KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht Lineaire Algebra

(Versie 2026/08/25H.56)

Inhoudsopgave

1 Vectoren en matrices 1.1

1.1 Intro . . . 1.2
1.2 Vectoren . . . 1.3
1.3 Lineaire combinaties . . . 1.5
1.4 Inwendig product of inproduct . . . 1.6
1.5 Matrices . . . 1.7
1.6 Som en veelvoud van matrices . . . 1.10
1.7 Product van een matrix met een kolomvector . . . 1.11
1.8 Product van matrices . . . 1.14
1.9 Eigenschappen van het product van matrices . . . 1.18
1.10 Transponeren van matrices . . . 1.21
1.11 Inwendig product van vectoren . . . 1.23
1.12 Determinanten . . . 1.27
1.13 Vectorieel product . . . 1.31

2 Vectoren en matrices oud 2.1

2.1 Lineaire combinaties en inwendig product . . . 2.2
2.2 Matrices . . . 2.4
2.2.1 Definitie van een matrix . . . 2.4
2.2.2 Som en scalair veelvoud van matrices . . . 2.6
2.2.3 Het product van een matrix met een kolomvector . . . 2.7

3 Matrices light versies (oud?)) 3.1

3.1 Vectoren . . . 3.2
3.2 Matrices . . . 3.5
3.3 Rekenen met Matrices . . . 3.8

4 Stelsels 4.1

4.1 Stelsels: inleiding . . . 4.2
4.2 Stelsels: definitie . . . 4.4
4.3 Stelsels: enkele interpretaties . . . 4.7
4.4 Stelsels: oplossingen . . . 4.8
4.5 Stelsels: direct oplosbaar . . . 4.10
4.6 Stelsels: oplossen via echelonvorm . . . 4.14

4.6.1 Elementaire rijoperaties 4.14
4.6.2 Eliminatiemethode van Gauss 4.16
4.7 Stelsels: met parameters 4.23
4.8 Stelsels: inverse matrix via echelon 4.29

5 Stelsels zonder matrices (FABER) 5.1
5.1 Stelsels: inleiding 5.2
5.1.1 Voorbeelden van lineaire stelsels 5.2
5.2 Stelsels: direct oplosbaar 5.5
5.3 Oplossen van 2×2 stelsels 5.8
5.4 Stelsels: oplossingen 5.13

6 Rechten en vlakken 6.1
6.1 Vectoren en punten in het vlak 6.2
6.2 Vectoren en verschuivingen in het vlak 6.5
6.3 Parametervergelijking van een rechte 6.8
6.4 2D: Cartesiaanse vergelijkingen 6.12
6.5 2D: omzetten van vergelijkingen 6.16
6.6 3D, rechten: parametervergelijkingen 6.20
6.7 3D, vlakken: Cartesiaanse vergelijkingen 6.22
6.8 3D, rechten: Cartesiaanse vergelijkingen 6.25
6.9 3D, vlakken: parametervergelijkingen 6.27
6.10 3D: omzetten van vergelijkingen 6.28
6.11 Doorsneden van rechten en vlakken 6.31
6.11.1 Twee cartesiaanse vergelijkingen gegeven 6.31
6.11.2 Een cartesiaanse en een parametervergelijking gegeven 6.31
6.11.3 Twee parametervergelijkingen gegeven 6.32

7 Lineaire combinaties en vectorruimten 7.1
7.1 Lineaire combinaties en deelruimten 7.2
7.2 Lineaire combinaties en homogene stelsels 7.6
7.3 Lineaire combinaties en echolonvorm 7.7
7.4 Vectoren in abstracte wiskunde 7.8

8 Vectoren (zoals) in fysica 8.1
8.1 Vectoren in de fysica 8.2
8.1.1 Vectoren als objecten met grootte, richting en zin 8.2

8.1.2 Basisbewerkingen met vectoren 8.2
8.2 Assenstelsels en coördinaten 8.4
8.3 Vectoren in poolcoördinaten 8.8
8.4 EHBO: som van vectoren 8.10
8.5 Inwendig product van vectoren 8.13
8.6 Vectorieel product van vectoren 8.17
8.6.A Oefeningen vectoren 8.20

9 Lineaire Algebra(Extra materiaal) 9.1
9.1 Matrices: alternatief overzicht 9.2
9.1.1 Het begrip matrix 9.2
9.1.2 Som van matrices 9.3
9.1.3 Scalair veelvoud van matrices 9.3
9.1.4 Product 9.4
9.2 Vectoren en matrices 9.8
9.3 Stelsels: definitie 9.17
9.3.A Oefeningen stelsels 9.22
9.3.B Oefeningen matrices 9.23

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 1
Vectoren en matrices

(Versie 2026/08/25H.56)

1.1 Intro

Lineaire algebra kan beschouwd worden als

- de theorie van vectoren en matrices.
- de theorie van het oplossen van lineaire stelsels
- de veralgemening van de theorie van rechten en vlakken naar meerdere dimensies
- de theorie van vectorruimten

Het belang van de lineaire algebra ligt in het feit dat er voor de meeste problemen volledige oplossingsmethoden bestaan. De oplossingsverzameling van elk lineair stelsel kan worden bepaald, het product van matrices kan worden berekend en de inverteerbaarheid kan worden bepaald. De doorsnedes van alle deelruimten kunnen worden berekend.

Dit alles in tegenstelling tot bijvoorbeeld calculus, waar voor veel integralen geen analytische formules bestaan, en inversen van functies dikwijls niet analytisch kunnen worden berekend.

De lineaire algebra wordt dan ook dikwijls gebruikt om 'lineaire benaderingen' te bestuderen van fenomenen waarvoor een analytische uitwerking onmogelijk is. De differentiaalrekening is essentieel een methode om analytische problemen (zoals die in de natuur voorkomen, maar die in de praktijk dikwijls niet oplosbaar zijn) om te zetten in problemen uit de lineaire algebra (die meestal wel oplosbaar zijn, maar slechts 'lokaal' een goede benadering zijn van het echte probleem). In goede omstandigheden kunnen via integratie al die 'lokale benaderingen' weer terug aan elkaar gekoppeld worden tot een globale oplossing.

De lineaire algebra vormt dus een erg belangrijk hulpmiddel in een 'verdeel en heers' strategie van de wiskunde.

Er zijn verschillende aspecten aan de studie van lineaire algebra:

- concreet te leren rekenen met reële vectoren en matrices (ie, rekenen in $\mathbb{R}^n$)
- het leren oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen
- meetkundige intuïtie opbouwen over (meerdimensionale) vectoren
- wiskundige veralgemening met vectorruimten
- verband leggen met de soms sterk verschillende kijk op vectoren in de fysica

Niet alles wat verder wordt behandeld is leerstof uit het secundair onderwijs. We zien deze module ook als een brug tussen het secundair onderwijs en de cursussen lineaire algebra en fysica uit een aantal bacheloropleidingen.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Vectoren

We gebruiken het begrip *vector* hier als een andere naam voor een *n-tal van reële getallen*. Dergelijke vectoren veralgemenen de koppels (x, y), en dus punten of vectoren in het vlak, en de drietallen (x, y, z) en dus punten of vectoren in de driedimensionale ruimte. De *meetkundige* betekenis in een n-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^n$ wordt elders besproken, hier beperken we ons tot wat nuttig is bij de studie van stelsels van vergelijkingen .

Voorbeeld 1.2.1 (Voorbeelden van vectoren)**.**

Volgende reeksen van getallen kunnen worden voorgesteld als een vector:

(a) maximumtemperaturen per dag in Ukkel tijden de eerste week van maart 2021:

$$(11.8 , 17.2 , 16.3 , 8.7 , 6.4 , 7.3 , 6.2)$$

(b) veilingprijzen (€/kg) van aardbeien, appelen, braambessen, frambozen en peren op 15/3/2021:

$$(8.307 , 0.570 , 6.660 , 0.909 , 0.480)$$

(c) het verschil van die veilingprijzen ten opzicht van de vorige dag:

$$(-1.805 , -0.040 , +0.308 , +0.272 , -0.007)$$

Merk op dat het niet abstract of exotisch is vectoren te bestuderen met meer dan 2 of 3 componenten. Klimaatwetenschappers gebruiken vectoren met 10.000, 1.000.000 of nog veel meer componenten, afhankelijk van de nauwkeurigheid waarmee ze de evolutie van gemiddelde jaartemperaturen willen bestuderen.

Definitie 1.2.1 (Vector als n-tal)**.**

Een **vector a** is een geordend n-tal reële getallen en $\mathbb{R}^n$ is de verzameling van al die vectoren:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Men noemt een vector in $\mathbb{R}^n$ soms een n-**vector**, en n de **dimensie** van de vector.

De getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ zijn de **componenten** (of ook **coördinaten**) van de vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Vectoren zijn *gelijk* als ze *dezelfde componenten* hebben *in dezelfde volgorde*: $(0.5, 1) = (\frac{1}{2}, 1)$ en $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Voorbeeld 1.2.2.

$(1, 2)$	is een vector in $\mathbb{R}^2$	$(\sqrt{2}, 0, -1, \pi)$	is een vector in $\mathbb{R}^4$
$(1, -2, \frac{1}{2})$	is een vector in $\mathbb{R}^3$	$(1, 1, \dots, 1)$	is een vector in $\mathbb{R}^n$

Opmerking 1.2.1.

- In andere contexten worden andere definities gegeven van vectoren: vectoren komen onder verschillende gedaantes voor in de meetkunde, in de fysica en in de lineaire algebra.
- Men noteert een vector $\mathbf{a}$ soms ook met een pijltje als $\vec{a}$ of gewoon als a. Uiteraard kunnen er ook andere letters gebruikt worden zoals $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ of $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.

De belangrijkste bewerkingen op vectoren zijn de *som* en het *scalair veelvoud*. Met behulp van de som

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Vectoren

kunnen we onmiddellijk ook *verschil* en *tegengestelde* definiëren.

Definitie 1.2.2 (Rekenen met vectoren)**.**

Voor twee vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ en een getal $r \in \mathbb{R}$ definiëren we:

som	$\mathbf{a}+\mathbf{b}$	$=$	$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$
scalair veelvoud	$r\mathbf{a}$	$=$	$r \cdot \mathbf{a} = r(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$
nulvector	$\mathbf{0_n}$			$\overset{\text{def}}{=}$	$(0, \dots, 0)$
tegengestelde	$-\mathbf{a}$	$=$	$-(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$
verschil	$\mathbf{a}-\mathbf{b}$	$\overset{\text{def}}{=}$	$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$	$=$	$(a_1-b_1, a_2-b_2, \dots, a_n-b_n)$

Voorbeeld 1.2.3.

$$(1,2)+(3,4) = (1+3, 2+4) = (4,6) \qquad (4,3)-(2,1) = (4-2, 3-1) = (2,2) = 2\cdot(1,1)$$
$$-(1,2,3) = (-1,-2,-3) \qquad (1,-1.5,3)+(2.2,-1,0) = (3.2,-2.5,3)$$
$$3\cdot(1,2) = (3,6) \qquad 3\cdot(1,-1,0.5) = (3,-3,1.5)$$

Opmerking 1.2.2.

- De som en het verschil van vectoren worden 'component per component' berekend. Bijgevolg zijn som en verschil enkel gedefinieerd voor vectoren *van hetzelfde formaat*: de som ~~$(1,2)+(3,4,5,6)$~~ is *niet gedefinieerd*.
- Indien het formaat duidelijk is uit de context wordt de index n van de nulvector meestal weggelaten: $\mathbf{0} = \mathbf{0_n}$. Als er geen verwarring mogelijk is wordt zelfs niet altijd onderscheid gemaakt tussen het getal 0 en de vector $\mathbf{0}$ en schrijft men ook $\mathbf{a}+0$ in plaats van $\mathbf{a}+\mathbf{0_n}$.
- Net zoals voor de vermenigvuldiging van getallen schrijft men het punt voor de scalaire vermenigvuldiging soms wel en soms niet: $r \cdot \mathbf{a} = r\mathbf{a}$.
- Het scalair veelvoud is het resultaat van de ('scalaire') vermenigvuldiging van een *scalar* r (dus een reëel getal) met een *vector* $\mathbf{a}$. Het resultaat is zelf dus een *herschaalde vector* $r\mathbf{a}$. Per uitzondering noemen we hier het resultaat van een vermenigvuldiging geen *product*, maar een *veelvoud*. Het is redelijk om $r\mathbf{a}$ '*scalair*' *veelvoud* te noemen, want $r\mathbf{a}$ is inderdaad een r *keer* her*schaal*de vector $\mathbf{a}$.
- Pas op: er bestaat ook een scalair *product* van vectoren, en dat is iets totaal anders dan het scalair *veelvoud*. Bij het scalair *product* worden *twee vectoren* vermenigvuldigd waarbij het resultaat een *scalar* is, dus een reëel getal.

Volgende rekenregels volgen onmiddellijk uit de definitie van de optelling en het scalair veelvoud:

Eigenschap 1.2.1. Voor elke vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en elk getal $r \in \mathbb{R}$ geldt

$$\mathbf{a}+\mathbf{0_n} = \mathbf{a} \qquad 1\mathbf{a} = \mathbf{a} \qquad (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$$
$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0_n} \qquad 0\mathbf{a} = \mathbf{0_n} \qquad r\mathbf{0_n} = \mathbf{0_n}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Lineaire combinaties

Met vectoren worden in de praktijk dikwijls zogenaamde *lineaire combinaties* gevormd:

Definitie 1.3.1 (Lineaire combinatie)**.**

Een **lineaire combinatie van vectoren** is *een som van (scalaire) veelvouden* van die vectoren.

Als $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$ en $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, dan is de vector

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \ldots + a_m\mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$$

een **lineaire combinatie** van de vectoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ met **coëfficiënten** of **gewichten** a_i.

Voorbeeld 1.3.1. Als $\mathbf{e}$ staat voor één ei, $\mathbf{b}$ voor één gram bloem en $\mathbf{m}$ voor één milliliter melk, dan leren terzake gespecialiseerde websites dat

$$2\mathbf{e} + 250\mathbf{b} + 500\mathbf{m} = 8\mathbf{p}$$

waarbij $\mathbf{p}$ staat voor één pannenkoek, en dat een geschikte lineaire combinatie van eieren, bloem en melk dus acht pannenkoeken oplevert.

We kunnen in deze context een drietal $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ interpreteren als x eieren, y gram bloem en z milliliter melk. Dan is $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$ inderdaad één ei, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$ één gram bloem en $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ één milliliter melk. In de driedimensionale ruimte met punten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ komt het punt $(2, 250, 500)$ overeen met 8 pannenkoeken, en $(4, 500, 1000)$ met 16 pannenkoeken. Het grootste deel van de ruimte komt echter overeen met 'smurrie'.

Deze eenvoudige modellering houdt ten onrechte ook geen rekening met het nochtans belangrijke bakproces met parameters als temperatuur, baktijd en gebruikte vetstoffen. Een volledige uitwerking van dit voorbeeld hoort thuis in terzake meer gespecialiseerde cursussen, maar we kunnen opmerken dat pannenkoeken bakken een proces is dat plaatsvindt in een ruimte van minstens dimensie 6, met als onafhankelijke grootheden de hoeveelheden eieren, bloem, melk samen met de baktemperatuur, de baktijd en de hoeveelheid vetstof.

Een voor de hand liggend probleem is het bepalen van de deelverzameling van $\mathbb{R}^6$ die effectief *pannenkoeken* oplevert, om vervolgens het punt te zoeken dat de *lekkerste pannenkoeken* oplevert. Als economen ook prijzen toevoegen aan het model kunnen ze op zoek gaan naar de goedkoopste pannenkoeken. Ingenieurs kunnen de verhouding baktijd/baktemperatuur optimaliseren, ofwel naar benodigde tijd, ofwel naar benodigde energie per pannenkoek. Als voedingsdeskundigen bacteriële gegevens toevoegen, kunnen ze de maximale bewaartijd bepalen. En als studenten honger krijgen, kunnen ze nu een pannenkoek gaan eten.

Voorbeeld 1.3.3 (Lineaire combinaties)**.**

$(5,7)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(4,5)$	want $(5,7) = 1(1,2) + 1(4,5)$.
$(1,2)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(4,5)$	want $(1,2) = 1(1,2) + 0(4,5)$.
$(2,4)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(4,5)$	want $(2,4) = 2(1,2) + 0(4,5)$.
$(2,4)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(2,4)$	want $(2,4) = 2(1,2) + 0(2,4)$, of ook $(2,4) = 0(1,2) + 1(2,4)$.
$(5,7)$	is geen	lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(2,4)$	want $(5,7) \neq a(1,2) + b(2,4) = (a+2b)(1,2)$.
$(2,4,0)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$	want $(2,4,0) = 2(1,2,0) + 0(4,5,0)$.
$(2,4,1)$	is geen	lineaire combinatie van $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$	want de derde component is altijd 0.
$(14,19)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(4,5)$	want $(14,19) = 2(1,2) + 3(4,5)$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Inwendig product of inproduct

Met twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ wordt ook één getal geassocieerd: zogenaamde het *inwendig of scalair product*.

Definitie 1.4.1.

Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ is het reëel getal

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 1.4.1.

$$(1,2) \cdot (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11 \quad \text{en} \quad (3,-2,1) \cdot (2,2,-2) = 6 - 4 - 2 = 0.$$

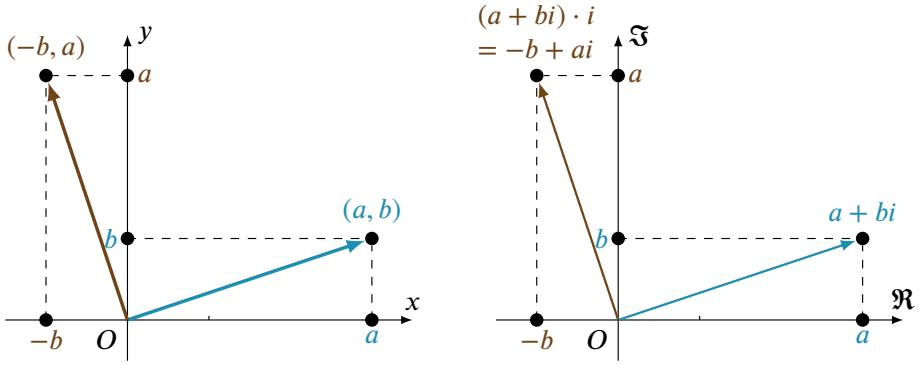
Dit inwendig product levert informatie over de onderlinge ligging van beide vectoren, in het bijzonder:

Eigenschap 1.4.1. Voor twee vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

In $\mathbb{R}^2$ kan je deze eigenschap als volgt begrijpen: een kwartdraai van het vlak in tegenwijzerzin brengt de positieve x-as naar de positieve y-as en de positieve y-as naar de negatieve x-as. Een punt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ komt bij een kwartdraai dus terecht op het punt $(-b,a)$, en na een kwartdraai staat de vector $(-b,a)$ dus loodrecht op de oorspronkelijke vector (a,b):

$$(a,b) \perp (-b,a) \quad \text{en} \quad (a,b) \cdot (-b,a) = a(-b) + ba = 0.$$



Wie vertrouwd is met complexe getallen, kan opmerken dat het koppel (a,b) kan geschreven worden als $a+bi$, dat 'vermenigvuldigen met i' overeenkomt met een kwartdraai, en dat $(a+bi) \cdot i = ai + bi^2 = -b + ai$ dus inderdaad overeenkomt met het punt $(-b,a)$.

Volgend filmpje legt dit uit in 15 seconden (van tijd 2:51 tot 3:05):

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/FvdrGuCfAhk?start=175&end=185&autostart=1&rel=0&

1.5 Matrices

Net zoals een vector een manier is om *veel getallen* bij te houden, kan je een *matrix* beschouwen als een manier om *veel vectoren* (van dezelfde dimensie) bij te houden. Matrices zijn dus *rechthoeken van getallen*, en ze zijn bijvoorbeeld erg nuttig bij de studie van stelsels van vergelijkingen maar komen ook voor in andere contexten.

Voorbeeld 1.5.1. Examenresultaten voor verschillende vakken kan je bijhouden in een tabel:

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

Je kan dezelfde gegevens ook in volgende (punten)matrix $\mathbf{A}$ opschrijven

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}.$$

In deze voorstelling staan de punten van een bepaalde leerling in een rij, en de punten van een bepaald vak in een kolom. We noemen $\mathbf{A}$ een 5×4-matrix met 5 *rijen* en 4 *kolommen*. Het getal op rij 3 en kolom 2 zijn de punten van Chris voor Nederlands, en noteren we met indices als $(\mathbf{A})_{32} = 65$.

Definitie 1.5.1 (Matrix)**.**

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

- Met $\mathbb{R}^{m \times n}$ noteren we de verzameling van alle $m \times n$ matrices van reële getallen.
- De **matrixelementen** (of soms ook *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{1,1}, \ldots a_{i,j}, \ldots, a_{m,n}$. Soms noteert men de matrixelementen als $(\mathbf{A})_{i,j} \overset{\text{def}}{=} a_{i,j} \in \mathbb{R}$, en de matrix A als $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ of $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (dus met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij .
- De **diagonaal** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ bestaat uit de elementen $a_{i,i}$ die we de **diagonaalelementen** van de matrix noemen. Voor een vierkante matrix vormen ze inderdaad de diagonaal

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Matrices

van de matrix. In volgende voorbeelden zijn de diagonaalelementen blauw gekleurd:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 1.5.2.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is een 2×2 matrix met $(\mathbf{A})_{1,1} = 1, (\mathbf{A})_{2,1} = 3, (\mathbf{A})_{1,2} = 2$ en $(\mathbf{A})_{2,2} = 4$

  Als je dezelfde matrix $\mathbf{A}$ schrijft als $[a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$, dan is $a_{1,1} = 1$, $a_{2,1} = 3$ etc.
- $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 2×3 matrix en $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 3×2 matrix.
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ is een rijmatrix, en $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ is een kolommatrix.

Opmerking 1.5.1.

- In deze notatie $m \times n$ mag het 'product' $m \times n$ *niet* worden uitgerekend: een 2×3 matrix is niet hetzelfde als een 3×2 matrix of een 6×1 matrix. Een 6-matrix bestaat zelfs niet, maar wel een 6-vector want dat is een andere naam voor een 6-tal.
- De eerste index i geeft het nummer van de *rij* aan, de tweede index j die van de *kolom*.
- De notatie $(\mathbf{A})_{i,j}$ is vooral handig als de elementen van $\mathbf{A}$ nog geen naam hebben. Als $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ (een gelijkheid van twee matrices), dan geldt dus voor alle i en j dat $(\mathbf{A})_{i,j} = a_{i,j}$ (telkens een gelijkheid van twee getallen).
- Voor elke i en j is $(\mathbf{A})_{i,j}$ een reëel getal, namelijk het element van $\mathbf{A}$ op rij i en kolom j. De uitdrukking $[a_{i,j}]$ daarentegen staat voor de ganse matrix, en i en j zijn daarin *geen vooraf gegeven concrete getallen*, maar *indices* die lopen over de rijen respectievelijk de kolommen:

$$\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
$$\forall i, j : \quad (\mathbf{A})_{i,j} \in \mathbb{R}$$

  en je kan dus ook schrijven $\mathbf{A} = [(\mathbf{A})_{i,j}] = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $(\mathbf{A})_{i,j} = a_{i,j} \in \mathbb{R}$
- In sommige cursussen gebruikt men ronde haakjes in plaats van rechte haakjes: $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, en men laat meestal de komma's tussen de indices weg: $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ of $\mathbf{A} = (a_{ij})$.
- In het geval $n = m = 1$ wordt in de praktijk bijna nooit onderscheid gemaakt tussen een 1×1 matrix $[a]$, een vector met 1 component (a) en een getal a.
- Het geval $n = 1$ of $m = 1$ is subtieler: er wordt in de praktijk soms geen onderscheid gemaakt tussen een vector $(a_1, \ldots, a_n)$ en een $1 \times n$ matrix $[a_1, \ldots, a_n]$ of tussen een vector $(a_1, \ldots, a_n)$ en de gelijkaardige kolommatrix. Maar het onderscheid tussen kolommatrices enerzijds en rijmatrices anderzijds is dikwijls *toch belangrijk*.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Matrices

Zowel een n-tal, een kolommatrix als een rijmatrix kan je beschouwen als schrijfwijzen voor een reële *vector*:

$$(1,-2,3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

maar het belang van het onderscheid tussen de schrijfwijzen hangt erg af van de context. En afhankelijk van die context wordt al dan niet onderscheid gemaakt tussen $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$ en $\mathbb{R}^{1\times n}$.

Als we rij- of kolommatrices beschouwen als *vectoren* dan noteren we ze meestal met kleine letters $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \ldots$, terwijl willekeurige matrices een hoofdletter $\mathbf{A}, \mathbf{X}, \ldots$ krijgen.

In ieder geval zijn strikt wiskundig vectoren, rijmatrices en kolommatrices *verschillend*. Dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \neq (1,3,-2),$$

maar als de betekenis voldoende duidelijk is uit de context worden ze toch door elkaar gebruikt.

Een matrix is per definitie een rechthoekig rooster van getallen, maar we beschouwen dergelijk rooster soms ook als een aantal onder elkaar geplaatste rijen of als een aantal naast elkaar geplaatste kolommen:

Definitie 1.5.2. We schrijven een matrix ook als een collectie van rijen of kolommen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \cdots \quad a_{1,n} \\ \hline a_{2,1} \quad a_{2,2} \quad \cdots \quad a_{2,n} \\ \hline \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ \hline a_{m,1} \quad a_{m,2} \quad \cdots \quad a_{m,n} \end{array}\right]$$

en

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{k_1} & \mathbf{k_2} & \cdots & \mathbf{k_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \\ \vdots \\ \mathbf{r_m} \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{k_i} = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{r_i} = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{bmatrix}$$

De lijnen hebben in deze schrijfwijze geen betekenis en dienen enkel om de kolommen of rijen aan te duiden.

Voorbeeld 1.5.3.

We kunnen de matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ beschouwen als

twee naast elkaar geplaatste kolomvectoren $\mathbf{k_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{k_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{k_1} & \mathbf{k_2} \end{bmatrix}$

of als twee onder elkaar geplaatste rijvectoren $\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \end{bmatrix}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Som en veelvoud van matrices

De **optelling** en de **scalaire vermenigvuldiging** van matrices wordt gedefinieerd zoals bij vectoren: element-per-element. Voor de optelling moeten beide matrices dezelfde afmetingen hebben: allebei evenveel rijen en evenveel kolommen.

Definitie 1.6.1 (Optelling en scalair veelvoud van matrices).

