KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: Rekenen

(Versie 2026/08/25H.52)

Inhoudsopgave

1 Rekenen (light) 1.1

1.1 Breuken (basis) . . . 1.1
1.2 Breuken: bewerkingen . . . 1.4
1.3 Machten . . . 1.9

2 Rekenen 2.1

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren . . . 2.1
2.1.A Basisoefeningen haakjes . . . 2.3
2.2 Breuken . . . 2.4
2.2.A Basisoefeningen breuken . . . 2.8
2.3 Machten . . . 2.9
2.3.1 Machten met een reëel grondtal en een gehele exponent . . . 2.9
2.3.2 Machten met een strikt positief reëel grondtal en een rationale exponent . . . 2.10
2.3.3 Machten met een strikt positief reëel grondtal en een reële exponent . . . 2.11
2.3.4 Samenvatting . . . 2.11
2.4 Machten met gehele exponenten . . . 2.13
2.5 Machten en wortels . . . 2.15
2.5.A Basisoefeningen machten . . . 2.18
2.5.B Basisoefeningen wortels . . . 2.19
2.6 Orderelatie $\leqslant$ . . . 2.20
2.7 Absolute waarde . . . 2.22
2.7.A Oefeningen absolute waarde . . . 2.26
2.8 Absolute waarde . . . 2.28
2.9 Absolute waarde en afstand . . . 2.29
2.9.A Oefeningen absolute waarde . . . 2.31
2.9.B Oefeningen absolute waarde en afstand . . . 2.32
2.10 Het sommatieteken $\sum$ . . . 2.33
2.11 Rekenregels voor de sommatie $\sum$ . . . 2.40
2.11.A Oefeningen somteken . . . 2.43
2.12 De faculteit $n!$ . . . 2.46
2.12.A Oefeningen faculteit . . . 2.47
2.13 Binomiaalgetallen . . . 2.49
2.14 Telproblemen . . . 2.51
2.14.1 Telproblemen: variaties . . . 2.51
2.14.2 Combinaties, de driehoek van Pascal, het binomium van Newton . . . 2.51

INHOUDSOPGAVE

3 Korte overzichtspagina's ('ref') 3.1
3.1 Rekenregels reële getallen 3.1

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.52)

1.1 Breuken (basis)

Een breuk is een uitdrukking zoals $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ of $\frac{12}{10}$ waarmee je eenvoudig *verhoudingen* kunt weergeven. Je kunt met breuken ook *rekenen* en je kunt ze *omzetten naar kommagetallen*. Rekenen met kommagetallen is – zeker met een rekenmachine – erg handig maar dikwijls is rekenen met breuken toch veel duidelijker en sneller. Het is daarom belangrijk met beide vertrouwd te zijn.

Voorbeeld 1.1.1 (Breuken en pralines)**.**

Een bekende Belgische chocolatier verkoopt zeer lekkere (maar jammer genoeg ook tamelijk dure) pralines in doosjes van 8 stuks. In elk doosje zitten er steeds twee met witte chocolade en zes met bruine chocolade. Dit betekent dat twee van de acht pralines wit zijn en zes van de acht pralines bruin. Twee-van-de-acht schrijf je wiskundig als $\frac{2}{8}$, zes-van-de-acht als $\frac{6}{8}$.

Het is duidelijk dat als je twee doosjes koopt er vier-van-de-zestien, dus $\frac{4}{16}$ witte pralines zijn. Als de chocolatier ook kleinere doosjes met dezelfde verhouding witte en bruine pralines zou willen verkopen, kan dat enkel in doosjes van vier, met één witte en drie bruine pralines.

Hoeveel doosjes je ook koopt, telkens zal er één op de vier pralines wit zijn. We zeggen

$$\text{één vierde of } \frac{1}{4} \text{ of ook wel } 1/4 \text{ (van de) pralines is wit.}$$

Het is duidelijk dat $1/4$, $2/8$ of $25/100$ precies *dezelfde verhouding* uitdrukken van witte pralines ten opzichte van alle pralines.

We zullen verder in deze tekst uitleggen waarom je ook kan zeggen dat 25% van de pralines wit is, of dat de verhouding van de witte pralines ten opzichte van alle pralines 1 op vier is, of dat er 0,25 keer zoveel witte pralines zijn als er in het totaal pralines zijn.

Oefening 1.1.1 (Uitdaging?)**.**

Wie tijd heeft om even na te denken kan opmerken dat je ook kan zeggen dat er *drie keer zoveel* bruine pralines zijn als witte pralines. Je kunt je dan afvragen waar dat getal *drie* precies vandaan komt als één op *vier* van alle pralines wit is. En hoe werkt dat als één op zes, of één op drie van alle pralines wit is? Wat is dan de verhouding van de witte pralines ten opzichte van de bruine?

Met de *breuk* $\frac{1}{4}$ komt het *getal* $0,25$ overeen door 'de breuk uit te rekenen als een deling': $\frac{1}{4} = 1/4 = 0,25$. Merk wel op dat ook de breuken $\frac{2}{8}$ en $\frac{25}{100}$ overeenkomen met het getal $0,25$. Het blijkt handig om af te spreken dat breuken zoals $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{25}{100}$ en $\frac{0,25}{1}$ allemaal aan elkaar gelijk zijn.

We leggen deze afspraken formeler vast in volgende definitie:

Definitie 1.1.1.

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$, met a en b getallen, met $b \neq 0$.

We noemen a de **teller** van de breuk, b de **noemer**, en de streep tussen beide getallen de **breukstreep**.

De **(getal)waarde** van $\frac{a}{b}$ is het resultaat van de deling van a door b, meestal een kommagetal.

Twee breuken $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ zijn aan elkaar **gelijk** als ze dezelfde waarde hebben.

Merk op dat twee breuken met onderling verschillende tellers en noemers dus toch aan elkaar gelijk kunnen zijn: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{50}{100}$ want ze hebben allemaal de waarde $0,5$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Breuken (basis)

Alle breuken die gelijk zijn aan $\frac{1}{2}$ kan je schrijven als $\frac{k \cdot 1}{k \cdot 2}$ met k een getal verschillend van nul:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} \qquad \frac{50}{100} = \frac{50 \cdot 1}{50 \cdot 2} \quad \text{en} \quad \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{2\pi \cdot 1}{2\pi \cdot 2}$$

en al deze breuken zijn ook onderling gelijk want ze hebben elk waarde $\frac{1}{2} = 0,5$. In het algemeen geldt:

Eigenschap 1.1.1. Voor reële getallen a, b en k met $b \neq 0$ en $k \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} = \frac{\cancel{k} \cdot a}{\cancel{k} \cdot b}$$

Vb: $\frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{5}{15}$ en $\frac{-1}{-2} = \frac{(-1) \cdot (-1)}{(-1) \cdot (-2)} = \frac{1}{2}$

Uit deze eigenschap volgt dat in een breuk geldt dat:
teller en noemer mag je vermenigvuldigen met eender welk getal (behalve 0)
teller en noemer mag je delen door eender welk getal (behalve 0)

Opmerking 1.1.1 (Veel te veel gemaakte fouten)**.**

Sommigen gebruiken tot hun scha en schande ook ongeoorloofde varianten van deze schrappingsregel:

$$\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} \neq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{(schrap al wat stoort)}$$

$$\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} \neq \frac{0}{0+1} = 0 \quad \text{(schrap al wat stoort)}$$

$$\frac{2x}{2x+1} = \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}+1} \neq \frac{x}{x+1} \quad \text{(schrap al wat stoort)}$$

Erg dikwijls zijn de getallen in de breuk *gehele* getallen, en dan is volgende afspraak zinvol:

Definitie 1.1.2.

Een breuk is **vereenvoudigd** als er geen gemeenschappelijke factor meer kan worden weggedeeld.

Voorbeeld 1.1.2. De breuk $\frac{1}{3}$ is vereenvoudigd, maar $\frac{2}{6}$, $\frac{-1}{-3}$ en $\frac{x}{3x}$ zijn dat niet.

Voorbeeld 1.1.3. Vereenvoudig de breuk $\frac{36}{48}$.

Uitwerking: Er zijn twee mogelijkheden om een breuk te vereenvoudigen:

- Je ziet of zoekt de grootst mogelijke gemeenschappelijke deler van de teller en de noemer en deelt die weg. Je krijgt onmiddellijk de vereenvoudigde breuk. Nadeel is dat het vinden van die grootste gemeenschappelijke deler soms niet zo eenvoudig is.
  De grootste gemeenschappelijke deler van 36 en 48 is 12, dus geldt
  $$\frac{36}{48} = \frac{36/12}{48/12} = \frac{3}{4}.$$
- Je ziet of zoekt eender welke deler van teller en noemer en deelt die weg. Daarna zoek je opnieuw een gemeenschappelijke deler, totdat er geen meer zijn. Nadeel is dat je dikwijls moet zoeken en delen; voordeel is dat het zoeken makkelijker is.
  $$\frac{36}{48} = \frac{36/2}{48/2} = \frac{18}{24} = \frac{18/2}{24/2} = \frac{9}{12} = \frac{9/3}{12/3} = \frac{3}{4}$$
  De volgorde waarin je deze delers vindt, maakt niet uit. Zo had je bijvoorbeeld ook eerst kunnen delen door 3. Misschien had je 6 als gemene deler gevonden; dat had ook gewerkt.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Breuken (basis)

Opmerking 1.1.2. De teller en noemer beide **delen of vermenigvuldigen met hetzelfde getal** verandert de waarde van een breuk niet. Meestal wordt gevraagd of verwacht een breuk zo ver mogelijk te vereenvoudigen. Vergeet dit dus niet!

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Breuken: bewerkingen

Om breuken op te tellen moet je ze op gelijke noemer brengen, vermenigvuldigen doe je door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar. Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met zijn omgekeerde. Wie voldoende vertrouwd is met de volgende rekenregels kan dit hoofdstukje overslaan. Maar 'voldoende vertrouwd' moet je in dit geval wel lezen als 'tamelijk heel erg vertrouwd, zodat je echt niet meer moet nadenken over deze regels'.

Eigenschap 1.2.1 (Basisbewerkingen breuken)**.**

Zodra de noemers verschillend zijn van 0, gelden volgende regels voor breuken:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$ (kruisproduct) Vb: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \iff 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{ad + cb}{bd}$ (som) Vb: $\frac{1}{2} + \frac{5}{7} = \frac{7}{14} + \frac{10}{14} = \frac{17}{14}$

$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ (tegengestelde) Vb: $-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2-3}{2} = \frac{-3+2}{2} \neq \frac{3+2}{2}$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ (product) Vb: $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ (maal omgekeerde) Vb: $\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{7}{10}$

Enkel voor wie toch wat onzeker is over rekenen met breuken, leggen we verder de regels in detail uit. De anderen kunnen dit deeltje overslaan.

Opmerking 1.2.1.

De equivalentie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$ noemt met **kruiselings vermenigvuldigen**, en is dikwijls de snelste manier om breuken weg te werken. De regel volgt uit het op gelijke noemer brengen:

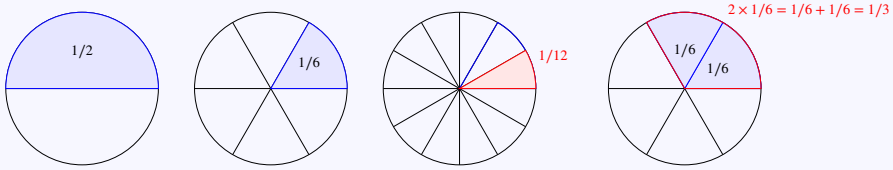
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad \text{want} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b} \iff ad = bc$$

We noemen $-\frac{a}{b}$ de **tegengestelde breuk**, en $\frac{b}{a}$ de **omgekeerde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Delen door een breuk $\frac{a}{b}$ is dus hetzelfde als vermenigvuldigen met zijn omgekeerde $\frac{b}{a}$.

Voorbeeld 1.2.1 (Breuken en taarten)**.**

Als T één taart voorstelt, dan is $\frac{1}{2}T$ een halve taart, en $\frac{1}{6}T$ een zesde deel van een taart.



Het is duidelijk dat twee keer één zesde van een taart samen één derde geeft, dat de helft van één zesde stuk één

1.2 Breuken: bewerkingen

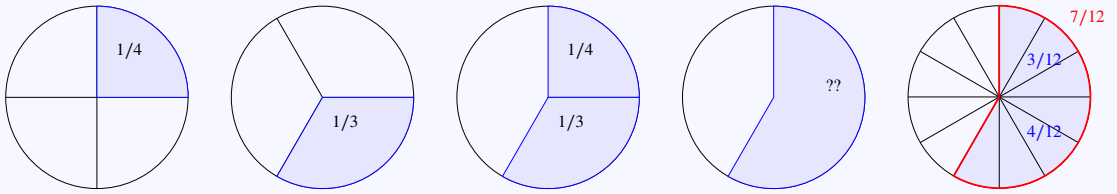
twaalfde van de taart is. In formules wordt dat

$$\frac{1}{6}T + \frac{1}{6}T = 2 \cdot \frac{1}{6}T = \frac{2}{6}T = \frac{1}{3}T$$

en

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}T = \frac{1}{12}T$$

De situatie wordt jammer genoeg ingewikkelder als je bij één derde van een taart een stuk van één vierde van een taart toevoegt. Hoeveel taart heb je dan ...?
We visualiseren deze optelling hieronder:



In de tekening zie je dat je een beetje meer dan een halve taart hebt. Dat blijkt ook uit de getallen: een derde stuk van een taart is natuurlijk groter dan een vierde stuk. Om een halve taart te maken, heb je bij de één vierde taart nog één vierde taart nodig. Met zo'n derde deel heb je dus te veel. Maar hoeveel precies?

De geniale oplossing is om het vierde stuk nog eens in drie te verdelen, dan heb je drie twaalfde van de taart, en het derde deel in vier te verdelen, dat levert vier twaalfde van de taart. Samen heb je dus $3+4=7$ twaalfden. Deze breuk kun je niet eenvoudiger met één getal of één verhouding zeggen....

Om te vermijden dat je steeds diep moet nadenken over het optellen van stukken taart, hebben wiskundigen gelukkig een gemakkelijke rekenregel gevonden om ongelijke stukken taart op te tellen: je brengt alles op gelijke noemer. Dat is natuurlijk gewoon hetzelfde als de taart in 12 verdelen, maar zodra je ermee vertrouwd bent, hoef je niet meer aan de taart te denken.

Eigenschap 1.2.2.

Breuken optellen of aftrekken doe je door ze eerst op gelijke noemer te brengen:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{ad+cb}{bd}$$

Vb: $\frac{1}{2} + \frac{5}{7} = \frac{7}{14} + \frac{10}{14} = \frac{17}{14}$

Voorbeeld 1.2.2 (Sommen met getallen)**.**

Erg eenvoudige gevallen: $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$ en $\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3-4}{5} = \frac{-1}{5}$

Een beetje moeilijker: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$

The Next Level: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

Voorbeeld 1.2.3 (Sommen met letters)**.**

Erg eenvoudig: $\frac{3+a}{5} + \frac{a}{5} = \frac{3+2a}{5} = \frac{7}{5}$ en $\frac{x+1}{x} - \frac{1-2x}{x} = \frac{x+1-(1-2x)}{x} = \frac{3x}{x} = 3$

Wat moeilijker: $\frac{a+1}{2a} + \frac{1}{2} = \frac{a+1}{2a} + \frac{a}{2a} = \frac{2a+1}{2a}$

The Next Level: $\frac{a+b}{2a} + \frac{a-b}{3b} = \frac{3ba+3b^2}{6ab} + \frac{2a^2-2ab}{6ab} = \frac{2a^2+ab+3b^2}{6ab}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Breuken: bewerkingen

Voorbeeld 1.2.4 (Een wat ingewikkelder geval)**.**

Bereken $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{41}{24}$.

Je moet beide breuken op gelijke noemer brengen. Het gemakkelijkste is als gemeenschappelijke noemer het product te nemen van de noemers, namelijk $6\cdot 8=48$. Dat werkt *altijd*.

