is relatief eenvoudig. Men vindt direct $x = -\frac{b}{a}$ als de (enige) oplossing van de vergelijking.

Opmerking 4.1.1. We spreken meestal van *nulpunten* van een functie, *oplossingen* van een vergelijking en *wortels* van veeltermen, maar deze begrippen betekenen hetzelfde.

Vergelijkingen van de eerste graad in één onbekende hebben steeds één oplossing. Voor vergelijkingen van de tweede graad is de situatie iets ingewikkelder.

Definitie 4.1.2. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$.

- Een **tweedegraadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax^2 + bx + c$$
- Aan dergelijke veelterm is volgende **(kwadratische) functie** geassocieerd:
$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$
- Een **tweedegraadsvergelijking** (ook **vierkantsvergelijking** of **kwadratische vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax^2 + bx + c = 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Eerstegraads- en tweedegraadsveeltermen

Voorbeeld 4.1.2.

- $7x^2+2x+4$ is een tweedegraadsveelterm.
- $x \mapsto 7x^2+2x+4$ is een kwadratische functie.
- $7x^2+2x+4=0$ is een vierkantsvergelijking.

Eigenschap 4.1.2. Voor de functie $x \mapsto ax^2+bx+c$, met $a,b,c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ geldt:

- de grafiek van de functie is een **parabool** met vergelijking $y = ax^2+bx+c$.
- als a negatief is, is dat een **bergparabool**, als a positief is, is dat een **dalparabool**.
- de nulpunten van de functie zijn de oplossingen van de vergelijking $ax^2+bx+c=0$, en die vinden we met behulp van de **discriminant** $D = b^2-4ac$ waarbij geldt dat
  - Als $D>0$ zijn er **twee verschillende reële** nulpunten.
  - Als $D=0$ zijn er **twee gelijke reële** nulpunten.
  - Als $D<0$ zijn er **geen reële** nulpunten.
- als $D \geq 0$ worden de nulpunten (of wortels) gegeven door

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{(wortelformule)}$$

  Deze nulpunten zijn de snijpunten van de grafiek van de functie $x \mapsto ax^2+bx+c$ met de x-as. Als $D=0$ is $x_1 = x_2$ en hebben we slechts 1 snijpunt met de x-as.

Dit leidt tot volgend **tekenverloop** (of **tekentabel**) voor de functie $x \mapsto ax^2+bx+c$:

- Als $D>0$ zijn er **twee verschillende nulpunten** $x_1 < x_2$, en volgend tekenverloop:

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c met $a>0$	$+$	0	$-$	0	$+$
ax^2+bx+c met $a<0$	$-$	0	$+$	0	$-$

- Als $D=0$ zijn er **twee samenvallende nulpunten** $x_1 = x_2$, en volgend tekenverloop:

x		$x_1 = x_2$	
ax^2+bx+c met $a>0$	$+$	0	$+$
ax^2+bx+c met $a<0$	$-$	0	$-$

- Als $D<0$ zijn er **geen nulpunten**, en volgend tekenverloop:

x	
ax^2+bx+c met $a>0$	$+$
ax^2+bx+c met $a<0$	$-$

Voorbeeld 4.1.3 (Voorbeelden van parabolen en tweedegraadsvergelijkingen)**.**

1. Bereken de nulpunten van de functies $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2-1$ en $x \mapsto x^2+1$, en maak een tekening.

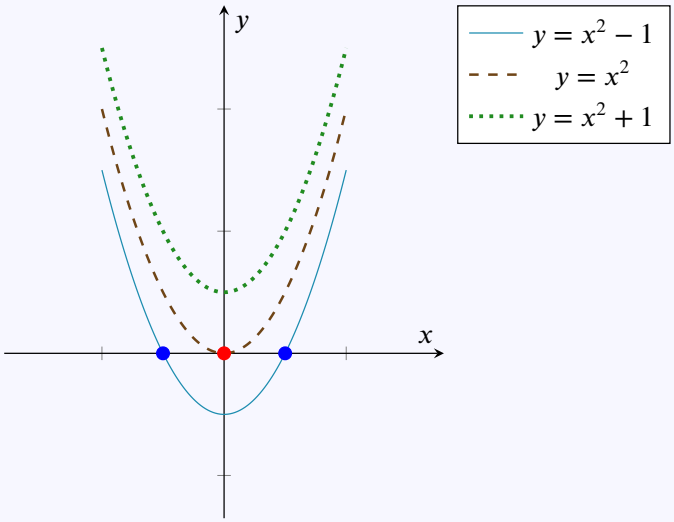
CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Eerstegraads- en tweedegraadsveeltermen