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$r \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{1,1} & ra_{1,2} & \cdots & ra_{1,n} \\ ra_{2,1} & ra_{2,2} & \cdots & ra_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m,1} & ra_{m,2} & \cdots & ra_{m,n} \end{bmatrix}$$

Met de schrijfwijze $\mathbf{A} = [a_{i,j}], \mathbf{B} = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m\times n}, r \in \mathbb{R}$ wordt dit:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{i,j} + b_{i,j}]$$
$$r\mathbf{A} = [ra_{i,j}]$$

of nog $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ $\quad (r\mathbf{A})_{i,j} = ra_{i,j}$ of ook $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{i,j} = (\mathbf{A})_{i,j} + (\mathbf{B})_{i,j}$ $\quad (r\mathbf{A})_{i,j} = r(A)_{i,j}$

Ook het **verschil** van matrices en de **tegengestelde** matrix worden gedefinieerd zoals voor vectoren, net zoals de **nulmatrix** $\mathbf{O}_{m,n} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. Als de context het toelaat schrijven we korter $\mathbf{O} = \mathbf{O}_{m,n}$.

Voorbeeld 1.6.1 (Som, verschil, tegengestelde en scalair veelvoud van matrices).

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 36 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 44 \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

maar de sommen $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 40 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 10 & 200 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ bestaan niet.

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Product van een matrix met een kolomvector

Hoewel ook direct een algemene formule kan gegeven worden voor het product van matrices, behandelen we hier eerst het belangrijke speciale geval van het product van een matrix met een *kolomvector*:

Definitie 1.7.1. Het **product** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$, genoteerd $\mathbf{Ab}$, is een gewogen som van de kolommen van $\mathbf{A}$ met als gewichten de componenten van $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \ldots b_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Het resultaat van dit product is dus een kolomvector, namelijk de som van de kolommen van $\mathbf{A}$ met als coëfficiënten – of 'gewichten' – de componenten van $\mathbf{b}$.

Door de som in het rechterlid uit te rekenen volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

Eigenschap 1.7.1 (Matrix-vector-product)**.**

Het product van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de $m \times 1$ kolomvector

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 a_{1,1} + b_2 a_{1,2} + \ldots + b_n a_{1,n} \\ b_1 a_{2,1} + b_2 a_{2,2} + \ldots + b_n a_{2,n} \\ \vdots \\ b_1 a_{m,1} + b_2 a_{m,2} + \ldots + b_n a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} b_k a_{1,k} \\ \sum_{k=1}^{n} b_k a_{2,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} b_k a_{m,k} \end{bmatrix}.$$

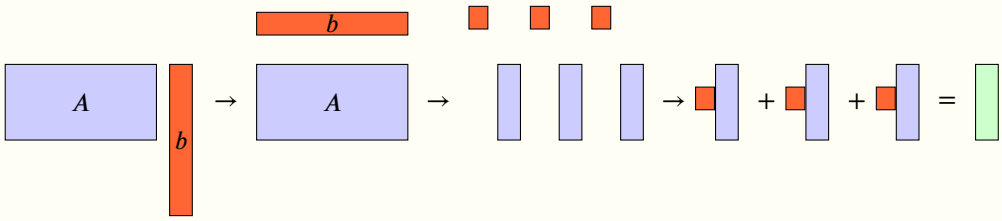
Opmerking 1.7.1.

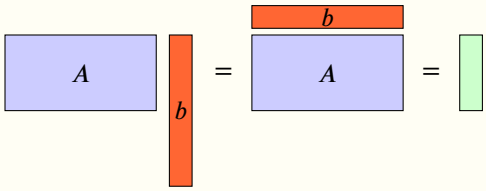
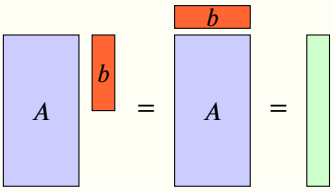
(a) Je kan in gedachten de kolomvector kantelen en boven de matrixkolommen leggen, en dan kolom per kolom vermenigvuldigen en alles optellen:

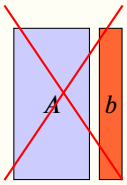
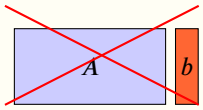
$$\begin{array}{rl} & \begin{bmatrix} b_1 & & b_2 & & \cdots & b_n \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Ab} = \quad + \quad + \quad \ldots \quad + \\ \hline = \quad b_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} \ldots + b_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} b_1 a_{1,1} \\ b_1 a_{2,1} \\ \vdots \\ b_1 a_{m,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 a_{1,2} \\ b_2 a_{2,2} \\ \vdots \\ b_2 a_{m,2} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} b_n a_{1,n} \\ b_n a_{2,n} \\ \vdots \\ b_n a_{m,n} \end{bmatrix} \end{array}$$

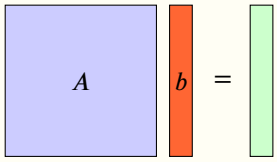
Grafisch kan je dat als volgt voorstellen:

1.7 Product van een matrix met een kolomvector



of  en 

Volgende producten zijn onmogelijk:  en .

Enkel voor een *vierkante* matrix $\mathbf{A}$ heeft $\mathbf{Ab}$ dezelfde lengte als $\mathbf{b}$: 

(b) Zoals gebruikelijk bij producten schrijft men soms ook een punt: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{Ab}$. Bij matrices wordt de punt echter meestal weggelaten.

(c) Als $\mathbf{A}$ een *rij*vector is schrijven we die soms ook met een kleine letter $\mathbf{a}$, en dan is het product

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \quad \in \mathbb{R}.$$

en dit komt neer op het *scalair product* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ dat elders uitvoeriger wordt behandeld.

Voorbeeld 1.7.1.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 7 = 19$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\cdot 5 + 4\cdot 7 = 43.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 1\cdot 6 + 2\cdot 8 = 22$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 3\cdot 6 + 4\cdot 8 = 50.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$ of ook $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Product van een matrix met een kolomvector

(d) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 6+2\cdot 8\\ 3\cdot 6+4\cdot 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\ 50\end{bmatrix}$ of ook $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 8\end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\ 50\end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 1+4\cdot 2\\ 3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 1+6\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+6+3+8\\ 6+12+5+12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19\\ 35\end{bmatrix}$.

Voorbeeld 1.7.2. In het voorbeeld over examenresultaten levert de vermenigvuldiging met geschikte kolomvectoren interessante gegevens.

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

$$A = \begin{bmatrix}80 & 80 & 40 & 20\\ 72 & 62 & 23 & 11\\ 74 & 65 & 38 & 10\\ 73 & 70 & 29 & 17\\ 75 & 71 & 30 & 15\end{bmatrix}$$

We vinden de punten voor Nederlands, het gemiddelde, en een totaal aantal punten waarbij elk vak wordt omgezet naar honderd:

$$\begin{bmatrix}80 & 80 & 40 & 20\\ 72 & 62 & 23 & 11\\ 74 & 65 & 38 & 10\\ 73 & 70 & 29 & 17\\ 75 & 71 & 30 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80\\ 62\\ 65\\ 70\\ 71\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}80 & 80 & 40 & 20\\ 72 & 62 & 23 & 11\\ 74 & 65 & 38 & 10\\ 73 & 70 & 29 & 17\\ 75 & 71 & 30 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/4\\ 1/4\\ 1/4\\ 1/4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dots\\ \dots\\ \dots\\ \dots\\ \dots\end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix}80 & 80 & 40 & 20\\ 72 & 62 & 23 & 11\\ 74 & 65 & 38 & 10\\ 73 & 70 & 29 & 17\\ 75 & 71 & 30 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dots\\ \dots\\ \dots\\ \dots\\ \dots\end{bmatrix}$$

waarbij we veronderstelden dat de punten voor Wiskunde en Nederlands al op honderd waren, Engels op 50, en Duits op 20. De kolomvector waarmee wordt vermenigvuldigd bevat dus inderdaad de gewichten voor de verschillende kolommen in de matrix. In het bijzonder *selecteert* een kolommatrix met allemaal 0 behalve één keer 1 precies één kolom uit een matrix.

Merk op dat we met het matrix-vector-product bijvoorbeeld nog niet het gemiddelde voor Wiskunde kunnen opschrijven, maar ook dat kan met matrices worden berekend.

Samengevat: we kunnen een matrix $\mathbf{A}$ nu vermenigvuldigen met een kolomvector met evenveel rijen als het aantal kolommen van $\mathbf{A}$. Het product is een *kolomvector* met evenveel rijen als $\mathbf{A}$, en is de lineaire combinatie van de kolommen van $\mathbf{A}$ met gewichten $\mathbf{b}$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

1.8 Product van matrices

Het product $\mathbf{Ab}$ van een matrix $\mathbf{A}$ met een *kolommatrix* $\mathbf{b}$ is een manier om lineaire combinaties te nemen van de kolommen van $\mathbf{A}$ met gewichten uit $\mathbf{b}$. Het komt in concrete toepassingen regelmatig voor dat de vector $\mathbf{b}$ zelf ook werd bekomen als een lineaire combinatie van kolommen uit een matrix $\mathbf{B}$ met gewichten $\mathbf{c}$, dus $\mathbf{b} = \mathbf{Bc}$. Dan wordt $\mathbf{Ab} = \mathbf{A}(\mathbf{Bc})$, en het zou bijzonder handig zijn als je dat resultaat in één keer kon berekenen. Dat blijkt mogelijk door op een geschikte wijze een product van de matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ te definiëren, zodat geldt

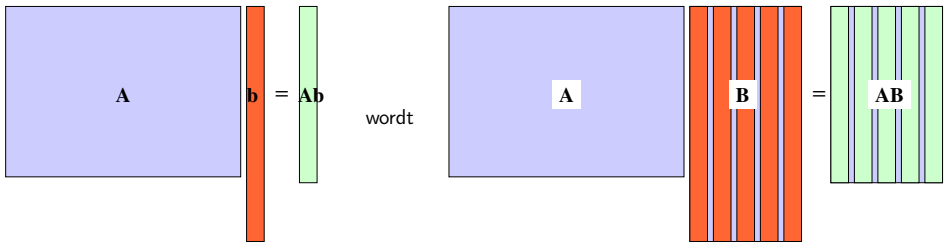
$$\mathbf{A}(\mathbf{Bc}) = (\mathbf{AB})\mathbf{c}$$

De definitie van het product van matrices moet dan wel wat ingewikkelder worden dan gewoon component per component te vermenigvuldigen. De correcte definitie beschouwt $\mathbf{B}$ als een rijtje kolommen, en vermenigvuldigt met elke kolom:

Definitie 1.8.1. Het **product** van $m\times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p\times n$ matrix $\mathbf{B}$ is de $m\times n$ matrix met kolommen de producten van $\mathbf{A}$ met de kolommen van $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix}\mathbf{Ab_1} & \mathbf{Ab_2} & \dots & \mathbf{Ab_n}\end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \dots & \mathbf{b_n}\end{bmatrix}$$

Grafisch wordt dit:



met $\mathbf{A}$ even *breed* als $\mathbf{B}$ *hoog* is (anders is er geen product van een *rij* van $\mathbf{A}$ met een *kolom* van $\mathbf{B}$).

Voorbeeld 1.8.1.

Omdat $\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot 1+4\cdot 2\\3\cdot 2+4\cdot 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\18\end{bmatrix}$

en gelijkaardig $\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19\\31\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\36\end{bmatrix}$

is dus $\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5&6\\4&7&8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11&19&22\\18&31&36\end{bmatrix}$.

Omdat $(\mathbf{Ab_j})_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ geldt volgende expliciete formule voor het product van twee matrices:

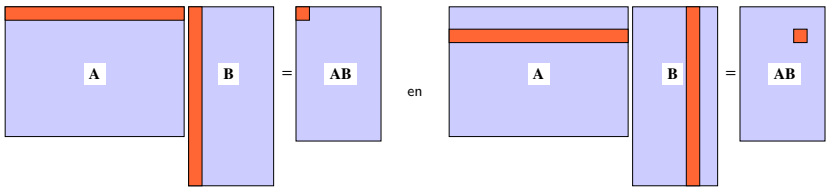
Eigenschap 1.8.1. Het product van $m\times p$ matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a_{i,j}\end{bmatrix}$ met $p\times n$ matrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}b_{i,j}\end{bmatrix}$ is $m\times n$ matrix $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}c_{i,j}\end{bmatrix}$ waarbij het element $c_{i,j}$ op de i-de rij en de j-de kolom gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

Grafisch wordt dit:

CC BY-NC-SA 4.0

1.8 Product van matrices



Je kan het product ook als volgt opschrijven:

Eigenschap 1.8.2. Het product van een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is de $m \times n$ matrix

$$\mathbf{AB} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1,k}b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1,k}b_{k,n} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2,k}b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{2,k}b_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{m,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{m,k}b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{m,k}b_{k,n} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times n \text{ matrix)}$$

Bijgevolg is een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ maal een $p \times 1$ kolommatrix $\mathbf{b}$ een $m \times 1$ kolommatrix:

$$\mathbf{Ab} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k}\right]_{1\le i\le m} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k}b_{k} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2,k}b_{k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{m,k}b_{k} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times 1 \text{ kolomvector)}$$

en een $1 \times p$ rijmatrix $\mathbf{a}$ maal een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ een $1 \times n$ rijmatrix:

$$\mathbf{aB} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{k} b_{k,j}\right]_{1\le j\le n} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{k,n} \end{bmatrix} \quad \text{(een } 1 \times n \text{ rijvector)}$$

Voorbeeld 1.8.2. Volledig uitgeschreven wordt dit

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} + a_{1,4}b_{4,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} + a_{1,4}b_{4,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} + a_{2,4}b_{4,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2} + a_{2,4}b_{4,2} \\ a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{2,1} + a_{3,3}b_{3,1} + a_{3,4}b_{4,1} & a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} + a_{3,3}b_{3,2} + a_{3,4}b_{4,2} \end{bmatrix}.$$

Opmerking 1.8.1.

- Mnemotechnisch hulpje: het product van een $m \times p$ met een $p \times n$ matrix is een $m \times n$ matrix, waarbij de middelste factoren p wegvallen, en p is precies de dimensie die wordt weggesommeerd

CC BY-NC-SA 4.0

1.8 Product van matrices

in elke component $c_{i,j}$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

- Optellen van twee matrices werkt enkel als ze dezelfde vorm hebben: evenveel rijen en evenveel kolommen. De vermenigvuldiging daarentegen werkt enkel voor $m \times p$ met $p \times n$ matrices, dus als het aantal *kolommen* van de eerste matrix gelijk is aan het aantal *rijen* van de tweede. Het product van een 5×3 matrix $\mathbf{A}$ en een 3×2 matrix $\mathbf{B}$ is de 5×2 matrix $\mathbf{AB}$. Maar een matrix $\mathbf{BA}$ *bestaat dan niet*. Het product $\mathbf{BA}$ is in dit geval *niet gedefinieerd*! Dit toont al meteen aan dat in het algemeen matrixvermenigvuldiging niet commutatief kan zijn: er geldt niet altijd dat ~~$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$~~.
- Een 1×100 matrix maal een 100×1 matrix is dus een getal (namelijk de som van honderd producten van telkens twee getallen), maar een 100×1 matrix maal een 1×100 matrix is een 100×100 matrix (met 10.000 keer een product van twee getallen).

We zullen verder zien hoe deze definitie onder meer nuttig is bij het compact voorstellen en manipuleren van stelsels lineaire vergelijkingen, en bij het samenstellen van lineaire afbeeldingen.

Samengevat kan je het product van matrices op volgende equivalente manieren begrijpen:

Eigenschap 1.8.3. Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is de $m \times n$ matrix zodat

- het i,j-de element gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met de j-de kolom $\mathbf{B}$.
- de j-de kolom gelijk is aan het product van matrix $\mathbf{A}$ met de j-de kolom van $\mathbf{B}$.
- de i-de rij gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met matrix $\mathbf{B}$.

Elke *kolom* in $\mathbf{AB}$ is dus een lineaire combinaties van de *kolommen* van $\mathbf{A}$, met coëfficiënten telkens uit een kolom van $\mathbf{B}$,
en elke *rij* in $\mathbf{AB}$ is een lineaire combinaties van de *rijen* van $\mathbf{B}$, met coëfficiënten telkens uit een rij van $\mathbf{A}$.

Of nog: als je een matrix bekijkt als een collectie kolommen, is $\mathbf{AB}$ te beschouwen als een combinatie van de kolommen van $\mathbf{B}$, gewogen met gewichten in de kolommen van $\mathbf{A}$.
Als je een matrix bekijkt als een collectie rijen, is $\mathbf{AB}$ te beschouwen als een combinatie van de rijen van $\mathbf{A}$ met gewogen met gewichten in de rijen van $\mathbf{B}$.

Voorbeeld 1.8.3.

1. Als $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ dan kan je het product

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 1 + 0 & 0 + 6\cdot 2 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 1 + 0 & 0 + 6\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 1 & 12 \\ 43 & 3 & 24 \end{bmatrix}.$$

interpreteren als

- lineaire combinaties van de kolommen van $\mathbf{A}$ met gewichten telkens in de kolommen van $\mathbf{B}$:
  de eerste kolom $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ levert $\begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$ als eerste kolom van het product $\mathbf{AB}$ want dat is 5 keer de eerste kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$ plus 7 keer de tweede kolom $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.
  Op dezelfde manier selecteert de tweede kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ de eerste kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$,

CC BY-NC-SA 4.0

1.8 Product van matrices

en vermenigvuldigt de derde kolom $\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ de tweede kolom $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$ met 6.

- lineaire combinaties van de rijen van $\mathbf{B}$ met gewichten telkens in de rijen van $\mathbf{A}$:
  de eerste rij $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$ levert $\begin{bmatrix}19 & 1 & 10\end{bmatrix}$ als eerste rij van het product $\mathbf{AB}$ want dat is 1 keer de eerste rij $\begin{bmatrix}5 & 1 & 0\end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ plus 2 keer de tweede rij $\begin{bmatrix}7 & 0 & 6\end{bmatrix}$.
  De tweede rij van $\mathbf{AB}$ is op dezelfde manier 3 keer de eerste rij plus 4 keer de tweede rij van $\mathbf{B}$.

2. Het product $\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\cdot 1 & 5\cdot 2\\7\cdot 1 & 7\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 10\\7 & 14\end{bmatrix}$ kan je

- op basis van rij $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ lezen als: 1 keer kolom $\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$ gevolgd door 2 keer die kolom, of
- op basis van kolom $\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$ lezen als: 5 keer rij $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ gevolgd door 7 keer diezelfde rij.

3. Het product $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\cdot 1 + 7\cdot 2\end{bmatrix} = 19$ is een 1×1 matrix, of dus een getal.

Extra: links vermenigvuldigen met een rijmatrix. Als oefening kan je volgende interpretatie van het product van *rij*matrix $\mathbf{a}$ met matrix $\mathbf{B}$ bestuderen als lineaire combinatie van de *rijen* van $\mathbf{B}$ met *gewichten* $\mathbf{a}$:

Eigenschap1.8.4. Het product van een $1\times n$ rijvector met een $n\times m$ matrix is de $1\times m$ rijvector

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m}\\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,m}\end{bmatrix} = \begin{cases} & a_1 & \begin{bmatrix}b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m}\end{bmatrix}\\ + & a_2 & \begin{bmatrix}b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m}\end{bmatrix}\\ + & \cdots & \\ + & a_n & \begin{bmatrix}b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,m}\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$= \begin{bmatrix}a_1b_{1,1} + a_2b_{2,1} + \ldots + a_nb_{n,1} & \ldots & a_1b_{1,m} + a_2b_{2,m} + \ldots + a_nb_{n,m}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n} a_kb_{k,1} & \sum_{k=1}^{n} a_kb_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_kb_{k,m}\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld1.8.4.

(a) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19 & 22\end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}43 & 50\end{bmatrix}$ of ook

$\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}43 & 50\end{bmatrix}$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

1.9 Eigenschappen van het product van matrices

Men kan bewijzen dat het product van matrices associatief is:

Eigenschap 1.9.1. Voor vermenigvuldigbare matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ geldt dat:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \qquad \text{(associativiteit)}.$$

Het bijzonder geval met $\mathbf{C}$ een kolomvector $\mathbf{x}$ verdient speciale aandacht. De associativiteit $\mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = (\mathbf{AB})\mathbf{x}$ zegt dan dat de vector $\mathbf{x}$ met een matrix $\mathbf{B}$ vermenigvuldigen en de bekomen vector $\mathbf{Bx}$ nog eens (links) met een matrix $\mathbf{A}$ vermenigvuldigen, hetzelfde resultaat oplevert als de vector $\mathbf{x}$ (links) met het product van $\mathbf{AB}$ te vermenigvuldigen.

Enkele speciale types van matrices krijgen een eigen naam:

Definitie 1.9.1 (Speciale vierkante matrices)**.** Een $n \times n$ matrix is

de	**nulmatrix $\mathbf{O}_n$**	als	alle elementen 0 zijn.
de	**eenheidsmatrix $\mathbf{I}_n$**	als	alle elementen *op* de diagonaal 1 zijn en alle elementen *buiten* de diagonaal 0 zijn.
een	**diagonaalmatrix**	als	alle elementen *buiten* de diagonaal 0 zijn. (en dus willekeurige getallen *op* de diagonaal)
een	**bovendriehoeksmatrix**	als	alle elementen *onder* de diagonaal 0 zijn. (en dus willekeurige getallen *op en boven* de diagonaal)
een	**onderdriehoeksmatrix**	als	alle elementen *boven* de diagonaal 0 zijn. (en dus willekeurige getallen *op en onder* de diagonaal)

Voorbeeld 1.9.1. Een eenheidsmatrix, een diagonaalmatrix en een bovendriehoeksmatrix:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

De index bij $\mathbf{I_n}$ wordt vaak weggelaten als het formaat duidelijk is uit de context.

De eenheidsmatrix is een neutraal element voor de vermenigvuldiging, zoals je zelf kan verifiëren:

Eigenschap 1.9.2 (Eenheidsmatrix is neutraal element)**.**

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{en} \quad \mathbf{AI}_n = \mathbf{A} \quad \text{met } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Analoog aan het inverse of omgekeerde van getallen (a^{-1} is het unieke getal b zodat $ab = 1$) definiëren we voor matrices:

Definitie 1.9.2 (Inverse matrix)**.** Twee matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn elkaars **inverse** als

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

Als voor een gegeven $\mathbf{A}$ dergelijke $\mathbf{B}$ bestaat dan is die uniek, en we noteren die als $\mathbf{A}^{-1}$. Er geldt dus

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Merk op dat bijvoorbeeld de matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *geen* inverse heeft, en dat in het algemeen uit $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ *niet*

CC BY-NC-SA 4.0

1.9 Eigenschappen van het product van matrices

volgt dat ook $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$.

Het optellen en vermenigvuldigen van matrices voldoet aan een aantal verwachte eigenschappen die het optellen en vermenigvuldigen van reële getallen veralgemenen:

Eigenschap 1.9.3 (Eigenschappen matrixbewerkingen)**.** Voor reële getallen a,b en c en reële matrices $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ gelden volgende eigenschappen zodra ze betekenis hebben (dat betekent: zodra de matrices het correcte formaat hebben om de optellingen en vermenigvuldigingen te kunnen uitvoeren):

(a) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$ (optelling is commutatief)

(b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (optelling is associatief)

(c) $\mathbf{A}+\mathbf{O} = \mathbf{A}$ (nulmatrix is neutraal element voor de optelling)

(d) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ ($-A$ is het tegengestelde van $\mathbf{A}$ voor de optelling)

(e) $a(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$ (scalaire vermenigvuldiging is distributief t.o.v. optelling van matrixes)

(f) $(a+b)\mathbf{A} = a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$ (scalaire vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling van getallen)

(g) $a(b\mathbf{A}) = (ab)\mathbf{A}$ (scalaire vermenigvuldiging is gemengd associatief)

(h) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ (scalaire vermenigvuldiging met 1)

(i) $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$ (scalaire vermenigvuldiging met 0)

(j) $\mathbf{OA} = \mathbf{O}$ (matrixvermenigvuldiging met nulmatrix)

(k) $a\mathbf{O} = \mathbf{O}$ (nulmatrix scalair vermenigvuldigen)

(l) $(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ (scalaire vermenigvuldiging met -1)

(m) $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ en $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$ (eenheidsmatrix is neutraal element voor de vermenigvuldiging),

(n) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (matrixvermenigvuldiging is associatief)

(o) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ (matrixvermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling)

Let wel op dat met matrices niet *alles* mag wat voor getallen geldt:

Eigenschap 1.9.4 (Belangrijke niet-eigenschappen van matrices)**.**

Volgende eigenschappen *gelden niet altijd* voor matrices $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$:

~~$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$~~ (matrixvermenigvuldiging is niet (altijd) commutatief)

~~$\mathbf{AB} = \mathbf{O} \implies \mathbf{A} = \mathbf{O}$ of $\mathbf{B} = \mathbf{O}$~~ (matrixvermenigvuldiging heeft (soms) nuldelers)

~~$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \implies \mathbf{B} = \mathbf{C}$~~ (matrixvermenigvuldiging mag je niet (altijd) vereenvoudigen)

Voorbeeld 1.9.2. De vermenigvuldiging van matrices is niet commutatief:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

maar

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.9 Eigenschappen van het product van matrices

Voorbeeld 1.9.3. Voor sommige matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ geldt toch $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 1.9.4. Een product kan nul zijn zonder dat één van de factoren nul is:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \text{ en ook } \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 1.9.5. Uit $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ volgt niet altijd dat $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

Voor reële getallen geldt: als $ab = ac$ dan is $b = c$, tenminste als $a \neq 0$. Dit komt omdat we de factor a dan kunnen 'wegdelen' door linkerlid en rechterlid te vermenigvuldigen met het getal $a^{-1} = 1/a$ (het *inverse van* a: $a^{-1} \cdot a = 1$): als $ab = ac$, dan is zeker ook $a^{-1} \cdot ab = a^{-1} \cdot ac$ en dus $b = c$.

Ook bij matrices kunnen we vereenvoudigen als $\mathbf{A}$ inverteerbaar is: we kunnen dan ook beide leden van $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ links vermenigvuldigen met $\mathbf{A}^{-1}$. **Maar pas op:** in tegenstelling tot bij de reële getallen, heeft niet elke matrix verschillend van de nulmatrix een inverse!