We maken dus in de eerste breuk $\frac{5}{6}$ de noemer 48 door de noemer te vermenigvuldigen met 8. Om de breuk gelijk te maken, moeten we ook de teller vermenigvuldigen met 8. Voor de tweede breuk doen we hetzelfde, maar nu vermenigvuldigen we teller en noemer met 6:

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 8}{6\cdot 8}=\frac{40}{48} \quad \text{en} \quad \frac{7}{8}=\frac{7\cdot 6}{8\cdot 6}=\frac{42}{48}$$

We hebben nu twee breuken met gelijke noemer, dus kunnen we die optellen:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{40}{48}+\frac{42}{48}=\frac{40+42}{48}=\frac{82}{48}$$

Maar, de breuk $\frac{82}{48}$ kan je nog vereenvoudigen door teller en noemer door twee te delen:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{82}{48}=\frac{41}{24}$$

Probeer telkens je einduitkomst zo ver mogelijk te vereenvoudigen!

Een tweede manier om een gelijke noemer te krijgen is door de methode van het kleinste gemene veelvoud, afgekort kgv. (Het kgv van 2 getallen is het kleinste getal dat een veelvoud is van allebei de getallen.) Het kgv van 6 en 8 is 24. 24 is een veelvoud van 6, maar ook van 8. Het is bovendien het kleinste getal dat zulk een veelvoud is. We kiezen dus als gemeenschappelijke noemer het getal 24. Dat betekent dat we in de breuk $\frac{5}{6}$ moeten vermenigvuldigen met 4, en voor de breuk $\frac{7}{8}$ teller en noemer vermenigvuldigen met 3:

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24} \text{ en } \frac{7}{8}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24}$$

Opnieuw vinden we twee breuken met gelijke noemers, die kunnen we dus optellen:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{20}{24}+\frac{21}{24}=\frac{41}{24}$$

De uitkomst is meteen in vereenvoudigde vorm. Dit heb je vaak als je de methode van het kgv toepast. Dit is niet altijd even gemakkelijk. Je mag zelf kiezen hoe je het doet.

Voorbeeld 1.2.5 (Een uitgebreid voorbeeld met drie breuken)**.**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9} &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{9} && \text{sommen en verschillen van links naar rechts}\\
&= \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}\right)+\frac{1}{9} && \text{de gemeenschappelijke noemer wordt } 2\cdot 3\\
&= \left(\frac{3-2}{6}\right)+\frac{1}{9} && \text{breuken met dezelfde noemer}\\
&= \frac{1}{6}+\frac{1}{9}\\
&= \frac{1\cdot 3}{6\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{9\cdot 2} && \text{gemeenschappelijke noemer wordt } 18\\
&= \frac{3}{18}+\frac{2}{18}\\
&= \frac{3+2}{18}=\frac{5}{18} && \text{breuken met dezelfde noemer optellen door som van tellers}
\end{aligned}$$

Bij deze opgave had je in plaats van het kgv van 6 en 9 ook gewoon $6\cdot 9=54$ als gelijke noemer kunnen nemen. Dat is wel al een groot getal om mee te rekenen. Bovendien zou je de einduitkomst moeten vereenvoudigen. Probeer waar mogelijk het kgv te nemen.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Breuken: bewerkingen

Opmerking 1.2.2. Breuken kan je enkel optellen of aftrekken als je ze op gelijke noemer brengt!

Definitie 1.2.1. Het **tegengestelde** van een breuk is 'min de breuk', waarbij je het minteken ook in de teller of in de noemer mag zetten:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Vb: $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$ en $-\frac{b+1}{1-b} = \frac{-b-1}{1-b} = \frac{b+1}{b-1}$

Opmerking 1.2.3. Zet het minteken voor de breuk steeds **voor de hele teller**, en gebruik dus haakjes:

$$-\frac{3+5}{7} = \frac{-(3+5)}{7} = \frac{3+5}{-7}.$$

Er gebeuren wel eens grote ongelukken omdat iemand even vergeet dat $-\frac{3+5}{7} \neq \frac{-3+5}{7}$.

Omgekeerd geldt dus ook dat als er één getal in de teller een minteken heeft, je dat minteken niet zonder meer voor de hele breuk mag plaatsen: $\frac{-2+5}{4} \neq -\frac{2+5}{4}$, want $\frac{-2+5}{4} = \frac{-(2-5)}{4} = -\frac{2-5}{4}$.

Net zoals met de teller, moet je ook bij de noemer opletten met haakjes: $\frac{6}{-2+3} \neq -\frac{6}{2+3}$ maar wel

$$\frac{6}{-2+3} = \frac{6}{-(2-3)} = -\frac{6}{2-3} = \frac{-6}{2-3}.$$

Breuken **vermenigvuldigen** is een stuk eenvoudiger dan breuken optellen:

Eigenschap 1.2.3.

Je vermenigvuldigt breuken door tellers met tellers, en noemers met noemers te vermenigvuldigen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Vb: $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}$

Voorbeeld 1.2.6.

Erg eenvoudige geval: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$

Vermenigvuldig met een getal: $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$

Eigenschap 1.2.4.

Een breuk delen door een getal is de *noemer* vermenigvuldigen met dat getal.

Voorbeeld 1.2.7. $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$

Delen door 5 is vermenigvuldigen met $\frac{1}{5}$. Let er wel op de *hele noemer* te vermenigvuldigen:

$$\frac{2}{3+2} : 5 = \frac{2}{(3+2)} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{(3+2) \cdot 5} = \frac{2}{25}$$

Volgende regel geldt voor delen door een breuk:

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Breuken: bewerkingen

Eigenschap 1.2.5.

Delen door een breuk is *vermenigvuldigen met het omgekeerde* van die breuk

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Vb: $\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{7}{10}$

Dit is een eenvoudig toe te passen regel:

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}$$ delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk

$$= \frac{12}{10}$$ breuken vermenigvuldigen is tellers en noemers vermenigvuldigen

$$= \frac{6}{5}$$ teller en noemer zijn deelbaar door 2

Meestal schrijven we de deling van breuken als *een breuk van breuken*: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$

waarbij je een goede scheiding maakt tussen tellers en noemers door de middelste breukstreep breed genoeg te maken. Er geldt dus:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Machten

Als je iets met zichzelf vermenigvuldigt, dan kun je dat korter schrijven met behulp van machten:

$$2 \times 2 \times 2 \overset{\text{notatie}}{=} 2^3$$

We spreken 2^3 uit als 'twee tot de macht 3'. We zeggen ook wel wel dat je 2 tot de 3e macht 'verheft'. Machtsverheffen dus. Op dezelfde manier is $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ korter te schrijven als 10^5. Het getal 5 in 10^5 heet de 'exponent' en 10 is het 'grondtal'.

Definitie 1.3.1. (Machtsverheffing)

De n-**de macht** van een getal a is genoteerd a^n, bijvoorbeeld 3^4.
We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.

Als n een geheel positief getal is, dan is

$$a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$$ Vb: $2^3 = 2 \times 2 \times 2$

Als de exponent negatief is, schrijven we de macht in de noemer:

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$ Vb: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2}$

Als de exponent 0 is (en het grondtal is niet 0), is de macht altijd 1:

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$$ Vb: $2^0 = 1$ en $(-2)^0 = 1$

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Voorbeeld 1.3.1 (Machten met gehele exponent)**.**

1. $5^2 = 25$
2. $-5^2 = -25$
3. $(-5)^2 = 25$
4. $(2+3)^2 = 25$
5. $2^2 + 3^2 = 13$
6. $(2+3)^2 - (2^2 + 3^2) = 12$
7. $2^{-1} = 0.5$
8. $10^3 = 1000$
9. $10^{-3} = 0.001$

Eigenschap 1.3.1 (Rekenregels machten)**.**

$(xy)^n = x^n y^n$ (macht van product) Vb: $(3y)^2 = 3y \cdot 3y = 3 \cdot 3 \cdot y \cdot y = 3^2 y^2 = 9y^2$

$x^m x^n = x^{m+n}$ (product met gelijk grondtal) Vb: $x^3 x^2 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^{3+2} = x^5$

$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ (macht van macht) Vb: $\left(x^3\right)^2 = x^3 \cdot x^3 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^{3 \cdot 2} = x^6$

$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ (macht van breuk) Vb: $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x \cdot x \cdot x}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8}$

Met bovenstaande definitie en rekenregels heb je krachtig gereedschap om uitdrukkingen met machten te vereenvoudigen. En als je je uitdijende collectie gereedschap handig combineert, wordt het nog sterker!

Bijvoorbeeld: hoe kun je $\frac{5^2}{5^3}$ vereenvoudigen tot een macht van 5?
Wellicht ken je de regel daarvoor, maar indien niet (of als je niet zeker bent) dan kun je zelf bedenken hoe deze vereenvoudiging aan te pakken:

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Machten

Mogelijke aanpak: Je kunt eerst de breuk schrijven als een product $\frac{5^2}{5^3} = 5^2 \cdot \frac{1}{5^3}$ en dan de definitie van negatieve machten gebruiken om de 5^3 uit de noemer te halen:

$$\frac{5^2}{5^3} = 5^2 \frac{1}{5^3} = 5^2 \cdot 5^{-3} = 5^{2+-3} = 5^{-1}$$

We zien hier dat:

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ (breuk met gelijk grondtal) Vb: $\frac{x^2}{x^3} = x^{2-3} = x^{-1}$

Andere mogelijke aanpak: Je kunt ook eerst teller en noemer delen door hetzelfde 'getal' (*zie breuken*). Dit ken je wellicht als 'schrappen'.

$$\frac{5^2}{5^3} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{(5 \cdot 5)/5^2}{(5 \cdot 5 \cdot 5)/5^2} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5}}{5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}} = \frac{1}{5} = 5^{-1}$$

Waarschuwing:

$$\frac{x + 5^2}{5^3} \neq \frac{x}{5}$$

Je kunt hier niet zomaar 'schrappen', want je zou dan ook de x moeten delen door 5^2. Je verkrijgt dan

$$\frac{x + 5^2}{5^3} = \frac{\frac{x}{5^2} + 1}{5}$$

en dat is wel juist maar ook wel lelijk en zeker niet eenvoudiger dan de eerste uitdrukking.

Voorbeeld 1.3.2 (Uitdrukkingen met machten vereenvoudigen)**.**

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^5$
2. $(2^2)^3 = 2^6$
3. $2^{(2^3)} = 2^8$
4. $\frac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^3$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = 2604^5$

Machtsverheffen heeft veel te maken met worteltrekken. Immers, worteltrekken is de inverse (omgekeerde) bewerking van machtsverheffen. Dit zien we bijvoorbeeld bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen:

$$\begin{aligned} & x^2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & x = \sqrt{9} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{9} \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 \quad \text{of} \quad x = -3 \end{aligned}$$

Een wortel kunnen we dan ook schrijven met behulp van een macht, bijvoorbeeld $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$. Dit betekent dat we de rekenregels voor machten ook kunnen gebruiken voor wortels.

Definitie 1.3.2. We schrijven de vierkantswortel ook als 'tot de macht een half':

$\sqrt{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{2}}$ Vb: $\sqrt{25} \overset{\text{def}}{=} 25^{\frac{1}{2}} = 5$

$a^{\frac{1}{2}}$ is het (positieve) getal waarvan de 2e macht gelijk is aan a. Vb: $9^{\frac{1}{2}} = 3$ want $3^2 = 9$.

Meer in het algemeen schrijven we ook n-de machtswortels als 'tot de macht $\frac{1}{n}$':

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Machten

$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} = b \iff b^n = a$ Vb: $\sqrt[3]{8} \overset{\text{def}}{=} 8^{\frac{1}{3}} = 2$ want $2^3 = 8$

Opmerking 1.3.1.

(a) Voor $n = 2$ schrijven we gewoon $\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt[2]{a}$.

(b) $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

De bovenstaande definitie is enkel zinvol als er inderdaad een dergelijk uniek positief getal b bestaat. Dat gaat goed voor POSITIEVE a en b. Voor negatieve grondtallen is de situatie subtieler. Een negatief getal heeft géén vierkantswortel (in de reële getallen), maar bv wel een derdemachtswortel. Voorbeeld: $\sqrt[3]{-8} = -2$ want $2^3 = -8$. In praktische situaties kom je dit weinig tegen.

Voorbeeld 1.3.3. Bereken

1. $\dfrac{4}{\sqrt{4}} = 2$

Uitwerking: $\dfrac{4}{\sqrt{4}} = \dfrac{4}{2} = 2$

2. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Uitwerking: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = (4 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren

Optellen $(2+3)$ en vermenigvuldigen $(2\cdot 3)$ zijn de twee basisoperaties met getallen. Bij combinaties zoals $2+3\cdot 5$ wordt om historische redenen eerst vermenigvuldigd en dan opgeteld, dus $2+3\cdot 5 = 2+(3\cdot 5) = 2+15 = 17$. Als je de andere volgorde wil *moet* je haakjes zetten: $(2+3)\cdot 5 = 5\cdot 5 = 25$.

Zeker zodra er ook met letters wordt gerekend, wordt het snel belangrijk om naargelang het geval van sommen producten te kunnen maken, of omgekeerd van producten sommen te maken:

$2\cdot(a+3) = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2a+6$	product wordt som	(weliswaar met een term $2a$ die zelf een product is)
$2\cdot a+6 = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2\cdot(a+3)$	som wordt product	(weliswaar met een factor $a+3$ die zelf een som is)

Uitwerken van haakjes betekent *producten* herschrijven als *sommen*: $2(a+b) = 2a+2b$.
Ontbinden in factoren betekent een *som* (of getal) herschrijven als een *product*: $2a^2+6a = 2a(a+3)$.

Voor 'haakjes uitwerken' en 'ontbinden' gelden dezelfde regels, maar ze moeten telkens in de andere richting worden gelezen. Van links naar rechts zeggen ze hoe je een product (of een macht, dat is ook een product) schrijft als een som, maar van rechts naar links gelezen zeggen ze hoe je een som schrijft als een product.

Eigenschap 2.1.1. Voor rekenen met letters of met reële getallen geldt:

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ac+bc && \text{(distributiviteit van } \cdot \text{ t.o.v. } +)\\
a(c+d) &= ac+ad && \text{(idem, maar met som rechts)}\\
(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd && \text{(want gelijk aan } (a+b)c+(a+b)d)\\
-(a+b) &= -a-b && \text{(want } (-1)(a+b) = (-1)a+(-1)b)\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \text{(kwadraat van een tweeterm)}\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \text{(kwadraat van tweeterm via } (a+(-b))^2)\\
a^2-b^2 &= (a+b)(a-b) && \text{(verschil van twee kwadraten)}
\end{aligned}$$

Als referentie vermelden we ook volgende formules voor hogere machten:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad \text{(derdemacht van een tweeterm)}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \text{(Binomium van Newton)}$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad \text{(som van derdemachten)}$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad \text{(verschil van derdemachten)}$$

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1}) \qquad \text{(verschil van } n^{\text{de}} \text{ machten)}$$

$$a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1}) \qquad \text{(som } n^{\text{de}} \text{ machten, } n \textbf{ oneven})$$

Oefening 2.1.1. Werk de haakjes uit en vereenvoudig:

1. $a(x+3)-3a = \ldots\ldots$

2. $ax+3+(-ax) = \ldots\ldots$

3. $2ax+3-(-ax) = \ldots\ldots$

4. $1-(x-y+1)+x = \ldots\ldots$

5. $1-(x-y-1) = \ldots\ldots$

6. $1-(p-q)+p = \ldots\ldots$

Oefening 2.1.2. Werk de haakjes uit:

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.52)

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren

1. $2(a+3)^2 = \ldots\ldots$

2. $2(a-3)^2 = \ldots\ldots$

3. $2(-a-3)^2 = \ldots\ldots$

4. $(x+y)(x+3y)^2 = \ldots\ldots$

Voorbeeld 2.1.1. Breng de voorgestelde factor buiten de haakjes, en vereenvoudig zo ver mogelijk.

1. $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot \left(4p+5\right)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4(p+1)) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4p + 4) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (4p+5)\,.
\end{aligned}$$

2. $(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) = \frac{4r}{3} \cdot (5)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) &= \frac{4r}{3} \cdot (3p+2) - \frac{4r}{3} \cdot 3 \cdot (p-1) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3 \cdot (p-1)) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3p + 3) \\
&= \frac{4r}{3} \cdot 5.
\end{aligned}$$

3. $\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 = \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 &= \frac{xs}{8} \cdot 1 + \frac{xs}{8} \cdot 2s + \frac{xs}{8} \cdot 24x^2s^2 \\
&= \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2).
\end{aligned}$$

Oefening 2.1.3. Ontbind in factoren.