Uitwerking:

De nulpunten van $x \mapsto x^2$ zijn 0 (twee keer, maar aan elkaar gelijk), die van $x \mapsto x^2 - 1$ zijn ± 1, en $x \mapsto x^2 + 1$ heeft geen reële nulpunten.

De grafieken van de overeenkomstige functies – waarop het aantal nulpunten direct afleesbaar is – zijn de volgende:



2. Geef de oplossingen van de vergelijking $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Uitwerking: De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$ en $x_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$.

Eigenschap 4.1.3.

Als x_1 en x_2 de wortels zijn van $ax^2 + bx + c$, dan kunnen we deze veelterm **ontbinden in factoren**:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Voorbeeld 4.1.4.

1. Ontbind $2x^2 + 5x + 3$ in factoren.

Uitwerking: De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \frac{-5+1}{4} = -1$ en $x_2 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2}$.

$$2x^2 + 5x + 3 = 2(x - (-1))(x - (-\tfrac{3}{2})) = 2(x+1)(x+\tfrac{3}{2}) = (x+1)(2x+3)$$

Opmerking 4.1.2. Een veelgemaakte fout bij het ontbinden van factoren is het vergeten van de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm. Herneem vorig voorbeeld: Zowel $(x+1)(x+\frac{3}{2})$ als $2(x+1)(x+\frac{3}{2})$ hebben nulpunten -1 en $-\frac{3}{2}$, maar enkel $2(x+1)(x+\frac{3}{2}) = 2x^2 + 5x + 3$.

Je kan narekenen dat $(x+1)(x+\frac{3}{2}) = x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \neq 2x^2 + 5x + 3$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Eerstegraads- en tweedegraadsveeltermen

Opmerking 4.1.3. Omdat $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2$ vinden we door gelijkstelling van de gelijknamige coëfficiënten van x ook dat

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{(product van de wortels)}$$

Het is dus niet nodig om de wortels zelf te berekenen als je enkel geïnteresseerd zou zijn in de som of het product van de wortels: die kan je immers beide direct afleiden uit de vergelijking.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Veeltermfuncties

Een functie waarvan het voorschrift een veelterm is, noemen we een **veeltermfunctie**. Een veeltermfunctie van **graad** n wordt genoteerd als:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

met $a_n \in \mathbb{R}_0, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$.

Opmerking 5.1.1.

(a) Het domein van een veeltermfunctie is altijd $\mathbb{R}$.

(b) De functie met voorschrift $f(x) = 0$ wordt de **nulfunctie** genoemd. Deze functie heeft geen graad.

(c) Als $f(x) = c$ voor een $c \in \mathbb{R}_0$, spreken we van een **constante functie**. Deze heeft graad 0.

(d) Een veeltermfunctie van de n-de graad heeft hoogstens n verschillende nulpunten.

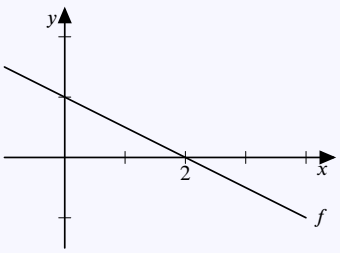
5.1.1 Eerstegraadsfuncties

Functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ax + b$ met $a \neq 0$ worden **eerstegraadsfuncties** genoemd. Dit zijn veeltermfuncties van graad één. Het domein en bereik zijn altijd $\mathbb{R}$. De grafische voorstelling van deze functie is een rechte. We noemen a de **richtingscoëfficiënt** of **rico**. Indien $a > 0$ dan is de rechte stijgend, indien $a < 0$ dan is de rechte dalend. De rechte snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.