Als $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ met $\mathbf{A}$ inverteerbaar, dan volgt door $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ links te vermenigvuldigen met $\mathbf{A}^{-1}$ dat ook

$$\begin{array}{lrcll} & \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) & = & \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AC}) & \\ \text{en dus} & (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} & = & (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{C} & \\ \text{en dus} & \mathbf{IB} & = & \mathbf{IC} & \text{omdat } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \\ \text{en dus} & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} & \end{array}$$

Merk op dat uit $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ wel altijd volgt dat $\mathbf{AB} - \mathbf{AC} = \mathbf{O}$, en dus ook dat $\mathbf{A}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) = \mathbf{O}$.

Maar we weten al dat daaruit *niet* volgt dat $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ of $\mathbf{B} - \mathbf{C} = \mathbf{O}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.10 Transponeren van matrices

Een matrix *transponeren* is een veelgebruikte operatie die geen equivalent heeft voor getallen, namelijk zijn *kolommen* schrijven als *rijen*. Dat komt neer op het *spiegelen* van de matrix rond de diagonaal, of het *verwisselen van rijen met kolommen*. In het bijzonder is de getransponeerde van een kolomvector een rijvector en omgekeerd.

Definitie 1.10.1 (Transponeren)**.**

De **getransponeerde matrix** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ is de $n \times m$ matrix $\mathbf{A}^T = [a_{j,i}]$. Dus:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \cdots & a_{m,3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Met de verkorte notatie betekent dit het omwisselen van de indices: $(\mathbf{A}^T)_{i,j} = (\mathbf{A})_{j,i}$ of $[a_{i,j}]^T = [a_{j,i}]$

Opmerking 1.10.1. De getransponeerde $\mathbf{A}^T$ van een gegeven matrix A bepaal je door de rijen van $\mathbf{A}$ als kolommen te nemen van $\mathbf{A}^T$: de eerste *rij* van de matrix $\mathbf{A}$ is de eerste *kolom* van de matrix $\mathbf{A}^T$, de tweede rij van de matrix $\mathbf{A}$ de tweede kolom van de matrix $\mathbf{A}^T$ en zo verder.

De getransponeerde van de 2×3 matrix is een 3×2 matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Je kan ook de *kolommen* van de matrix $\mathbf{A}$ schrijven als de *rijen* van de matrix $\mathbf{A}^T$: dat geeft hetzelfde resultaat. En dat is ook hetzelfde als de matrix 'spiegelen' ten opzichte van de diagonaal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \implies \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 1.10.1. Getransponeerde matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 99 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 99 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 99 \\ 99 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 99 \\ 99 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Volgende eigenschappen van transponeren kan je zelf eenvoudig nagaan (enkel de laatste vraagt nogal wat rekenwerk):

CC BY-NC-SA 4.0

1.10 Transponeren van matrices

Eigenschap 1.10.1 (Eigenschappen van transponeren)**.**

$\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$ (getransponeerde van de identieke matrix is de identieke matrix)

$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ (getransponeerde van de getransponeerde is terug de matrix zelf)

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ (getransponeerde van de som is som van de getransponeerden)

$(r\mathbf{A})^T = r\mathbf{A}^T$ (getransponeerde van scalair veelvoud is scalair veelvoud van getransponeerde)

$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (getransponeerde van product is product van getransponeerden **in omgekeerde volgorde**)

- Merk op: als het matrixproduct $\mathbf{AB}$ goed gedefinieerd is (t.t.z. compatibele matrixdimensies), dan is ook $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ goed gedefinieerd (omdat transponeren de matrixdimensies omdraait).

Opmerking 1.10.2. Indien $\mathbf{A}$ inverteerbaar is, dan is ook $\mathbf{A}^T$ inverteerbaar. Immers, als er een matrix $\mathbf{A}^{-1}$ bestaat zodat $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = I = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$, dan is

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = I^t = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T$$

dus

$$(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = \mathbf{I} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T$$

zodat $(\mathbf{A}^{-1})^T$ de inverse van $\mathbf{A}^T$ is.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

1.11 Inwendig product van vectoren

Het *inwendig product* van twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ is een reëel getal dat makkelijk te berekenen is en belangrijke informatie levert over de *onderlinge ligging* van die twee vectoren:

Definitie 1.11.1. Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ is het reëel getal

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 1.11.1. $(1,2)\cdot(3,4) = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = 3+8 = 11$ en $(3,-2,1)\cdot(2,2,-2) = 6-4-2 = 0.$

Opmerking 1.11.1.

(a) Verwar dit inwendig of scalair *product* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ tussen twee vectoren niet met het scalair *veelvoud* $r \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ van een reëel getal met een vector.

(b) In principe laten we de punt bij het scalair product nooit weg: we schrijven $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ en niet $\mathbf{uv}$.

(c) Dit inwendig product komt overeen met een matrixproduct op voorwaarde dat we de eerste vector schrijven als rijvector en de tweede als kolomvector:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

De eerste uitdrukking is een inwendig product van vectoren, de tweede een matrixproduct.

Het resultaat is een getal.

(d) Deze definitie van inwendig product gebruikt essentieel dat vectoren n-tallen zijn. In de wiskunde, fysica en andere wetenschappen komen echter ook meer algemene vectoren voor, en voor die meer algemene vectoren is het definiëren van een inwendig product wat subtieler.

Volgende eigenschappen kan je makkelijk verifiëren:

Eigenschap 1.11.1. Voor $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ en $a, b \in \mathbb{R}$ geldt:

(a) $\mathbf{u} \cdot (a\,\mathbf{v} + b\,\mathbf{w}) = a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + b\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ en $(a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + b\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ (bilineair)

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (symmetrisch)

(c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ (positief)

(d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (positief definiet)

Uit de stelling van Pythagoras volgt dat je met behulp van dit inwendig product ook *lengtes* kan berekenen. Wiskundigen gebruiken meestal het woord *norm* voor de lengte van een vector:

Definitie 1.11.2. De **norm** of **lengte** van een vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ is

$$\|\mathbf{u}\| = \|(u_1, u_2, \dots, u_n)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}.$$

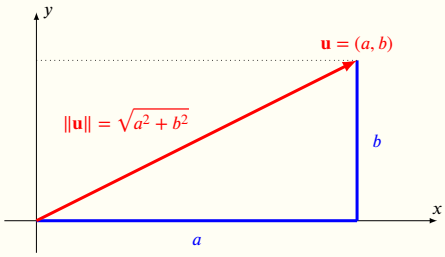
Een **eenheidsvector** (soms ook **genormeerde vector**) is een vector met norm 1.

CC BY-NC-SA 4.0

1.11 Inwendig product van vectoren

Opmerking 1.11.2.

(a) Voor $n = 2$ volgt het feit dat $c = \|\mathbf{u}\|$ inderdaad de lengte is van $\mathbf{u} = (a, b)$ direct uit de stelling van Pythagoras:



Ook voor grotere n kan men aantonen dat deze formule een zinvol begrip 'lengte' geeft.

(b) Sommige berekeningen worden eenvoudiger als het volstaat het *kwadraat* van de norm te berekenen, want dan valt de vervelende vierkantswortel weg:

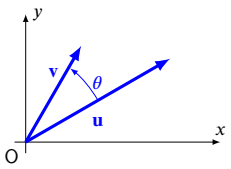
$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2.$$

Er geldt volgend enigszins merkwaardig verband met de *cosinus van de hoek tussen de vectoren*:

Eigenschap 1.11.2.

Voor twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta)$ of equivalent $\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \cos(\theta)$

met θ de hoek $\angle(u, v)$ tussen de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$.



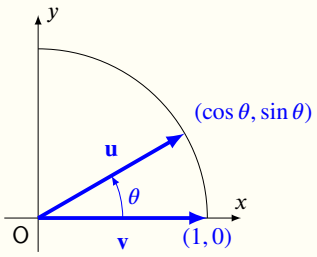
Het scalair product is een *getal* en geen vector, en kan dus niet onmiddellijk op een tekening worden weergegeven.

Opmerking 1.11.3.

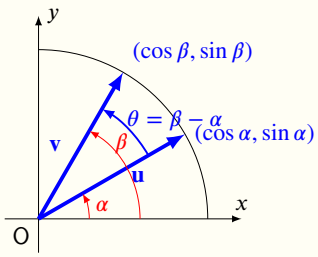
- We bewijzen deze eigenschap hier niet, maar geven verder wel enkele verklaringen. In sommige curusssen wordt bovenstaande formule zelfs gebruikt om de cosinus van een hoek te *definiëren*.
- Wie vertrouwd is met goniometrie herkent enkele eigenschappen van de cosinus:

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

1.11 Inwendig product van vectoren

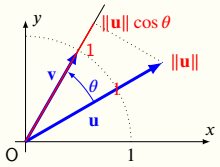


$\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$
$\mathbf{v} = (1, 0)$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (1, 0)$
$= \cos\theta + 0 = \cos\theta$



$(\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (\cos\beta, \sin\beta)$
$= (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$
$= (\cos(\beta - \alpha)$
$= \cos\theta$

- Als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ eenheidsvectoren zijn ($\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$) wordt deze formule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos(\theta)$.
  Met het scalair product van *eenheids*vectoren kan je dus de *cosinus van hun hoek* berekenen.
- Als $\mathbf{v}$ een eenheidsvector ($\|\mathbf{v}\| = 1$) is, dan wordt deze formule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cos(\theta)$.
  Met het scalair product kan je dus de grootte $\|\mathbf{u}\| \cos(\theta)$ van de projectie van de vector $\mathbf{u}$ op de drager van de eenheidsvector $\mathbf{v}$ berekenen.



- Het inwendig product van twee willekeurige vectoren kan geïnterpreteerd worden als
  - de norm van $\mathbf{u}$ maal de grootte van de projectie van $\mathbf{v}$ op $\mathbf{u}$,
  - de norm van $\mathbf{v}$ maal de grootte van de projectie van $\mathbf{u}$ op $\mathbf{v}$,
  - de norm van $\mathbf{u}$ maal de norm van $\mathbf{v}$ maal de cosinus van hun hoek:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta) = \|\mathbf{u}\|\Big(\|\mathbf{v}\| \cos(\theta)\Big) = \|\mathbf{v}\|\Big(\|\mathbf{u}\| \cos(\theta)\Big).$$

Omdat de cosinus enkel nul is voor rechte hoeken volgt uit vorige eigenschap onmiddellijk:

Eigenschap 1.11.3. Voor twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

Met het inwendig product kan je dus makkelijk de *loodrechte stand van vectoren* nagaan.

Opmerking 1.11.4.

- Wie vertrouwd is met cartesiaanse vergelijkingen ziet dat de homogene vergelijking

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

  nu kan geschreven worden als

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

1.11 Inwendig product van vectoren

wat je kan interpreteren als voorwaarde opdat de onbekende vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *loodrecht staat* op de gegeven vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ of } \mathbf{a} \perp \mathbf{x}.$$

- Meer algemeen geldt volgende interpretatie van homogene stelsels:

  De oplossingenverzameling van een homogene stelsel $\mathbf{Ax} = 0$ bestaat uit
  alle vectoren die loodrecht staan op de rijen van $\mathbf{A}$ (geïnterpreteerd als vectoren).

CC BY-NC-SA 4.0

1.12 Determinanten

De *determinant* van een *vierkante* matrix is *een getal* dat enkele belangrijke eigenschappen van die matrix weergeeft, in de eerste plaats of de matrix al dan niet *inverteerbaar* is.

Definitie 1.12.1.

De **determinant** van matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ is $\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\text{notatie}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} ad - bc \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 1.12.1. $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = -2 - 6 = -8.$

Als $ad - bc = 0$, dan is ook $ad = bc$, en als $ad = bc \neq 0$ geldt dat ook $\frac{ad}{bc} = 1 = \frac{bc}{ad}$ en $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Als $ad = bc \neq 0$ kunnen we als volgt (a, b) proberen omvormen in (c, d):

$$(a,b) = (a \cdot \underbrace{\frac{bc}{ad}}_{=1}, b \cdot \underbrace{\frac{ad}{bc}}_{=1}) = (c \cdot \frac{b}{d}, d \cdot \frac{a}{c}) \underset{\frac{b}{d}=\frac{a}{c}}{=} \frac{a}{c} \cdot (c,d)$$

Dit betekent precies dat (a, b) en (c, d) lineair afhankelijk zijn. Als $ad = bc = 0$ is de redenering eenvoudiger.

Deze berekening impliceert dat de determinant beslist over de *lineaire afhankelijkheid van de rijen*, maar ook van de kolommen en over de inverteerbaarheid van de matrix:

Eigenschap 1.12.1. Voor een matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ geldt:

$\det \mathbf{A} \neq 0$	als en slechts als	de matrix $\mathbf{A}$	is *inverteerbaar*.
	als en slechts als	de *kolommen* van $\mathbf{A}$	zijn lineair onafhankelijk.
	als en slechts als	de *rijen* van $\mathbf{A}$	zijn lineair onafhankelijk.

Door de beweringen te negeren geldt natuurlijk ook:

$\det \mathbf{A} = 0$	als en slechts als	$\mathbf{A}$ is niet inverteerbaar.
	als en slechts als	de kolommen van $\mathbf{A}$ zijn lineair afhankelijk.
	als en slechts als	de rijen van $\mathbf{A}$ zijn lineair afhankelijk.

Voorbeeld 1.12.2.

- De determinant van matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ is $2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

  Matrix $\mathbf{A}$ is inverteerbaar, en heeft lineair onafhankelijke rijen en lineair onafhankelijke kolommen.

- De matrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft determinant $2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$.

  Deze matrix $\mathbf{B}$ is *niet* inverteerbaar, heeft lineair *af*hankelijke rijen (de eerste rij is 2 maal de tweede) en lineair *af*hankelijke kolommen (de tweede kolom is 3 maal de eerste).

Opmerking 1.12.1.

- Rechte haken betekenen 'matrix' terwijl verticale strepen betekenen 'determinant', en dus 'getal'.

CC BY-NC-SA 4.0

1.12 Determinanten

- Je kan de determinant ook begrijpen als een operatie die voor 2 koppels bepaalt of ze al dan niet lineair afhankelijk zijn: (a,b) en (c,d) zijn lineaire afhankelijk als en slechts als $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.
- Als b en d verschillend zijn van 0, kan je de uitdrukking $ad - bc = 0$ delen door $b \cdot d$, en krijg je

$$\det \mathbf{A} = 0 \iff ad - bc = 0 \iff ad = bc \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

  en dat betekent precies dat de eerste rij (a,b) evenredig is met de tweede rij (c,d).
- Met een andere notatie voor de elementen van de matrix wordt de formule

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (= a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

  die je kan lezen als: 'schrijf telkens de letters a, b van de rijen in de oorspronkelijke volgorde a, b, en schrijf de indices $1, 2$ van de kolommen eerste in de juiste volgorde (dus $a_1 b_2$), en daarna in de omgekeerde volgorde met een minteken (dus $-a_2 b_1$). Deze enigszins gekke manier van lezen zal dadelijk nuttig blijken bij de veralgemening naar determinanten van 3×3 matrices.

  Met een nog algemenere schrijfwijze voor de elementen wordt dezelfde formule ook:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \quad (= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

Er bestaat ook een definitie voor grotere vierkante matrices, maar de formules worden snel erg ingewikkeld. Voor een 3×3 matrix geldt het volgende:

Definitie 1.12.2. De determinant van de matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ is het getal

$$\det \mathbf{A} \overset{\text{notatie}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{matrix} a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 \\ -a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 \end{matrix}.$$

Merk op dat de letters steeds in de volgorde a,b,c staan en de coëfficiënten alle permutaties zijn van de indices: de even permutaties $_{123}$, $_{231}$ en $_{312}$ met plusteken, en de oneven permutaties $_{132}$, $_{213}$ en $_{321}$ met een minteken.

Opmerking 1.12.2.

(a) Dezelfde formule kan ook met ander letters worden geschreven:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

of

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ -a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{matrix}$$

of

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \\ -c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 \end{matrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

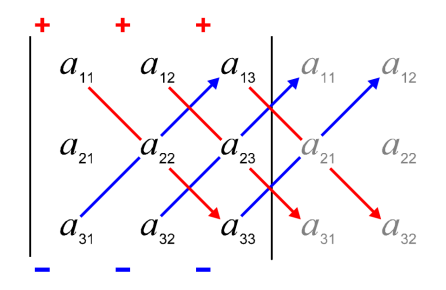
1.12 Determinanten

(b) Dezelfde formule kan ook geschreven worden met 2×2 determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

waarbij de coëfficiënten telkens uit de eerste rij komen en de bijhorende 2×2 determinanten steeds bekomen worden door de eerste rij en de kolom van de betreffende coëfficiënt te schrappen.
In deze vormen kan de definitie van determinant ook worden veralgemeend voor grotere matrices.

(c) Enkel voor 3×3 determinanten bestaat er bovendien de *regel van Sarrus*, waarbij je de twee eerste kolommen achter de matrix overschrijft, en dan de producten van de diagonalen optelt en daarvan de producten van de nevendiagonalen aftrekt:



en dat geeft inderdaad $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$.

(d) Steeds blijft gelden dat $\det \mathbf{A} = 0$ equivalent is met lineair afhankelijkheid van de kolommen van $\mathbf{A}$, en ook met de lineair afhankelijkheid van de rijen van $\mathbf{A}$ en met de niet-inverteerbaarheid van $\mathbf{A}$.

(e) Determinanten kunnen in verband gebracht worden met meetkundige grootheden zoals oppervlaktes en volumes, maar dat behandelen we hier niet.

(f) Er is een jammere inconsistentie in de wiskundige notatie voor de determinant van een 1×1 matrix: de notaties voor absolute waarde en determinant overlappen hoewel ze niet hetzelfde betekenen. Er geldt altijd $|-2| = 2$, hoewel de determinant van de 1×1 matrix $[-2]$ toch -2 is. In de praktijk komen 1×1 matrices erg zelden voor, en er is dus meestal geen reden tot verwarring.

(g) Het met de hand berekenen van determinanten is een tijdsrovende bezigheid, en erg gevoelig voor rekenfouten. Elke nul in de matrix vereenvoudigt wel het rekenwerk want alle termen met de nulcomponent vallen onmiddellijk weg. Meer gevorderde cursussen leren om in goede gevallen voldoende nullen te creëren in een matrix om de determinant toch relatief eenvoudig te berekenen.

De determinant heeft volgende eigenschappen (voor $n = 2$ en $n = 3$; de eigenschap geldt ook algemeen):

CC BY-NC-SA 4.0

1.12 Determinanten

Eigenschap 1.12.2. Voor een matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geldt:

$$\begin{array}{rcl} \det \mathbf{A} \neq 0 & \Longleftrightarrow & \mathbf{A} \text{ inverteerbaar} \\ \det \mathbf{A}^{\mathbf{T}} & = & \det \mathbf{A} \\ \det(\mathbf{AB}) & = & \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} \\ \det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) & \neq & \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} \quad \text{(in het algemeen)} \end{array}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.13 Vectorieel product

Het *vectorieel product* van twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$ is een nieuwe vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$ die loodrecht staat op zowel $\mathbf{u}$ als $\mathbf{v}$. Dit vectorieel product speelt een belangrijke rol in meetkundige en fysische problemen in $\mathbb{R}^3$, en kan ofwel gedefinieerd worden met een directe formule, ofwel met 2×2 determinanten:

Definitie 1.13.1 (Vectorieel product in $\mathbb{R}^3$).

Het **vectorieel product** (of **vectorproduct**) van $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in $\mathbb{R}^3$, genoteerd als

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) \qquad (\text{ of soms ook } (u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3))$$

wordt gedefinieerd door

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &\overset{\text{def}}{=} (u_2v_3 - u_3v_2,\, u_3v_1 - u_1v_3,\, u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \quad \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Voorbeeld 1.13.1.

$(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6, 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = (-3, 6, -3)$

$(1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ en $(0, 1, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, -1)$

Het vectorieel product kan ook formeel worden geschreven als een 3×3 determinant:

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

met $\mathbf{e_x} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e_y} = (0, 1, 0)$ en $\mathbf{e_z} = (0, 0, 1)$ de drie basisvectoren van $\mathbb{R}^3$, want

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} (1, 0, 0) - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} (0, 1, 0) + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} (0, 0, 1) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Door invullen vind je dat $(x, y, z) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$ voldoet aan de vergelijkingen

$$\begin{cases} u_1x + u_2y + u_3z = 0 \\ v_1x + v_2y + v_3z = 0 \end{cases}$$

Deze vergelijkingen kunnen geïnterpreteerd worden als voorwaarde dat (x, y, z) loodrecht staat op (u_1, u_2, u_3) en op (v_1, v_2, v_3), en dus volgt dat de vector $(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3)$ loodrecht staat op (u_1, u_2, u_3) en (v_1, v_2, v_3).

We bekomen dus volgende eigenschap, die drie keer in een ander vorm precies hetzelfde beweert:

Eigenschap 1.13.1.

(a) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ staat *loodrecht* op $\mathbf{u}$ en op $\mathbf{v}$: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ en $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$.

(b) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ is een *oplossing* van het stelsel $\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 \end{cases}$.

(c) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ voldoet aan de *identiteiten* $\begin{cases} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \end{cases}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.13 Vectorieel product

Merk op dat (c) zegt dat $\mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ voldoet aan (b). Het vectorieel product heeft ook een interessante meetkundige betekenis in verband met oppervlakten en oriëntaties, maar dat aspect behandelen we hier niet.

Merk ook op dat het vectorproduct niet commutatief is, want $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. Hieruit volgt dat $\mathbf{u} \times k\mathbf{u} = 0, k \in \mathbb{R}$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 2
Vectoren en matrices
oud

(Versie 2026/08/25H.56)

2.1 Lineaire combinaties en inwendig product

Vectoren komen in de praktijk erg dikwijls voor in zogenaamde *lineaire combinaties*:

Definitie 2.1.1 (Lineaire combinatie)**.**

Een **lineaire combinatie** van vectoren is *een som van (scalaire) veelvouden* van die vectoren.

Als $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$ en $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, dan is de vector

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \ldots + a_m\mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$$

een *lineaire combinatie* van de vectoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$.
De getallen a_i heten de **coëfficiënten** of **gewichten** van de lineaire combinatie.

Voorbeeld 2.1.1. Als $\mathbf{P}$ staat voor één pannenkoek, en $\mathbf{E}$ voor één ei, $\mathbf{B}$ voor één gram bloem en $\mathbf{M}$ voor één milliliter melk, dan leren terzake gespecialiseerde websites dat

$$8\mathbf{P} = 2\mathbf{E} + 250\mathbf{B} + 500\mathbf{M}$$

of dus dat pannenkoeken een lineaire combinatie zijn van geschikte hoeveelheden eieren, bloem en melk. Merk op dat dit voorbeeld enigszins dubieus is omdat je wel willekeurige lineaire combinaties kan nemen van eieren, bloem en melk, maar niet steeds *pannenkoeken* zal uitkomen.

Het is wiskundige correcter in deze context een drietal (x, y, z) te interpreteren als x eieren, y gram bloem en z milliliter melk. Dat is $\mathbf{E} = (1, 0, 0)$ inderdaad één ei, $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$ één gram bloem en $\mathbf{M} = (0, 0, 1)$ één milliliter melk. In de driedimensionale ruimte met punten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ komt het punt $(2, 250, 500)$ overeen met 8 pannenkoeken, en $(4, 500, 1000)$ met 16 pannenkoeken. Het grootste deel van de ruimte komt echter overeen met 'smurrie'.

Deze eenvoudige modellering houdt ten onrechte ook geen rekening met het nochtans belangrijke bakproces met belangrijke parameters als temperatuur, baktijd en gebruikte vetstoffen. Een volledige uitwerking van dit voorbeeld hoort duidelijk thuis in meer gevorderde cursussen, maar we kunnen al wel besluiten dan pannenkoeken bakken een proces is dat plaatsvindt in een ruimte van minstens dimensie 6, met als onafhankelijke grootheden de hoeveelheden eieren, bloem, melk samen met de baktemperatuur, de baktijd en de hoeveelheid vetstof. Een voor de hand liggend probleem is het bepalen van de deelverzameling van $\mathbb{R}^6$ die effectief *pannenkoeken* oplevert, om vervolgens het punt te zoeken dat de *lekkerste pannenkoeken* oplevert. Als economen ook prijzen toevoegen aan de componenten kunnen ze op zoek gaan naar de goedkoopste pannenkoeken. Ingenieurs kunnen de verhouding baktijd/baktemperatuur optimaliseren, ofwel naar benodigde tijd, ofwel naar benodigde energie per pannenkoek. Als voedingsdeskundigen bacteriële gegevens toevoegen, kunnen ze de maximale bewaartijd bepalen. En als studenten honger krijgen, kunnen ze nu een pannenkoek gaan eten.

Voorbeeld 2.1.2 (Lineaire combinaties)**.**

1. $2(1, 2) + 3(4, 5)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2)$ en $(4, 5)$

2. $(5, 7)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2)$ en $(4, 5)$

3. $(1, 2)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2)$ en $(4, 5)$

4. $(2, 4)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2)$ en $(4, 5)$

5. $(2, 4, 0)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2, 0)$ en $(4, 5, 0)$

6. $(2, 4, 1)$ is geen lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2, 0)$ en $(4, 5, 0)$

7. $3(1, 2.5, -1, 1) - 2(2, 0, 1, -1) + 2(1, -1, 0.5, 0) = (1, 5.5, -4, 5)$ is een lineaire combinatie van $(1, 2.5, -1, 1)$, $(2, 0, 1, -1)$ en $(1, -1, 0.5, 0)$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Lineaire combinaties en inwendig product

Met twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ wordt ook één getal geassocieerd: zogenaamde het *inwendig of scalair product*.

Definitie 2.1.2.

Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ is het reëel getal

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) \overset{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 2.1.3.

$$(1,2) \cdot (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11 \quad \text{en} \quad (3,-2,1) \cdot (2,2,-2) = 6 - 4 - 2 = 0.$$

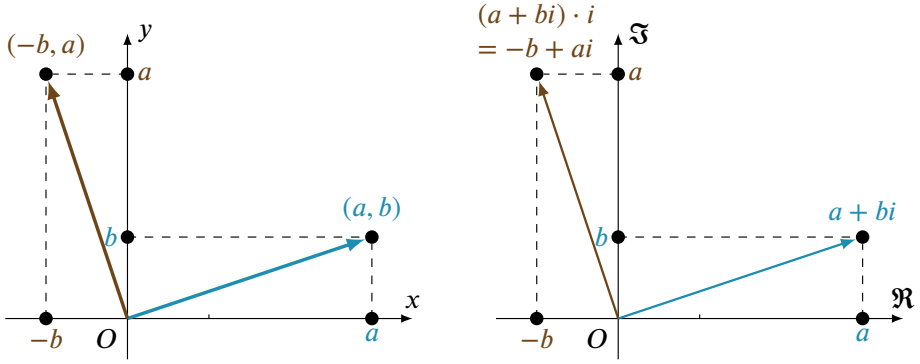
Dit inwendig product levert informatie over de onderlinge ligging van beide vectoren, in het bijzonder:

Eigenschap 2.1.1. Voor twee vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

In $\mathbb{R}^2$ kan je deze eigenschap als volgt begrijpen: een kwartdraai van het vlak in tegenwijzerzin brengt de positieve x-as naar de positieve y-as en de positieve y-as naar de negatieve x-as. Een punt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ komt bij een kwartdraai dus terecht op het punt $(-b,a)$, en na een kwartdraai staat de vector $(-b,a)$ dus loodrecht op de oorspronkelijke vector (a,b):

$$(a,b) \perp (-b,a) \quad \text{en} \quad (a,b) \cdot (-b,a) = a(-b) + ba = 0.$$



Wie vertrouwd is met complexe getallen, kan opmerken dat het koppel (a,b) kan geschreven worden als $a+bi$, dat 'vermenigvuldigen met i' overeenkomt met een kwartdraai, en dat $(a+bi) \cdot i = ai + bi^2 = -b + ai$ dus inderdaad overeenkomt met het punt $(-b,a)$.