1. $81x^2y^2 - 25 = \ldots\ldots$

2. $9r^2 - 24r + 16 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.52)

2.1.A Basisoefeningen haakjes

Oefening 2.1.4. Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan en vereenvoudig:

1. $23 \cdot (1000 - 1) = \ldots\ldots$
2. $(923 + 77)/4 = \ldots\ldots$
3. $-\dfrac{2x + 4xy}{-2x} = \ldots\ldots$
4. $p - (p + q) + 2q = \ldots\ldots$

Oefening 2.1.5. Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan en vereenvoudig:

1. $18x + 24y + 30z = \ldots\ldots$
2. $20ab^3 + 30bc + 25b^2c^3\sqrt{d} = \ldots\ldots$
3. $-9x^2y - 3xy = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{p^2q^3}{8} - \dfrac{p^2q}{2} + pq = \ldots\ldots$

Oefening 2.1.6. Ontbind in factoren (of vul aan), met $u, s, t \in \mathbb{R}$.

1. $24st + 12t - 60ut = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{st^2}{8} + \dfrac{s^2t^2}{12} + s^2t = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{2s + 3}{2} + (2s + 3)^2 = \dfrac{2s + 3}{2} \cdot (\ldots\ldots)$
4. $\left(\dfrac{5s}{8}\right)(u - 1) - 5s(3u + 1) = \left(\dfrac{5s}{8}\right) \cdot (\ldots\ldots)$

Oefening 2.1.7. Ontbind in factoren, met $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $25x^2y^4 - 64 = \ldots\ldots$
2. $4x^2 + 24xy + 36y^2 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Een *breuk* is per definitie een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$. Met de breuk $\frac{a}{b}$ associëren we het resultaat van de deling van a door b, dat is een getal dat we ook noteren als $\frac{a}{b}$. Bijvoorbeeld:

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{1}{2} = 0,5 \qquad \frac{1}{3} = 0,333\ldots \qquad \text{en} \qquad \frac{\pi}{2} = 1,57\ldots.$$

Voor breuken definiëren we volgende regels voor gelijkheid, optelling en vermenigvuldiging:

Definitie 2.2.1 (Definitie gelijkheid en basisbewerkingen breuken)**.**

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $b \neq 0$.

We noemen a de **teller** en b de **noemer**. Zodra de noemers verschillend zijn van 0, geldt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \qquad \text{(gelijkheid van (getalwaarde van) breuken (kruisproduct))}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{ad + cb}{bd} \qquad \text{(optelling (op gelijke noemer brengen))}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \text{(vermenigvuldiging (teller} \times \text{teller, noemer} \times \text{noemer))}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \text{(deling (maal omgekeerde))}$$

Twee breuken zijn **gelijknamig** als ze dezelfde noemer hebben.
Als zowel a als b verschillend zijn van nul, is $\frac{b}{a}$ de **omgekeerde breuk van** $\frac{a}{b}$.

Opmerking 2.2.1.

- Gelijke breuken hebben dezelfde getalwaarde:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ want } 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \text{ en beide hebben getalwaarde } 0,5.$$

- Eenzelfde getal kan weergegeven worden door meerdere breuken: $2 = \frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{50}{25}$.
- Uitdrukkingen van de vorm $\frac{a}{0}$ zijn niet gedefinieerd.
- We noteren breuken ook als a/b (dus met een *schuine* streep: $a/b \overset{\text{notatie}}{=} \frac{a}{b}$).
- Deze definitie is alleen geformuleerd voor breuken van reële getallen. We zullen de definitie verder ook stilzwijgend gebruiken voor bijvoorbeeld breuken van letters zoals $\frac{a}{x}$, van veeltermen zoals $\frac{x^2+1}{x-1}$, van functies zoals $\frac{\sin(x)}{2x}$ en zelfs voor breuken van breuken:

$$\frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ maar } \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{0,5}{4} = 0,125.$$

Voor breuken van breuken spreken we dus af dat de *grootte* en de precieze *plaats* van de symbolen belangrijk is. In bovenstaand voorbeeld mogen beide breukstrepen niet even groot

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

zijn want dan is de uitdrukking niet ondubbelzinnig. We schrijven voor de leesbaarheid de grootste breukstreep altijd in het midden van de relevante formule. Dus

$$x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}} \text{ maar nooit } x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}}.$$

- Met behulp van het kleinste gemene veelvoud kan de optelling soms sneller:

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18} = \frac{5\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2} = \frac{15}{36}+\frac{14}{36} = \frac{29}{36} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{5}{12}+\frac{7}{18} = \frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}+\frac{7\cdot 12}{18\cdot 12} = \frac{174}{216} = \ldots$$

Oefening 2.2.1. Voer de bewerking uit en geef een zo eenvoudig mogelijke breuk als resultaat.

1. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3} = \ldots\ldots$
2. $\frac{3}{5}+\frac{1}{2} = \ldots\ldots$
3. $\frac{1+1}{1} = \ldots\ldots$
4. $\frac{1}{1+1} = \ldots\ldots$

Eigenschap 2.2.1 (Eenvoudige maar belangrijke gevolgen)**.**

Zodra de noemers verschillend zijn van 0, geldt voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a\cdot c}{a\cdot d} = \frac{\cancel{a}\cdot c}{\cancel{a}\cdot d} = \frac{c}{d} \qquad \text{(gemeenschappelijke factor } a \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{a\cdot d} \qquad \text{(met factor } a \text{ vermenigvuldigen)}$$

$$a\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{d} \qquad \text{(getal maal breuk)}$$

$$\frac{a\cdot c}{d} = a\cdot\frac{c}{d} \qquad \text{(factor uit teller halen)}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{(breuken optellen, gelijke noemers)}$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b}+\frac{c}{b} \qquad \text{(som in teller splitsen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c} = \frac{a}{c} \qquad \text{(gelijke noemer } \frac{1}{b} \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c} = \frac{a}{b\cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door getal is maal in noemer)}$$

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{c} \qquad \text{(getal gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Opmerking 2.2.2.

- Deze eigenschappen zijn eenvoudige gevolgen van de vorige definities. Het is erg belangrijk de evidentie van deze eigenschappen in te zien, en ze vlot te kunnen toepassen op zowel numerieke als symbolische uitdrukkingen.
- Het heeft geen zin deze eigenschappen *van buiten* te leren, je moet ze *van binnen* kennen, dus door en door kennen. Dat is hopelijk al het geval, maar indien niet moet je hierover (erg veel) oefeningen maken.
- De eerste zes formules zijn twee per twee elkaars omgekeerde. We zullen dat verder niet meer zo uitvoerig weergeven, maar denk er aan dat elke gelijkheid in twee richtingen kan worden gelezen. $A = B$ betekent dat A gelijk is aan B, maar dus ook dat B gelijk is aan A. De formule $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ kan je dus van links naar rechts lezen om twee breuken op te tellen, maar ook van rechts naar links om een optelling *in* een breuk te vervangen door een optelling *van* breuken.

Eigenschap 2.2.2 (Eenvoudige maar enigszins gekke gevolgen)**.**

$$
\begin{aligned}
a + c &= d \cdot \left(\frac{a}{d} + \frac{c}{d}\right) && \text{(niet bestaande factor buiten haakjes brengen)}\\
a &= \frac{a}{1} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken)}\\
a &= \frac{1}{1/a} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken (variant))}\\
a \cdot b &= \frac{a}{1/b} && \text{(van een product een breuk maken)}\\
\frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} && \text{(van een breuk een product maken)}\\
a \cdot b = 1 &\iff a = \frac{1}{b} && \text{(van een product een breuk maken (variant))}
\end{aligned}
$$

Opmerking 2.2.3 (Vaak gemaakte fouten)**.**

Zelfs als de noemers verschillend zijn van 0, geldt *in het algemeen niet*:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} && \text{(som in de noemer)}\\
&\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} && \text{(schrap al wat stoort)}\\
&\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} = \frac{0}{0+1} = 0 && \text{(schrap al wat stoort (variant 1))}\\
&\frac{2x}{2x+1} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}x+1} = \frac{x}{x+1} && \text{(schrap al wat stoort (variant 2))}
\end{aligned}
$$

Pas op: sommige van de formules gelden *soms* toch wel. De laatste formule bijvoorbeeld:

$$\frac{2x}{2x+1} = \frac{x}{x+1}$$

is een erg zinvolle en mogelijk interessante formule, als je ze beschouwt als een vergelijking in x. Voor x verschillend van $-1/2$ en verschillend van -1 (want daar is de noemer 0, en bestaat de breuk al niet), onderzoeken we wanneer de formule waar is:

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2x+1} &= \frac{x}{x+1} \\ &\Longleftrightarrow && \text{(kruisproduct, of op gelijke noemer brengen)} \\ 2x\cdot(x+1) &= (2x+1)\cdot x \\ &\Longleftrightarrow && \text{(uitwerken en alles naar linkerlid brengen)} \\ 2x^2+2x-2x^2-x &= 0 \\ &\Longleftrightarrow && \text{(uitrekenen)} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Dus: de formule is waar als x gelijk is aan 0 maar fout in alle andere gevallen.

Voorbeeld 2.2.1 (Numeriek rekenen met breuken)**.**

1. $\frac{120+74}{2} \underset{\text{(breuk splitsen)}}{=} \frac{120}{2}+\frac{74}{2} = 60+37 = 97.$ Of natuurlijk ook $\frac{120+74}{2} = \frac{194}{2} = 97.$
2. $\frac{1}{8}+\frac{5}{6} \underset{\text{(gelijke noemer)}}{=} \frac{1\cdot 6+5\cdot 8}{48} = \frac{46}{48} = \frac{23}{24}$
3. $\frac{125}{50} \underset{\text{(gemeenschappelijke factor)}}{=} \frac{25\cdot 5}{25\cdot 2} \underset{\text{(vereenvoudigen)}}{=} \frac{5}{2}$
4. $\frac{\frac{80}{2}}{10} \underset{\text{(dubbele breukstreep)}}{=} \frac{80}{2\cdot 10} = \frac{80}{20} = 4.$ Er geldt natuurlijk ook $\frac{\frac{80}{2}}{10} = \frac{40}{10} = 4.$

Oefening 2.2.2. Vereenvoudig.

1. $\frac{x+y}{\frac{x}{y}} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\frac{x+y}{x}}{y} = \ldots\ldots$
3. $\frac{p^2-q^2}{p-q} = \ldots\ldots$
4. $\frac{\frac{p+qp}{pq^2}}{\frac{p^2}{q}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2.A Basisoefeningen breuken

Oefening 2.2.3. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\ldots\ldots$
2. $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=\ldots\ldots$
3. $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\ldots\ldots$
4. $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\ldots\ldots$
5. $\frac{15}{6}\cdot\frac{3}{2}=\ldots\ldots$
6. $\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{22}\cdot\frac{4}{18}=\ldots\ldots$
7. $\frac{6}{5}:\frac{2}{15}=\ldots\ldots$
8. $\frac{12}{25}:\frac{18}{35}=\ldots\ldots$
9. $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}=\ldots\ldots$
10. $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=\ldots\ldots$

Oefening 2.2.4. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $20\cdot(\frac{5}{4}-\frac{4}{5})=\ldots\ldots$
2. $-\frac{6}{27}+\frac{27}{1}+\frac{16+14}{9}-\frac{3}{14+13}-3\cdot 9=\ldots\ldots$
3. $-\frac{(1-a)-2}{a+1}=\ldots\ldots$ $(a\neq -1)$

Oefening 2.2.5. Schrijf als een zo eenvoudig mogelijke breuk. Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan.

1. $\frac{a-b}{c}-\frac{a-2b}{2c}=\ldots\ldots$
2. $\frac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}}=\ldots\ldots$
3. $\frac{1-\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2}{b}}=\ldots\ldots$
4. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}=\ldots\ldots$
5. $a+\frac{a}{1+a}=\ldots\ldots$
6. $1+\frac{a}{1+a}=\ldots\ldots$
7. $1+\frac{1}{1+a}=\ldots\ldots$
8. $a+\frac{1}{1+a}=\ldots\ldots$
9. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}=\ldots\ldots$
10. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}}=\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

2.3.1 Machten met een reëel grondtal en een gehele exponent

Vermenigvuldigen is hetzelfde als 'herhaald optellen': $3 \times 2 \stackrel{\text{def}}{=} 2+2+2$, en $n \times a = a + a + \cdots + a$ (n keer).
Op dezelfde manier is *machtsverheffen* hetzelfde als 'herhaald vermenigvuldigen': $2^3 \stackrel{\text{def}}{=} 2 \times 2 \times 2$.

Definitie 2.3.1. Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent.

Voor $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de **n-de macht** van een reëel getal a, genoteerd a^n, als

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 \quad \text{als } a \neq 0$$
$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}} \quad \text{als } n \in \mathbb{N}_0.$$

Vb: $5^0 = 1$
$5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ factoren}} = 125$

Als a niet nul is, definiëren we ook machten met negatieve exponenten:

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

Vb: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

.

We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Oefening 2.3.1. Bereken:

1. $5^2 = \ldots\ldots$
2. $-5^2 = \ldots\ldots$
3. $(-5)^2 = \ldots\ldots$
4. $(2+3)^2 = \ldots\ldots$
5. $2^2 + 3^2 = \ldots\ldots$
6. $(2+3)^2 - (2^2+3^2) = \ldots\ldots$
7. $2^{-1} = \ldots\ldots$
8. $10^3 = \ldots\ldots$
9. $10^{-3} = \ldots\ldots$

Opmerking 2.3.1. Onmiddellijke gevolgen van de definities:

- $a^1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.
- $a^0 = 1$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
- $0^n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
- 0^z is niet gedefinieerd voor $z \in \mathbb{Z}^-$.

Omdat $a^2 = a \cdot a$ en $a^3 = a \cdot a \cdot a$ volgt ook direct dat

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= (a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5 \\ (a^2)^3 &= (a \cdot a)^3 = (a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a) = a^{2 \cdot 3} = a^6 \\ a^3 \cdot b^3 &= (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = (a \cdot b)^3 \end{aligned}$$

maar een uitdrukking als $a^2 \cdot b^3$ kan je niet schrijven als één macht, wel als $(a \cdot b)^2 \cdot b$.
In het algemeen gelden volgende rekenregels:

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

Eigenschap 2.3.1 (Rekenregels machten). Voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)} \\ (ab)^n &= a^n b^n && \text{(macht van product)} \\ (a^m)^n &= a^{mn} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{als } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{als } b \neq 0$$

Dezelfde regels gelden voor *gehele* $m, n \in \mathbb{Z}$ zolang het grondtal niet nul is bij negatieve exponenten.

Dezelfde regels gelden ook voor *reële* $m, n \in \mathbb{R}$ voor zover ze betekenis hebben (zie verder).

Oefening 2.3.2. Bereken volgende machten.

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^{\cdots\cdots}$
2. $(2^2)^3 = 2^{\cdots\cdots}$
3. $2^{(2^3)} = 2^{\cdots\cdots}$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^{\cdots\cdots}$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = \ldots\ldots^5$

Voorbeeld 2.3.1. Bereken volgende machten.

(a) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$

(b) $\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{1}{4} \cdot 9 = \dfrac{9}{4}$

2.3.2 Machten met een strikt positief reëel grondtal en een rationale exponent

Als we ons beperken tot positieve grondtallen, kunnen we de machtsverheffing tamelijk eenvoudig nog verder veralgemenen: we definiëren eerst $a^{\frac{1}{n}}$, dan $a^{\frac{m}{n}} = a^q$, met $q \in \mathbb{Q}$, en tenslotte zelfs a^r, met $r \in \mathbb{R}$.

Definitie 2.3.2. Machtsverheffing met grondtal in $\mathbb{R}^+$ en exponent in $\mathbb{Q}$.

Voor $a, b \in \mathbb{R}^+$ en $n \in \mathbb{N}_0$ is de macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\dfrac{1}{n}$ gedefinieerd als het uniek positief reëel getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$a^{\frac{1}{n}} \overset{\text{def}}{=} b \iff b^n = a$ Vb: $2 = 8^{\frac{1}{3}} \iff 2^3 = 8$

We noemen $a^{\frac{1}{n}}$ de *n-de machtswortel* uit a, of de n-de wortel uit a en noteren

$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}}$ Vb: $\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}} = 5$

We definiëren voor $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $m \in \mathbb{Z}$ ook

$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ Vb: $125^{\frac{2}{3}} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 5^2 = 25$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

Opmerking 2.3.2.