We bespreken enkele belangrijke karakteristieken aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 5.1.1. Stel $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

(a) **Grafische voorstelling:** omdat de rico $a = -\frac{1}{2}$ negatief is, zal de rechte dalend zijn.



(b) **Nulpunt:**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$$

(c) Een **tekentabel** vat samen waar de functie positief, negatief of nul wordt:

x		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$

(d) Het **functieverloop** vat in een tabel eigenschappen zoals stijgen, dalen, maximum, en minimum samen. In het geval van een rechte is de situatie eenvoudig.

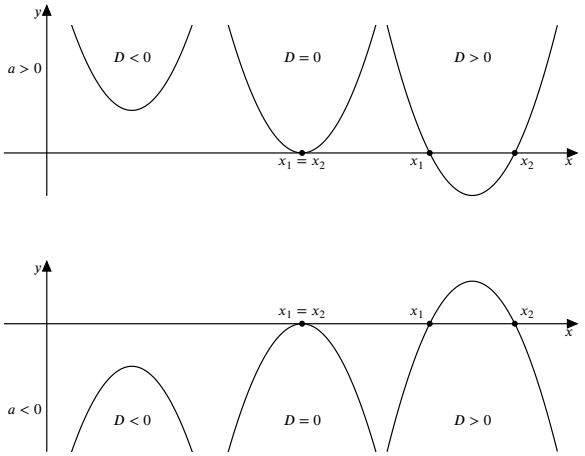
x	
$f(x)$	$\searrow$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Veeltermfuncties

5.1.2 Tweedegraadsfuncties

Functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ax^2+bx+c$ met $a \neq 0$ worden **tweedegraadsfuncties** of **kwadratische** functies genoemd. Dit zijn veeltermfuncties van graad twee. Het domein is altijd $\mathbb{R}$. Het beeld of bereik is echter niet de volledig verzameling $\mathbb{R}$ – we komen hierop terug in de onderstaande opmerking. De grafische voorstelling van deze functie is een **parabool** met top $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$. Indien $a > 0$ spreken we van een **dalparabool** en indien $a < 0$ spreken we van een **bergparabool**. Afhankelijk van het aantal nulpunten verschilt de grafiek.



Het berekenen van de discriminant $D = b^2 - 4ac$ zegt iets over het aantal nulpunten.

- Indien $D > 0$ dan zijn $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ of $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ nulpunten.
- Indien $D = 0$ is er slechts één nulpunt, $x = \dfrac{-b}{2a}$.
- Indien $D < 0$ dan zijn er geen reële nulpunten.

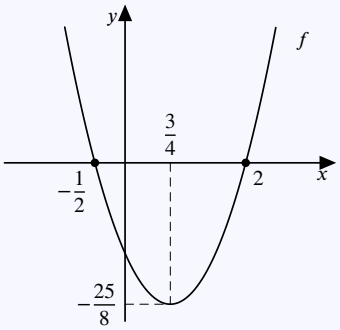
Opmerking 5.1.2. De top van een parabool heeft als coördinaten $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$. Bij een bergparabool noemt men dit ook het **maximum** van de functie, bij een dalparabool het **minimum**. Het bereik van een kwadratische functie strekt zich uit van min oneindig tot het maximum voor een bergparabool en van het minimum tot plus oneindig voor een dalparabool.

Voorbeeld 5.1.2. Stel $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

(a) **Grafische voorstelling**: een dalparabool want $a = 2 > 0$, met vergelijking: $y = 2x^2 - 3x - 2$. Berekenen we de top via de bovenstaande formule, dan krijgen we $\left(\frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{-25}{8}\right)$. De top is handig bij het tekenen van de grafiek.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Veeltermfuncties



De twee andere punten aangeduid op de grafiek (i.e. de nulpunten) worden hieronder berekend.

(b) Het **domein** is zoals bij alle veeltermfuncties $\mathbb{R}$. Het **bereik** is $\left[-\frac{25}{8}, +\infty\right[$.