Volgend filmpje legt dit uit in 15 seconden (van tijd 2:51 tot 3:05):

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/FvdrGuCfAhk?start=175&end=185&autostart=1&rel=0&

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Matrices

Net zoals een vector een manier is om veel *getallen* bij te houden, is een *matrix* een manier om veel *vectoren* (van dezelfde dimensie) bij te houden. Een matrix is *een rechthoek van getallen*, met m rijen van telkens n getallen. Matrices zijn erg nuttig bij de studie van stelsels van vergelijkingen maar komen ook voor in andere contexten.

2.2.1 Definitie van een matrix

Voorbeeld 2.2.1. Examenresultaten voor verschillende vakken kan je bijhouden in een tabel:

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

Je kan dezelfde gegevens ook in volgende (punten)matrix $\mathbf{A}$ opschrijven

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}.$$

In deze voorstelling bevat elke rij de punten van een bepaalde leerling, en elke kolom de punten van een bepaald vak. We noemen deze matrix $\mathbf{A}$ een 5×4-matrix met 5 *rijen* en 4 *kolommen*. Het getal op rij 3 en kolom 2 zijn de punten van Chris voor Nederlands, en noteren we met indices als $(\mathbf{A})_{32} = 65$.

Definitie 2.2.1 (Matrix)**.**

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

- Met $\mathbb{R}^{m\times n}$ noteren we de verzameling van alle $m \times n$ matrices van reële getallen.
- De **matrixelementen** (of soms ook *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{1,1}, \ldots a_{i,j}, \ldots, a_{m,n}$.
  Soms noteert men de matrixelementen als $(\mathbf{A})_{i,j} \overset{\text{def}}{=} a_{i,j} \in \mathbb{R}$, en
  de matrix A als $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ of $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (dus met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij .

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Matrices

- De **diagonaal** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ bestaat uit de elementen $a_{i,i}$ die we de **diagonaalelementen** van de matrix noemen. Voor een vierkante matrix vormen ze inderdaad de diagonaal van de matrix. In volgende voorbeelden zijn de diagonaalelementen blauw gekleurd:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 2.2.2.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is een 2×2 matrix met $(\mathbf{A})_{1,1} = 1, (\mathbf{A})_{2,1} = 3, (\mathbf{A})_{1,2} = 2$ en $(\mathbf{A})_{2,2} = 4$

  Als je dezelfde matrix $\mathbf{A}$ schrijft als $[a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$, dan is $a_{1,1} = 1$, $a_{2,1} = 3$ etc.

- $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 2×3 matrix en $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 3×2 matrix.

- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ is een rijmatrix, en $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ is een kolommatrix.

Opmerking 2.2.1.

- In deze notatie $m \times n$ mag het 'product' $m \times n$ *niet* worden uitgerekend: een 2×3 matrix is niet hetzelfde als een 3×2 matrix of een 6×1 matrix. Een 6-matrix bestaat zelfs niet, maar wel een 6-vector want dat is een andere naam voor een 6-tal.
- De eerste index i geeft het nummer van de *rij* aan, de tweede index j die van de *kolom*.
- De notatie $(\mathbf{A})_{i,j}$ is vooral handig als de elementen van $\mathbf{A}$ nog geen naam hebben. Als $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ (een gelijkheid van twee matrices), dan geldt dus voor alle i en j dat $(\mathbf{A})_{i,j} = a_{i,j}$ (telkens een gelijkheid van twee getallen).
- Voor elke i en j is $(\mathbf{A})_{i,j}$ een reëel getal, namelijk het element van $\mathbf{A}$ op rij i en kolom j. De uitdrukking $[a_{i,j}]$ daarentegen staat voor de ganse matrix, en i en j zijn daarin *geen vooraf gegeven concrete getallen*, maar *indices* die lopen over de rijen respectievelijk de kolommen:

$$\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
$$\forall i, j : \quad (\mathbf{A})_{i,j} \in \mathbb{R}$$

  en je kan dus ook schrijven $\mathbf{A} = [(\mathbf{A})_{i,j}] = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $(\mathbf{A})_{i,j} = a_{i,j} \in \mathbb{R}$
- In sommige cursussen gebruikt men ronde haakjes in plaats van rechte haakjes: $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, en men laat meestal de komma's tussen de indices weg: $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ of $\mathbf{A} = (a_{ij})$.
- In het geval $n = m = 1$ wordt in de praktijk bijna nooit onderscheid gemaakt tussen een 1×1 matrix $[a]$, een vector met 1 component (a) en een getal a.
- Het geval $n = 1$ of $m = 1$ is subtieler: er wordt in de praktijk soms geen onderscheid gemaakt tussen een vector $(a_1, \ldots, a_n)$ en een $1 \times n$ matrix $[a_1, \ldots, a_n]$ of tussen een vector $(a_1, \ldots, a_n)$ en de gelijkaardige kolommatrix. Maar het onderscheid tussen kolommatrices enerzijds en rijmatrices anderzijds is dikwijls *toch belangrijk*.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

2.2 Matrices

Zowel een n-tal, een kolommatrix als een rijmatrix kan je beschouwen als schrijfwijzen voor een reële *vector*:

$$(1,-2,3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

maar het belang van het onderscheid tussen de schrijfwijzen hangt erg af van de context. En afhankelijk van die context wordt dan ook al dan niet onderscheid gemaakt tussen $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$ en $\mathbb{R}^{1\times n}$.

Als we rij- of kolommatrices beschouwen als *vectoren* en dan noteren we ze meestal met kleine letters $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \ldots$, terwijl willekeurige matrices een hoofdletter $\mathbf{A}, \mathbf{X}, \ldots$ krijgen.

In ieder geval zijn strikt wiskundig vectoren, rijmatrices en kolommatrices *verschillend*. Dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \neq (1,3,-2),$$

maar als de betekenis voldoende duidelijk is uit de context worden ze toch door elkaar gebruikt.

Volgens bovenstaande definitie is een matrix een rechthoekig rooster van getallen, maar je kan dergelijk rooster ook bekijken als een aantal onder elkaar geplaatste rijen of als een aantal naast elkaar geplaatste kolommen:

Eigenschap 2.2.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \cdots \quad a_{1,n} \\ \hline a_{2,1} \quad a_{2,2} \quad \cdots \quad a_{2,n} \\ \hline \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ \hline a_{m,1} \quad a_{m,2} \quad \cdots \quad a_{m,n} \end{array}\right]$$

De lijnen hebben in deze schrijfwijze geen betekenis, ze dienen enkel om de kolommen of rijen aan te duiden.

Voorbeeld 2.2.3.

We kunnen de matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ beschouwen als

twee naast elkaar geplaatste kolomvectoren $\mathbf{k_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{k_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{k_1} & \mathbf{k_2} \end{bmatrix}$

of als twee onder elkaar geplaatste rijvectoren $\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \end{bmatrix}$.

2.2.2 Som en scalair veelvoud van matrices

We definiëren de optelling en de scalaire vermenigvuldiging van matrices op dezelfde manier als voor vectoren: element-per-element. Voor de optelling is het dus belangrijk dat beide matrices dezelfde afmetingen hebben: allebei evenveel rijen en evenveel kolommen.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

2.2 Matrices

Definitie 2.2.2 (Optelling en scalair veelvoud van matrices).

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$r\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{1,1} & ra_{1,2} & \cdots & ra_{1,n} \\ ra_{2,1} & ra_{2,2} & \cdots & ra_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m,1} & ra_{m,2} & \cdots & ra_{m,n} \end{bmatrix}$$

Met de schrijfwijze $\mathbf{A} = [a_{i,j}], \mathbf{B} = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m\times n}, r \in \mathbb{R}$ wordt dit:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = [a_{i,j}+b_{i,j}] \quad r\mathbf{A} = [ra_{i,j}]$$

of nog

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{i,j} = a_{i,j}+b_{i,j} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})_{i,j} = (\mathbf{A})_{i,j}+(\mathbf{B})_{i,j}$$
$$(r\mathbf{A})_{i,j} = ra_{i,j} \qquad (r\mathbf{A})_{i,j} = r(A)_{i,j}$$

Het verschil van matrices en de tegengestelde matrix worden gedefinieerd net zoals voor vectoren, en we definiëren ook de nulmatrix $\mathbf{O}_{m,n} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. Als de context het toelaat schrijven we korter $\mathbf{O} = \mathbf{O}_{m,n}$.

Voorbeeld 2.2.4 (Som, verschil, tegengestelde en scalair veelvoud van matrices).

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 36 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 44 \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

maar de sommen $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 40 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 10 & 200 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ bestaan niet.

2.2.3 Het product van een matrix met een kolomvector

Er bestaat een algemene formule voor het *product* van twee matrices, maar we beperken ons hier tot het eenvoudigere speciale geval van het product van een *matrix* met een *kolomvector*. Voor de studie van stelsels van vergelijkingen volstaat in eerste instantie deze eenvoudigere versie.

Definitie 2.2.3 (Matrix-vector-product als lineaire combinatie).

Het **product** van een $m\times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n\times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de kolomvector $\mathbf{Ab}$ die de lineaire

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Matrices

combinatie is van de kolommen van $\mathbf{A}$ met als coëfficiënten de componenten van $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \ldots b_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Door de som in het rechterlid uit te rekenen volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

Eigenschap 2.2.2 (Matrix-vector-product)**.**

Het product van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de $m \times 1$ kolomvector $\mathbf{Ab}$ gegeven door

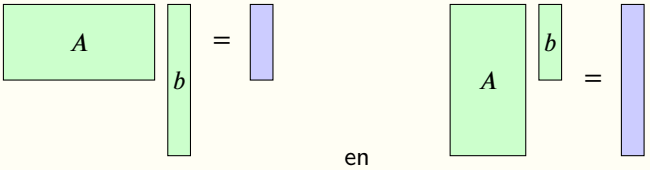
$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + \ldots + a_{1,n}b_n \\ a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + \ldots + a_{2,n}b_n \\ \\ \vdots \\ \\ a_{m,1}b_1 + a_{m,2}b_2 + \ldots + a_{m,n}b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}b_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{m,k}b_k \end{bmatrix}.$$

Opmerking 2.2.2.

(a) Je kan in gedachten de kolomvector kantelen en boven de matrixkolommen leggen, en dan kolom per kolom vermenigvuldigen en alles optellen:

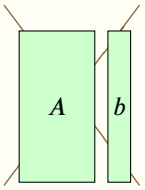
$$\begin{array}{rccccccc} & [\ b_1 & & b_2 & & \cdots & b_n &] \\ & & \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Ab} = & + & & + & & + \ \ldots \ + & & \\ \hline = & \begin{bmatrix} b_1a_{1,1} \\ b_1a_{2,1} \\ \vdots \\ b_1a_{m,1} \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} b_2a_{1,2} \\ b_2a_{2,2} \\ \vdots \\ b_2a_{m,2} \end{bmatrix} & + \ \ldots \ + & \begin{bmatrix} b_na_{1,n} \\ b_na_{2,n} \\ \vdots \\ b_na_{m,n} \end{bmatrix} &] \end{array}$$

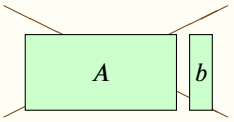
(b) Het product $\mathbf{Ab}$ bestaat enkel als het aantal *kolommen* van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal *rijen* van $\mathbf{b}$, en het resultaat is een *kolomvector* met evenveel rijen als $\mathbf{A}$. Visueel betekent dit:



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

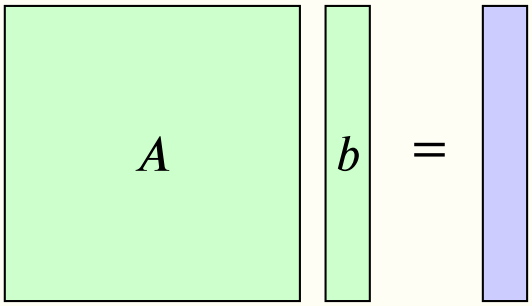
2.2 Matrices

maar volgende producten zijn onmogelijk: 

en 

.

Enkel voor *vierkante* matrices heeft $\mathbf{Ab}$ dezelfde vorm als $\mathbf{b}$:



(c) Deze definitie kan worden uitgebreid tot een product $\mathbf{AB}$ voor algemenere matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

(d) Zoals gebruikelijk bij producten schrijft men soms ook een punt: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{Ab}$. Bij matrices wordt de punt echter meestal weggelaten.

(e) Als $\mathbf{A}$ een rijvector is schrijven we dergelijke matrix soms ook met een kleine letter $\mathbf{a}$, dan is het product $\mathbf{ab}$ het reële getal gegeven door

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \quad \in \mathbb{R}.$$

en dit komt neer op het *scalair product* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ dat elders uitvoeriger wordt behandeld.

Voorbeeld 2.2.5.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 7 = 19$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\cdot 5 + 4\cdot 7 = 43.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 1\cdot 6 + 2\cdot 8 = 22$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 3\cdot 6 + 4\cdot 8 = 50.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$ of ook $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}.$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix}$ of ook $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix}.$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Matrices

(e) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 1+4\cdot 2\\3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 1+6\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+6+3+8\\6+12+5+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19\\35\end{bmatrix}$.

Voorbeeld 2.2.6. In het voorbeeld over examenresultaten bekom je door te vermenigvuldigen met geschikte kolomvectoren interessante gegevens.

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

$$A=\begin{bmatrix}80&80&40&20\\72&62&23&11\\74&65&38&10\\73&70&29&17\\75&71&30&15\end{bmatrix}$$

We vinden de punten voor Nederlands, het gemiddelde, en een totaal aantal punten waarbij elk vak wordt omgezet naar honderd:

$$\begin{bmatrix}80&80&40&20\\72&62&23&11\\74&65&38&10\\73&70&29&17\\75&71&30&15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}80\\62\\65\\70\\71\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}80&80&40&20\\72&62&23&11\\74&65&38&10\\73&70&29&17\\75&71&30&15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dots\\\dots\\\dots\\\dots\\\dots\end{bmatrix}\quad\text{en}\quad \begin{bmatrix}80&80&40&20\\72&62&23&11\\74&65&38&10\\73&70&29&17\\75&71&30&15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dots\\\dots\\\dots\\\dots\\\dots\end{bmatrix}$$

waarbij we veronderstelden dat de punten voor Wiskunde en Nederlands al op honderd waren, Engels op 50, en Duits op 20. De kolomvector waarmee wordt vermenigvuldigd drukt dus inderdaad de gewichten voor de verschillende kolommen in de matrix. In het bijzonder *selecteert* een kolommatrix met allemaal 0 behalve één keer 1 precies één kolom uit een matrix.

Merk op dat we met de technieken van dit hoofdstuk bijvoorbeeld nog niet het gemiddelde voor Wiskunde kunnen opschrijven, maar ook dat kan met matrices worden berekend.

Merk op dat we $\mathbf{A}$ enkel kunnen vermenigvuldigen met een kolommatrix met evenveel rijen als het aantal kolommen van $\mathbf{A}$. Het resultaat is telkens een *kolom*vector met evenveel rijen als $\mathbf{A}$

Matrices beschikken nog over vele andere bewerkingen en eigenschappen, maar die behandelen we later. Het voorgaande volstaat voor een eerste studie van stelsels.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 3

Matrices light versies (oud?))

(Versie 2026/08/25H.56)

3.1 Vectoren

We gebruiken het begrip *vector* hier als een andere naam voor een *n-tal van reële getallen*. Dergelijke vectoren veralgemenen de koppels (x, y), en dus punten of vectoren in het vlak, en de drietallen (x, y, z) en dus punten of vectoren in de driedimensionale ruimte.

Definitie 3.1.1 (Vector als n-tal)**.**

Een **vector** $\mathbf{a}$ is een geordend n-tal reële getallen:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Men noemt n de **dimensie** van de vector $\mathbf{a}$.

De getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ zijn de **componenten** (of ook **coördinaten**) van de vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Voorbeeld 3.1.1.

$(1, 2)$	heeft 2 componenten	$(\sqrt{2}, 0, -1, \pi)$	heeft 4 componenten
$(1, -2, \frac{1}{2})$	heeft 3 componenten	$(1, 2, \dots, n)$	heeft n componenten

Opmerking 3.1.1.

- In andere contexten worden andere definities gegeven van vectoren: vectoren komen onder verschillende gedaantes voor in de meetkunde, in de fysica en in de lineaire algebra.
- Men noteert een vector $\mathbf{a}$ soms ook met een pijltje als $\vec{a}$ of gewoon als a. Uiteraard kunnen er ook andere letters gebruikt worden zoals $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ of $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.
- Vectoren zijn *gelijk* als ze *dezelfde componenten* hebben *in dezelfde volgorde*: $(0.5, 1) = (\frac{1}{2}, 1)$ en $(1, 2) \neq (2, 1)$.

De belangrijkste bewerkingen op vectoren zijn de *som* en het *scalair veelvoud*.

Definitie 3.1.2 (Rekenen met vectoren)**.**

Voor twee vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ en een getal $r \in \mathbb{R}$ definiëren we:

som	$\mathbf{a} + \mathbf{b}$	$=$	$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
scalair veelvoud	$r\mathbf{a}$	$=$	$r \cdot \mathbf{a} = r(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$
tegengestelde	$-\mathbf{a}$	$=$	$-(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$
verschil	$\mathbf{a} - \mathbf{b}$	$\overset{\text{def}}{=}$	$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$	$=$	$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$

Voorbeeld 3.1.2.

$$(1, 2) + (3, 4) = (1 + 3, 2 + 4) = (4, 6) \qquad (4, 3) - (2, 1) = (4 - 2, 3 - 1) = (2, 2) = 2 \cdot (1, 1)$$
$$-(1, 2, 3) = (-1, -2, -3) \qquad (1, -1.5, 3) + (2.2, -1, 0) = (3.2, -2.5, 3)$$
$$3 \cdot (1, 2) = (3, 6) \qquad 3 \cdot (1, -1, 0.5) = (3, -3, 1.5)$$

Oefening 3.1.1. Bereken

1. $(2, 1) + (1, -1) = \dots\dots$

2. $2 \cdot (2, 1) = \dots\dots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Vectoren

3. $-(1,-1) = \ldots\ldots$

Opmerking 3.1.2.

- De som en het verschil van vectoren worden 'component per component' berekend. Bijgevolg zijn som en verschil enkel gedefinieerd voor vectoren *van hetzelfde formaat*: de som ~~$(1,2)+(3,4,5,6)$~~ is *niet gedefinieerd*.
- Net zoals voor de vermenigvuldiging van getallen schrijft men het punt voor de scalaire vermenigvuldiging soms wel en soms niet: $r \cdot \mathbf{a} = r\mathbf{a}$.

Vectoren komen in de praktijk erg dikwijls voor in zogenaamde *lineaire combinaties*:

Definitie 3.1.3 (Lineaire combinatie)**.**

Een **lineaire combinatie** van vectoren is *een som van (scalaire) veelvouden* van die vectoren.

Als $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ vectoren zijn van dezelfde dimensie en $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, dan is de vector

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \ldots + a_m\mathbf{v_m}$$

een *lineaire combinatie* van de vectoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$.
De getallen a_i heten de **coëfficiënten** of **gewichten** van de lineaire combinatie.

Voorbeeld 3.1.3 (Lineaire combinaties)**.**

1. $2(1,2) + 3(4,5)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

2. $(5,7)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

3. $(1,2)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

4. $(2,4)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

5. $(2,4,0)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$

6. $(2,4,1)$ is geen lineaire combinatie van de vectoren $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$

7. $3(1,2.5,-1,1) - 2(2,0,1,-1) + 2(1,-1,0.5,0) = (1,5.5,-4,5)$ is een lineaire combinatie van $(1,2.5,-1,1)$, $(2,0,1,-1)$ en $(1,-1,0.5,0)$

Definitie 3.1.4.

Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ is het reëel getal

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 3.1.4.

$$(1,2) \cdot (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11 \quad \text{en} \quad (3,-2,1) \cdot (2,2,-2) = 6 - 4 - 2 = 0.$$

We gebruiken de notatie $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ om aan te duiden dat de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ loodrecht staan op elkaar. In 2 dimensies kan je gemakkelijk inzien dat

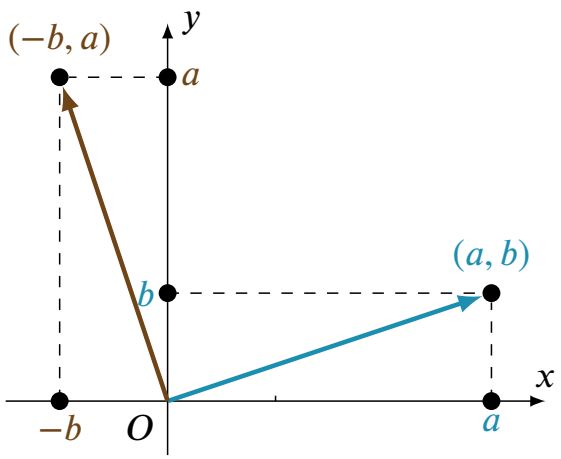
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b},$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Vectoren

want een kwartdraai van het vlak in tegenwijzerzin brengt de positieve x-as naar de positieve y-as en de positieve y-as naar de negatieve x-as. Een punt (a, b) komt bij een kwartdraai dus terecht op het punt $(-b, a)$, en na een kwartdraai staat de vector $(-b, a)$ dus loodrecht op de oorspronkelijke vector (a, b):

$$(a, b) \perp (-b, a) \qquad \text{en} \qquad (a, b) \cdot (-b, a) = a(-b) + ba = 0.$$



Ook in 3 dimensies kan men aantonen dat

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

Oefening 3.1.2.

1. $(2, 1) \cdot (1, -1) = \ldots\ldots$

2. $(1, 2, 3) \cdot (-2, 1, 0) = \ldots\ldots$

3. Juist $(1, 2, 3) \perp (-2, 1, 0)$?

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Matrices

Net zoals een vector een manier is om veel *getallen* bij te houden, is een *matrix* een manier om veel *vectoren* (van dezelfde dimensie) bij te houden. Een matrix is *een rechthoek van getallen*, met m rijen van telkens n getallen. Matrices zijn erg nuttig bij de studie van stelsels van lineaire vergelijkingen maar komen ook voor in andere contexten.

Voorbeeld 3.2.1. Examenresultaten voor verschillende vakken kan je bijhouden in een tabel:

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

Je kan dezelfde gegevens ook in volgende (punten)matrix $\mathbf{A}$ opschrijven

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}.$$

In deze voorstelling bevat elke rij de punten van een bepaalde leerling, en elke kolom de punten van een bepaald vak. We noemen deze matrix $\mathbf{A}$ een 5×4-matrix met 5 *rijen* en 4 *kolommen*. Het getal op rij 3 en kolom 2 zijn de punten van Chris voor Nederlands.

Definitie 3.2.1 (Matrix)**.**

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

- De **matrixelementen** (of soms ook *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{11}, \ldots a_{ij}, \ldots, a_{mn}$.
- Men noteert ook $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (dus met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij .
- De **diagonaal** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ bestaat uit de elementen a_{ii} die we de **diagonaalelementen** van de matrix noemen. Voor een vierkante matrix vormen ze inderdaad de diagonaal van de matrix. In volgende voorbeelden zijn de diagonaalelementen blauw gekleurd:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Matrices

Voorbeeld 3.2.2.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is een 2×2 matrix met $a_{11} = 1, a_{21} = 3, a_{12} = 2$ en $a_{22} = 4$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 2×3 matrix en $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 3×2 matrix.
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ is een rijmatrix, en $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ is een kolommatrix.

Opmerking 3.2.1.

- In deze notatie $m \times n$ mag het 'product' $m \times n$ *niet* worden uitgerekend: een 2×3 matrix is niet hetzelfde als een 3×2 matrix of een 6×1 matrix.
- De eerste index i geeft het nummer van de *rij* aan, de tweede index j die van de *kolom*.
- In sommige cursussen gebruikt men ronde haakjes in plaats van rechte haakjes: $\mathbf{A} = (a_{ij})$.
- In het geval $n = m = 1$ wordt er bijna nooit onderscheid gemaakt tussen een 1×1 matrix $[a]$, een vector met 1 component (a) en een getal a.
- Strikt wiskundig zijn kolommatrices, rijmatrices en vectoren *verschillend*, dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \neq (1, 3, -2),$$

  maar als de betekenis voldoende duidelijk is uit de context worden ze toch door elkaar gebruikt.

Volgens bovenstaande definitie is een matrix een rechthoekig rooster van getallen, maar je kan dergelijk rooster ook bekijken als een aantal onder elkaar geplaatste rijen of als een aantal naast elkaar geplaatste kolommen:

Eigenschap 3.2.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n} \\ \hline a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n} \\ \hline \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ \hline a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn} \end{array}\right]$$

De lijnen hebben in deze schrijfwijze geen betekenis, ze dienen enkel om de kolommen of rijen aan te duiden.

Voorbeeld 3.2.3.

We kunnen de matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ beschouwen als

twee naast elkaar geplaatste kolomvectoren $\mathbf{k_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{k_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{k_1} & \mathbf{k_2} \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Matrices

of als twee onder elkaar geplaatste rijvectoren $\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \end{bmatrix}$.

Enkele speciale types van vierkante matrices krijgen een eigen naam:

Definitie 3.2.2 (Speciale matrices)**.**

De **nulmatrix** $\mathbf{O}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen 0 zijn.
De **eenheidsmatrix** $\mathbf{I}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan de diagonaalelementen gelijk zijn aan 1 en alle andere elementen gelijk zijn aan 0.
Een **diagonaalmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen buiten de diagonaal 0 zijn.
Een **bovendriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *onder* de diagonaal 0 zijn.
Een **onderdriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *boven* de diagonaal 0 zijn.