(a) Voor $n = 2$ schrijven we gewoon $\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt[2]{a}$.

(b) Vaak gemaakte fout: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(c) Onmiddellijke gevolgen van de definities:

- $a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0^+$ en alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0^+$, alle $m \in \mathbb{Z}$ en alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $1^q = 1$ voor alle $q \in \mathbb{Q}$.

De bovenstaande definitie is enkel zinvol als er inderdaad een dergelijk uniek positief reëel getal b bestaat. Precies om dat te garanderen, hebben we ons beperkt tot POSITIEVE a en b.

Voorbeeld 2.3.2. Vereenvoudig volgende machten met rationale exponent.(met $x \in \mathbb{R}_0^+$)

(a) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{64} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{8^2} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8 = 8^{\frac{1}{3}+1} = 8^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$

(b) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x} = x^{\frac{3}{4}-1} = x^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

(c) $\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x^6 \cdot x^{\frac{2}{4}} = x^{6+\frac{1}{2}} = x^{\frac{13}{2}} = \sqrt{x^{13}}$

Oefening 2.3.3. Vereenvoudig (met $x, y \in \mathbb{R}_0^+$):

1. $\dfrac{4}{\sqrt{8}} = \ldots\ldots$
2. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2 y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$
3. $\sqrt{48x^9y^4} = \ldots\ldots$

2.3.3 Machten met een strikt positief reëel grondtal en een reële exponent

Men kan ook a^r definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$ (dus uitdrukkingen zoals $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$ en $\sqrt{7}^{\sqrt{\pi}}$). Dit is technisch enigszins subtiel en we zullen de definitie hier ook niet in detail geven. Ook voor machten met rationale en reële exponenten blijven de gebruikelijke rekenregels gelden.

2.3.4 Samenvatting

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.52)

2.3 Machten

Eigenschap 2.3.2 (Samenvatting machten). Zij $x, y > 0$ en $m, n \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$
\begin{aligned}
x^m x^n &= x^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)}\\
(xy)^n &= x^n y^n && \text{(macht van product)}\\
(x^m)^n &= x^{mn} && \text{(macht van een macht)}\\
x^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{x} && \text{(notatie/definitie)}\\
x^{-n} &= \frac{1}{x^n} && \text{(notatie/definitie)}\\
\frac{x^m}{x^n} &= x^{m-n} && \text{(quotient van machten)}\\
x^0 &= 1, \quad x^1 = x, \quad x^{-1} = \frac{1}{x}\\
\sqrt[m]{x^n} &= x^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{x})^n
\end{aligned}
$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Machten met gehele exponenten

Net zoals *vermenigvuldigen* 'herhaald optellen' is: $3\times 2 \overset{\text{def}}{=} 2+2+2$ en $n\times a = a+a+\ldots+a$ (n keer),
is *machtsverheffen* 'herhaald vermenigvuldigen': $2^3 \overset{\text{def}}{=} 2\times 2\times 2$ en $a^n \overset{\text{def}}{=} a\times a\times \ldots \times a$ (n keer).

Definitie 2.4.1 (Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent)**.**
De n-**de macht** van een reëel getal a, met $n \in \mathbb{N}$, genoteerd a^n, is

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1 \quad \text{als } a \neq 0$$
$$a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}} \quad \text{als } n \in \mathbb{N}_0.$$

Vb: $5^0 = 1$, $5^3 = \underbrace{5\cdot 5\cdot 5}_{3 \text{ factoren}} = 125$

We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.

Als a niet nul is, definiëren we ook machten met *negatieve* exponenten:

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

Vb: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

.

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Oefening 2.4.1. Bereken:

1. $5^2 = \ldots\ldots$
2. $-5^2 = \ldots\ldots$
3. $(-5)^2 = \ldots\ldots$
4. $(2+3)^2 = \ldots\ldots$
5. $2^2+3^2 = \ldots\ldots$
6. $(2+3)^2-(2^2+3^2) = \ldots\ldots$
7. $2^{-1} = \ldots\ldots$
8. $10^3 = \ldots\ldots$
9. $10^{-3} = \ldots\ldots$

Opmerking 2.4.1. Onmiddellijke gevolgen van de definities:

1. $a^1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.
2. $a^0 = 1$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
3. $0^n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.
4. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
5. 0^z is niet gedefinieerd voor $z \in \mathbb{Z}^-$.
6. $1^n = 1$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

Omdat $a^2 = a\cdot a$ en $a^3 = a\cdot a\cdot a$ volgt ook direct dat

$$\begin{aligned} a^2\cdot a^3 &= (a\cdot a)(a\cdot a\cdot a) = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^{2+3} = a^5 \\ (a^2)^3 &= (a\cdot a)^3 = (a\cdot a)(a\cdot a)(a\cdot a) = a^{2\cdot 3} = a^6 \\ a^3\cdot b^3 &= (a\cdot a\cdot a)(b\cdot b\cdot b) = (a\cdot b)(a\cdot b)(a\cdot b) = (a\cdot b)^3 \end{aligned}$$

maar een uitdrukking als $a^2\cdot b^3$ kan je niet schrijven als één macht, wel als $(a\cdot b)^2\cdot b$.

In het algemeen gelden volgende rekenregels:

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Machten met gehele exponenten

Eigenschap 2.4.1 (Rekenregels machten)**.** Voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)} \\ (ab)^n &= a^n b^n && \text{(macht van product)} \\ (a^m)^n &= a^{mn} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{als } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{als } b \neq 0$$

Dezelfde regels gelden voor *gehele* $m, n \in \mathbb{Z}$ zolang het grondtal niet nul is bij negatieve exponenten.

Dezelfde regels gelden ook voor *reële* $m, n \in \mathbb{R}$ voor zover ze betekenis hebben (zie verder).

Oefening 2.4.2. Bereken volgende machten.

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$
2. $(2^2)^3 = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$
3. $2^{(2^3)} = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = a^5$ met $a = \ldots\ldots$

Voorbeeld 2.4.1. Bereken volgende machten.

1. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$
2. $\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \cdot 9 = \frac{9}{4}$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Machten en wortels

Voor *positieve* grondtallen $a \in \mathbb{R}_0^+$ wordt de machtsverheffing a^m veralgemeend tot $a^{\frac{m}{n}}$ met *rationale exponenten* door eerst $a^{\frac{1}{n}}$ te definiëren, en dan $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. We vermelden kort ook a^r met $r \in \mathbb{R}$.

Definitie 2.5.1 (n-de machtswortel)**.**

De **macht** $a^{\frac{1}{n}}$, ook de n**-de machtswortel** $\sqrt[n]{a}$ of de n**-de wortel** van een *positief* reëel getal a met $n \in \mathbb{N}_0$, is per definitie het uniek *positief* reëel getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a:

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} \overset{\text{def}}{=} b \iff b^n = a$$

Vb: $2 = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} \iff 2^3 = 8$

We definiëren voor $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $m \in \mathbb{Z}$ ook

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Vb: $125^{\frac{2}{3}} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 5^2 = 25$

Als n oneven is definieert dezelfde formule ook de n-de machtswortel van een *negatief* getal, namelijk als het unieke *negatieve* getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a.

Opmerking 2.5.1.

(a) Voor $n = 2$ laat men de 2 in de wortel weg: $\sqrt{a} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

(b) Omdat $a^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$, is nu ook $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \in \mathbb{R}$ gedefinieerd, met $m \in \mathbb{Z}$.

(c) Pas op: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, want bv $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, terwijl $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2 \neq \sqrt{2}$.

(d) Deze definitie is enkel zinvol als een dergelijk positief reëel getal b *bestaat* en *uniek* is. Precies om dat te garanderen moet de definitie voor *even* n beperkt worden tot *positieve* a en b. Inderdaad, voor negatieve a *bestaat* er immers niet altijd een geschikte b, want er bestaat bv. geen $b \in \mathbb{R}$ zodat $b^2 = -2$. En als het getal b niet beperkt wordt tot de *positieve* getallen, dan is dergelijke b niet *uniek*, want bijvoorbeeld zowel $b = 2$ als $b = -2$ voldoen aan $b^2 = 4$.
Voor *oneven* machtswortels stelt dit probleem zich niet: $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ en $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$.

(e) Men kan ook a^r definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$ (dus uitdrukkingen zoals $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$ en $\sqrt{7}^{\sqrt{\pi}}$). Dit is technisch enigszins subtiel en we geven hier geen exacte definitie. We zullen later reële exponenten nodig hebben bij het bestuderen van zogenaamde exponentiële functies zoals $x \mapsto 2^x$.

Ook voor rationale en reële exponenten (en dus voor wortels) gelden volgende bekende rekenregels:

Eigenschap 2.5.1. Voor $x, y > 0$ en $r, s \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{aligned} x^r x^s &= x^{r+s} && \text{(product met zelfde grondtal)} \\ (xy)^r &= x^r y^r && \text{(macht van product)} \\ (x^r)^s &= x^{rs} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$ax^r + bx^r = (a+b)x^r \qquad \text{(som van } \textit{gelijke} \text{ machten)}$$

Uit bovenstaande regels en de definities volgt ook

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Machten en wortels

$$x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad 1^r = 1, \quad 0^r = 0 \ (r \neq 0)$$
$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$
$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m} \qquad x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1}$$

en

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad \text{en} \quad a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x}$$

Het is dikwijls belangrijk te weten of twee uitdrukkingen met machten of wortels al dan niet aan elkaar gelijk zijn. Daarom worden dergelijke uitdrukkingen meestal als volgt vereenvoudigd. De procedure is eenvoudiger dan ze lijkt als je ze toepast op een voorbeeld.

Algoritme 2.5.1 (Vereenvoudigen van wortelvormen en wortelvrij maken van de noemer)**.**

Om een vierkantswortel van de vorm $\sqrt{ax^n}$ $(a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z})$ te **vereenvoudigen**

(a) ontbind je a in factoren

(b) haal je voor de *even* exponenten alle factoren uit de wortel

(c) haal je voor de *oneven* exponenten alle factoren behalve één uit de wortel

(d) behandel je daarbij exponenten van letters op dezelfde manier als die van getallen

Om van een breuk met een wortel in de noemer **de noemer wortelvrij** te maken

(a) vereenvoudig je indien mogelijk zowel de voorkomende wortelvormen als de breuk zelf

(b) vermenigvuldig je teller en noemer *met de wortel die voorkomt in de noemer*

(c) vereenvoudig je (opnieuw) zowel de voorkomende wortelvormen als de breuk zelf

Voorbeeld 2.5.1.

1. Vereenvoudig $\sqrt{200a^5}$.

Uitwerking: $\sqrt{200a^5} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2 \cdot a^5} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot a^4 \cdot a} = 2 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{2a} = 10a^2\sqrt{2a}$

2. Maak de noemer wortelvrij in $\sqrt{\frac{32}{12a}}$.

Uitwerking: $\sqrt{\frac{32}{12a}} = \sqrt{\frac{2^5}{2^2 \cdot 3a}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{3a}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3a}}{\sqrt{3a} \cdot \sqrt{3a}} = \frac{2\sqrt{2 \cdot 3a}}{3a} = \frac{2\sqrt{6a}}{3a}$

Oefening 2.5.1. Vereenvoudig volgende wortelvormen.

1. $-\sqrt{20} = \ldots\ldots$ **2.** $\sqrt{a^9} = \ldots\ldots$ **3.** $\sqrt{x^4 \cdot y^5} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Machten en wortels

Oefening 2.5.2. Maak de noemer wortelvrij en vereenvoudig (met $b > 0$).

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{5b^6}} = \ldots\ldots$
3. $\sqrt{\dfrac{32x^5y^4}{12x}} = \ldots\ldots$

Oefening 2.5.3. Vereenvoudig volgende uitdrukkingen (met $x, y \in \mathbb{R}_0^+$).

1. $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{64} = \ldots\ldots$
2. $\sqrt{x}\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{4}{\sqrt{8}} = \ldots\ldots$
4. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$
5. $\sqrt{48x^9y^4} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5.A Basisoefeningen machten

Oefening 2.5.4. Bereken

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^{\cdots\cdots}$
2. $(2^2)^3 = 2^{\cdots\cdots}$
3. $2^{(2^3)} = 2^{\cdots\cdots}$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^{\cdots\cdots}$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = \ldots\ldots^5$

Oefening 2.5.5. Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel $x, y, a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

1. $\dfrac{\sqrt{a}}{a^5} = \ldots\ldots$
2. $\left(x^6 y^8\right)^{-1/2} = \ldots\ldots$
3. $a^4 b \left(\dfrac{\sqrt{a^2 b^4}}{ab}\right)^3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5.B Basisoefeningen wortels

Oefening 2.5.6. Vereenvoudig

1. $-\sqrt{20} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\sqrt{80}}{6} = \ldots\ldots$
3. $\sqrt{a^5} = \ldots\ldots$
4. $\sqrt{x^4 \cdot y^5} = \ldots\ldots$
5. $\sqrt{32a^7} = \ldots\ldots$
6. $\sqrt{175 \cdot x^9 \cdot y^4} = \ldots\ldots$

Oefening 2.5.7. Werk uit en maak de noemer indien nodig wortelvrij

1. $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6} = \ldots\ldots$
2. $5\sqrt{x} + \dfrac{2}{3}\sqrt{x} + \dfrac{5}{3}\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = \ldots\ldots$
3. $\sqrt{12x^2} + \sqrt{27} = \ldots\ldots$
4. $\sqrt{125} \cdot \sqrt{3} = \ldots\ldots$
5. $\sqrt{\dfrac{2a^3}{15}} \cdot \sqrt{\dfrac{5}{8a^2}} = \ldots\ldots$
6. $\dfrac{-\sqrt{12}}{\sqrt{32}} = \ldots\ldots$
7. $\dfrac{-\sqrt{128a^5y}}{-\sqrt{2a^2}} = \ldots\ldots$
8. $(\sqrt{2^3})^5 = \ldots\ldots$
9. $(\sqrt{3}a^2b^3)^2 = \ldots\ldots$
10. $\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Orderelatie ⩽

Het is een belangrijke eigenschap van reële getallen dat we ze kunnen *ordenen*. We herhalen volgende notaties en afspraken:

Definitie 2.6.1 (Orderelatie op $\mathbb{R}$)**.** Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$x \leqslant y$	$\iff$	$y \geqslant x$	x is kleiner of gelijk aan y
$x \geqslant y$	$\iff$	$y \leqslant x$	x is groter of gelijk aan y
$x < y$	$\iff$	$x \leqslant y$ en $x \neq y$	x is strikt kleiner dan y
$x > y$	$\iff$	$x \geqslant y$ en $x \neq y$	x is strikt groter dan y
$x \geqslant 0$			x is positief
$x > 0$			x is strikt positief
$x \leqslant 0$			x is negatief
$x < 0$			x is strikt negatief

De relatie $\leqslant$ voldoet aan volgende voor de hand liggende eigenschappen:

Eigenschap 2.6.1 (Orderelatie op $\mathbb{R}$)**.** Zij $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$x \leqslant x$	($\leqslant$ is reflexief)
$(x \leqslant y$ en $y \leqslant x) \Rightarrow x = y$	($\leqslant$ is antisymmetrisch)
$(x \leqslant y$ en $y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$	($\leqslant$ is transitief)
$x \leqslant y$ of $y \leqslant x$	($\leqslant$ is totaal)

Hierbij betekent reflexief dus dat elke getal groter-of-gelijk is aan zichzelf. Antisymmetrisch betekent dat twee verschillende getallen nooit zowel groter-of-gelijk én kleiner-of-gelijk kunnen zijn. Transitief betekent dat alles wat kleiner is dan een bepaald getal, ook kleiner is dan elk groter getal. Deze drie eigenschappen samen definiëren een zogenaamde 'orderelatie'. Als ook alle getallen met elkaar kunnen worden vergeleken, noemt men de orderelatie 'totaal'.

Opmerking 2.6.1.