(c) De nulpunten zijn:

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{4} = \frac{-1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{4} = 2$$

(d) **Tekentabel**:

x		$-\frac{1}{2}$		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(e) **Functieverloop**:

x		$\frac{3}{4}$	
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{25}{8}$	$\nearrow$

5.1.3 Derdegraadsfuncties

Functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ met $a \neq 0$ worden **derdegraadsfuncties** genoemd. Dit zijn veeltermfuncties van graad drie.

Aangezien er veel verschillende derdegraadsfuncties zijn (afhankelijk van de vorm, de ligging, het aantal nulpunten,...) kiezen we ervoor om geen algemeen voorbeeld te geven, maar deze functie te bespreken aan de hand van twee voorbeelden. Merk op dat het domein en bereik voor elke derdegraadsfunctie $\mathbb{R}$ is.

Voorbeeld 5.1.3. Stel $f(x) = x^3$.

(a) **Nulpunt**: $x = 0$

(b) **Tekentabel:**

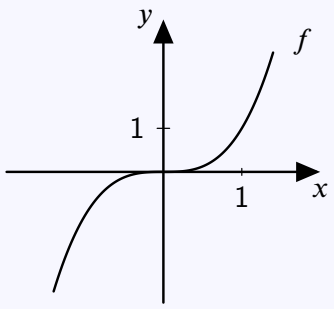
x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

(c) **Functieverloop:**

x	
$f(x)$	$\nearrow$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Veeltermfuncties



Voorbeeld 5.1.4. Stel $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$.

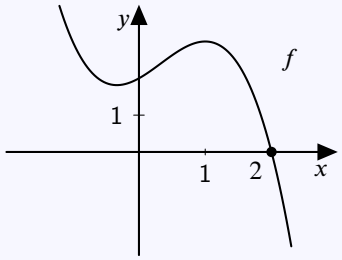
(a) **Nulpunt**: $x = 2$

(b) **Tekentabel:**

x		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$

(c) **Functieverloop:**

x		x_{dal}		x_{top}	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$



Op de grafiek zien we een lokaal minimum en maximum (er is geen absoluut minimum of maximum). We zullen later nog zien hoe we x_{dal} en x_{top} kunnen vinden met de theorie van afgeleiden.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Ongelijkheden met veeltermen

Ongelijkheden waarbij enkel machten van de onbekende voorkomen worden opgelost door een tekentabel (of functieverloop) op te stellen van een veeltermfunctie:

Algoritme 5.2.4. Een ongelijkheid met (enkel) veeltermen los je op als volgt:

(a) breng alle termen **naar dezelfde kant** van het ongelijkheidsteken (daar staat dan een *veelterm*).
(b) bepaal de **nulpunten** (want enkel daar kan de veelterm eventueel van teken veranderen!)
(c) stel een **tekentabel** op voor deze veelterm
(d) bepaal in die tekentabel de zones voor de gevraagde ongelijkheid ($>0, \geq 0, <0, \leq 0$).

Al deze zones samen vormen de gevraagde oplossingsverzameling voor de ongelijkheid.

Algoritme 5.2.5. Een **tekentabel** van een veelterm stel je op als volgt:

(a) plaats de nulpunten van klein naar groot in de eerste rij van een tabel, met telkens één vrije plaats tussen de nulpunten, en plaats in de tweede rij onder elk nulpunt het cijfer 0.
(b) neem een willekeurige waarde in elke zone (d.i. tussen elke twee opeenvolgende nulpunten), en bepaal het teken van de veelterm in dat punt (door invullen en uitrekenen).
(c) zet in de tweede rij een $+$ in de zone(s) waar je een positieve waarde uitkomt en een $-$ waar je een negatieve waarde uitkomt (in de tweede rij).

Een voorbeeld van een tekentabel ziet er dus als volgt uit (met $-3, 1$ en 4 de nulpunten):

x		-3		1		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Opmerking 5.2.1. Je kan een tekentabel ook opbouwen *in stappen* door een rij te maken voor elke factor apart. Een tekentabel voor $(x-1)(x-4)(x-7)$ wordt dan opgesteld als:

x		1		4		7	
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-4)(x-7)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

waarbij je voor de laatste rij gebruik maakt van de tekenregels voor de vermenigvuldiging.