Voorbeeld 3.2.4. Een eenheidsmatrix, een diagonaalmatrix en een bovendriehoeksmatrix:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Rekenen met Matrices

We definiëren de optelling en de scalaire vermenigvuldiging van matrices op dezelfde manier als voor vectoren: element-per-element. Voor de optelling is het dus belangrijk dat beide matrices dezelfde afmetingen hebben: allebei evenveel rijen en evenveel kolommen.

Definitie 3.3.1 (Optelling en scalair veelvoud van reële matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$r\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{bmatrix}$$

met $r \in \mathbb{R}$.

Het verschil van matrices en de tegengestelde matrix worden gedefinieerd net zoals voor vectoren.

Voorbeeld 3.3.1 (Som, verschil, tegengestelde en scalair veelvoud van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 36 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 44 \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

maar de sommen $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 40 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 10 & 200 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ bestaan niet.

Het product van een matrix met een kolomvector:

Definitie 3.3.2 (Matrix-vector-product)**.**

Het product van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de $m \times 1$ kolomvector $\mathbf{Ab}$ gegeven door

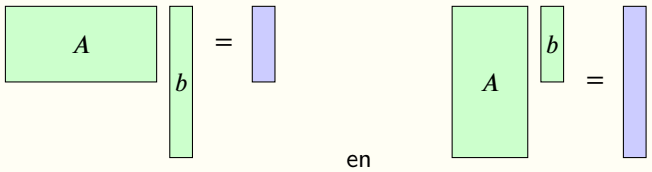
$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_k \end{bmatrix}.$$

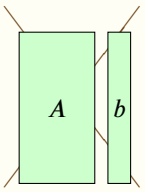
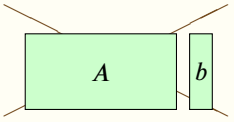
Opmerking 3.3.1.

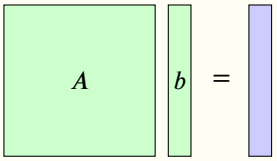
(a) Het product $\mathbf{Ab}$ is enkel gedefinieerd als het aantal *kolommen* van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal *rijen* van $\mathbf{b}$. Het resultaat is een *kolomvector* met evenveel rijen als $\mathbf{A}$. Visueel betekent dit:

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Rekenen met Matrices



maar volgende producten zijn onmogelijk:  en  .

Enkel voor *vierkante* matrices heeft **Ab** dezelfde vorm als **b**: 

(b) Zoals gebruikelijk bij producten schrijft men soms ook een punt: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{Ab}$. Bij matrices wordt de punt echter meestal weggelaten.

(c) Als $\mathbf{A}$ een rijvector is schrijven we dergelijke matrix soms ook met een kleine letter $\mathbf{a}$, dan is het product $\mathbf{ab}$ het reële getal gegeven door

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \quad \in \mathbb{R}.$$

en dit komt neer op het *scalair product* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

Voorbeeld 3.3.2.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 7 = 19$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\cdot 5 + 4\cdot 7 = 43.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 1\cdot 6 + 2\cdot 8 = 22$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 3\cdot 6 + 4\cdot 8 = 50.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 6 + 3 + 8 \\ 6 + 12 + 5 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 35 \end{bmatrix}$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Rekenen met Matrices

Het product van twee matrices:

Definitie 3.3.3 (Matrix-matrix-product)**.**

Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]$ waarbij het element c_{ij} op de i-de rij en de j-de kolom gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Voorbeeld 3.3.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 4 & 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 2\cdot 3+3\cdot 4 & 2\cdot 5+3\cdot 7 & 2\cdot 6+3\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 22 \\ 18 & 31 & 36 \end{bmatrix}.$$

Met sommatietekens kan je dit als volgt schrijven:

Eigenschap 3.3.1.

Het product van een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is een $m \times n$ matrix:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times n \text{ matrix)}$$

In het bijzonder is het product van een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met een $p \times 1$ kolommatrix $\mathbf{b}$ een $m \times 1$ kolommatrix:

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times 1 \text{ kolomvector)}$$

en het product van een $1 \times p$ rijmatrix $\mathbf{a}$ met een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ een $1 \times n$ rijmatrix:

$$\mathbf{aB} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{kn} \end{bmatrix} \quad \text{(een } 1 \times n \text{ rijvector)}$$

Voorbeeld 3.3.4.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} =$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Rekenen met Matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{41} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42} \end{bmatrix}.$$

Opmerking 3.3.2.

- Optellen van twee matrices werkt enkel als ze dezelfde vorm hebben: evenveel rijen en evenveel kolommen. De vermenigvuldiging daarentegen werkt enkel voor $m \times p$ met $p \times n$ matrices, dus als het aantal *kolommen* van de eerste matrix gelijk is aan het aantal *rijen* van de tweede. Het product van een 5×3 matrix $\mathbf{A}$ en een 3×2 matrix $\mathbf{B}$ is de 5×2 matrix $\mathbf{AB}$. Maar een matrix $\mathbf{BA}$ *bestaat dan niet*. Het product $\mathbf{BA}$ is in dit geval *niet gedefinieerd*!
- Een 1×100 matrix maal een 100×1 matrix is een getal, maar een 100×1 matrix maal een 1×100 matrix is een 100×100 matrix.
- Net zoals bij reële getallen wordt $\mathbf{AA}$ genoteerd als $\mathbf{A}^2$. Merk op dat deze vermenigvuldiging enkel zin heeft als A een vierkante matrix is.

Voorbeeld 3.3.5. Berekening van een 1×2 matrix maal een 2×1 matrix en van een 2×1 matrix maal een 1×2 matrix.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$

Oefening 3.3.1.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

4. $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

Het optellen en vermenigvuldigen van matrices voldoet aan een aantal verwachte eigenschappen die het optellen en vermenigvuldigen van reële getallen veralgemenen:

Eigenschap 3.3.2 (Eigenschappen matrixbewerkingen)**.**

Zij a,b en c reële getallen, en $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ reële matrices. Dan gelden volgende eigenschappen zodra ze betekenis hebben (dat betekent: zodra de matrices het correcte formaat hebben om de optellingen en vermenigvuldigingen te kunnen uitvoeren):

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Rekenen met Matrices

(b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

(c) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$

(d) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$

(e) $a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$

(f) $(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$

(g) $a(b\mathbf{A})=(ab)\mathbf{A}$

(h) $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$

(i) $0\mathbf{A}=\mathbf{O}$

(j) $\mathbf{O}\mathbf{A}=\mathbf{O}$

(k) $a\mathbf{O}=\mathbf{O}$

(l) $(-1)\mathbf{A}=-\mathbf{A}$

(m) $\mathbf{I}\mathbf{A}=\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}\mathbf{I}=\mathbf{A}$

(n) $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})=(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$

(o) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C}$

(p) $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{A}+\mathbf{C}\mathbf{A}$

Let wel op dat met matrices niet *alles* mag wat voor getallen geldt:

Voorbeeld 3.3.6. De volgorde van de vermenigvuldiging van matrices mag niet omgewisseld worden:

$$\begin{bmatrix}1&2\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&1\\-2&2\end{bmatrix}$$

maar

$$\begin{bmatrix}1&-1\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\1&6\end{bmatrix}.$$

In het algemeen geldt dus dat $\mathbf{A}\mathbf{B}$ **niet** gelijk is aan $\mathbf{B}\mathbf{A}$.

Voorbeeld 3.3.7. Voor sommige matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ geldt toch $\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{B}\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 3.3.8. Een product kan nul zijn zonder dat één van de factoren nul is:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \text{ en ook } \begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Analoog aan het inverse of omgekeerde van getallen (a^{-1} is het unieke getal b zodat $ab=1$) definiëren we voor matrices:

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Rekenen met Matrices

Definitie 3.3.4 (Inverse matrix)**.** Twee matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn elkaars **inverse** als

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

Als voor een gegeven $\mathbf{A}$ dergelijke $\mathbf{B}$ bestaat dan is die uniek, en we noteren die als $\mathbf{A}^{-1}$. Er geldt dus

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Een belangrijk verschil met reële getallen is dat niet elke matrix een inverse heeft. We gaan hier niet in op het berekenen van een inverse matrix.

Definitie 3.3.5. We definiëren de macht $\mathbf{A}^k$ van een vierante matrix $\mathbf{A}$ als het matrixproduct $\underbrace{\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k}$.

Opmerking 3.3.3. Voorzichtigheid betreffende de rekenregels van matrices geldt ook voor machten.

- Zo is in de meeste gevallen:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$$

- Het is ook mogelijk dat $\mathbf{A}^k = 0$ voor een bepaalde k, maar $\mathbf{A}^i \neq 0$ voor alle $i < k$. Beschouw het voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \mathbf{0} \qquad \text{maar} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \neq \mathbf{0}$$

- Een ander merkwaardig voorbeeld is:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

  Bovenstaande berekening stelt dat $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Men mag hier echter niet gewoon 'een $\mathbf{A}$ schrappen' wat zou impliceren dat $\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Schrappen van factoren is wiskundig gezien eigenlijk vermenigvuldigen met het inverse element. Omdat de matrix $\mathbf{A}$ geen inverse heeft, kunnen we dus niet 'schrappen'.

- Een ander speciaal voorbeeld is:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{I}$$

  Het nemen van een kwadraat van reële getallen levert nooit een negatief getal op. Bij matrices is iets dergelijks dus wel mogelijk. Het kan opgemerkt worden dat bovenstaande matrix eigenlijk een representatie is van het complexe getal i.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 4
Stelsels

(Versie 2026/08/25H.56)

4.1 Stelsels: inleiding

Een *stelsel van lineaire vergelijkingen* is letterlijk gewoon een 'stel lineaire vergelijkingen':

- een **vergelijking** is een voorwaarde waaraan onbekende grootheden $(x, y, z \ldots)$ moeten voldoen,
- een vergelijking is **lineair** als de onbekende grootheden enkel voorkomen *zonder machten* of meer ingewikkelde uitdrukkingen als wortels of sinussen,
- en **stelsel** betekent dat er een 'stel' of 'collectie' van vergelijkingen (dus voorwaarden) is waaraan de onbekende grootheden *tegelijk* moeten voldoen.

Een stelsel van lineaire vergelijkingen is dus iets van de vorm

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = \sin \pi/7 \end{cases} \qquad \text{maar niet } \cancel{\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = \pi \end{cases}} \quad \text{of } \cancel{\begin{cases} \sqrt{x+1} + y = 5 \\ \sin(x) + e^y = 1 \end{cases}}$$

Het concreet vinden van de *onbekende grootheden* (afstanden, prijzen, gewichten, tijden, ...) die moeten voldoen aan *lineaire* voorwaarden is het **oplossen** van een lineair stelsel van vergelijkingen. Dergelijke lineaire stelsels komen dus erg vaak voor in de wiskunde, fysica, scheikunde, economie,... Ze hebben de bijzonder aangename eigenschap dat ze altijd wiskundig op te lossen zijn: er is een relatief eenvoudige procedure om *alle oplossingen* te vinden. Het is belangrijk de basisprincipes van deze methode en de structuur van de oplossingen grondig te beheersen, hoewel het oplossen van stelsels in de praktijk veel weliswaar eenvoudig rekenwerk vraagt dat dan ook wordt uitbesteed aan computers.

Voorbeeld 4.1.1. Geef twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

Merk op:

- Je kan in dit geval de gezochte getallen snel vinden door te *proberen*: de som moet 5 zijn, dus als we ons beperken tot natuurlijke getallen zijn de mogelijkheden $0+5$, $1+4$ of $2+3$. Enkel voor $2+3$ is het verschil 1, dus de oplossing is 2 en 3.
  In dit eenvoudige geval is het niet echt nuttig om onbekenden en stelsels op te schrijven. Maar zodra de voorwaarden wat ingewikkelder zijn, wordt *proberen* snel moeilijk en is *uitrekenen* meestal sneller.
- Als je toch een stelsel opschrijft, kan je in dit eenvoudige geval dat stelsel ook makkelijk oplossen. Als $x+y=5$, dan is dus $y=5-x$. Door nu y te vervangen door $5-x$ (want er geldt toch dat $y=5-x$) in de tweede vergelijking $x-y=1$ wordt die tweede vergelijking $x-(5-x)=1$, en dus $2x=6$ of $x=3$. En dus is $y=5-x=5-3=2$.
  Eén van de methodes om stelsels op te lossen is een veralgemening van dit eenvoudig trucje.
- Je kan dit stelsel ook anders aanpakken. Inderdaad, als $x+y=5$ en $x-y=1$ dan is ook de som van de linkerleden gelijk aan de som van de rechterleden: $(x+y)+(x-y)=5+1$. In deze laatste uitdrukking valt de onbekende y echter weg, want ze wordt $2x=6$ en dus $x=3$. Invullen dat $x=3$ in de eerste vergelijking $x+y=5$ levert $3+y=5$ of $y=2$.
  Een alternatieve methode om stelsels op te lossen is een veralgemening van dit eenvoudig trucje.
- Je kan dit stelsel ook opschrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\cdot x+1\cdot y=5 \\ 1\cdot x+(-1)\cdot y=1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Stelsels: inleiding

Voorbeeld 4.1.2. Geef twee getallen waarvan de som 3,1415 is en het verschil 1,2345.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen opnieuw x en y. Dan kennen we weer de som $x+y=3,1415$ en het verschil $x-y=1,2345$, en we zoeken dus de oplossing van het stelsel $\begin{cases} x+y=3,1415 \\ x-y=1,2345 \end{cases}$

Merk op:

- Je kan de getallen x en y nu veel minder makkelijk vinden door *proberen*.
- Je kan in dit eenvoudige geval het stelsel toch makkelijk oplossen met dezelfde methodes als hiervoor: Omdat $x+y=3,1415$ moet dus $y=3,1415-x$. Maar dan wordt $x-y=1,2345$ nu $x-(3,1415-x)=1,2345$, en dus $2x=1,2345+3,1415=4,376$ of $x=2,188$. En dus $y=3,1415-x=3,1415-4,376=,19535$.
- Ook de tweede methode werkt hier: als $x+y=3.1415$ en $x-y=1.2345$ dan moet natuurlijk ook $(x+y)+(x-y)=3.1415+1.2345=4.3760$. Deze vergelijking reduceert zich tot $2x=4.376$ en dus $x=2.188$. Invullen van $x=2.188$ in de eerste vergelijking geeft $2.188+y=3.1415$ of $y=3.1415-2.188=1.9535$.
- Je kan ook dit stelsel schrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1415 \\ 1.2345 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 4.1.3. Geef drie getallen waarvan het grootste dubbel zo groot is als het kleinste, het middelste de helft is van de som van de twee anderen, en het gemiddelde 42 is.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen, geordend van groot naar klein, x, y en z. Dan weten we dat $x=2z$, $y=\dfrac{x+z}{2}$ en $\dfrac{x+y+z}{3}=42$, en zoeken dus de oplossing van het stelsel $\begin{cases} x-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y+z=126 \end{cases}$ Je kan ongetwijfeld met wat nadenken en proberen die drie getallen vinden, maar verder leggen we een algemene oplossingsmethode uit die je kan 'toepassen', wat dus maakt dat je niet meer moet 'nadenken' zodra je de oplossingsmethode kent. Liefhebbers van matrices merken op dat je het stelsel kan schrijven als

$$\begin{cases} x-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y+z=126 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 126 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Stelsels: definitie

Definitie 4.2.1 (Lineair stelsel)**.**

Een **lineair stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden** is een stel van m lineaire vergelijkingen met in totaal n onbekenden. Dergelijk lineair stelsel noteren we als

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

met S de naam van het stelsel, a_{ij} de **coëfficiënten**, $x_1, \ldots, x_n$ de **onbekenden** en b_i de **rechterleden** of **constante termen**.

Een lineair stelsel is **homogeen** als alle constante termen nul zijn, dus alle $b_i = 0$.
Het aan S **geassocieerde homogene stelsel** is het stelsel waarbij de b_i vervangen zijn door 0.

Merk op: de term *rechterlid* is gebruikelijk in de wiskunde, en komt in veel cursussen voor, maar is eigenlijk verwarrend of zelfs misleidend: een vergelijking $x + y = 2$ kan natuurlijk ook geschreven worden als $x + y - 2 = 0$, maar $x + y - 2 = 0$ is *geen* homogene vergelijking, en volgens bovenstaande definitie is het 'rechterlid' gelijk aan 2. Het begrip 'rechterlid' slaat dus op vergelijkingen in standaardvorm: alle onbekenden in het linkerlid en de constante term rechts.

Voorbeeld 4.2.1. Het stelsel

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{cases}$$

is een lineair stelsel met twee vergelijkingen in drie onbekenden x_1, x_2, x_3, en heeft als geassocieerd homogeen stelsel

$$S_o : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

De belangrijkste uitdaging bij dergelijke stelsels is om de letters x_i te vervangen door geschikte reële getallen zodat alle gelijkheden opgaan. We noemen dat het *oplossen van het stelsel* en de gevonden reële getallen zijn dan *oplossingen van het stelsel*.

We associëren met elk stelsel twee erg verwante matrices: de *coëfficiëntenmatrix* en de *uitgebreide* matrix:

Eigenschap 4.2.1 (Matrixvorm van een lineair stelsel)**.**

Elk lineair stelsel kan in **matrixvorm** worden geschreven als $\mathbf{Ax = b}$ waarbij

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

met

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$	de $m \times n$ **coëfficiëntenmatrix** van het stelsel bestaande uit reële getallen,
$\mathbf{x}$	de **onbekende** (een *kolomvector* met n *letters* (of onbekenden) $x_1, \ldots, x_n$) en
$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$	het **rechterlid** of de *constante term(en)* (een *kolomvector* met m *getallen*).

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Stelsels: definitie

De **uitgebreide matrix** van het stelsel is de $m \times (n+1)$ matrix met de constante termen toegevoegd:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Een stelsel is **homogeen** als $\mathbf{b} = 0$, dus als het van de vorm $\mathbf{Ax} = 0$ is.

Om verwarring te voorkomen is de verticale lijn in de uitgebreide matrix belangrijk.

Voorbeeld 4.2.2.

Het stelsel S $\quad \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$

heeft als coëfficiëntenmatrix $\mathbf{A} =$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

en als uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] =$ $\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$

We kunnen het stelsel dus schrijven als $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Het geassocieerde homogene stelsel S_o $\quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

heeft dezelfde coëfficiëntenmatrix $\mathbf{A}$, en uitgebreide matrix $\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$

We bespreken een wat uitgebreider voorbeeld van een lineair stelsel:

Voorbeeld 4.2.3. Bepaal alle reële getallen s, t, u, v, w waarvoor

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$$

Dit is een *lineair stelsel van drie vergelijkingen in vijf onbekenden*.

- Dit is de wiskundige weergave van een probleem waarbij we weten dat er tussen de vijf onbekende grootheden s, t, u, v, w drie lineaire verbanden bestaan. De uitdaging is *alle waarden* te vinden voor de onbekende grootheden die aan *alle* (lineaire) verbanden voldoen.
- Een eerste technische herformulering bestaat erin om één *vector* te zoeken in plaats van vijf *getallen*: in plaats van 'zoek alle reële getallen s, t, u, v, w', zeggen we 'zoek alle vectoren $(s, t, u, v, w) \in \mathbb{R}^5$.
- Met matrices en vectoren kunnen we het stelsel eenvoudiger schrijven: de vijf onbekenden (s, t, u, v, w) worden een 5×1 kolomvector $\mathbf{x}$, de coëfficiënten van de vergelijkingen vormen de

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Stelsels: definitie

3×5 *coëfficiëntenmatrix* $\mathbf{A}$ en de rechterleden zetten we in een 3×1 kolomvector $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel kan nu geschreven worden als $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ of

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De uitgebreide matrix, die dus alle gegevens van het stelsel bevat, is

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

Oefening 4.2.1. Welke van de volgende stelsels zijn lineair in de onbekenden u en v? Geef voor de lineaire stelsels ook een matrixvoorstelling.

1. Lineair $\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 4u + 2v = 1 \end{cases}$

2. Lineair $\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 4u + 2v = u \end{cases}$

3. Lineair $\begin{cases} 2u = 5 \\ 2v = 1 \end{cases}$

4. Lineair $\begin{cases} (u+2)u - u^2 = 5 \\ 4u + 2v = 1 \end{cases}$

5. Niet lineair $\begin{cases} \sin(u) + \cos(v) = 1 \\ \sin(u) - 2\cos(v) = 1/2 \end{cases}$

6. Niet lineair $\begin{cases} u^2 + v = 1 \\ -u^2 - 2v = 2 \end{cases}$

7. Lineair $\begin{cases} au + 2v = 5 \\ 4u + bv = 1 \end{cases}$ (met $a, b \in \mathbb{R}$)

8. Lineair $\begin{cases} x^3 u + \cos(y)v = 5 \\ 4u + x^3 v = 1 \end{cases}$ (met $x, y \in \mathbb{R}$)

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Stelsels: enkele interpretaties

Een *stelsel van lineaire vergelijkingen* is een stel van lineaire vergelijkingen, en kan altijd in matrixvorm worden geschreven. Een stelsel kan op verschillende manieren worden geïnterpreteerd, en erg uiteenlopende problemen kunnen worden herleid tot het oplossen van een stelsel.

Voorbeeld 4.3.1. Vraagstukken: zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Ook het zoeken van geschikte **lineaire combinaties** leidt tot lineaire stelsels, en omgekeerd kan elk lineair stelsel beschouwd worden als het zoeken van een geschikte lineaire combinatie.

Inderdaad, elke matrix $\mathbf{A}$ kan beschouwd worden als een rij van kolomvectoren $\mathbf{A_i}$, en het matrixproduct $\mathbf{Ax}$ is ook een *kolom*vector, namelijk de lineaire combinatie van de kolommen van $\mathbf{A}$ met (onbekende) coëfficiënten x_i: $\mathbf{A_1}x_1 + \mathbf{A_2}x_2 + \ldots + \mathbf{A_n}x_n$.
Het stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ oplossen betekent dus zoeken naar gepaste coëfficiënten x_i om een gegeven vector $\mathbf{b}$ te schrijven als een lineaire combinatie van een gegeven stel vectoren $\mathbf{A_i}$, namelijk de kolommen van $\mathbf{A}$:

Voorbeeld 4.3.2. Lineaire combinaties: is $(5,1)$ een lineaire combinatie van $(1,1)$ en $(1,-1)$?

We zoeken coëfficiënten x en y zodat $(5,1) = x(1,1) + y(1,-1)$, en dat komt neer op het oplossen van het stelsel

$$x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Merk op dat dit hetzelfde stelsel is als hierboven.

We kunnen het product $\mathbf{Ax}$ beschouwen als een functie die de kolomvector $\mathbf{x}$ afbeeldt op de kolomvector $\mathbf{Ax}$. Dergelijke functies, die in deze context meestal *afbeeldingen* worden genoemd komen vaak voor: het zijn zogenaamde **lineaire afbeeldingen** van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$.
Het stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ oplossen betekent dus zoeken welke vectoren $\mathbf{x}$ door een gegeven matrix $\mathbf{A}$ worden afgebeeld op een gegeven vector $\mathbf{b}$:

Voorbeeld 4.3.3. Lineaire afbeeldingen: welke (x,y) worden door $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ afgebeeld op $(5,1)$?

We zoeken dus de koppels (x,y) waarvoor

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

en dat is precies de matrixvoorstelling van weerom hetzelfde stelsel $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Stelsels: oplossingen

Een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *oplossen* betekent *alle* n-tallen reële getallen $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ vinden die we voor de letters $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ kunnen invullen zodat $\mathbf{Ap} \stackrel{!}{=} \mathbf{b}$. Formeel wordt dit:

Definitie 4.4.1 (Oplossingen van stelsels en gelijkwaardige stelsels)**.**

Een **oplossing** van een lineair stelsel $S : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ is een vector $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ die voldoet aan alle vergelijkingen, dus zodat

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{b} \quad \text{of} \quad \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n & = b_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \cdots + a_{mn}p_n & = b_m \end{cases}$$

De **oplossingsverzameling** $\mathrm{Opl}(S)$ van een lineair stelsel S is de verzameling van *alle oplossingen*:

$$\mathrm{Opl}(S) = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\ \}$$

Twee stelsels S_1 en S_2 zijn **gelijkwaardig** als ze *dezelfde* oplossingsverzameling hebben, dus als

$$\mathrm{Opl}(S_1) = \mathrm{Opl}(S_2)$$

Een stelsel dat *geen* oplossingen heeft, dus met $\mathrm{Opl}(S) = \emptyset$, noemen we **strijdig** of **ontaard**. Ook een *vergelijking* die geen oplossingen heeft noemen we **strijdig** of **ontaard**. Een typische *ontaarde vergelijking* is $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$ of dus $0 = 1$.

Een algemene strategie om lineaire stelsels op te lossen is:

Bereken een *gelijkwaardig* stelsel waarvoor de oplossingsverzameling direct af te lezen is.

Het is belangrijk om stelsels te leren oplossen, maar het is ook belangrijk te beseffen dat we in een aantal gevallen niet zozeer geïnteresseerd zullen zijn in de concrete oplossingen, maar wel in allerlei *eigenschappen* van die oplossingen (zijn er oplossingen, hoeveel zijn er, ...)

We geven enkele eenvoudige voorbeelden van stelsels die direct oplosbaar zijn:

Voorbeeld 4.4.1. Los volgende stelsels op:

1. $S_1 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Door enkele getallen te proberen, vinden sommigen al snel dat het koppel $(3, 2)$ een oplossing is. Door de twee vergelijkingen bij elkaar op te tellen, vinden anderen dan weer dat $(x + y) + (x - y) = 5 + 1$ moet zijn, en dus $2x = 6$, of $x = 3$. Door $x = 3$ in te vullen in één van de twee oorspronkelijke vergelijkingen vinden ze dan dat $3 + y = 5$, en dus $y = 2$.

Uit de eerste oplossingsmethode volgt dat $(3, 2)$ *een* oplossing is, en uit de tweede volgt dat $(3, 2)$ *de enige* oplossing is.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_1) = \{(3, 2)\}$, of $x = 3$ en $y = 2$ is de enige oplossing van het stelsel S_1

2. $S_2 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x + y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Het is onmiddellijk duidelijk dat het onmogelijk is dat $x + y$ zowel gelijk is aan 1 als aan 5. Er zijn dus *geen oplossingen*.

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Stelsels: oplossingen

Resultaat: $\text{Opl}(S_2) = \emptyset$

3. $S_3 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 12 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet ook aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$), en is dus een oplossing van het hele stelsel.