- Het getal 0 is zowel positief als negatief, maar niet strikt positief, noch strikt negatief
- Het getal 0 is het enige getal dat zowel positief als negatief is.
- Als $x < y$, dan geldt ook dat $x \leqslant y$, maar niet omgekeerd.
- De relatie $<$ is niet reflexief, maar wel antisymmetrisch en transitief. Ze is niet totaal (want $x \not< x$)

Eigenschap 2.6.2 (Eigenschappen ongelijkheden)**.** Zij $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

	$x < y$	$\iff$	$x + z < y + z$	(term optellen (of aftrekken))
	$x + z < y$	$\iff$	$x < y - z$	(term van lid veranderen)
Als $z > 0$	$x < y$	$\iff$	$xz < yz$	(vermenigvuldigen met strikt positieve factor)
Als $z > 0$	$zx < y$	$\iff$	$x < \frac{y}{z}$	(strikt positieve factor van lid veranderen)
Als $z < 0$	$x < y$	$\iff$	$xz > yz$	(vermenigvuldigen met strikt negatieve factor)
Als $z < 0$	$zx < y$	$\iff$	$x > \frac{y}{z}$	(strikt negatieve factor van lid veranderen)
	$x < y$ en $z < t$	$\iff$	$x + z < y + t$	(klein+klein < groot+groot)

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Orderelatie $\leqslant$

Opmerking 2.6.2. Vermenigvuldigen met een *negatief* getal *keert de ongelijkheid om*.

Vergeet dit niet als je rekent met *letters* die zowel positieve als negatieve getallen kunnen voorstellen.

Voorbeeld 2.6.1 (Basisvoorbeelden ongelijkheden).

1. $1 < 2$
2. $-1 < 2$
3. $1 > -2$
4. $-1 > -2$
5. $-2 < -1$
6. $7 > -8$

Voorbeeld 2.6.2 (Basisvoorbeelden ongelijkheden). Zij $a, b \in \mathbb{R}$, met $a \leqslant b$. Dan geldt (met $\lesseqgtr$ betekent: zowel $a \leqslant b$ als $b \leqslant a$ zijn mogelijk)

1. $b \geqslant a$
2. $-a \lesseqgtr b$
3. $a \lesseqgtr -b$
4. $a + 2 \leqslant b + 2$
5. $a + 2 \leqslant b + 3$
6. $a + 3 \lesseqgtr b + 2$
7. $ab = ba$
8. $2a \leqslant 2b$
9. $2a \lesseqgtr 3b$
10. $3a \lesseqgtr 2b$

CC BY-NC-SA 4.0

2.7 Absolute waarde

Definitie 2.7.1 (Absolute waarde)**.**

Voor een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ definiëren we de *absolute waarde* van a, genoteerd $|a|$, als

$$|a| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{als} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{als} \quad a < 0. \end{cases}$$

Als a positief is, dan is $|a|$ gewoon a, maar als a negatief is, dan is $|a|$ het overeenkomende *positieve* getal $-a$. Dus, $|a|$ is altijd positief.

Voorbeeld 2.7.1 (Eenvoudige voorbeelden van absolute waarden)**.**

(a) $|5| = 5$ en $|-5| = 5$

(b) $|2+1| = |2| + |1| \quad (= 3)$

(c) $|2+(-1)| \neq |2| + |-1|$ (want $1 \neq 3$)

(d) $|(-3)^2| = |3^2| = 9 \quad (= |-3^2| = |-9|)$

(e) $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

(f) $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$

(g) $|2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}$

(h) $|\sqrt{2}-2| = 2-\sqrt{2}$

Voorbeeld 2.7.2. De vergelijking $|x-5| = 9$ heeft 2 oplossingen want ofwel is $x-5 = 9$ ofwel is $-(x-5) = 9$. De oplossingen zijn dan $x = 14$ of $x = -4$.

Volgende eigenschappen volgen eenvoudig uit de definitie:

Eigenschap 2.7.1. Als $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan is

(a) $|x| \geq 0$

(b) $|x| = 0 \iff x = 0$

(c) $|x| = |y| \iff x = \pm y$

(d) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(e) $|-x| = |x|$

(f) $|x-y| = |y-x|$

(g) $|x|^2 = x^2 = |x^2|$ $\qquad (= |-x^2| = |(-x)^2|)$

(h) $\sqrt{x^2} = |x|$

(i) $(\sqrt{x})^2 = x$ $\qquad$ (als $x \geq 0$ want anders bestaat de wortel niet)

(j) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ $\qquad$ (absolute waarde van product is product van absolute waarden)

(k) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ met $y \neq 0$ $\qquad$ (absolute waarde van quotiënt is quotiënt van absolute waarden)

Opmerking 2.7.1 (Eigenschappen van de absolute waarde (met $a \in \mathbb{R}$))**.**

(a) Pas op: $|-a| = |a|$, maar ZEER ZEKER NIET ~~$|-a| = a$~~
$|-a| = a$ is FOUT als $a < 0$: als $a = -7$, dan is $|-a| = |-(-7)| \neq -7 = a$

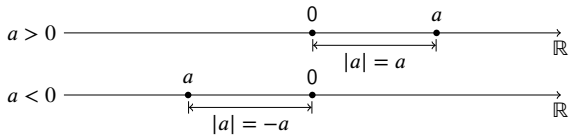
2.7 Absolute waarde

(b) $|a^2+1| = a^2+1$, want a^2+1 is altijd positief.

(c) $|a^2-1| = \ldots$. (er is GEEN eenvoudige algemene formule zonder $|\cdot|$)

(d) De absolute waarde van een som is niet de som van de absolute waardes ~~$|x+y| = |x|+|y|$~~, want bijvoorbeeld $|2+(-3)| = |-1| = 1$ terwijl $|2|+|-3| = 2+3 = 5$

Bij de voorstelling van a op de reële rechte $\mathbb{R}$ is $|a|$ gelijk aan de afstand van het punt a tot de oorsprong:

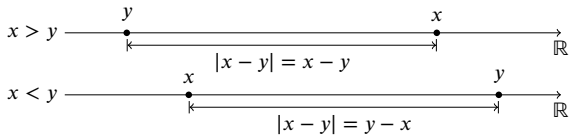


Deze eenvoudige opmerking leidt onmiddellijk tot volgend belangrijk inzicht:

Eigenschap 2.7.2. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt (op de reële rechte $\mathbb{R}$)

$|x-y|$ is de afstand tussen x en y.

In het bijzonder is $|x|$ de afstand van x tot de oorsprong.



Opmerking 2.7.2.

- Om in $|x-y|$ het absolute waardeteken te kunnen verwijderen, is het dus *niet* van belang het teken te kennen van x en y, maar wel te weten of x al dan niet groter is dan y. Al naargelang het geval, geldt $|x-y| = x-y$ ofwel $|x-y| = y-x$. In de tekening hierboven is het dus *niet* belangrijk waar de oorsprong ligt, enkel de volgorde van x en y telt.
- Merk op dat je elke som gemakkelijk kan schrijven als een verschil, en dat dus ook geldt dat $|x+y| = |x-(-y)|$ gelijk is aan de afstand tussen x en $-y$.

Gecombineerd met ongelijkheden worden volgende eigenschappen afgelezen op de reële rechte:

Eigenschap 2.7.3 (Basiseigenschappen absolute waarde)**.** Als $x, a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}_0^+$, dan is

1) $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \Leftrightarrow x \in]-r, r[$
   $\Leftrightarrow$ x ligt dichter dan r bij 0

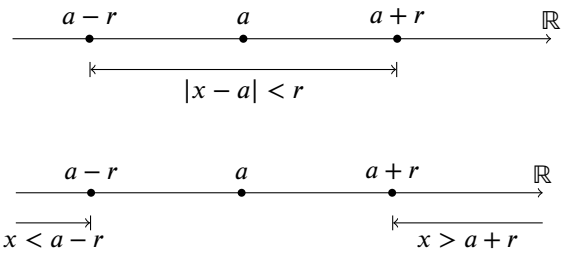
2) $|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ **of** $r < x \Leftrightarrow x \notin [-r, r]$
   $\Leftrightarrow$ x ligt verder dan r van 0

3) $|x-a| < r \Leftrightarrow -r < x-a < r \Leftrightarrow x \in]a-r, a+r[$
   $\Leftrightarrow a-r < x < a+r \Leftrightarrow$ x ligt dichter dan r bij a

4) $|x-a| > r \Leftrightarrow x-a < -r$ **of** $r < x-a \Leftrightarrow x \notin [a-r, a+r]$
   $\Leftrightarrow x < a-r$ **of** $a+r < x \Leftrightarrow$ x ligt verder dan r van a

CC BY-NC-SA 4.0

2.7 Absolute waarde



Opmerking 2.7.3.

- Met deze eigenschappen kan je dus één ongelijkheid *met* een absolute waarde omzetten in een *dubbele* ongelijkheid *zonder* absolute waarde.
- Deze eigenschappen kunnen ook met $\leq$ geformuleerd worden, bijvoorbeeld

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$$

Voorbeeld 2.7.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\left|\frac{2x}{3}\right| < 1$.

Oplossingsverzameling: $V = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$

Uitwerking:

$$\begin{array}{rcll} \left|\frac{2x}{3}\right| & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & \textit{(absolute waarde doorschuiven)} \\ \frac{|2||x|}{|3|} & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & (|2| = 2, |3| = 3) \\ \frac{2|x|}{3} & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & \textit{maal } \frac{3}{2} > 0 \\ |x| & < & \frac{3}{2} & \\ & \Updownarrow & & \\ -\frac{3}{2} < & x & < \frac{3}{2} & \end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

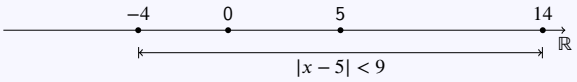
Voorbeeld 2.7.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x - 5| < 9$.

$$\begin{array}{rcll} |x-5| & < & 9 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en 5 is kleiner dan 9)} \\ & \Updownarrow & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\ -9 < & x-5 & < 9 & (x - 5 \text{ ligt tussen } -9 \text{ en } 9) \\ & \Updownarrow & & (+5 \text{ optellen}) \\ -4 < & x & < 14 & (x \text{ ligt tussen } -4 \text{ en } 14) \end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-4, 14[$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.52)

2.7 Absolute waarde



Oefening 2.7.1.

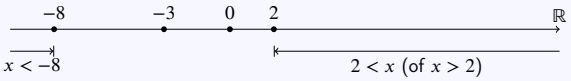
1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|2x - 5| < 9$. Oplossingsverzameling: ... ...

2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|3 - 2x| < 1$. Oplossingsverzameling: ... ...

Voorbeeld 2.7.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x + 3| > 5$

$$
\begin{array}{rcl}
|x+3| & > & 5 \qquad \text{(de afstand tussen } x \text{ en } -3 \text{ is groter dan 5)} \\
\Updownarrow & & \qquad (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\
x+3 < -5 & \text{of} & 5 < x+3 \\
\Updownarrow & & \qquad (-3 \text{ optellen}) \\
x < -8 & \text{of} & 2 < x
\end{array}
$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -8[\cup]2, +\infty[$.



Voorbeeld 2.7.6. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x^2 - 3| < 9$.

Oplossingsverzameling: $V = \left]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right[$

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rcl}
|x^2-3| & < & 9 \qquad \text{de afstand tussen } x^2 \text{ en } 3 \text{ is kleiner dan } 9 \\
\Updownarrow & & \qquad (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\
-9 < x^2-3 & < & 9 \\
\Updownarrow & & \qquad (+3 \text{ optellen}) \\
-6 < x^2 & < & 12 \\
\Updownarrow & & \qquad -6 < x^2 \text{ is automatisch voldaan en is dus geen voorwaarde} \\
x^2 & < & 12 \\
\Updownarrow & & \qquad \text{beide leden pos., worteltrekken mag} \\
\sqrt{x^2} & < & \sqrt{12} \qquad (\sqrt{12} = 2\sqrt{3}) \\
\Updownarrow & & \qquad (\sqrt{x^2} = |x|) \\
|x| & < & 2\sqrt{3} \\
\Updownarrow & & \qquad (|x| < r \iff -r < x < r) \\
-2\sqrt{3} < x & < & 2\sqrt{3}.
\end{array}
$$

De oplossingsverzameling is dus $V = \left]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right[$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.7.A Oefeningen absolute waarde

Oefening 2.7.2. Bereken (zonder rekenmachine) volgende absolute waarden.

1. $|2-9| = \ldots\ldots$
2. $|-2-(-6)| = \ldots\ldots$
3. $\left|\frac{11}{10} - \frac{51}{10}\right| = \ldots\ldots$
4. $|\pi - 3\pi| = \ldots\ldots$

Oefening 2.7.3. Los volgende vergelijkingen op.

1. $|x| = 5$ $\ldots\ldots$
2. $|2x+5| = 4$ $\ldots\ldots$
3. $|x-3| = 7$ $\ldots\ldots$
4. $\left|\frac{x}{2} - 1\right| = 1$ $\ldots\ldots$

Oefening 2.7.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|x-4| < 2$. $\ldots\ldots$
2. $|4-x| \leq 2$. $\ldots\ldots$
3. $|3x| < 6$. $\ldots\ldots$
4. $|3x-4| < 5$. $\ldots\ldots$
5. $|3(x-1)| < 2$. $\ldots\ldots$
6. $\left|\frac{1}{3}(1-x)\right| < 1$. $\ldots\ldots$

Oefening 2.7.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|\sqrt{x}+3| < 9$. $\ldots\ldots$
2. $|3-\sqrt{x}| < 1$. $\ldots\ldots$
3. $\left|\frac{1-\sqrt{4x+1}}{4}\right| < 1$. $\ldots\ldots$
4. $\left|\frac{3+\sqrt{1-x}}{2}\right| < 1$ $\ldots\ldots$

Oefening 2.7.6. Onderzoek welke $p > 0$ voldoen aan $\left|\frac{1}{12}\left(7-\sqrt{1+48p}\right)\right| < 1$. $\ldots\ldots$

Oefening 2.7.7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan *(Uitdagers)*

1. $\left|5 - \frac{2}{x}\right| \leq 1$. $\ldots\ldots$
2. $\left|\frac{2}{\sqrt{x}-2}\right| < 2$? $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.7.A Oefeningen absolute waarde

Oefening 2.7.8. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|x^2 - 2| < 1$. ……

2. $|x^2 - 3| < 2x$. ……

Oefening 2.7.9. Precies één van de volgende uitspraken is waar. Welke?
Een vergelijking in x van de vorm $a|x| = bx + c$ met a, b, c reële parameters

Meerkeuze:

(a) heeft voor alle waarden voor a, b en c precies één reële oplossing.

(b) heeft voor alle waarden voor a, b en c precies twee reële oplossingen.

(c) heeft voor alle waarden voor a, b en c één of twee reële oplossingen.

(d) heeft niet voor alle waarden voor a, b en c een reële oplossing.

(e) heeft voor geen enkele waarde voor a, b en c precies één reële oplossing.

(Bron: ijkingstoets juli 2015)

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Absolute waarde

Definitie 2.8.1 (Absolute waarde)**.**

De **absolute waarde** van een reëel getal a is het *positieve* getal $|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{als } a \geq 0 \\ -a & \text{als } a < 0. \end{cases}$

Voor *a positief* is $|a| = a$, maar voor *a negatief* is $|a|$ het overeenkomende *positieve* getal $-a$, dus $|a| = -a$.

Voorbeeld 2.8.1 (Eenvoudige voorbeelden van absolute waarden)**.**

(a) $|5| = 5$ en $|-5| = 5$

(b) $|2 + (-1)| \neq |2| + |-1|$ (want $1 \neq 3$)

(c) $|(-3)^2| = |3^2| = 9$

(d) $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

(e) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

(f) $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$

Eigenschap 2.8.1. Voor reële getallen $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelden volgende basiseigenschappen:

a)	$\lvert x\rvert \geq 0$ (i.e. $\lvert x\rvert \in \mathbb{R}^+$)	(absolute waarde is positief)
b)	$\lvert x\rvert = 0 \iff x = 0$	(enkel 0 heeft absolute waarde 0)
c)	$\lvert x\rvert = \lvert y\rvert \iff x = \pm y$	(gelijke absolute waarde betekent gelijk op teken na)
d)	$-\lvert x\rvert \leqslant x \leqslant \lvert x\rvert$	(getal ligt tussen min en plus absolute waarde)
e)	$\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$	(absolute waarden van tegengestelden zijn gelijk)
f)	$x^2 = \lvert x\rvert^2 = \lvert x^2\rvert$	(verband met kwadrateren)
g)	$x^2 = \lvert -x^2\rvert = \lvert(-x)^2\rvert$	(verband met kwadrateren en mintekens)
h)	$\lvert x\rvert = \sqrt{x^2}$	(wortel van het kwadraat)
i)	$x = (\sqrt{x})^2$ (als $x \geq 0$)	(kwadraat van wortel, als $x < 0$ bestaat $\sqrt{x}$ niet)
j)	$\lvert x \cdot y\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$	(absolute waarde van product is product absolute waarden)
k)	$\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$ (met $y \neq 0$)	(absolute waarde van quotiënt is quotiënt absolute waarden)

Opmerking 2.8.1.