Merk op dat voor enkelvoudige nulpunten het teken steeds verandert als je een nulpunt passeert. De veelterm $(x-2)^2(x-4)$ heeft echter een nulpunt met multipliciteit 2, en daar verandert het teken *niet*:

x		2		4	
$(x-2)^2(x-4)$	$-$	0	$-$	0	$+$

We illustreren de methode voor de eerste graad, de tweede graad en ten slotte ook voor hogere graad.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.55)

5.2 Ongelijkheden met veeltermen

Voorbeeld 5.2.1 (eerste graad)**.** Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $2x + 3 < 5$.

Een eerstegraadsongelijkheid kan onmiddellijk worden opgelost als volgt:

$$\begin{array}{rcll} 2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen }) \\ 2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\text{ delen door } 2\ ) \\ x & < & 1 & (\ x \text{ is kleiner dan } 1\ ) \end{array}$$

Dus is de oplossingsverzameling $V =]-\infty, 1\,[$.

Indien je toch de algemene methode wil volgen, doorloopt het algoritme de volgende stappen:

(a) Tel eerst bij beide leden -5 op, zodat in de expressie $2x - 2 < 0$ alles aan één kant staat.

(b) Bereken het nulpunt van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto 2x - 2$. Het nulpunt is $x = 1$.

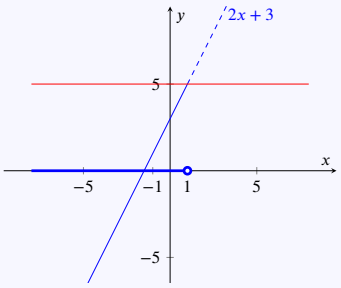
(c) Stel vervolgens de tekentabel op:

x		1	
$2x-2$	$\underbrace{-}_{<0}$	0	$+$

(d) Uit deze tekentabel lees je af voor welke waarden $2x - 2 < 0$, nl. voor x strikt kleiner dan 1.

(e) De oplossingsverzameling is dus $]-\infty, 1\,[$.

Een grafische voorstelling maakt dit ook duidelijk.



Voorbeeld 5.2.2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan: $x^2 + 4x > -3$

(a) Breng eerst alle termen naar het linkerlid: $x^2 + 4x + 3 > 0$

(b) Bepaal de nulpunten via de discriminant: $D = 4$, en $x_1 = -1$ en $x_2 = -3$ zijn de nulpunten.

(c) Stel een tekentabel op voor deze veelterm

x		-3		-1	
x^2+4x+3	$\underbrace{+}_{>0}$	0	$-$	0	$\underbrace{+}_{>0}$

(d) Lees uit deze tabel af dat $x^2 + 4x + 3 > 0$ als x strikt kleiner is dan -3 of strikt groter is dan -1.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Ongelijkheden met veeltermen

(e) De oplossingsverzameling is dus $]-\infty,-3[\cup]-1,+\infty[$.

Voorbeeld 5.2.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan: $4x^2+3x+1<0$

(a) De termen staan reeds op de goede plaats in het linkerlid.

(b) Bepaal de nulpunten via de discriminant: $D = 3^2-4\cdot 4\cdot 1 = -7$, er zijn dus geen nulpunten.

(c) Tekentabel opstellen geeft:

x	
$4x^2+3x+1$	$+$

(d) De veelterm $4x^2+3x+1$ is nergens kleiner dan 0.

(e) Er zijn geen oplossingen voor de ongelijkheid.

Voorbeeld 5.2.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan: $8x^4+6x^3-15x^2>16x+3$

Een veeltermongelijkheid met graad hoger dan twee wordt op gelijkaardige manier opgelost als een tweedegraadsongelijkheid. Het bepalen van de nulpunten is moeilijker. Bij een veelterm met gehele coëfficiënten probeer je de delers van de constante term, en daarna eventueel de regel van Horner.