Resultaat: $\text{Opl}(S_3) = \{(3, 2)\}$

4. $S_4 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 13 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet niet aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \neq 13$), en er kan dus geen oplossing bestaan voor het hele stelsel.

Resultaat: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$

5. $S_5 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ 2x + 2y & = 10 \end{cases}$

Uitwerking: De tweede vergelijking is eigenlijk dezelfde als de eerste, want als $x+y = 5$, dan is automatisch ook $2x + 2y = 2(x + y) = 2 \cdot 5 = 10$. Dus zodra $y = 5 - x$ (of ook: zodra $x = 5 - y$), hebben we een oplossing. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 5 - x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(5 - y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn natuurlijk twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels. Voorbeelden van oplossingen zijn dus de koppels $(0, 5), (1, 4), (2, 3), (5, 0), (\pi, 5 - \pi), (\pi + 5, -\pi), (5 - \pi, \pi), \ldots$

Resultaat: $\text{Opl}(S_5) = \{(t, 5 - t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(5 - s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -x + 5$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel S_5 is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -x + 5$.

6. $S_6 = \{ \; 2x + y \; = 6 \quad$ (een 'stelsel' met één vergelijking)

Uitwerking: Er is maar één vergelijking, en die zegt dat $x = 3 - \frac{1}{2}y$, of ook dat $y = 6 - 2x$. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 6-2x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(3-\frac{1}{2}y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels.

Resultaat: $\text{Opl}(S_6) = \{(t, 6 - 2t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(3 - \frac{1}{2}s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -2x+6$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel $\{2x+y = 6$ is (als deelverzameling van $\mathbb{R}^2$) dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -2x + 6$.

7. $S_{71} = \begin{cases} 2x + y & = 6 \\ 0x & = 0 \end{cases}$ of $S_{72} = \begin{cases} x + y & = -x + 6 \\ 0 & = 0 \end{cases}$ of $S_{73} = \begin{cases} x + y + 3 & = -x + 9 \\ 1 & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Dit zijn dezelfde stelsels als S_6 hierboven.

8. $S_{81} = \begin{cases} 2x + y & = 6 \\ 0x & = 1 \end{cases}$ of $S_{82} = \begin{cases} x + y & = -x + 6 \\ 0 & = 1 \end{cases}$ of $S_{83} = \begin{cases} x + y + 3 & = -x + 9 \\ 7 & = 8 \end{cases}$

Uitwerking: Deze stelsels hebben een strijdige vergelijking, en hun oplossingsverzameling is dus leeg.

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 Stelsels: direct oplosbaar

Er bestaat een erg algemene maar soms verrassend efficiënte strategie om moeilijke problemen op te lossen: bedenk eerst een *eenvoudigere versie* van het probleem, en probeer dan alvast die eenvoudige versie op te lossen. Dat creëert enerzijds vertrouwdheid met het probleem, kan eventueel inspiratie opleveren voor een algemene oplossing en geeft mogelijk ook zelfvertrouwen om het moeilijke probleem steeds verder te doorgronden. In het ideale geval kan je het moeilijke probleem *reduceren* tot het eenvoudige geval.

Voor het oplossen van lineaire stelsels blijkt deze strategie bijzonder geschikt te zijn. We zullen eerst allerlei eenvoudige stelsels oplossen door 'puur nadenken'. Later zullen we dan een beroep doen op de Geniale Gauss die een techniek heeft gevonden om *elk* stelsel te vervangen door één waarvan wij eenvoudige stervelingen dan door eenvoudig 'puur nadenken' de oplossingen kunnen vinden.

Voorbeeld 4.5.1.

Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in vorm van een matrixproduct:

1. $S_1 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_1) = \{\ (2,4,6)\ \}$ via gewoon aflezen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

2. $S_2 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 1 \end{cases}$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_2) = \{\ (2,2,1)\ \}$ via aflezen met een kleine berekening: $4/2 = 2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $S_3 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 0 \end{cases}$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_3) = \{\ (2,2,0)\ \}$ via gewoon aflezen, waarbij we $z = 0$ krijgen, maar dat is niets speciaal.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $S_4 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 1 \end{cases}$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_4) = \emptyset$ via gewoon aflezen, want de laatste vergelijking is duidelijk strijdig: voor geen enkel getal z kan $0z = 1$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 Stelsels: direct oplosbaar

5. $S_5 = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_5) = \{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$, waarbij de laatste vergelijking $0z = 0$ voor alle getallen z voldaan is . Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die we naar keuze kunnen schrijven als $\{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,z) \mid z \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,x) \mid x \in \mathbb{R}\ \}$. De laatste schrijfwijze is wiskundig correct, maar verwarrend omdat de letter x hier niets te maken heeft met de eerste coördinaat die meestal ook x noemt. Dikwijls worden als zogenaamde *parameters* letters gekozen uit het rijtje $t, s, k, l, \alpha, \beta, \ldots$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. $S_6 = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\ \}$. Enkel de eerste vergelijking is een echte vergelijking. Als $x = 2$, mogen y en z willekeurig zijn. Er zijn dus 'twee keer oneindig' veel oplossingen omdat er twee parameters nodig zijn om *alle* oplossingen te bekomen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. $S_7 = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,t,3) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$. Weer oneindig veel oplossingen, nu met één parameter.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

Voorbeeld 4.5.2 (Achterwaartse substitutie)**.** Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in matrixvorm:

1. $S_{21} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y+ & 1z & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{21}) = \{\ (2,-2,6)\ \}$

We beginnen met de laatste vergelijking: $z = 6$. We vullen die waarde voor z in in de tweede vergelijking, en bekomen $y+6 = 4$, dus $y = -2$. De eerste vergelijking zegt dat $x = 2$. Dus, de oplossing is $(x,y,z) = (2,-2,6)$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 Stelsels: direct oplosbaar

2. $S_{22} = \begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ & +y & +z & = & 4 \\ & & +z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{22}) = \{\ (-2,-2,6)\ \}$

Opnieuw van beneden naar boven invullen (achterwaarts, vandaar *achterwaartse substitutie*). $z = 6$, dus $y + 6 = 4$ en dus $y = -2$. Tenslotte is $x + (-2) + 6 = 2$, of $x = -2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

3. $S_{23} = \begin{cases} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & +5y & +3z & = & 4 \\ & & +2z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{23}) = \{\ (1/6,-1,3)\ \}$

Opnieuw aan de hand van achterwaartse substitutie eerst z, vervolgens y en dan x berekenen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

4. $S_{24} = \begin{cases} 6x & +z & = & 2 \\ & +2z & = & 4 \\ & +3z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: Merk op dat de tweede en derde vergelijking in feite dezelfde zijn. Een gelijkwaardig stelsel is dus

$$S_{24} = \begin{cases} 6x & +z & = & 2 \\ & +2z & = & 4 \end{cases}$$

In matrixvorm schrijf je dit stelsel

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hieruit vinden we aan de hand van achterwaartse substitutie dat $(0,2)$ de enige oplossing is van het stelsel.

Merk op dat er geen onbekende y in het stelsel voorkomt, en we dus kunnen aannemen dat er twee onbekenden zijn, die toevallig x en z noemen in plaats van x en y. Je hebt dus een vector met twee componenten nodig om het stelsel op te lossen. De oplossingsverzameling is dan $\text{Opl}(S_{24}) = \{(0,2)\}$.

Stel dat in een vraagstuk toch sprake zou zijn van een onbekende y, maar waarbij die toch niet voorkomt in je stelsel. Dat betekent dan dat je stelsel geen voorwaarden oplegt aan y, en dat dus y willekeurige waarden mag aannemen. Dan beschrijf je best je oplossingen als $\text{Opl}(S_{24}) = \{(0,t,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Het bijhorende matrixproduct is dan $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

5. $S_{25} = \begin{cases} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & & +2z & = & 4 \\ & & +0z & = & 0 \end{cases}$

Uitwerking:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 Stelsels: direct oplosbaar

$\text{Opl}(S_{25}) = \{\ (t, -3t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$

De tweede vergelijking heeft als oplossing $z = 2$. De eerste vergelijking wordt dan $6x + 2y = 0$. De oplossingsverzameling heeft één parameter: stel bijvoorbeeld dat $x = t$ voor een $t \in \mathbb{R}$. Dan is aan deze vergelijking voldaan als $2y = -6t$ of dus $y = -3t$.

We kunnen dit samenvatten in volgende eigenschap:

Eigenschap 4.5.1 (Oplossen van 'eenvoudige' stelsels met aflezen of achterwaartse substitutie)**.**

- Stelsels met een *diagonaalmatrix* zijn zeer eenvoudig oplosbaar via *aflezen*.
- Stelsels met een *bovendriehoeksmatrix* zijn eenvoudig oplosbaar via *achterwaartse substitutie*.
- Nulrijen, nulkolommen of nullen op verkeerde plaatsen nopen tot enige voorzichtigheid:
  - een nulrij betekent: er waren 'dubbele' (en dus overbodige) vergelijkingen.
  - een nulkolom betekent: een variabele komt niet echt voor.
  - een nulrij-met-achteraan-een-1 betekent $0x + 0y + 0z = 1$ en geeft dus een *strijdig* stelsel.
- Stelsels met *minder vergelijkingen dan onbekenden* hebben typisch *oneindig veel* oplossingen, en de oplossingsverzameling bevat dus *parameters*.
- Stelsels met *evenveel vergelijkingen als onbekenden* hebben typisch een *unieke* oplossing. Maar:
  - er kunnen 'dubbele' vergelijkingen zijn waardoor er toch oneindig veel oplossingen zijn.
  - als het stelsel homogeen is, is de unieke oplossing noodzakelijk de (meestal niet interessante) nul-oplossing.
- Stelsels met *meer vergelijkingen dan onbekenden* hebben typisch een *geen* oplossingen. Maar:
  - er kunnen 'dubbele' vergelijkingen zijn waardoor er toch oplossingen zijn, zoals in $\begin{cases} 6x & +2y & = & 2 \\ 3x & +y & = & 1 \\ 9x & +3y & = & 3 \end{cases} \iff$

    $\begin{cases} 3x + y = 1 \end{cases}$ met oplossingsverzameling $\{\ (t, 1 - 3t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$

Met deze technieken kunnen alleen erg eenvoudige stelsels worden opgelost, maar met de methode van Gauss kan je *een willekeurig stelsel* herleiden naar één van deze eenvoudige gevallen.

Het is dus *erg belangrijk* deze eenvoudige gevallen erg vlot te kunnen oplossen voordat je aan de moeilijkere stelsels begint.

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Stelsels: oplossen via echelonvorm

De *eliminatiemethode van Gauss* is een algemene methode om *elk lineair stelsel* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ op te lossen. Het toepassen van geschikte zogenaamde *elementaire operaties* op de vergelijkingen van het stelsel (in de praktijk op de uitgebreide matrix van het stelsel) leidt tot een gelijkwaardig maar eenvoudiger stelsel in trapvorm (de zogenaamde *echelonvorm*). Van een stelsel in echelonvorm kan de oplossingsverzameling direct worden afgelezen. Een andere naam voor de methode is 'rijherleiden', en een variant is gekend onder de naam 'spilmethode'.

4.6.1 Elementaire rijoperaties

Volgende drie operaties op vergelijkingen van stelsels *veranderen de oplossingsverzameling van het stelsel niet*:

(a) ***Herschaling* van een vergelijking:** een vergelijking vermenigvuldigen met een reëel getal verschillend van nul.
Een voorbeeld maakt meteen duidelijk waarom dit de oplossingsverzameling niet verandert: de vergelijking $x-2y=5$ heeft immers precies dezelfde oplossingen (x,y) als de vergelijkingen $3x-6y=15$ en $-2x+4y=-10$. Pas wel op: vermenigvuldigen *met nul* mag natuurlijk niet, want dat zou de vergelijking doen verdwijnen en de oplossingsverzameling dus erg vergroten.

(b) **Twee vergelijkingen van plaats *verwisselen*:**
Het is duidelijk dat de volgorde van de vergelijkingen geen invloed heeft op de oplossingen.

(c) **Bij een vergelijking een veelvoud van een andere vergelijking *optellen*:**
We tonen eerst aan waarom een veelvoud van een andere vergelijking optellen geen oplossingen kan doen verdwijnen. Daarna tonen we aan dat er dan ook geen oplossingen kunnen bijkomen.

(i) Als (x_0, y_0) een oplossing is van $\begin{cases} x-2y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$
en we tellen bij de eerste vergelijking bijvoorbeeld twee keer de tweede op:

$$(x-2y)+2(x+y)=5+2\cdot 1 \text{ of dus } 3x+0y=7$$

dan is (x_0, y_0) ook een oplossing van $\begin{cases} 3x+0y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$
Dus elke oplossing van het oorspronkelijke stelsel is ook oplossing van het nieuwe stelsel.

(ii) Maar is ook elke oplossing van het nieuwe stelsel een oplossing van het oorspronkelijke stelsel?
Ja, want de weg terug heeft volledig dezelfde structuur: als we van de nieuwe eerste rij de tweede rij (die ongewijzigd gebleven is) twee keer aftrekken bekomen we terug het oorspronkelijke stelsel.
De redenering van hierboven toont dus dat alle oplossingen behouden blijven.

Deze *operaties op vergelijkingen* van een stelsel komen overeen met zogenaamde *elementaire rijoperaties op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix* van het stelsel:

Definitie 4.6.1. Volgende operaties op de rijen van matrices noemen we **elementaire rijoperaties**:

Herschaling	Vermenigvuldigen een rij met een getal verschillend van nul	$R_i \to aR_i, a \neq 0$
Verwisseling	Verwissel twee rijen van plaats	$R_i \leftrightarrow R_j$
Combinatie	Tel bij een rij een veelvoud van een andere rij op	$R_i \to R_i + aR_j$

Uit bovenstaande uitleg blijkt dus volgende eigenschap:

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Eigenschap 4.6.1. Het toepassen van elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix van een stelsel verandert de oplossingsverzameling van het stelsel niet.

Opmerking 4.6.1.

(a) Door een herschaling en een combinatie na elkaar uit te voeren kan je een rij ook vervangen door een niet-nul veelvoud van die rij waarbij een veelvoud van een andere rij wordt opgeteld: $R_i \to aR_i + bR_j, a \neq 0$. Men noemt deze operatie soms ook een (niet-elementaire) rijoperatie.

(b) Soms gebruikt men voor de rijoperaties eerder de omgekeerde pijl $R_i \leftarrow aR_i$. Die notatie geeft duidelijker aan dat de inhoud van rij R_i vervangen wordt door nieuwe getallen aR_i.

Omdat rijoperaties de oplossingsverzameling niet veranderen, kunnen we proberen de matrix – en dus het stelsel – te vereenvoudigen tot een vorm waarop die oplossingsverzameling direct kan worden afgelezen.

Voorbeeld 4.6.1. Beschouw het stelsel $S: \begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$

met als uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

We vereenvoudigen nu de matrix, en dus het stelsel, via een adhoc toepassing van de rijoperaties. Later leggen we een systematische methode uit, maar de strategie is steeds om nullen te creëren in de matrix.

De tweede rij met drie vermenigvuldigen (een herschaling) geeft

$$\xrightarrow{R_2 \to 3R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 3 & -6 & 6 & 9 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

en dan levert bij de tweede rij de eerste rij optellen (een optelling) extra nullen in de tweede rij:

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Deze twee elementaire operaties samen kunnen beschouwd worden als één (niet elementaire) operatie: vervang rij 2 door 3 maal zichzelf plus rij 1.

Op dezelfde manier levert rij 3 vervangen door 3 maal zichzelf plus 2 maal rij 1:

$$\xrightarrow{R_3 \to 3R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{array}\right]$$

Pas op: je mag *nooit* een rij vervangen door 0 maal zichzelf en een veelvoud van een andere rij, want dan zou je de rij eigenlijk gewoon weggooien.

Tenslotte delen we de tweede rij door 5, en de derde rij door 13:

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_3/13]{R_2 \to R_2/5} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Stelsels: oplossen via echelonvorm

en tellen bij de derde rij -1 keer rij 2 op:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

en we bekomen dus het gelijkwaardige maar veel eenvoudigere stelsel

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{array}\right.$$

Dit stelsel is door 'puur nadenken' op te lossen:
voor willekeurige waarden voor t, v en w vinden we de bijhorende u en s als

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & 1 - 2v + 2w \\ -3s & = & 5 - 6t + u - v + 7w = 5 - 6t + 1 - 2v + 2w - v + 7w \end{array}\right.$$

dus

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & 1 - 2v + 2w \\ -3s & = & 6 - 6t - 3v + 9w \end{array}\right. \quad \text{of} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u & = & 1 - 2v + 2w \\ s & = & -2 + 2t + v - 3w \end{array}\right.$$

en dus

$$\mathrm{Opl}(S) = \left\{ (-2 + 2t + v - 3w, t, 1 - 2v + 2w, v, w) \in \mathbb{R}^5 \mid t, v, w \in \mathbb{R} \right\}$$

Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die afhangen van drie parameters t, v en w.

4.6.2 Eliminatiemethode van Gauss

Het doel van de eliminatiemethode van Gauss is om een stelsel om te vormen tot een eenvoudiger gelijkwaardig stelsel, dus zonder iets te veranderen aan de oplossingsverzameling. De meest eenvoudige vorm waarin *elk stelsel* kan worden gebracht is de zogenaamde *rijcanonieke* of *gereduceerde rijechelonvorm*:

Definitie 4.6.2. Een matrix is in **rijcanonieke vorm** of **gereduceerde rijechelonvorm** als:

(a) het eerste niet-nul element in een rij is steeds 1. Dergelijk element noemt een **spil** (Engels: pivot).

(b) boven en onder elke spil staan enkel nullen.

(c) voor elke spil geldt dat de spil van een *lagere* rij steeds verder naar *rechts* staat.

(d) nulrijen staan onderaan staan (als er zijn).

Opmerking 4.6.2.

- Het begrip echelonvorm bestudeer je best aan de hand van voorbeelden. Het is daarbij in het begin nuttig de spilelementen te *omcirkelen*.
- De derde regel leidt tot de kenmerkende (dalende) *trap*- of echelonvorm met de spilelementen.
- Er bestaat ook een (meer algemene, dus niet noodzakelijk *gereduceerde*) *rijechelonvorm*: dan vervalt de voorwaarde dat *boven* de spil nullen moeten staan en (meestal) dat de spillen 1 moeten zijn. Zowel met de gereduceerde als met de niet-gereduceerde vorm kunnen stelsels worden opgelost: de niet-gereduceerde echelonvorm is sneller te berekenen, maar dan vraagt het vinden van de oplossingen nog wat extra rekenwerk. De gereduceerde echelonvorm is initieel wat meer rekenwerk, maar dan zijn de oplossingen direct wel af te lezen.

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Voorbeeld 4.6.2. Voorbeelden (met $*$ willekeurige getallen, al dan niet 0) :

Rijcanoniek:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Niet rijcanoniek:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 1 & \textcircled{1} & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{2} & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 7 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oefening 4.6.1. Staan volgende matrices in rijcanonieke vorm (of ook: gereduceerde echelonvorm) ?

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Nee

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Nee

5. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Nee

6. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja

Elke matrix kan je met behulp van elementaire rijoperaties in rijcanonieke vorm brengen.

Voorbeeld 4.6.3. In Voorbeeld 4.6.1 toonden we een adhoc techniek: op één element na worden alle elementen van een *kolom* gelijk gemaakt aan 0. Dit noemen we het *schoonvegen van een kolom*.

In dat voorbeeld werden in de *eerste kolom* alle elementen nul gemaakt behalve het element links boven (dat zelf verschillend was van nul) door de andere rijen te herschalen en een gepast veelvoud van de eerste rij daarvan af te trekken.

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Het **algoritme van Gauss** veegt achtereenvolgens verschillende kolommen van de matrix [**A b**] schoon. Hiervoor gebruiken we in elke stap een van nul verschillend zogenaamd *spilelement*, dat telkens dezelfde rol zal spelen als het element links boven in voorbeeld 4.6.1.

Het volstaat dan om nog uit te leggen hoe in de volgende stappen telkens een nieuwe spil gekozen moet worden om van deze methode een volwaardig algoritme te maken. Welnu, een nieuwe spil wordt eerst en vooral steeds gezocht in de deelmatrix *onder en rechts* van de vorige spil. Bij het zoeken van de eerste spil is deze deelmatrix de gehele matrix. Als we verder werken op voorbeeld 4.6.1, bekijken we dus de volgende matrix die we bekomen hadden maar dan zonder de eerste rij en de eerste kolom, als volgt:

uit $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$ halen we de deelmatrix $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$

In deze deelmatrix zoeken we *de eerste kolom die niet volledig uit nullen bestaat*. In het voorbeeld is dat de tweede kolom van de 2×5 deelmatrix. We kiezen het bovenste niet-nul element, 5, als spil en vegen daarmee de hele derde kolom van de totale matrix schoon, zowel boven als onder de spil. Hiertoe combineren we zowel de eerste als de derde rij met de tweede om boven en onder de 5 een nul te bekomen als volgt.

We nemen terug de volledige matrix (en niet de deelmatrix, die enkel diende om de nieuwe spil te bepalen):

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Door bij elke rij een geschikt veelvoud op te tellen van de spilrij, kunnen we de spilkolom 'schoonvegen'. Rij 1 vervangen door vijf maal zichzelf plus rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Rij 3 vervangen door 5 maal zichzelf min 13 maal rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Merk op dat bij het schoonvegen van de derde kolom de nullen die we al bekomen hadden in de eerste twee kolommen niet gewijzigd zijn.

De matrix heeft dan de gewenste trapvorm. Via een herschaling van rij 1 en rij 2 zorgen we tenslotte nog dat het eerste element van de niet-nulrijen een 1 is: Dit levert

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze matrix is in rijcanonieke vorm.

Merk op dat in de bovenstaande afleiding geen rijverwisselingen voorkwamen, enkel herschalingen en optellingen. Veronderstel echter dat we volgende deelmatrix hadden gevonden:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Dan is de tweede kolom van de deelmatrix nog steeds de eerste niet-nulkolom. Maar het eerste niet-nulelement, 13, staat dan niet bovenaan. In zo'n geval moet de rij van de nieuwe spil door een verwisseling net onder de rij van de vorige spil gebracht worden om tot een echte trapvorm te komen. Dus zouden we in dit voorbeeld rij 2 met rij 3 moeten verwisselen.

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Opmerking 4.6.3. Elementaire rijoperaties kan je best noteren als volgt: teken een pijl naar rechts naar de nieuwe matrix, en schrijf boven die pijl de rijoperatie(s) die je toepast, in de vorm $R_2 \to R_2 + 4R_3$ als je rij 2 vervangt door rij 2 plus 4 keer rij 3. Dus eerst de rij waarop je een operatie toepast, gevolgd door een pijl en de operatie:

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 5R_3} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 65 & 130 & -130 & 65 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 13R_2} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Je kan deze twee operaties ook in één stap doen, om schrijfwerk te besparen: hiervoor zijn er twee mogelijke schrijfwijzes: allereerst kan je de twee operaties apart opschrijven:

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 13R_2]{R_3 \to 5R_3} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Of je kan beide operaties samenvatten in één operatie als volgt. Dit is echter wel geen *elementaire* rijoperatie meer, maar een combinatie van elementaire rijoperaties.

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 5R_3 - 13R_2} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In het algemeen kan voor *elke* matrix een equivalente rijcanonieke matrix worden berekend door van linksboven naar rechtsonder steeds kleinere deelmatrices te beschouwen:

Algoritme 4.6.1 (Gausseliminatie/berekening echelonvorm/spilmethode voor een niet-nul-matrix)**.**

(beginstap)	Noem de gehele matrix de (eerste) *deelmatrix*.
(kies spilkolom)	Noem *spilkolom* de meest linkse niet-volledig-nul-kolom van de *deelmatrix*.
(maak spilelement)	Maak bovenste element van de *deelmatrix* in de *spilkolom* een *spilelement*, dit betekent: verwissel eventueel rijen zodat dat element zeker niet-nul is.
(schoonvegen spilkolom)	Veeg met *het spilelement* de hele *spilkolom* schoon, i.e. maak nullen door rijen te herschalen en er een veelvoud van de spilrij bij op te tellen. Doe dit voor *alle rijen*, en niet alleen voor de rijen van de *deelmatrix*.
(bijna klaar?)	Als je helemaal rechts-onder bent in de oorspronkelijke matrix ga je naar (eindstap)
(nieuwe deelmatrix) (bijna klaar?)	Kies als nieuwe *deelmatrix* alles rechts-onder het huidige *spilelement*. Als de *deelmatrix* volledig uit nullen bestaat, ga je direct naar (eindstap).
(volgende ronde)	Ga met deze nieuwe *deelmatrix* terug naar de stap (kies spilkolom).
(eindstap)	Maak tenslotte alle spilelementen 1 door elke rij met een spil te delen door die spil.

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Opmerking 4.6.4.

- Door de verwisselingen in stap (maak spilelement) komen de nulrijen automatisch onderaan terecht.
- Je mag ook andere procedures volgen om tot een echelonvorm te komen. Men kan bewijzen dat je *steeds dezelfde rijcanonieke vorm* bekomt voor een gegeven matrix.
- Merk op dat het algoritme zegt om per spil een volledige kolom 'in één keer' schoon te vegen. Je past dus meerdere rijoperaties in één keer toe. Je moet wel voorzichtig zijn: dat mag hier omdat je alleen maar *veelvouden van de spilkolom* bijtelt.
  Als je ook veelvouden van andere rijen neemt, bekom je mogelijk onzin:

$$\text{Juist: } \begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_3\to R_3-R_1} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&2\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{Fout: } \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_1\to R_1-R_2} \begin{bmatrix}0&-1\\0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2+R_1]{R_1\to -R_1} \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} : \textit{fout!}$$

Bij een uitgebreide matrix in *rijcanonieke vorm* kan je de oplossing van een stelsel direct *aflezen*:

Eigenschap 4.6.2 (Oplossingen van een stelsel in rijcanonieke vorm)**.**

Voor een stelsel S met uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}&\mathbf{b}\end{array}\right]$ *in rijcanonieke vorm* geldt:

- De **spilkolommen** zijn de kolommen die een spil bevatten .
- De **hoofdonbekenden** of **gebonden onbekenden** zijn de onbekenden die horen bij een spilkolom , de andere onbekenden zijn de **nevenonbekenden** of **vrije onbekenden**.
- Het *aantal* oplossingen van het stelsel hangt af van de *plaats* van de spilelementen:
  - *de laatste kolom* bevat een spil: er is **geen oplossing**.
    Inderdaad, het stelsel is *strijdig*, want
    een rij $\begin{bmatrix}0&\dots&0&1\end{bmatrix}$ komt overeen met de strijdige vergelijking $0x_0 + \dots 0x_n = 1$.
  - *elke kolom behalve de laatste* bevat een spil: er is een **unieke oplossing**.
    Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met $b_i \in \mathbb{R}$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&b_1\\0&1&0&b_2\\0&0&1&b_3\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

    en de overeenkomstige vergelijkingen geven dus direct de unieke oplossing: $x_i = b_i$.
  - in alle andere gevallen: er zijn **oneindig veel oplossingen**.
    Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met de b_i en * willekeurige getallen)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}1&*&0&*&0&*&b_1\\0&0&1&*&0&*&b_2\\0&0&0&0&1&*&b_3\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

    Bij elke willekeurige keuze van de *vrije* onbekenden, hoort dan precies één set waarden voor de gebonden variabelen die een oplossing opleveren voor het stelsel. De *vrije onbekenden*

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Stelsels: oplossen via echelonvorm

spelen de rol van *parameters* van de oplossingsverzameling, vandaar hun naam. Het aantal vrije onbekenden noemt men ook het **aantal vrijheidsgraden** of de **dimensie** van de oplossingsverzameling.