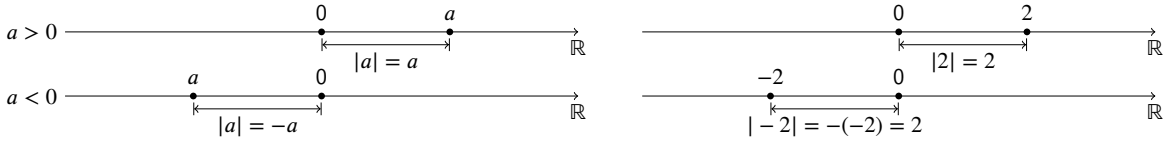
- Volgende eigenschappen gelden *niet*:
  - a) ~~$|-x| = x$~~ want als $x < 0$, bv voor $x = -7$, is $|-x| = |-(-7)| = 7 \neq -7 = x$
  - b) ~~$|x + y| = |x| + |y|$~~ want bv voor $x = 2$ en $y = -3$ is $|2 + (-3)| = |-1| = 1$ terwijl $|2| + |-3| = 2 + 3 = 5$.

  De absolute waarde van een som is dus *niet* gelijk aan de som van de absolute waarden.
- De betekenis van $x < 1$ is *erg* verschillend van die van $|x| < 1$ ($-10 < 1$, maar niet $|-10| < 1$). De absolute waarde onderscheidt 'klein' in de zin van 'kleiner dan iets, mogelijk wegens erg negatief' van 'klein' in de zin van 'erg dicht bij 0'.
- De formule $-|x| \leq x \leq |x|$ lijkt erg zwak: x is immers altijd gelijk aan één van de twee randpunten $|-x|$ of $|x|$. Toch is ze soms handig.

CC BY-NC-SA 4.0

2.9 Absolute waarde en afstand

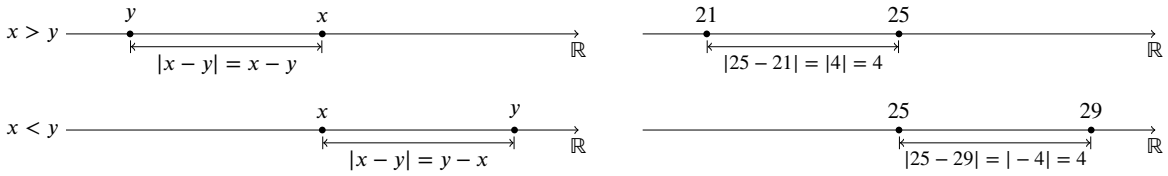
Bij de voorstelling van een getal a op de reële rechte $\mathbb{R}$ is de absolute waarde $|a|$ gelijk aan de *afstand* van het punt a tot de oorsprong:



Uit deze eenvoudige opmerking volgt ook: *elke absolute waarde van een verschil is een afstand*:

Eigenschap 2.9.1. Voor reële getallen x, y is $|x-y|$ de afstand tussen x en y.

In het bijzonder is $|x|$ de afstand van x tot de oorsprong.



Opmerking 2.9.1.

Soms kan het nuttig zijn op te merken dat $|x+y| = |x-(-y)| = |-(-x)+y|$ dus gelijk is aan de afstand tussen x en $-y$, of ook aan de afstand tussen $-x$ en y.

Gecombineerd met ongelijkheden worden volgende eigenschappen afgelezen op de reële rechte:

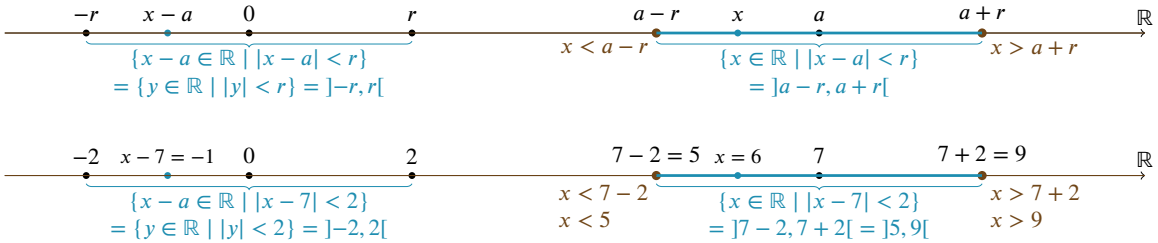
Eigenschap 2.9.2 (Absolute waarde en ongelijkheden)**.** Als $x, a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}_0^+$, dan is

1) $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \Leftrightarrow x \in]-r, r[$
   $\Leftrightarrow$ x ligt dichter dan r bij 0

2) $|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ **of** $r < x \Leftrightarrow x \notin [-r, r]$
   $\Leftrightarrow$ x ligt verder dan r van 0

3) $|x-a| < r \Leftrightarrow -r < x-a < r \Leftrightarrow x \in]a-r, a+r[$
   $\Leftrightarrow a-r < x < a+r \Leftrightarrow$ x ligt dichter dan r bij a

4) $|x-a| > r \Leftrightarrow x-a < -r$ **of** $r < x-a \Leftrightarrow x \notin [a-r, a+r]$
   $\Leftrightarrow x < a-r$ **of** $a+r < x \Leftrightarrow$ x ligt verder dan r van a



CC BY-NC-SA 4.0

2.9 Absolute waarde en afstand

Opmerking 2.9.2.

- Met deze eigenschappen kan je dus één ongelijkheid $|x| < r$ *met* een absolute waarde omzetten in een *dubbele* ongelijkheid $-r < x < r$ *zonder* absolute waarde.
- Je begrijpt '$|x-a|$ is klein' als 'x ligt dicht bij a' *of ook* als '$x-a$ ligt dicht bij nul'.
- Een ongelijkheid met $|x-a|$ kan je *niet* eenvoudig herschrijven in een ongelijkheid met $|x|$. Met een nieuwe variable $y = x-a$ kan je wel $|x-a| < 2$ herschrijven als $|y| < 2$, maar voor $|x-a| < |x|$ blijven er toch sommen of verschillen binnen de absolute waarde staan: $|y| < |y+a|$.
- Gelijkaardige eigenschappen kunnen ook met $\leq$ geformuleerd worden, bijvoorbeeld

$$|x| \leq r \;\Leftrightarrow\; -r \leq x \leq r \;\Leftrightarrow\; x \in [-r, r]$$

Voorbeeld 2.9.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x-5| < 9$.

$$\begin{array}{rcll} |x-5| & < & 9 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en } 5 \text{ is kleiner dan } 9) \\ & \Updownarrow & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\ -9 < & x-5 & < 9 & (x-5 \text{ ligt tussen } -9 \text{ en } 9) \\ & \Updownarrow & & (\ +5 \text{ optellen}) \\ -4 < & x & < 14 & (x \text{ ligt tussen } -4 \text{ en } 14) \end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-4, 14[$.



$\{x \in \mathbb{R} \mid |x-5| < 9\} =]-4, 14[$

Oefening 2.9.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|2x+3| > 5$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.9.A Oefeningen absolute waarde

Oefening 2.9.2. Bereken (zonder rekenmachine) volgende absolute waarden.

1. $|2-9| = \ldots\ldots$

2. $|-2-(-6)| = \ldots\ldots$

3. $\left|\frac{11}{10} - \frac{51}{10}\right| = \ldots\ldots$

4. $|\pi - 3\pi| = \ldots\ldots$

Oefening 2.9.3. Gelden volgende uitspraken voor alle reële getallen x?

1. Nee $|x+2| > |x|$

2. Ja $|-x| = |x|$

3. Nee $|-x| = x$

4. Ja $|2x| = 2|x|$

5. Ja $|-2x| = 2|x|$

6. Nee $|x+2| = |x| + 2$

7. Ja Als $x \geq 0$, dan $|x+2| = |x| + 2$

8. Nee Als $|x+2| = 7$, dan is $x = 5$

CC BY-NC-SA 4.0

2.9.B Oefeningen absolute waarde en afstand

Oefening 2.9.4. Los volgende vergelijkingen op.

1. $|x| = 5$ …
2. $|2x + 5| = 4$ …
3. $|x - 3| = 7$ …
4. $\left|\frac{x}{2} - 1\right| = 1$ …

Oefening 2.9.5. Als $|x - 4| < 2$, ga na welke uitspraken dan over x waar zijn en welke fout. Bewijs de juiste uitspraken en geef een tegenvoorbeeld voor de foute uitspraken.

1. Juist $2 < x < 6$
2. Fout $0 < x < 4$
3. Fout $-1 < -\frac{x}{2} < 0$
4. Juist $1 < \frac{6}{x} < 3$
5. Juist $0 < x - 2 < 4$
6. Fout $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{6}$
7. Juist $-6 < -x < 2$
8. Juist $-6 < -x < -2$

Oefening 2.9.6. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|x - 4| < 2$. …
2. $|4 - x| \leq 2$. …
3. $|3x| < 6$. …
4. $|3x - 4| < 5$. …
5. $|3(x - 1)| < 2$. …
6. $\left|\frac{1}{3}(1 - x)\right| < 1$. …

CC BY-NC-SA 4.0

2.10 Het sommatieteken $\sum$

Met het **sommatieteken** $\sum$ kunnen sommen met veel termen kort worden opgeschreven. Zodra je er enigszins mee vertrouwd bent, kan je er ook gemakkelijk mee rekenen. Het sommatieteken wordt vaak gebruikt in wetenschappen zoals statistiek, fysica, economie,....

In veel problemen komen sommen voor van termen die telkens op basis van een repetitief patroon zijn opgebouwd. We noteren dergelijke sommen dikwijls met puntjes. Zo schrijven we voor de som van de eerste honderd natuurlijke getallen bijvoorbeeld

$$1+2+3+\ldots+100$$

en de som van de eerste 10 kwadraten als

$$1+4+9+16+\ldots+100.$$

Het is voor iedereen duidelijk wat hiermee wordt bedoeld, en iedereen kan uitrekenen dat $1+2+3+\ldots+100 = 5050$ en $1+4+9+16+\ldots+100 = 385$.

Maar, in sommige gevallen is er toch verwarring mogelijk over wat er precies met de puntjes wordt bedoeld. Bijvoorbeeld: hoeveel is

$$3+5+7+\ldots+19 = ?$$

Bedoelen we hier de som van de *oneven* getallen $3+5+7++9+11+13+15+17+19$ of de som van de *priemgetallen* $3+5+7+11+13+17+19$?

Wanneer het patroon duidelijk is levert het sommatieteken een handige en elegante manier om dergelijke sommen te noteren. Een zogenaamde *sommatie-index* loopt daarbij over de verschillende termen:

$$\sum_{i=1}^{100} i \overset{\text{notatie}}{=} 1+2+3+\ldots+100.$$

We lezen dat als 'de som voor i gaande van 1 tot 100 van telkens het getal i'. Dus, $\sum_{i=1}^{100} i = 5050$, want $1+2+3+\cdots+100 = 5050$.

We kunnen natuurlijk niet alleen gewoon i optellen, maar bijvoorbeeld ook de eerste tien kwadraten

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 \overset{\text{notatie}}{=} 1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2 = 385,$$

dus 'de som voor i gaande van 1 tot 10 van telkens i^2'. Ook veel ingewikkeldere uitdrukkingen komen voor

$$\sum_{i=1}^{365} \frac{\sqrt{i+5}}{i^2+1} \overset{\text{notatie}}{=} \frac{\sqrt{1+5}}{1^2+1} + \ldots + \frac{\sqrt{365+5}}{(365)^2+1} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{370}}{133226}.$$

Merk op dat er bij het leren gebruiken van het sommatieteken twee problemen enigszins door elkaar lopen: enerzijds willen we een lange som korter en exacter *opschrijven*, anderzijds willen we die som meestal ook *uitrekenen*. We beperken ons verder hoofdzakelijk tot het *opschrijven* van sommen met het sommatieteken. Vooraleer een formele definitie te geven, bekijken we eerst nog enkele eenvoudige voorbeelden:

Voorbeeld 2.10.1 (Inleidende voorbeelden).

- Beschouw de som $2+4+8+16+32+64$.
  Dit is een som van machten van 2. Elke term is van de vorm 2^i waarbij i loopt van 1 tot en

2.10 Het sommatieteken $\sum$

met 6. We schrijven die som verkort als

$$2+4+8+16+32+64 = \underbrace{2^1}_{i=1} + \underbrace{2^2}_{i=2} + \underbrace{2^3}_{i=3} + \ldots + \underbrace{2^6}_{i=6} = \sum_{i=1}^{6} 2^i\,.$$

We kunnen met deze notatie ook veel langere sommen opschrijven:

$$2+4+8+16+\ldots+4096 = 2^1+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{11}+2^{12} = \sum_{i=1}^{12} 2^i\,.$$

- Beschouw de som $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

  Dit is de som van de termen $\frac{1}{i}$, waarbij i loopt van 1 tot en met 5. We kunnen die som verkort schrijven als

  $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}\,.$$

- Beschouw de som $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}$.

  We kunnen de som verkort schrijven als

  $$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i^2}\,.$$

De letter die gebruikt wordt bij het sommatieteken hoeft niet i te zijn, dat mag een willekeurige letter zijn. Andere vaak gebruikte letters zijn j en k. De sommatie hoeft ook niet bij 1 te starten.

Voorbeeld 2.10.2 (Extra eenvoudige voorbeelden van het sommatieteken)**.**

- Beschouw de som $2+3+4+\cdots+8$.

  We kunnen die som verkort schrijven als $\sum_{k=2}^{8} k = 2+3+4+5+6+7+8$.

  Merk op dat deze schrijfwijze niet uniek is: men kan dezelfde som bijvoorbeeld ook noteren als

  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7}(k+1) &= (1+1)+(2+1)+\ldots+(7+1)\\ &= 2+3+4+5+6+7+8 = 35\end{aligned}$$

  of

  $$\begin{aligned}\sum_{j=3}^{9}(j-1) &= (3-1)+(4-1)+\ldots+(9-1)\\ &= 2+3+4+5+6+7+8 = 35.\end{aligned}$$

- Als we 100 getallen hebben die we aanduiden met $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, dan noteren we de som van de laatste 50 als

  $$\sum_{i=51}^{100} a_i \overset{\text{notatie}}{=} a_{51}+a_{52}+a_{53}+\cdots+a_{99}+a_{100}\,.$$

  We lezen dit als 'de som van de termen a_i waarbij (de index) i loopt van 51 tot 100'.

CC BY-NC-SA 4.0

2.10 Het sommatieteken $\sum$

Oefening 2.10.1.

1. Zoek de algemene term: $2+3+4+\cdots+8=\sum_{i=0}^{6}\ldots\ldots$
2. Bereken de som $\sum_{j=3}^{5} j^2=\ldots\ldots$
3. Schrijf met een sommatieteken: $\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}=\ldots\ldots$

Een algemene definitie van de sommatie, enigszins abstract geformuleerd, gaat als volgt:

Definitie 2.10.1 (Het sommatieteken)**.**

Voor $n\in\mathbb{N}$ en $a_1,a_2,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n$ reële getallen definiëren we :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$$

Vb: $\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1+2^2+2^3 = 2+4+8 = 14$

Meer algemeen is voor $m,n\in\mathbb{Z}$ met $m\leqslant n$ en $a_m,a_{m+1},a_{m+2},\ldots,a_{n-1},a_n$ reële getallen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{n-1}+a_n$$

Vb: $\sum_{k=2}^{4} 2^k = 2^2+2^3+2^4 = 4+8+16 = 28$

We lezen $\sum_{k=m}^{n} a_k$ als de som van (de) a_k voor k gaande van m tot en met n.

Men noemt a_k de **algemene term** en k de **sommatie-index**.
Men noemt m de **ondergrens** en n de **bovengrens** van de sommatie.

Men noteert $\sum_{k=m}^{n} a_k$ soms ook als $\sum_{k=m}^{n} a_k$.