(a) $8x^4+6x^3-15x^2-16x-3>0$

(b) $8x^4+6x^3-15x^2-16x-3=0 \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow} (x+1)^2(8x^2-10x-3)=0.$
Bepaal vervolgens de nulpunten van elke factor in deze ontbinding.

$$(x+1)^2=0 \text{ als } x=-1$$

en

$$8x^2-10x-3=0 \overset{D=196}{\Leftrightarrow} x_{1,2}=\frac{10\pm 14}{16}=-\frac{1}{4} \text{ of } \frac{3}{2}.$$

(c) Stel een tekentabel op voor deze veelterm:

x		-1		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$	
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$8x^2-10x-3$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$8x^4+6x^3-15x^2-16x-3$	$\underbrace{+}_{>0}$	0	$\underbrace{+}_{>0}$	0	$-$	0	$\underbrace{+}_{>0}$

(d) $8x^4+6x^3-15x^2-16x-3>0$ als x strikt kleiner is dan $-\frac{1}{4}$ maar verschilt van -1, of strikt groter dan $\frac{3}{2}$.

(e) De oplossingenverzameling is $]-\infty,-1[\cup\left]-1,-\frac{1}{4}\right[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.55)

5.3 Tekenverloop van veeltermen

5.3.1 Tekenverloop van eerstegraadsfuncties

De grafiek van een functie $x \mapsto ax + b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ is een *rechte*.
Als a positief is, is de functie strikt *stijgend* en als a negatief is strikt *dalend* .
Het (enige) *nulpunt* van de functie is $-b/a$.

Deze informatie vatten we samen in volgend **tekenverloop** (tekentabel) voor $x \mapsto ax + b$

x		$x_1 = -b/a$	
$ax + b$ met $a > 0$	$-$	0	$+$
$ax + b$ met $a < 0$	$+$	0	$-$

5.3.2 Tekenverloop van tweedegraadsfuncties

De grafiek van een functie $x \mapsto ax^2 + bx + c$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ is een *parabool*.
Als $a < 0$ is dat een zogenaamde *bergparabool*, als $a > 0$ een *dalparabool*.
Men noemt het getal $D = b^2 - 4ac$ de **discriminant** van de functie.

Als $D < 0$ heeft de functie *geen reële nulpunten*, en
als $D \geq 0$ dan vinden we de nulpunten met de *wortelformule*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Dit vatten we samen in volgende tekentabellen.

- Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende snijpunten** $x_1 < x_2$ met de x-as, en volgend tekenverloop:

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

- Als $D = 0$ zijn er **twee samenvallende snijpunten** met de x-as, en volgend tekenverloop:

x		$x_1 = x_2$	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$-$

- Als $D < 0$ zijn er **geen snijpunten** met de x-as, en volgend tekenverloop:

x	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$

Voor tweedegraadsfuncties kunnen al deze tekentabellen worden opgebouwd door volgende eenvoudige regel:

de tekentabel *begint steeds* met *het teken van* a, en het *verandert* telkens je een nulpunt passeert (waarbij -natuurlijk- als er twee nulpunten *tegelijk* worden gepasseerd, het teken ook twee keer verandert (en dus niet verandert: $+ \to - \to +$ is gewoon $+$ blijven))

Voorbeeld 5.3.1.

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $8 - 4x < 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Tekenverloop van veeltermen

Uitwerking: Het nulpunt is 2. De coëfficiënt $a = -4$ is negatief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = 2$	
$8 - 4x (a > 0)$	$+$	0	1

De oplossingsverzameling is dus $V =]2, +\infty[$

2. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$.

Uitwerking: De discriminant is $D = 25 - 4.6 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \dfrac{-5+1}{2} = -2$ en $x_2 = \dfrac{-5-1}{2} = -3$. De coëfficiënt $a = 1$ is positief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = -3$		$x_2 = -2$	
$x^2 + 5x + 6$ dus $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$.

3. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $-2x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$.

Uitwerking: De discriminant is $D = 16 - 40 = -24 < 0$, en er zijn dus geen nulpunten. De hoogstegraads-coëfficiënt is negatief, dus is de tekentabel

x	
$-2x^2 + 4x + -5$ met $a < 0$	$-$

De oplossingsverzameling is dus leeg, $V = \emptyset$.

CC BY-NC-SA 4.0