Merk op: voor een *homogeen* stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ is een unieke oplossing altijd de nulvector $\mathbf{x} = 0$. Dus, voor een *homogeen* stelsel is een unieke oplossing meestal geen interessante oplossing.

Voorbeeld 4.6.4. [Vervolg van Voorbeeld 4.6.3]

In het vorige voorbeeld berekenden we voor een bepaald stelsel de rijcanonieke vorm

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Voor dit stelsel zijn de *eerste* en de *derde* kolom de *spilkolommen*: s en u zijn dus gebonden onbekenden, en t, v en w vrije onbekenden.

Bij elke willekeurige keuze van vrije onbekenden t, v, w vinden we precies één set van waarden voor de gebonden onbekenden s en u. Als we t, v, w *vrij* kiezen als

$$t = a, \quad v = b, \quad w = c,$$

met a, b, en c willekeurige reële getallen, dan ligt de waarde van de gebonden onbekenden vast om een oplossing te hebben voor het stelsel: de *gebonden variabelen* hebben dus een waarde die *gebonden* is aan de vrije keuzes voor de waarden van de vrije variabelen. De gebonden variabelen zullen dus uitdrukkingen worden in de *parameters* a, b en c. Elk van de vergelijkingen in de rijcanonieke vorm

$$\begin{cases} s & -2t & & -v & +3w & = -2 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{cases}$$

bevat immers precies één van de gebonden onbekenden, die we daar telkens uit kunnen 'berekenen in functie van de vrije onbekenden':

$$\begin{cases} s & = & -2 & +2a & +b & -3c \\ u & = & 1 & & -2b & +2c \end{cases}$$

Samen levert dat de volledige oplossing

$$(s, t, u, v, w) = (-2 + 2a + b - 3c, a, 1 - 2b + 2c, b, c)$$

of

$$(s, t, u, v, w) = (-2, 0, 1, 0, 0) + a(2, 1, 0, 0, 0) + b(1, 0, -2, 1, 0) + c(-3, 0, 2, 0, 1)$$

met a, b en c willekeurige reële getallen. De oplossingsverzameling is dus

$$\mathrm{Opl}(S) = \left\{(-2 + 2a + b - 3c, a, 1 - 2b + 2c, b, c) \in \mathbb{R}^5 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Opmerking 4.6.5. Het is niet strikt nodig om te schrijven dat $t = a, v = b, w = c$ voor willekeurige $a, b, c \in \mathbb{R}$. Het is voldoende te realiseren dat t, v, w vrije onbekenden zijn, en dus eender welke reële waarde kunnen aannemen: je kan dan even goed zeggen dat $t, v, w \in \mathbb{R}$ willekeurig. Let op: voor de gebonden onbekenden geldt ook $s, u \in \mathbb{R}$, maar *niet* willekeurig, aangezien ze afhangen van de vrije variabelen! Je kan de oplossingsverzameling dus ook schrijven als

$$\mathrm{Opl}(S) = \left\{(-2 + 2t + v - 3w, t, 1 - 2v + 2w, v, w) \in \mathbb{R}^5 \mid t, v, w \in \mathbb{R}\right\}.$$

Dikwijls is het echter wel handiger om elke vrije onbekende gelijk te stellen aan een parameter, en

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Stelsels: oplossen via echelonvorm

dus nieuwe letters te kiezen die voor willekeurige reële getallen staan, zoals in voorbeeld 4.6.4. Het aantal vrijheidsgraden in de oplossing wordt dan duidelijker.

We sluiten af met twee voorbeelden.

Voorbeeld 4.6.5. De uitgebreide matrix van het homogene stelsel

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 0 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 0 \end{cases}$$

is $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right]$.

Dit stelsel heeft dus dezelfde matrix $\mathbf{A}$ als voorbeeld 4.6.1, maar het rechterlid is 0. De oplossingsmethode verloopt volledig analoog, alleen bestaat de laatste kolom van de uitgebreide matrix uit nullen. *Dergelijke nulkolom blijft onveranderd doorheen de verschillende rijoperaties!* De rijcanonieke vorm is dan ook dezelfde, op de laatste kolom na. De oplossingen zijn

$$(s,t,u,v,w) = a(2,1,0,0,0) + b(1,0,-2,1,0) + c(-3,0,2,0,1), \text{ met } a,b,c \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld 4.6.6. Het stelsel

$$\begin{cases} u & + & v & = & 5 \\ u & - & v & = & 1 \\ u & - & 2v & = & -1 \end{cases}$$

heeft als uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$ met als rijcanonieke vorm $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Alle kolommen behalve de laatste hebben een spil en er is dus een unieke oplossing die onmiddellijk kan worden afgelezen: $(u,v) = (3,2)$. Het overeenkomstige gereduceerde stelsel is immers

$$\begin{cases} u & & = & 3 \\ & v & = & 2 \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Stelsels: met parameters

In veel toepassingen zijn niet alle coëfficiënten van een stelsel concrete getallen, maar komen ook zogenaamde *parameters* voor. De oplossingen van het stelsel hangen dan af van die parameter, en in het bijzonder kan het *aantal* oplossingen afhangen van de parameter.

Een stelsel met parameters bevat behalve onbekenden met typisch letters zoals $x, y, x_1, \ldots$ ook zogenaamde *parameters* met letters zoals $a, b, m, n, \lambda, \ldots$ die een bekende maar variabele grootheid voorstellen. De oplossingen van een stelsel met parameters zijn geen *getallen*, maar *uitdrukkingen waarin de parameters voorkomen*. Pas als je de parameters vervangt door concrete getallen bekom je een concreet stelsel met ook concrete getallen als uitkomst.

Voorbeeld 4.7.1.

1. Zoek getallen x en y waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Dit leidt tot het stelsel $\begin{cases} x+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$ met oplossing $(3,2)$. (Oefening).

2. Zoek getallen x en y waarvan de som 6 is en het verschil 2.

Uitwerking: Dit leidt tot het stelsel $\begin{cases} x+y &= 6 \\ x-y &= 2 \end{cases}$ met oplossing $(4,2)$. (Oefening).

3. Zoek getallen x en y waarvan de som a is en het verschil b.

Uitwerking: Dit leidt tot het stelsel $\begin{cases} x+y &= a \\ x-y &= b \end{cases}$.

Je kan dit stelsel oplossen *alsof* a en b getallen zijn: de tweede vergelijking zegt dat $x = y + b$ en als je de x in de eerste vergelijking vervangt door $y + b$ levert dat $(y + b) + y = a$, of $y = \dfrac{a-b}{2}$. En dus is $x = y + b = \dfrac{a-b}{2} + b = \dfrac{a+b}{2}$.

De oplossing van het stelsel $\begin{cases} x+y &= a \\ x-y &= b \end{cases}$ is dus het koppel $(x, y) = \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right)$.

Merk op dat je de twee vorige opgaven nu kan oplossen door de respectivielijk $(a, b) = (5, 1)$ en $(a, b) = (6, 2)$ in te vullen in de algemene formule $(x, y) = \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right)$.

Het is dikwijls sneller één stelsel met parameters op te lossen dan meerdere individuele stelsels, en soms is het zelfs noodzakelijk om met parameters te kunnen werken. Dikwijls treedt er wel een complicatie op: sommige waarden van de parameters doen vervelend en moeten apart worden beschouwd. Dit leidt tot het zogenaamd *gevalsonderscheid* dat we verder bespreken.

Een stelsel met een parameter a oplossen is alsof je niet één stelsel oplost, maar oneindig veel stelsels tegelijk. Elke concrete keuze voor de parameter a betekent een nieuw stelsel en de parameter a komt dan typisch ook voor in de oplossing.

Voorbeeld 4.7.2. Bepaal de oplossingen van het stelsel $\begin{cases} ax+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$ met $a \in \mathbb{R}$ een parameter.

Uitwerking: Dit eenvoudig stelsel kan direct worden opgelost door de laatste vergelijking te schrijven als $x = 1 + y$, en die uitdrukking te substitueren in de eerste vergelijking: $a(1 + y) + y = 5$, en dus $(a + 1)y = 5 - a$ of $y = \dfrac{5-a}{1+a}$. Deze waarde invullen in de tweede vergelijking levert $x - \dfrac{5-a}{1+a} = 1$, of $x = \dfrac{6}{1+a}$.

We zijn geneigd te concluderen dat het stelsel als unieke oplossing het koppel $(x, y) = \left(\dfrac{6}{1+a}, \dfrac{5-a}{1+a}\right)$ heeft.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Stelsels: met parameters

Dit is bijna juist, maar voor de waarde $a = -1$ stelt zich een ernstig probleem, want dan wordt de noemer nul, en de voorgestelde oplossingen onbepaald of oneindig. We onderzoeken de situatie door expliciet het stelsel op te schrijven voor de vervelende waarde $a = -1$:

$$\begin{cases} -x+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}, \quad \text{of} \quad \begin{cases} x-y &= -5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$$

en zien onmiddellijk wat de oplossing zou moeten zijn: dit stelsel is strijdig, want $x-y$ kan onmogelijk tegelijk gelijk zijn aan -5 en aan 1.

Oplossing: het stelsel $\begin{cases} ax+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$ heeft voor elke waarde van a een unieke oplossing, namelijk $(x,y) = \left(\frac{6}{1+a}, \frac{5-a}{1+a}\right)$, *behalve* voor de waarde $a = -1$. Als $a = -1$ geeft het stelsel geen oplossingen.

Concreet krijgen we voor $a = 2$ het stelsel $\begin{cases} 2x+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$ en de algemene oplossing $(x,y) = \left(\frac{6}{1+a}, \frac{5-a}{1+a}\right)$ wordt in dat geval $(x,y) = \left(\frac{6}{1+2}, \frac{5-2}{1+2}\right) = (2,1)$.

Conclusie: het oplossen van stelsels met een parameter verloopt erg gelijkaardig als het oplossen van gewone stelsels zonder parameters, maar voor sommige waarden van de parameter(s) kunnen er speciale gevallen optreden. Dit zal bijna steeds leiden tot gevalsonderscheid. Een slimme keuze van de oplossingsmethode kan dergelijke gevalsonderscheid soms erg vereenvoudigen.

Volgende strategie werkt voor lineaire stelsels met parameters, maar kan worden uitgebreid naar meer algemene problemen met parameters:

Beschouw de parameter als een willekeurig getal,
en pas met de nodige voorzichtigheid de gewone oplossingsmethode toe.

De nodige voorzichtigheid betekent onder meer dat je bij een stelsel met gewone getallen onmiddellijk kan zien of een element een kandidaat spil is, maar als het element een parameter bevat moet je eerst nagaan of het element al dan niet nul is. Je mag een rij ook enkel herschalen met een getal als je zeker bent dat dat getal niet nul is, want anders gooi je een vergelijking gewoon weg. In het algemeen moeten bijvoorbeeld ook delen door nul en vierkantswortels of logaritmen van negatieve getallen met de nodige zorg worden vermeden.

Voorbeeld 4.7.3. Welke van volgende matrices staan in (niet noodzakelijk gereduceerde) echelonvorm ?

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & a^4+4 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \textcircled{a^2+1} & * & * \end{bmatrix},$$ altijd echelon

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{a+1} & * \end{bmatrix},$$ echelon, ander type als $a = -1$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{a+1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix},$$ geen echelon als $a = -1$

CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Stelsels: met parameters

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ a^2-1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{1} & a^2-1 & * & * & 0 & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \end{bmatrix}, \quad \text{geen echelon als } a \neq \pm 1$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{a^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{a^2-1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \end{bmatrix}, \quad \text{geen echelon als } a = \pm 1$$

Bij het oplossen denk je dus 'generiek', dit betekent dat al wat je doet moet werken zonder enige voorwaarde op je parameter. Zodra je iets doet dat toch afhangt van de waarde van de parameter, moet je gevalsonderscheid maken en je oplossing opsplitsen over de verschillende relevante gevallen. Je beschouwt vervolgens elk geval apart. Het is best mogelijk dat je verderop opnieuw een gevalsonderscheid moet maken. In het algemeen krijgt je oplossing een boomstructuur. Als je alle gevallen hebt behandeld, vat je ze overzichtelijk samen in je einduitkomst. Soms kan je daarbij aparte paden in je boomstructuur toch weer samennemen.

Wanneer kan je met een parameter zonder meer rekenen alsof het een getal is?

De methode van Gauss bestaat uit de eenvoudige stappen schalen, verwisselen en combineren. In volgende voorbeelden heeft de waarde van de parameter a geen belang: de operatie is steeds geldig:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-3a \end{bmatrix} \text{ of}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^2+1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (a^2+1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a^3-a \end{bmatrix} \text{ of}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - aR_1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a^2 \end{bmatrix}$$

Merk op dat de waarde van a in geen van de gevallen de *geldigheid* van de operatie $R_i \to R_i + \lambda R_j$ bepaalt. In het bijzonder mag $\lambda = 0$. Het *resultaat* hangt natuurlijk wel af van a, en de matrix $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-3a \end{bmatrix}$ heeft een nulrij als $a = \frac{1}{3}$, en echelonvorm $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ voor alle andere waarden van a.

Wanneer moet je gevalsonderscheid maken ?

Soms hangt 'de volgende stap die we willen of mogen zetten' af van de concrete waarde van de parameter:

De operatie $\begin{bmatrix} a-2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{a-2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{a-2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ is ongeldig als $a = 2$, want dan deel je door nul. De keuze voor $a-2$ als spil is ook enkel geldig als $a \neq 2$.

Er zijn twee opties om deze moeilijkheid op te lossen:

CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Stelsels: met parameters

Optie 1: maak onmiddellijk gevalsonderscheid $a = 2$ of $a \neq 2$

$$\text{Als } a \neq 2: \quad \begin{bmatrix} a-2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{a-2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{a-2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{a-2} \\ 0 & \frac{3a-8}{a-2} \end{bmatrix}$$

$$\text{- en als ook: } a \neq \tfrac{8}{3} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a-2} \\ 0 & \frac{3a-8}{a-2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - \lambda R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{- en als ook: } a = \tfrac{8}{3} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\frac{8}{3}-2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Als } a = 2: \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hierbij is het geval $a = 2$ blijkbaar niet echt relevant want de echelonvorm is altijd de eenheidsmatrix behalve voor $a = \frac{8}{3}$. Je hebt *twee keer* gevalsonderscheid gemaakt waarbij achteraf de uitkomsten blijken te *overlappen*. Inderdaad, de uitkomsten voor 'Als $a \neq 2$, en als ook $a \neq \frac{8}{3}$' en 'Als $a = 2$' zijn gelijk, en kunnen veel eenvoudiger en begrijpelijker worden uitgedrukt door 'Als $a \neq \frac{8}{3}$'. Deze complexiteit wordt vermeden bij de volgende optie, die in dit geval veel handiger is.

Optie 2: stel het gevalsonderscheid uit door eerst de rijen te wisselen

In dit geval is dat veel sneller:

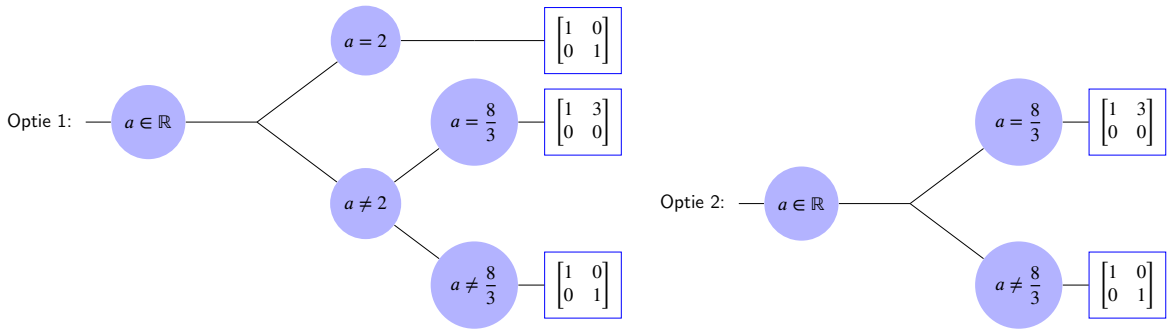
$$\begin{bmatrix} a-2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ a-2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - (a-2)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3a+8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Geval } a \neq \frac{8}{3}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3a+8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - xR_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Geval } a = \frac{8}{3}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3a+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

waarbij nu niet meerdere gevalsonderscheiden moeten worden gemaakt.

Schematisch zien de oplossingsstrategieën er uit als volgt:



en het vraagt wat denkwerk om in te zien dat het eindresultaat van beide schema's identiek is. In oefeningen is het belangrijk je eindresultaat niet onnodig complex weer te geven, en het schema voor optie 1 voldoet dus *niet* als *eind*resultaat.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Stelsels: met parameters

Opmerking 4.7.1. Aandachtspunten bij stelsels met parameters:

- **Vermijd altijd delen door nul.** Deel enkel door $a-1$ als $a \neq 1$, delen door a^2+1 mag altijd.
- **Vermijd altijd een rij te herschalen met nul.** Nul keer een andere rij optellen mag wel.
- **Probeer gevalsonderscheid uit te stellen.** Je kan bijvoorbeeld slim rijen verwisselen en een spil kiezen waar de parameter niet in voorkomt.
- Let op: soms is het toch nuttig **een speciaal geval onmiddellijk apart te behandelen**. Behandel bijvoorbeeld eerst $a = 2$, en neem dan in het algemene geval steeds aan dat $a \neq 2$.
- Merk op: soms wil je enkel weten voor welke parameterwaarden er meer of minder oplossingen zijn dan 'normaal' en worden de oplossingen zelf niet eens gevraagd.
- Het *oplossen voor het stelsel voor alle waarden van de parameter(s)* noemt men ook het **bespreken van het stelsel**.
- In een zogenaamd *algemeen stelsel* $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ zijn *alle* getallen vervangen door parameters. Je zou een 'algemene oplossing' van zo'n stelsel kunnen opstellen om dan door het invullen van parameters de oplossing te vinden van elk concreet stelsel zonder dat stelsel zelf te moeten oplossen. De prijs die je hiervoor betaalt is echter de complexiteit en de vele gevalsonderscheiden in de 'algemene oplossing', en de methode is hier niet nuttig: je lost toch sneller individuele stelsels op.

  Maar de situatie is anders bij de 'algemene kwadratische vergelijking' $ax^2+bx+c=0$ met één onbekende en drie parameters, waarbij je wel elke 'concrete' kwadratische vergelijking $x^2+2x+3=0$ oplost door de parameters $a=1, b=2, c=3$ in te vullen in de 'algemene oplossing' $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
- Het gebruik van letters $x, y, \ldots$ voor onbekenden en $a, b, k, l, m, n, p, \lambda, \ldots$ is historisch gegroeid, maar niet in steen gebeiteld. In wetenschappelijke problemen kan het voorkomen dat een stelsel zoals $\begin{cases} ax+by=2 \\ x+y=b \end{cases}$ wordt opgesteld als een stelsel in onbekenden x en y, met parameters a en b, maar dat het probleem zelf eigenlijk wordt opgelost door datzelfde stelsel even later te beschouwen als een stelsel $\begin{cases} xa+yb=2 \\ 0a+1b=x+y \end{cases}$ in onbekenden a en b, met parameters x en y.

Oefening 4.7.1. Duid steeds de meest algemene correcte voorwaarde aan.

1. $\begin{cases} x+y=a \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als

$a \neq 1$

2. $\begin{cases} x+y=a^2 \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als

$a \neq \pm 1$

3. $\begin{cases} x+y=a \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft een unieke oplossing als

nooit

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

4.7 Stelsels: met parameters

4. $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ heeft een unieke oplossing als $a \neq 1$

5. $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als nooit

6. $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ heeft oneindig veel oplossingen als $a = 1$

7. $\begin{cases} ax + ay = a \\ x + y = 1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als nooit

Samengevat levert dat volgende strategie op:

Algoritme 4.7.2. Bij het oplossen van stelsels met parameters

- pas je de 'gewone' oplossingsmethode toe, **met de nodige voorzichtigheid**.
- denk je daarbij '**generiek**', dus alsof de parameter(s) *willekeurige* getallen zijn.
- zorg je dat een **kandidaat spil zeer zeker verschillend is van nul**:
  - je kandidaat-element is een niet nul getal
  - je kandidaat-element bevat de parameter, maar kan onmogelijk nul zijn (bv $e^a, a^2 + 1$)
  - indien mogelijk verwissel je rijen zodat bovenstaande geldt
  - indien nodig maak je gevalsonderscheid voor bepaalde waarden van de parameter(s).

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

4.8 Stelsels: inverse matrix via echelon

Als je meerdere stelsels moet oplossen met telkens *dezelfde matrix* $\mathbf{A}$ maar met telkens *verschillende rechterleden* $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots$, dan is het gemakkelijker te werken met een (uitgebreide...!) uitgebreide matrix $[\mathbf{A}|\mathbf{b_1}\ \mathbf{b_2}\ \cdots]$ waarbij je in één keer *alle* rechterleden toegevoegd. Op die manier pas je de rijoperaties die $\mathbf{A}$ in echelonvorm brengen *tegelijk* toe op alle rechterleden, en dat bespaart rekenwerk.

Voorbeeld 4.8.1. Los volgende stelsels op:

$$S_1 : \begin{cases} u + v = 4 \\ u - v = 2 \\ u - 2v = 2 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 1 \\ u - 2v = -1 \end{cases} \text{ en } \quad S_3 : \begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 0 \\ u - 2v = 0 \end{cases}$$

We stellen vast dat enkel de constante termen verschillen, en maken daarom één uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{A} & \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \mathbf{b_3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

met echelonvorm

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 6 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Om nu de oplossingenverzamelingen van de drie stelsels af te lezen, volstaat het rechts van de verticale streep enkel rekening houden met de kolom horend bij het juiste stelsel. Om de oplossingen van stelsel S_2 te bepalen kijken we bijvoorbeeld naar de matrix:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

En analoog voor de andere stelsels. We lezen dus af dat $\text{Opl}\, S_1 = \emptyset$, $\text{Opl}(S_2) = \{(3,2)\}$ en $\text{Opl}(S_3) = \emptyset$.

Merk op dat het niet nuttig is kolommen schoon te vegen in het deel met de rechterleden $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$,....

Met deze methode kan je ook de *inverse berekenen* van een inverteerbare matrix. De inverse van een gegeven inverteerbare (en dus vierkante!) matrix $\mathbf{A}$ is een matrix $\mathbf{X}$ zodat

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I} \quad \text{met } \mathbf{I} \text{ de eenheidsmatrix.}$$

Men kan bewijzen dat voor *vierkante* matrices $\mathbf{A}$ een oplossing van $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ automatisch ook voldoet aan $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$.

Omdat de i-de kolom van het matrixproduct $\mathbf{AX}$ gelijk is aan $\mathbf{A}$ maal de i-de kolom van $\mathbf{X}$, kunnen we $\mathbf{X}$ kolom per kolom bepalen door telkens het stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b_i}$ op te lossen met $\mathbf{b_i}$ de i-de kolom van de eenheidsmatrix.

De hierboven beschreven methode levert volgend algoritme voor het bepalen van de inverse matrix:

Eigenschap 4.8.1 (Berekening van de inverse matrix)**.**

Als $\mathbf{A}$ een inverteerbare matrix is, dan is de echelonvorm van de uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array}\right]$ gelijk

CC BY-NC-SA 4.0

4.8 Stelsels: inverse matrix via echelon

aan

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{array}\right]$$

en dit levert dus een algoritme om de *inverse matrix* $\mathbf{A}^{-1}$ van $\mathbf{A}$ te berekenen.

Als de matrix $\mathbf{A}$ een inverteerbare $n \times n$ matrix is, zijn de spilkolommen van $[\,\mathbf{A}\ \mathbf{I}\,]$ de eerste n kolommen. Zodra in één van deze kolommen geen spil kan gevonden worden is de matrix niet inverteerbaar.

Voorbeeld 4.8.2. Een matrix $\begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ zoeken zodat

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

komt neer op het oplossen van volgende stelsels:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

We bepalen de echelonvorm van

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

en dat levert (na enkele stappen)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

De inverse van $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ is dus $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Je kan zelf verifiëren dat inderdaad

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Als $\mathbf{A}$ inverteerbaar is, dan kan de oplossing van een stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ steeds berekend worden via $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Maar in de praktijk is eerst $\mathbf{A}^{-1}$ berekenen en dan $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ meestal meer werk dan de methode van Gauss toepassen. Behalve als je voor dezelfde matrix $\mathbf{A}$ erg veel stelsels met steeds verschillende rechterleden $\mathbf{b}$ moet oplossen. Dan kan het berekenen van de inverse $\mathbf{A}^{-1}$, en dan telkens het matrixproduct $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ toch sneller zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 5

Stelsels zonder matrices (FABER)

(Versie 2026/08/25H.56)

5.1 Stelsels: inleiding

We bespreken hier het oplossen van *stelsels van lineaire vergelijkingen*. Lineair betekent daarbij dat de onbekenden voorkomen *zonder machten* of meer ingewikkelde uitdrukkingen als wortels of sinussen. En stel of stelsel betekent dat de onbekenden aan *meerdere vergelijkingen tegelijk* moeten voldoen.

Dergelijke lineaire stelsels komen erg vaak voor bij allerlei problemen in de wiskunde, fysica, scheikunde, economie, en noem maar op. Telkens een aantal onbekende grootheden (afstanden, prijzen, gewichten, tijden, ...) moeten bepaald worden waarbij *lineaire* combinaties van die grootheden gekend zijn, leidt dat tot het oplossen van een lineair stelsel van vergelijkingen. En zelfs als de afhankelijkheden tussen de onbekende grootheden niet lineair zijn, blijven de technieken van de lineaire stelsels dikwijls toch erg nuttig.