Voorbeeld 2.10.3 (Nog enkele eenvoudige voorbeelden)**.**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} i^2 &= 1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2 = 1+4+9+\cdots+100\\
\sum_{i=0}^{9} (i+1)^2 &= (0+1)^2+(1+1)^2+(2+1)^2+\cdots+(9+1)^2 = 1+4+9+\cdots+100 = \sum_{i=1}^{10} i^2\\
\sum_{i=-2}^{3} i^3 &= (-2)^3+(-1)^3+0+1^3+2^3+3^3 = 27\\
\sum_{i=10}^{14} i &= 10+11+12+13+14 = 60\\
&= (10+0)+(10+1)+(10+2)+(10+3)+(10+4) = \sum_{i=0}^{4}(10+i)\\
&= 50+1+2+3+4 = 50+\sum_{i=1}^{4} i
\end{aligned}$$

Uit deze definitie volgen volgende eigenschappen:

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.52)

2.10 Het sommatieteken $\sum$

Eigenschap 2.10.1 (Basiseigenschappen sommatie)**.**

(a) De som $\sum_{k=1}^{n} a_k$ heeft n termen.

Vb: $\sum_{k=1}^{2} 2^k = 2^1 + 2^2$, 2 termen

(b) De som $\sum_{k=0}^{n} a_k$ heeft $n+1$ termen.

Vb: $\sum_{k=0}^{2} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2$, $2+1=3$ termen

(c) De som $\sum_{k=m}^{n} a_k$ heeft $n-m+1$ termen.

Vb: $\sum_{k=5}^{6} 2^k = 2^5 + 2^6$, $3-2+1=2$ termen

(d) $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ als en slechts als $a_0 = 0$

Vb: $\sum_{k=0}^{3} k = \sum_{k=1}^{3} k = 0+1+2+3$

(e) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$ als en slechts als $a_{n+1} = 0$

Vb: $\sum_{k=1}^{2} \sin(\frac{k\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\pi) = \sum_{k=1}^{1} \sin(\frac{k\pi}{2})$

(f) $\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n$ (sommatie over één getal)

Vb: $\sum_{k=7}^{7} 2^k = 2^7$

(g) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$ (veranderen van indexnaam)

Vb: $\sum_{k=1}^{2} 2^k = \sum_{j=1}^{2} 2^j = 2^1 + 2^2$

(h) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$ (veranderen van grenzen)

Vb: $\sum_{k=1}^{2} 2^k = \sum_{k=5}^{7} 2^{k-4} = 2^1 + 2^2$

Opmerking 2.10.1.

- De sommatie-index bestaat alleen maar *in* de sommatie. In de uitgeschreven of uitgerekende som komt de sommatie-index niet meer voor.
- De sommatie-index mag geen andere betekenis hebben in de context.

  Als $k \in \mathbb{R}$, dan is

  $$\sum_{i=1}^{4} k^i = \sum_{j=1}^{4} k^j = k + k^2 + k^3 + k^4$$

  maar

  $$\sum_{k=1}^{4} k^k = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 \neq \sum_{i=1}^{4} k^i.$$

  Je mag voor $k + k^2 + k^3 + k^4$ dus *niet* de letter k kiezen als sommatie-index.

CC BY-NC-SA 4.0

2.10 Het sommatieteken $\sum$

- We maken de volgende afspraken over haakjes:

$$\sum_{i=5}^{7} a_i + 4 \overset{\text{afspraak}}{=} \left(\sum_{i=5}^{7} a_i\right) + 4 = a_5 + a_6 + a_7 + 4$$

en

$$\sum_{i=5}^{7} (a_i + 4) = (a_5 + 4) + (a_6 + 4) + (a_7 + 4) = a_5 + a_6 + a_7 + 12.$$

Algemeen geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + b = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + b$$

Bij de sommatie van een *product* is het niet nodig (maar ook niet fout) om haakjes te zetten:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k b_k).$$

Oefening 2.10.2. Bereken de som:

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \left(\frac{2^i}{3} + 5\right) = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{3} + 5 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.10 Het sommatieteken $\sum$

Voorbeeld 2.10.4.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-2}^{1}(-1)^i i^3 &= (-1)^{-2}\cdot(-2)^3+(-1)^{-1}\cdot(-1)^3+(-1)^0\cdot 0^3+(-1)^1\cdot 1^3 \\
&= (1)\cdot(-8)+(-1)\cdot(-1)+0+(-1)\cdot(1) \\
&= -8+1+0-1=-8 \\
\sum_{i=1}^{99} i &= 1+2+\cdots+99=\sum_{k=1}^{99}k && \text{(hernoem de index)} \\
\sum_{i=1}^{99} 2i &= 2+4+\cdots+198 \\
&= 2(1+2+\cdots+99) \\
&= 2\cdot\sum_{i=1}^{99} i && \text{(factor buitenbrengen)} \\
\sum_{i=1}^{99} 1 &= 1+1+\cdots+1=99 && \text{(constante)} \\
\sum_{j=1}^{4}(a+x_j) &= (a+x_1)+(a+x_2)+(a+x_3)+(a+x_4) \\
&= 4a+\sum_{i=1}^{4}x_i && \text{(herschrijf de sommand)} \\
\sum_{i=1}^{3} i^2 &= 1+2^2+3^2=\sum_{i=0}^{2}(i+1)^2 && \text{(herindexeer)} \\
\sum_{i=0}^{2} a_i x^i &= a_0+a_1x+a_2x^2=a_2x^2+a_1x+a_0 && \text{(veelterm tweede graad)} \\
\sum_{i=0}^{n} a_i x^i &= a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 && \text{(veelterm n-de graad)}
\end{aligned}$$

Nu we enigszins vertrouwd zijn met het uitwerken van de sommatie, proberen we ook het omgekeerde: een som schrijven met behulp van de sommatie $\sum$. Daarvoor moeten we in de eerste plaats op zoek gaan naar de gemeenschappelijke vorm van de termen. Dat moet leiden tot een formule voor een algemene term, zeg a_k, die bijna altijd afhangt van een zelfgekozen sommatie-index (hier dus k). Vervolgens zoeken we de onder- en bovengrenzen, dit zijn respectievelijk de eerste en de laatste waarde die k moet aannemen opdat a_k precies alle termen van de som doorloopt.

Voorbeeld 2.10.5. Schrijf met een sommatieteken:

1. $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4=\sum_{i=1}^{4}a_ib_i$
2. $a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4+a_4b_5=\sum_{i=1}^{4}a_ib_{i+1}=\sum_{i=2}^{5}a_{i-1}b_i$
3. $a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1=\sum_{i=1}^{4}a_ib_{5-i}$
4. $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5=\sum_{i=1}^{4}a_ib_i+a_5$

CC BY-NC-SA 4.0

2.10 Het sommatieteken $\sum$

Oefening 2.10.3. Schrijf volgende uitdrukkingen met een sommatieteken:

1. $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x^3+x^4+\frac{\sqrt{5}}{2}x^5+\frac{\sqrt{6}}{2}x^6+\frac{\sqrt{7}}{2}x^7+\sqrt{2}x^8+\frac{3}{2}x^9+\frac{\sqrt{10}}{2}x^{10}+\frac{\sqrt{11}}{2}x^{11}+\sqrt{3}x^{12}$.

2. $\sin x+\cos 2x+\sin 3x+\cos 4x+\sin 5x+\cos 6x+\sin 7x+\cos 8x+\sin 9x+\cos 10x$.

3. $u_0-2u_1+3u_2-4u_3+5u_4-6u_5+7u_6-8u_7+\cdots+129u_{128}-130u_{129}$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.11 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

We bundelen hier enkele rekenregels in verband met het sommatieteken zoals het afzonderen van de eerste of de laatste term en verandering van sommatie-index. Eerst een voorbeeld:

Voorbeeld 2.11.1.

Beschouw de som

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14. \tag{1}$$

Zonderen we hierin de eerste term af, dan bekomen we

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2 + \sum_{k=2}^{3} 2^k,$$

de laatste term afzonderen geeft

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{k=1}^{2} 2^k + 8.$$

We kunnen ook een substitutie uitvoeren van de sommatie-index. Stellen we bijvoorbeeld $p = k + 6$. Hoe schrijven we deze som als een som over de index p i.p.v. over de index k?

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{p=\dots}^{\dots} 2^{\cdots}$$

- Als $p = k + 6$, dan is $k = p - 6$.
- Als $k = 1$, dan is $p = 7$.
- Als $k = 3$, dan is $p = 9$.

Zo bekomen we

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{p=7}^{9} 2^{p-6} = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14.$$

Wanneer de sommatie over k-waarden van 1 t.e.m. 3 vervangen wordt door een sommatie met ondergrens 0 en bovengrens 2, wordt hetzelfde resultaat bekomen, mits de juiste aanpassing in de algemene term:

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k \overset{l \overset{\text{def}}{=} k-1}{=} \sum_{l=0}^{2} 2^{l+1} = \sum_{k=0}^{2} 2^{k+1} = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14.$$

Eigenschap 2.11.1 (Eigenschappen sommatie)**.** Voor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m \leq n$ geldt:

(a) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n-m+1 \text{ keer}} = (n - m + 1)\alpha$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7 = 7 + 7 + 7 = 21$

(b) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7^k = 7^2 + 7^3 + 7^4 = 7^2 + \sum_{k=3}^{4} 7^k$

CC BY-NC-SA 4.0

2.11 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

(c) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7^k = 7^2 + 7^3 + 7^4 = \sum_{k=2}^{3} 7^k + 7^4$

(d) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+r}^{n+r} a_{j-r}$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} 2^k = \sum_{j=5}^{7} 2^{j-4} = 2^1 + 2^2$

(e) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \left(\alpha a_k + \beta b_k\right) = \alpha \sum_{k=m}^{n} a_k + \beta \sum_{k=m}^{n} b_k$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \left(5 \cdot 2^k + 7 \cdot 3^k\right) = 5 \cdot \sum_{k=1}^{3} 2^k + 7 \cdot \sum_{k=1}^{3} 3^k$

Regel (d) betekent dat we de grenzen van de sommatie kunnen verschuiven, als we overgaan op een nieuwe sommatie-index. Deze formule is een veralgemening van $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$. Je kan later deze rekenregel zelfs proberen vergelijken met de substitutieregel in de integraalrekening: als men in een bepaalde integraal een substitutie van de integratieveranderlijke doorvoert, moeten ook de integratiegrenzen van de integraal correct worden aangepast.

Regel (e) lezen we als: een sommatie van een lineaire combinatie is de lineaire combinatie van de sommaties. Merk op dat de haakjes in het linkerlid *niet* mogen worden weggelaten.

Eigenschap 2.11.2 (Gevolgen)**.**

(a) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \left(a_k + b_k\right) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=m}^{n} a_k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \left(\alpha a_k + \beta\right) = \alpha \sum_{k=m}^{n} a_k + (n-m+1)\beta$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{n+p} a_{k-p}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$

(g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k} + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k$

Voorbeeld 2.11.2. Reken onderstaande sommen uit als je weet dat $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} x_m = 10, \sum_{m=4}^{8} y_m = 15$ en

CC BY-NC-SA 4.0

2.11 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

$x_3 = 2$.

1. $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} (y_m + 3) = 30$

Uitwerking: $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} (y_m + 3) = \sum_{m=4}^{8} y_m + \sum_{m=4}^{8} 3 = \sum_{m=4}^{8} y_m + 5 \cdot 3 = 15 + 15 = 30$

2. $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} (8x_m + 2) = 90$

Uitwerking: $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} (8x_m + 2) = 8 \sum_{m=4}^{8} x_m + 5 \cdot 2 = 8 \cdot 10 + 10 = 90$

3. $\displaystyle\sum_{m=3}^{8} \frac{x_m}{4} = 3$

Uitwerking: $\displaystyle\sum_{m=3}^{8} \frac{x_m}{4} = \frac{x_3}{4} + \sum_{m=4}^{8} \frac{x_m}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{m=4}^{8} x_m = \frac{1}{2} + \frac{10}{4} = 3$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} x_{k+2} = 12$

Uitwerking: $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} x_{k+2} \overset{\text{def } m = k+2}{=} \sum_{m=3}^{8} x_m = x_3 + \sum_{m=4}^{8} x_k = 2 + 10 = 12$

CC BY-NC-SA 4.0

2.11.A Oefeningen somteken

Oefening 2.11.1. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{k=2}^{5} k = \ldots\ldots$
2. $\sum_{k=1}^{3} 10 = \ldots\ldots$
3. $\sum_{i=2}^{5} (2i+1)^2 = \ldots\ldots$
4. $\sum_{l=3}^{6} 4 = \ldots\ldots$
5. $\sum_{m=2}^{4} \frac{20}{m} = \ldots\ldots$

Oefening 2.11.2. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{k=1}^{3} k^3 = \ldots\ldots$
2. $\sum_{k=-3}^{3} k^3 = \ldots\ldots$
3. $\sum_{k=-30}^{30} k^3 = \ldots\ldots$
4. $\sum_{n=-k}^{k} n^3 = \ldots\ldots \quad (k \in \mathbb{N})$

Oefening 2.11.3. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = \ldots\ldots$
2. $\sum_{k=2}^{4} 2^k = \ldots\ldots$
3. $\sum_{k=1}^{3} 3 = \ldots\ldots$
4. $\sum_{a=0}^{5} (2a+1) = \ldots\ldots$
5. $\sum_{l=1}^{4} (5l-1) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.11.A Oefeningen somteken

6. $\sum_{i=1}^{6} \frac{60}{i} = \ldots\ldots$

Oefening 2.11.4. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{i=m}^{m+5} k = \ldots\ldots \quad (m \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{R})$

2. $\sum_{k=0}^{3} \sin^2\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \ldots\ldots$

3. $\sum_{k=1}^{5} (n-k) - 7 = \ldots\ldots \quad (n \in \mathbb{R})$

4. $\sum_{p=0}^{8} 10^{5-p} = \ldots\ldots$

5. $\sum_{n=2}^{5} \left(\sum_{k=1}^{n} n \right) = \ldots\ldots$

6. $3 \sum_{j=0}^{3} k + j = \ldots\ldots \quad (j,k \in \mathbb{R})$

Oefening 2.11.5. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{j=0}^{5} 2^k = \ldots\ldots \quad$ met $k \in \mathbb{R}$

2. $\sum_{k=17}^{21} 5 + \sqrt[k]{1+k} = \ldots\ldots \quad$ met $k \in \mathbb{R}_0$

Oefening 2.11.6. Schrijf met een sommatieteken:

1. $2 + 5 + 10 + 17 + 26 = \sum_{k=1}^{5} \ldots\ldots$

2. $2 + 6 + 12 + 20 + 30 = \sum_{k=2}^{6} \ldots\ldots$

3. $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 = \sum_{k=1}^{7} \ldots\ldots$

Oefening 2.11.7. Vul aan.

1. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{k=1}^{2} k^2 + \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.11.A Oefeningen somteken

2. $\sum_{m=2}^{5} 4m = \ldots\ldots + \sum_{m=3}^{5} 4m$

3. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{k=3}^{\ldots\ldots} \ldots\ldots$

4. $\sum_{m=2}^{5} 2^m = \sum_{p=5}^{\ldots\ldots} 2^{\cdots\cdots}$

Oefening 2.11.8. Vul aan:

1. $\sum_{i=1}^{4} 3i^2 = \sum_{j=5}^{\ldots\ldots} \ldots\ldots$

2. $\sum_{i=3}^{5} \left(2i^2+3\right) = \sum_{i=3}^{4} \left(2i^2+3\right) + \ldots\ldots$

3. $\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 + \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.12 De faculteit $n!$

Een macht a^n is een korte notatie voor het product van n keer hetzelfde getal a, namelijk $a \cdot a \cdot \cdots \cdot a = a^n$. De faculteit $n!$ is een kort notatie voor het product van de getallen van 1 tot een bepaald getal n, namelijk $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n!$. We lezen $n!$ als n-faculteit of de faculteit van n.

De faculteit komt voor bij de binomiaalgetallen (en dus bij het binomium van Newton), bij telproblemen, kansberekeningen en statistiek, maar ook in de analyse, bv bij taylorreeksen.

Definitie 2.12.1 (Faculteit)**.** De **faculteit** van een natuurlijk getal $n!$ (lees: n-faculteit) is

$n! \stackrel{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ als $n \in \mathbb{N}_0$ Vb: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$

We kunnen natuurlijk de volgorde van de factoren omkeren, en ook schrijven:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Voorbeeld 2.12.1.

1. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

2. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4! = 120$

3. $100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 100!$

Uitwerking: Het is redelijkerwijze niet mogelijk om $100!$ volledig in te tikken: het heeft 158 digits. Voor wie het toch heeft uitgerekend: het antwoord is 93 326 215 443 944 152 681 699 238 856 266 700 490 715 968 264 381 621 468 592 963 895 217 599 993 229 915 608 941 463 976 156 518 286 253 697 920 827 223 758 251 185 210 916 864 000 000 000 000 000 000 000 000. Dit getal is tamelijk groot, en zeker erg veel groter dan het geschatte aantal atomen in het universum, dat slechts hoogstens 10^{82} zou bedragen.

4. $\dfrac{100!}{98!} = 100 \cdot 99 = 9900$

Uitwerking: $\dfrac{100!}{98!} = \dfrac{100 \cdot 99 \cdot \cancel{98} \cdot \cancel{97} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{98} \cdot \cancel{97} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}$

5. $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = \dfrac{50!}{46!}$

De voorbeelden illustreren volgende rekenregels voor de faculteitsoperatie:

Eigenschap 2.12.1.

$n! = n(n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}_0$ Vb: $7! = 7 \cdot 6!$

$(n+1)! = (n+1)n!, \quad n \in \mathbb{N}$ Vb: $7! = 7 \cdot 6!$

$\dfrac{n!}{p!} = n(n-1)\ldots(p+1), \ p < n$ Vb: $\dfrac{7!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$

want $\dfrac{n!}{p!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(p+1)\cancel{p \cdot (p-1)} \ldots \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{p \cdot (p-1)} \ldots \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = n(n-1)\ldots(p+1)$

Merk op dat de eerste twee regels precies hetzelfde zeggen namelijk dat de faculteit van een natuurlijk getal gelijk is aan het product van dat getal met de faculteit van het vorige natuurlijke getal.

CC BY-NC-SA 4.0

2.12.A Oefeningen faculteit

Oefening 2.12.1. Bereken:

1. $7! = \ldots\ldots$
2. $6 \cdot 5! \cdot 7 = \ldots\ldots$ (korte formule) $= \ldots\ldots$ (getal)
3. $\dfrac{10!}{7!} = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{1984!}{1983!} = \ldots\ldots$

Oefening 2.12.2. Vereenvoudig. ($k, n \in \mathbb{N}$ en $k + n \geqslant 2$)

1. $\dfrac{(k+1)!}{k!} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{(k+3)!}{k!} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{(k+n)!}{k+n-1} = \ldots\ldots$

Oefening 2.12.3. Vereenvoudig. ($m, n \in \mathbb{N}$ met $m \neq 0$ en $n < m - 1$)

1. $\dfrac{m!}{(m-1)!} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{(m+4)!}{m!} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{(m-n)!}{(m-n-1)(m-n)} = \ldots\ldots$

Oefening 2.12.4. Vul aan. ($k, l, m \in \mathbb{N}$ en $l \geqslant 3$)

1. $(k+1)! + k! = (\ldots\ldots)k!$
2. $3(l-2)! + 2(l-3)! = (\ldots\ldots)(l-3)!$

Oefening 2.12.5. Juist of fout? ($n, k, l \in \mathbb{N}_0$ en $l < k$)

1. $(n+4)!(n+3) \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Fout
2. $(n+4)(n+3)! \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Fout
3. $(n+4)(n+3)! \stackrel{?}{=} (n+4)!$ Juist
4. $\dfrac{(n+4)!}{(n+3)} \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Fout
5. $\dfrac{(n+4)!}{(n+4)} \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Juist
6. $\dfrac{(n+4)!}{(n+3)!} \stackrel{?}{=} (n+4)!$ Fout

CC BY-NC-SA 4.0

2.12.A Oefeningen faculteit

7. $\frac{(n+4)!}{(n+3)!} \stackrel{?}{=} (n+4)$ Juist

8. $\frac{(n+4)!}{4!} \stackrel{?}{=} n!$ Fout

9. $\frac{(4n)!}{4} \stackrel{?}{=} n!$ Fout

10. $\frac{n!4!}{5!} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{5}$ Juist

11. $\frac{n!6!}{(n-1)!5!} \stackrel{?}{=} 6n$ Juist

12. $\frac{k!}{(k+2)!(k-l-1)!} \stackrel{?}{=} \frac{k!(k-l)}{(k+2)!(k-l)!}.$ Juist

CC BY-NC-SA 4.0

2.13 Binomiaalgetallen

We definiëren een handige notatie voor getallen die in allerlei contexten opduiken:

Definitie 2.13.1 (Binomiaalgetallen)**.**

Het **binomiaalgetal** n **over** p, genoteerd $\binom{n}{p}$, van twee natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ is

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Vb: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$

Opmerking 2.13.1.

(a) Men leest $\binom{n}{p}$ als 'n over p' of als 'n kies p'.
Maar, let hiermee op want ook de breuk $\frac{n}{p}$ wordt soms gelezen als n over p.

(b) Deze getallen komen voor in het Binomium van Newton, en dat verklaart de naam *binomiaal*getallen.

(c) Deze getallen komen ook voor bij de studie van telproblemen: $\binom{n}{p}$ is precies gelijk aan het aantal *deelverzamelingen* van p elementen uit een verzameling van n elementen. Dat aantal wordt ook genoteerd als C_n^p. Er geldt dus dat (let op de omwisseling van de sub- en superscripts!):

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Voorbeeld 2.13.1 (Basisvoorbeeld)**.**

(a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1})(2 \cdot 1)} = 10 \quad (= C_5^3)$

(b) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \binom{5}{3} = 10$ (zie hierboven)

(c) $\binom{2}{2} = \frac{\cancel{2!}}{\cancel{2!}0!} = 1 \quad (= C_2^2)$ (want $0! = 1$)

(d) $\binom{4}{0} = \frac{\cancel{4!}}{0!\cancel{4!}} = 1 \quad (= C_4^0)$

(e) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4 \quad (= C_4^1)$ (want $4! = 4 \cdot 3!$).

Volgende rekenregels kunnen eenvoudig worden afgeleid uit de definitie (behalve de laatste: daar is zelf het bewijs vinden wat uitdagender, maar niet onmogelijk).

Eigenschap 2.13.1 (Rekenregels binomiaalgetallen)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

2.13 Binomiaalgetallen

Voor natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ geldt:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} &= \binom{n}{n-p} \\
\binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 \\
\binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n \qquad n \geq 1 \\
\binom{n+1}{p} &= \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \qquad p \geq 1
\end{aligned}$$

Volgende eigenschap is een veralgemening van merkwaardige producten als:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

Bijvoorbeeld de laaste vergelijking kunnen we ook schrijven als

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

Deze eigenschap levert ook de verklaring voor het woord *binomiaal*, want een '*bi*noom' is een '*twee*term' (net zoal een *mo*noom een *één*term is, en een *poly*noom een *veel*term). De binomiaalgetallen $\binom{n}{p}$ zijn dus precies die coëfficiënten die opduiken bij de p-de term als je een binoom verheft tot de n-de macht. We gebruiken het sommatieteken $\sum$:

Eigenschap 2.13.2 (Binomium van Newton)**.**

Voor reële getallen a en b en een natuurlijk getal n geldt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

Omdat $(a+b)^n = (b+a)^n$ (of omwille van de eerste rekenregel voor binomiaalgetallen) geldt ook dat

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p}.$$

Oefening 2.13.1. Bereken volgende uitdrukkingen.

1. $\binom{5}{1} = \ldots\ldots$
2. $\binom{20}{19} = \ldots\ldots$
3. $\binom{2019}{1302} + \binom{2019}{1301} = \binom{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$
4. $\binom{42}{20} - \binom{42}{22} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.14 Telproblemen

PAS OP: ZEER voorlopige versie !!! (enkel extract uit Zomercursus)

Als inleidend voorbeeld bekijken we volgend telprobleem. Stel er wordt een renwedstrijd gehouden met twaalf paarden. Bij de *tiercé* kunnen gokkers dan voorspellen in welke volgorde de paarden over de eindstreep komen. Hoeveel mogelijke voorspellingen zijn er? Voor het winnende paard zijn er precies 12 mogelijkheden. Eens het winnende paard vastligt, blijven er nog 11 paarden over die als tweede kunnen eindigen, er zijn dus nog 11 mogelijkheden om het tweede paard te 'kiezen'. Voor het paard dat als derde over de eindmeet zal komen, blijven er dan nog 10 mogelijkheden over enzovoort... Het aantal mogelijke pronostieken voor de tiercé is bijgevolg gelijk aan $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479001600$. Veralgemenen we dit concept tot een paardenwedstrijd met n paarden ($n \in \mathbb{N}_0$), bekomen we als aantal mogelijke pronostieken

Formula 1.

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1. \tag{1}$$

Een uitdrukking van de vorm (1) komt heel vaak voor in de wiskunde en i.h.b. in de hogergenoemde disciplines. Een verkorte schrijfwijze is dus aangewezen: het product (1) noteren we met $n!$ (lees: n-faculteit).

In de toepassingen bij dit pakket behandelen we nog *de driehoek van Pascal* en het *binomium van Newton*.

2.14.1 Telproblemen: variaties

We hernemen het voorbeeld van de paardenrennen uit de inleiding. We houden een wedstrijd met 12 paarden. Opnieuw moeten gokkers de uitslag van de wedstrijd voorspellen, maar deze keer niet de volledige uitslag. Ze moeten enkel een pronostiek maken van welke drie paarden eerst zullen eindigen en in welke volgorde. Op hoeveel manieren is dit mogelijk? Als we dezelfde redenering volgen als in de inleiding, vinden we dat er $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ verschillende pronostieken mogelijk zijn.

Wiskundig kan men zo'n pronostiek zien als een geordend drietal van elementen afkomstig uit een verzameling van 12 elementen. Men spreekt in deze context van een *variatie* van 3 elementen uit 12 elementen. Het aantal mogelijke variaties kan men berekenen m.b.v. de faculteitsoperatie. Zij namelijk $p, n \in \mathbb{N}$ met $p \leqslant n$, dan is het aantal variaties van p elementen uit n elementen gegeven door

$$\begin{aligned} V_n^p &\overset{\text{notatie}}{=} \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ factoren}} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)(n-p-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

2.14.2 Combinaties, de driehoek van Pascal, het binomium van Newton

We hernemen nogmaals het voorbeeld van de paardenrennen uit vorige paragraaf. Ditmaal moeten de gokkers voorspellen welke drie paarden op de eerste drie plaatsen zullen eindigen, de volgorde heeft geen enkel belang. Wiskundig vertaalt zich een dergelijke pronostiek in een deelverzameling van 3 elementen afkomstig uit een verzameling van 12 elementen (er nemen 12 paarden deel aan de wedstrijd). Als $p, n \in \mathbb{N}$ en $p \leqslant n$, noemen we een deelverzameling van p elementen uit een verzameling van n elementen een *combinatie* van p elementen uit n elementen.

Hoeveel mogelijke pronostieken bestaan er onder deze nieuwe voorwaarden, m.a.w. hoeveel combinaties zijn er van 3 uit 12? Omdat de volgorde nu geen rol meer speelt, bestaan er in elk geval minder combinaties dan variaties. Daar je een verzameling van 3 elementen op precies $3! = 6$ manieren kan ordenen, bestaan er voor elke combinatie $\{a, b, c\}$ van 3 elementen precies 6 verschillende variaties (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) en (c, b, a), opgebouwd uit diezelfde 3 elementen a, b en c. M.a.w. er bestaan precies zes keer meer variaties van 3 uit 12 dan er combinaties bestaan van 3 uit 12. Algemeen hebben we dan dat

CC BY-NC-SA 4.0

2.14 Telproblemen

voor $p, n \in \mathbb{N}$ met $p \leqslant n$ er $p!$ keer meer variaties zijn van p elementen uit n elementen dan er combinaties zijn van p uit n, zodat het totaal aantal combinaties van p elementen uit n elementen gegeven is door onderstaande formule:

$$C_n^p \overset{\text{notatie}}{=} \binom{n}{p} \overset{\text{notatie}}{=} \frac{V_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Voorbeeld 2.14.1.

(a) $C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = 10$

(b) $C_2^2 = \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!0!} = \frac{2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot 1} = 1$

(c) $C_4^0 = \binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 1$

(d) $C_4^1 = \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = 4.$

Natuurlijke getallen van de vorm $\binom{n}{p}$ met $p, n \in \mathbb{N}$ en $p \leqslant n$, worden ook wel *binomiaalgetallen* genoemd. De herkomst van deze naam wordt verder duidelijk. De binomiaalgetallen $\binom{n}{p}$ worden vaak voorgesteld in een driehoekig schema, de zgn. *driehoek van Pascal*[1] (zie Figuur **??**).

[1] De Fransman Blaise Pascal was filosoof, theoloog, wis- en natuurkundige. Hij werd geboren in 1623 in Clermont Ferrand en stierf in Parijs in 1662. Zijn belangrijkste prestaties situeren zich in het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening, de combinatieleer, de projectieve meetkunde, de hydrostatica (de wet van Pascal voor de druk in een vloeistof) en de hydrodynamica.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Rekenregels reële getallen

Eigenschap 3.1.1. Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelden volgende rekenregels:

$$
\begin{array}{rcll}
a+b &=& b+a & \text{commutativiteit van } + \\
a+(b+c) &=& (a+b)+c & \text{associativiteit van } + \\
a+0 &=& a & 0 \text{ is het neutrale element voor } + \\
a+(-a) &=& 0 & \text{inverse voor } +, \text{ 'tegengestelde'} \\
 & & & \\
a\cdot b &=& b\cdot a & \text{commutativiteit van } \cdot \\
a\cdot(b\cdot c) &=& (a\cdot b)\cdot c & \text{associativiteit van } \cdot \\
a\cdot 1 &=& a & 1 \text{ is het neutrale element voor } \cdot \\
a\cdot\dfrac{1}{a} &=& 1 \quad (\text{voor } a\neq 0) & \text{inverse voor } \cdot, \text{ 'omgekeerde'} \\
a\cdot 0 &=& 0 & 0 \text{ is het opslorpend element voor } \cdot \\
 & & & \\
a\cdot(b+c) &=& a\cdot b+a\cdot c & \text{distributiviteit van } \cdot \text{ t.o.v} + \\
 & & & \\
(a+b)\cdot(c+d) &=& a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d) & \text{gevolg van distributiviteit} \\
 &=& a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d & \\
 & & & \\
a(c+d) &=& ac+ad & \\
(a+b)^2 &=& a^2+2ab+b^2 & \text{kwadraat van een som} \\
(a-b)^2 &=& a^2-2ab+b^2 & \text{kwadraat van een verschil} \\
(a+b)(a-b) &=& a^2-b^2 & \text{verschil van kwadraten} \\
 & & & \\
-(-a) &=& a & \\
-(a+b) &=& -a-b & \text{en dus } -(a-b)=-a+b \text{ en } -(-a+b)=a-b
\end{array}
$$

Volgorde van bewerkingen:

(a) Wat binnen haakjes staat uitwerken (van 'binnen' naar 'buiten')
(b) Machten en (vierkants)wortels uitwerken (van 'binnen' naar 'buiten')
(c) Vermenigvuldigingen en delingen uitvoeren (van links naar rechts)
(d) Optellingen en verschillen uitvoeren (van links naar rechts)
(e) Gebruik telkens handig de commutativiteit, associativiteit en distributiviteit

Voorbeeld 3.1.1.

1. $1-2+3-\left(2\cdot 3\cdot(3-(1+2-3)-3)^{1492}-2\right)\cdot 10 = 22$

Uitwerking: $1-2+3-\left(2\cdot 3\cdot(3-(0)-3)^{1492}-2\right)\cdot 10 = 2-(6\cdot 0-2)\cdot 10 = 2-(-20) = 22$

2. $1+2\left((-3)\cdot(-4)^2+2\sqrt{((1+2)\cdot 3+(1+1)^2+3}\right)^2 = 3201$

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rcl}
1+2\left((-3)\cdot(-4)^2+2\sqrt{((1+2)\cdot 3+(1+1)^2+3}\right)^2 &=& 1+2\left(-3\cdot 16+2\sqrt{(3\cdot 3+2^2+3}\right)^2 \\
 &=& 1+2\left(-48+2\sqrt{9+4+3}\right)^2 \\
 &=& 1+2\left(-48+2\sqrt{16}\right)^2 = 1+2(-48+2\cdot 4)^2 \\
 &=& 1+2(-40)^2 = 1+2\cdot 1600 = 1+3200 = 3201
\end{array}
$$

CC BY-NC-SA 4.0