5.1.1 Voorbeelden van lineaire stelsels

Voorbeeld 5.1.1.

1. Zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan in dit geval de gezochte getallen snel vinden door te *proberen*: de som moet 5 zijn, dus als we ons beperken tot natuurlijke getallen zijn de mogelijkheden $0+5$, $1+4$ of $2+3$. Enkel voor $2+3$ is het verschil 1, dus de oplossing is 2 en 3.
  In dit eenvoudige geval is het niet echt nuttig om onbekenden en stelsels op te schrijven. Maar zodra de voorwaarden wat ingewikkelder zijn, wordt *proberen* snel moeilijk en is *uitrekenen* meestal sneller.
- Als je toch een stelsel opschrijft, kan je in dit eenvoudige geval dat stelsel ook makkelijk oplossen. Als $x+y=5$ en $x-y=1$ dan is ook hun som gelijk: $(x+y)+(x-y)=5+1$. Deze laatste vergelijking reduceert zich echter tot $2x=6$ en dus $x=3$. Invullen dat $x=3$ in de eerste vergelijking $x+y=5$ levert $3+y=5$ of $y=2$.
  De methode voor het oplossen van stelsels is eigenlijk een veralgemening van dit eenvoudig trucje.

2. Zoek twee getallen waarvan de som 3.1415 is en het verschil 1.2345.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=3.1415$ en het verschil $x-y=1.2345$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan de getallen x en y nu veel minder makkelijk vinden door *proberen*.
- Je kan in dit eenvoudige geval het stelsel toch makkelijk oplossen met dezelfde methode als hiervoor: als $x+y=3.1415$ en $x-y=1.2345$ dan moet natuurlijk ook $(x+y)+(x-y)=3.1415+1.2345=4.3760$. Deze vergelijking reduceert zich tot $2x=4.376$ en dus $x=2.188$. Invullen van $x=2.188$ in de eerste vergelijking geeft $2.188+y=3.1415$ of $y=3.1415-2.188=1.9535$.
  Het oplossen van stelsels is eigenlijk een veralgemening van dit eenvoudig trucje.

3. Zoek drie getallen waarvan het grootste dubbel zo groot is als het kleinste, het middelste de helft is van de som van de twee anderen, en het gemiddelde 42 is.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Stelsels: inleiding

Uitwerking: Noem de gezochte getallen, geordend van groot naar klein, x, y en z. Dan weten we dat $x = 2z$, $y = \dfrac{x+z}{2}$ en $\dfrac{x+y+z}{3} = 42$, en zoeken dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases}$$

Definitie 5.1.1 (Lineair stelsel)**.**

Een **lineair stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden** is een stel van m lineaire vergelijkingen met in totaal n onbekenden. Dergelijk lineair stelsel noteren we als

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

met S de naam van het stelsel, a_{ij} de **coëfficiënten**, $x_1, \ldots, x_n$ de **onbekenden** en b_i de **rechterleden** of **constante termen**.

Een lineair stelsel is **homogeen** als alle constante termen nul zijn, dus alle $b_i = 0$.
Het aan S **geassocieerde homogene stelsel** is het stelsel waarbij de b_i vervangen zijn door 0.

Merk op: de term *rechterlid* is gebruikelijk in de wiskunde, en komt in veel cursussen voor, maar is eigenlijk verwarrend of zelfs misleidend: een vergelijking $x + y = 2$ kan natuurlijk ook geschreven worden als $x + y - 2 = 0$, maar $x + y - 2 = 0$ is *geen* homogene vergelijking, en volgens bovenstaande definitie is het 'rechterlid' gelijk aan 2. Het begrip 'rechterlid' slaat dus op vergelijkingen in standaardvorm: alle onbekenden in het linkerlid en de constante term rechts.

Voorbeeld 5.1.2. Het stelsel

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{cases}$$

is lineair met twee vergelijkingen in drie onbekenden x_1, x_2, x_3. Het aan S geassocieerde homogene stelsel is

$$S_o : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

De belangrijkste uitdaging bij dergelijke stelsels is om de letters x_i te vervangen door geschikte reële getallen zodat alle gelijkheden opgaan. We noemen dat het *oplossen van het stelsel* en de gevonden reële getallen zijn dan *oplossingen van het stelsel*.

We bespreken een wat uitgebreider voorbeeld van een lineair stelsel:

Voorbeeld 5.1.3. Bepaal alle reële getallen s, t, u, v, w waarvoor

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w &= 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w &= 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w &= 1 \end{cases}$$

Dit is een *lineair stelsel van drie vergelijkingen in vijf onbekenden*.

- Dit is de wiskundige weergave van een probleem waarbij we weten dat er tussen de vijf onbekende grootheden s, t, u, v, w drie lineaire verbanden bestaan. De uitdaging is *alle waarden* te vinden voor de onbekende grootheden die aan *alle* (lineaire) verbanden voldoen.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Stelsels: inleiding

- Een eerste technische herformulering bestaat erin om één *vector* te zoeken in plaats van vijf *getallen*: in plaats van 'zoek alle reële getallen s, t, u, v, w', zeggen we 'zoek alle vectoren $(s, t, u, v, w) \in \mathbb{R}^5$.

Oefening 5.1.1. Welke van de volgende stelsels zijn lineair in de onbekenden u en v?

1. Lineair $\begin{cases} 2u + v &= 5 \\ 4u + 2v &= 1 \end{cases}$

2. Lineair $\begin{cases} 2u + v &= 5 \\ 4u + 2v &= u \end{cases}$

3. Lineair $\begin{cases} 2u &= 5 \\ 2v &= 1 \end{cases}$

4. Lineair $\begin{cases} (u+2)u - u^2 &= 5 \\ 4u + 2v &= 1 \end{cases}$

Merk op dat de termen met u^2 wegvallen.

5. Niet lineair $\begin{cases} \sin(u) + \cos(v) &= 1 \\ \sin(u) - 2\cos(v) &= 1/2 \end{cases}$

6. Niet lineair $\begin{cases} u^2 + v &= 1 \\ -u^2 - 2v &= 2 \end{cases}$

7. Lineair $\begin{cases} au + 2v &= 5 \\ 4u + bv &= 1 \end{cases}$ (met $a, b \in \mathbb{R}$)

8. Lineair $\begin{cases} x^3 u + \cos(y)v &= 5 \\ 4u + x^3 v &= 1 \end{cases}$ (met $x, y \in \mathbb{R}$)

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

5.2 Stelsels: direct oplosbaar

Er bestaat een erg algemene maar soms verrassend efficiënte strategie om moeilijke problemen op te lossen: bedenk eerst een *eenvoudigere versie* van het probleem, en probeer dan alvast die eenvoudige versie op te lossen. Dat creëert enerzijds vertrouwdheid met het probleem, kan eventueel inspiratie opleveren voor een algemene oplossing en geeft mogelijk ook zelfvertrouwen om het moeilijke probleem steeds verder te doorgronden. In het ideale geval kan je het moeilijke probleem *reduceren* tot het eenvoudige geval. Voor het oplossen van lineaire stelsels blijkt deze strategie bijzonder geschikt te zijn.

Voorbeeld 5.2.1.

Los volgende stelsels op:

1. $S_1 = \left\{ \begin{array}{rcl} 1x & = & 2 \\ 1y & = & 4 \\ 1z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_1) = \{ (2,4,6) \}$ via gewoon aflezen.

2. $S_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} 1x & = & 2 \\ 2y & = & 4 \\ 1z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_2) = \{ (2,2,1) \}$ via aflezen met een kleine berekening: $4/2 = 2$.

3. $S_3 = \left\{ \begin{array}{rcl} 1x & = & 2 \\ 2y & = & 4 \\ 1z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_3) = \{ (2,2,0) \}$ via gewoon aflezen, waarbij we $z = 0$ krijgen, maar dat is niets speciaal.

4. $S_4 = \left\{ \begin{array}{rcl} 1x & = & 2 \\ 2y & = & 4 \\ 0z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_4) = \emptyset$ via gewoon aflezen, want de laatste vergelijking is duidelijk strijdig: voor geen enkel getal z kan $0z = 1$.

5. $S_5 = \left\{ \begin{array}{rcl} 1x & = & 2 \\ 1y & = & 4 \\ 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_5) = \{ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R} \}$, waarbij de laatste vergelijking $0z = 0$ voor alle getallen z voldaan is . Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die we naar keuze kunnen schrijven als $\{ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ (2,4,z) \mid z \in \mathbb{R} \} = \{ (2,4,x) \mid x \in \mathbb{R} \}$. De laatste schrijfwijze is wiskundig correct, maar verwarrend omdat de letter x hier niets te maken heeft met de eerste coördinaat die meestal ook x noemt. Dikwijls worden als zogenaamde *parameters* letters gekozen uit het rijtje $t, s, k, l, \alpha, \beta, \ldots$.

6. $S_6 = \left\{ \begin{array}{rcl} 1x & = & 2 \\ 0y & = & 0 \\ 0z & = & 0 \end{array} \right.$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Stelsels: direct oplosbaar

Uitwerking: $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\ \}$. Enkel de eerste vergelijking is een echte vergelijking. Als $x = 2$, mogen y en z willekeurig zijn. Er zijn dus 'twee keer oneindig' veel oplossingen omdat er twee parameters nodig zijn om *alle* oplossingen te bekomen.

7. $S_7 = \left\{ \begin{array}{rrcl} 1x & & = & 2 \\ 0y & & = & 0 \\ & 2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,t,3) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$. Weer oneindig veel oplossingen, nu met één parameter.

Voorbeeld 5.2.2 (Achterwaartse substitutie)**.** Los volgende stelsels op:

1. $S_{21} = \left\{ \begin{array}{rrcl} 1x & & = & 2 \\ 1y+ & 1z & = & 4 \\ & 1z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{21}) = \{\ (2,-2,6)\ \}$

We beginnen met de laatste vergelijking: $z = 6$. We vullen die waarde voor z in in de tweede vergelijking, en bekomen $y+6 = 4$, dus $y = -2$. De eerste vergelijking zegt dat $x = 2$. Dus, de oplossing is $(x,y,z) = (2,-2,6)$.

2. $S_{22} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 2 \\ & +y & +z & = & 4 \\ & & +z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{22}) = \{\ (-2,-2,6)\ \}$

Opnieuw van beneden naar boven invullen (achterwaarts, vandaar *achterwaartse substitutie*). $z = 6$, dus $y + 6 = 4$ en dus $y = -2$. Tenslotte is $x + (-2) + 6 = 2$, of $x = -2$.

3. $S_{23} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & +5y & +3z & = & 4 \\ & & +2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{23}) = \{\ (1/6,-1,3)\ \}$

Opnieuw aan de hand van achterwaartse substitutie eerst z, vervolgens y en dan x berekenen.

4. $S_{24} = \left\{ \begin{array}{rrcl} 6x & +z & = & 2 \\ & +2z & = & 4 \\ & +3z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: Merk op dat de tweede en derde vergelijking in feite dezelfde zijn. Een gelijkwaardig stelsel is dus

$$S_{24} = \left\{ \begin{array}{rrcl} 6x & +z & = & 2 \\ & +2z & = & 4 \end{array} \right.$$

Hieruit vinden we aan de hand van achterwaartse substitutie dat $(0,2)$ de enige oplossing is van het stelsel.

Merk op dat er geen onbekende y in het stelsel voorkomt, en we dus kunnen aannemen dat er twee onbekenden zijn, die toevallig x en z noemen in plaats van x en y. Je hebt dus een vector met twee componenten nodig om het stelsel op te lossen. De oplossingsverzameling is dan $\text{Opl}(S_{24}) = \{(0,2)\}$.

Stel dat in een vraagstuk toch sprake zou zijn van een onbekende y, maar waarbij die toch niet voorkomt in je stelsel. Dat betekent dan dat je stelsel geen voorwaarden oplegt aan y, en dat dus y willekeurige waarden mag aannemen. Dan beschrijf je best je oplossingen als $\text{Opl}(S_{24}) = \{(0,t,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Stelsels: direct oplosbaar

5. $S_{25} = \begin{cases} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & & +2z & = & 4 \\ & & +0z & = & 0 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{25}) = \{\ (t, -3t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$

De tweede vergelijking heeft als oplossing $z = 2$. De eerste vergelijking wordt dan $6x + 2y = 0$. De oplossingsverzameling heeft één parameter: stel bijvoorbeeld dat $x = t$ voor een $t \in \mathbb{R}$. Dan is aan deze vergelijking voldaan als $2y = -6t$ of dus $y = -3t$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Oplossen van 2×2 stelsels

We bespreken hier enkele technieken om 2×2 stelsels op te lossen.

Voorbeeld 5.3.1. Een groep van 8 toeristen wil een ritje maken met Vespa's. Er zijn Vespa's met of zonder zijspan. Op elke type is plaats voor twee personen, maar de Vespa's met zijspan hebben bovendien plaats voor 3 reistassen, de andere slechts voor 1 reistas. Het gezelschap heeft 6 reistassen. Hoeveel Vespa's moeten er van elk type worden gehuurd zodat er geen lege plaatsen zijn ?

	met zijspan	zonder zijspan	nodig
personen	2	2	8
tassen	3	1	6

Als x het aantal Vespa's is *met* zijspan, en y het aantal Vespa's *zonder*, dan zoeken we x en y zodat

$$\begin{cases} 2x+2y=8 & \text{(plaatsen voor de personen)} \\ 3x+\ \ y=6 & \text{(plaatsen voor de reistassen)} \end{cases}$$

Dit is *een lineair stelsel* van twee eerstegraadsvergelijkingen.

In dit geval kan je het probleem ook onmiddellijk *oplossen*, zelfs zonder de omweg van het opschrijven van een stelsel. Er zijn op basis van het aantal toeristen natuurlijk 4 Vespa's nodig, en zodra er één is met een zijspan is er ook precies voldoende plaats voor de reistassen.

Voor het oplossen van dergelijke lineaire stelsels bestaan verschillende methoden. We bespreken de substitutiemethode en de eliminatiemethode, en geven telkens eerst een voorbeeld.

Voorbeeld 5.3.2. Los volgend stelsel op met de *substitutiemethode*: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-4 \end{cases}$.

Uitwerking: Uit de eerste vergelijking $x+y=5$ kan je x berekenen als $x=5-y$.
Die uitdrukking $y-5$ voor x kan je substitueren in de tweede vergelijking $x-2y=-4$:

$$(5-y)-2y=-4 \Leftrightarrow -3y=-9$$

Hieruit volgt dat $y=3$. Je kan de waarde $y=3$ invullen in $x=5-y$ en vindt $x=5-3=2$.

De oplossing van het stelsel is dus $x=2$ en $y=3$, of ook $(x,y)=(2,3)$.

Merk op dat je dezelfde oplossing bekomt door de eerste vergelijking te herschrijven als $y=5-x$ en te substitueren in de tweede vergelijking. Je kan ook de tweede vergelijking herschrijven en substitueren in de eerste vergelijking. Al deze varianten leiden tot hetzelfde resultaat.

Algemeen kan je de substitutiemethode als volgt beschrijven:

Algoritme 5.3.3. Los een 2×2 stelsel op met de **substitutiemethode** door

(a) uit één van de vergelijkingen één van de onbekenden op te lossen en

(b) in de andere vergelijking die onbekende te *substitueren* (vervangen) door de gevonden oplossing.

(c) Die andere vergelijking heeft nu nog maar één onbekende, en kan je oplossen,

(d) en die oplossing ingevuld in de vergelijking waarmee je gestart bent, levert de eindoplossing.

Indien men een strijdig stelsel of dubbele vergelijking heeft, zal bovenstaande algoritme niet zonder meer bruikbaar zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Oplossen van 2×2 stelsels

Voorbeeld 5.3.3. Los volgend stelsel op met de *eliminatiemethode*: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-4 \end{cases}$.

Uitwerking: Zodra x en y voldoen aan de twee vergelijkingen, voldoen ze ook aan de som of het verschil van die vergelijkingen.

Als je in dit geval de tweede vergelijking zou vervangen door het verschil van die tweede vergelijking met de eerste, dan blijkt de onbekende x verdwenen (i.e. *geëlimineerd*) te zijn uit die tweede vergelijking:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ -3y=-9 \end{cases}$$

De tweede vergelijking heeft nu nog maar één onbekende, en is onmiddellijk oplosbaar: $y=3$. Door die oplossing $y=3$ in te vullen in de eerste vergelijking (nl. $x+y=5$), vind je $x+3=5$, dus $x=2$.

De oplossing van het stelsel is dus $x=2$ en $y=3$, of ook $(x,y)=(2,3)$.

Merk op dat er opnieuw verschillende eliminatiemethoden zijn, die allemaal tot diezelfde oplossing leiden.

Strikt genomen hebben we hier de eliminatiemethode enkel in de eerste stap gebruikt, en ze gecombineerd met substitutie om x te berekenen. Het is mogelijk om ook y te elimineren uit de eerste vergelijking, maar in de praktijk is dat voor 2×2 stelsels meestal ingewikkelder dan nodig.

Algemeen kan je de eliminatiemethode als volgt beschrijven:

Algoritme 5.3.4. Los een 2×2 stelsel op met de **eliminatiemethode** door

(a) bij één van de vergelijkingen een geschikt veelvoud van de andere op te tellen zodat één van de onbekenden wordt *geëlimineerd* (verdwijnt),

(b) die vergelijking met maar één onbekende op te lossen, en

(c) die oplossing in te vullen in de andere vergelijking.

Zie verder voor de gevallen met strijdige of dubbele vergelijkingen.

In de vorige voorbeelden was er telkens een *unieke* oplossing. Dat is echter niet altijd het geval, soms zijn er *geen* oplossingen, soms zijn er *oneindig veel* oplossingen. Volgende eigenschap zegt dat het niet kan voorkomen dat er 2,3 of 42 oplossingen zijn voor een lineair stelsel.

Eigenschap 5.3.1.

Een lineair stelsel heeft ofwel **geen**, ofwel **één**, ofwel **oneindig veel** oplossingen.

Een stelsel zonder oplossingen noemen we een **strijdig** stelsel.

De bovenstaande eigenschap kan intuïtief als volgt begrepen worden. Elke vergelijking in het stelsel definieert een rechte in het vlak. Wanneer we de oplossing van een stelsel zoeken, vragen we eigenlijk naar de oplossing van twee vergelijkingen *tezamen*. Een potentiële oplossing van het stelsel zal meetkundig deel moeten uitmaken van twee rechten *tezamen*. We stellen daarom de natuurlijke vraag: hoe kunnen twee rechten zich onderling verhouden in het vlak? Er zijn drie mogelijkheden: (1) ze zijn evenwijdig met elkaar en snijden elkaar dus in geen enkel punt, (2) ze snijden elkaar in één uniek punt, (3) ze *vallen samen* en hebben dus oneindig veel punten gemeenschappelijk. Deze drie scenario's komen overeen met de bovengenoemde drie opties betreffende het oplossen van 2×2 stelsels.

Opmerking 5.3.1 (Parameters en niet-unieke schrijfwijze)**.** Bij een stelsel met oneindig veel oplossingen is er minstens één variabele waarvoor je geen getalwaarde vindt, maar die je vrij kan kiezen

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Oplossen van 2×2 stelsels

met behulp van van een parameter t. We vinden dan typisch oplossingen van de vorm:

$$(x, y) = (t, a + bt)$$

De letters a en b zijn in praktijk concrete getallen (bv. 7 en 2) die voortkomen uit de opgave van het stelsel en $t \in \mathbb{R}$ is een parameter. Stel dat je na rekenwerk volgende oplossingen vindt:

$$(x, y) = (t, 1 + t), \quad t \in \mathbb{R}$$

maar je collega heeft als antwoord:

$$(x, y) = (1 + t, 2 + t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Hoewel dat op het eerste zicht *verschillende* oplossingen zijn, is dat eigenlijk toch niet het geval. Inderdaad, jij beweert dat de oplossingsverzameling gelijk is aan

$$\{(t, 1 + t) | \quad t \in \mathbb{R}\},$$

terwijl je collega zweert bij de verzameling

$$\{(1 + t, 2 + t) | \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Beide verzamelingen zijn echter aan elkaar gelijk, ze zijn enkel wat anders voorgesteld. Het is te vergelijken met $1/2$, $0,5$ of $50/100$.

Je kan inzien dat beide verzamelingen gelijk zijn door bijvoorbeeld de tweede te schrijven met aan andere letter :

$$\{(1 + t, 2 + t) | \quad t \in \mathbb{R}\} = \{(1 + u, 2 + u) | \quad u \in \mathbb{R}\}$$

en dan op te merken dat waarde $(t, 1 + t)$ overeenkomt met $(1 + (t - 1), 2 + (t - 1)) = (1 + u, 2 + u)$ in de tweede verzameling voor de parameterwaarde $u = t - 1$.

Voorbeeld 5.3.4. Stelsel zonder oplossingen: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Inderdaad, $x + y$ kan natuurlijk niet tegelijk gelijk zijn aan 1 en gelijk zijn aan 2.

Als je dergelijk stelsel oplost met *substitutie* bekom je uit de eerste vergelijking $x = 1 - y$, en dat invullen in de tweede vergelijking geeft $(1 - y) + y = 2$, of $1 = 2$ wat een strijdige vergelijking is. Er is dus geen oplossing van deze vergelijking, en dus zeker ook geen oplossing van het hele stelsel.

Als je dergelijk stelsel oplost met *eliminatie* bekom je als tweede vergelijking $0 = 1$, wat ook een strijdige vergelijking is. Er is dus geen oplossing.

Voorbeeld 5.3.5. Stelsel met oneindig veel oplossingen: $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$.

Inderdaad, telkens y één kleiner is dan x voldoen x en y aan beide vergelijkingen, bijvoorbeeld $(x, y) = (5, 4), (x, y) = (11, 10)$ of $(x, y) = (\pi + 1, \pi)$.

De oplossingen van het stelsel zijn $x = t, y = t - 1$, met $t \in \mathbb{R}$, wat je ook kan schrijven als $(x, y) = (t, t - 1)$, met $t \in \mathbb{R}$.

Pas wel op: je kan de oplossingen ook schrijven als $x = s + 1, y = s$, met $s \in \mathbb{R}$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Oplossen van 2×2 stelsels

Als je dergelijk stelsel oplost met *substitutie* bekom je uit de eerste vergelijking $x = y + 1$, en dat invullen in de tweede vergelijking geeft $2(y+1) - 2y = 2$, of $2 = 2$. De gelijkheid $2 = 2$ (eventueel nog te vereenvoudigen tot $1 = 1$ of $0 = 0$) legt geen extra voorwaarden op aan x en y, want ze is altijd voldaan. Er is dus eigenlijk maar één vergelijking: de tweede bevat precies dezelfde voorwaarde op x en y. Er is geen unieke oplossing, maar er zijn er oneindig veel.

Als je dergelijk stelsel oplost met *eliminatie* bekom je als tweede vergelijking $0 = 0$, wat ook een triviale, altijd voldane vergelijking is. Er blijft dus maar één vergelijking met twee onbekenden over, en dergelijke vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

Merk op dat het niet altijd onmiddellijk af te lezen is van een stelsel of het al dan oneindig veel oplossingen heeft.

Zo heeft ook $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = y + 2 \end{cases}$ oneindig veel oplossingen.

We illustreren dit nog verder met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 5.3.6. Los volgend stelsel op: $\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$.

Uitwerking: Dit is het stelsel uit het vraagstuk over de toeristen, dat als volgt kan worden opgelost:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = 4 \\ y = 6 - 3x \end{cases} \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + (6 - 3x) = 4 \\ y = 6 - 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6 = 4 \\ y = 6 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 - 3x \end{cases} \underset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

De stappen hierboven zijn de volgende:

(1) de eerste vergelijking door 2 delen en de tweede vergelijking herschrijven
(2) y substitueren in de eerste vergelijking
(3) x invullen in tweede vergelijking

De oplossing is dus $(x, y) = (1, 3)$.

Voorbeeld 5.3.7. Los volgend stelsel op: $\begin{cases} -4x + 4y = -8 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

Uitwerking:

$$\begin{cases} -4x + 4y = -8 \\ x - y = 2 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases} \underset{(2)}{\Leftrightarrow} x - y = 2 \underset{(3)}{\Leftrightarrow} x = 2 + y$$

We gebruikten de volgende stappen:

(1) eerste vergelijking delen door (-4)
(2) twee gelijke vergelijkingen, je kan één schrappen
(3) x schrijven in functie van y

Stel $y = t$ met $t \in \mathbb{R}$ dan wordt de oplossing gelijk aan $(x, y) = (2 + t, t)$, er zijn oneindig veel oplossingen.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Oplossen van 2×2 stelsels

Voorbeeld 5.3.8. Los volgend stelsel op: $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$.

Uitwerking:

$$\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3x + y = 2 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$$

We hebben hier de tweede vergelijking gedeeld door (-1). Maar dan hebben we dat eenzelfde term $-3x + y$ tegelijkertijd gelijk moet zijn aan 2 en 1, wat natuurlijk niet kan. Daarom is dit stelsel strijdig en zijn er geen oplossingen.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

5.4 Stelsels: oplossingen

Een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *oplossen* betekent *alle* n-tallen reële getallen $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ vinden die we voor de letters $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ kunnen invullen zodat $\mathbf{Ap} = \mathbf{b}$. Formeel wordt dit:

Definitie 5.4.1 (Oplossingen van stelsels en gelijkwaardige stelsels)**.**

Een **oplossing** van een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden $S : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ is een vector $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ die voldoet aan alle vergelijkingen, dus zodat

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{b} \quad \text{of} \quad \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n & = b_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \cdots + a_{mn}p_n & = b_m \end{cases}$$

De **oplossingsverzameling** $\mathrm{Opl}(S)$ van een lineair stelsel S is de verzameling van *alle oplossingen*.

Twee stelsels S_1 en S_2 zijn **gelijkwaardig** als ze *dezelfde* oplossingsverzameling hebben, dus als

$$\mathrm{Opl}(S_1) = \mathrm{Opl}(S_2)$$

Een stelsel dat *geen* oplossingen heeft, dus met $\mathrm{Opl}(S) = \emptyset$, noemen we **strijdig** of **ontaard**.

Opmerking 5.4.1. Ook een *vergelijking* die geen oplossingen heeft noemen we **strijdig** of **ontaard**. Een typische *ontaarde vergelijking* is $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$ of dus $0 = 1$.

We geven eerst enkele eenvoudige voorbeelden van het oplossen van stelsels:

Voorbeeld 5.4.1. Los volgende stelsels op:

1. $S_1 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Door de twee vergelijkingen bij elkaar op te tellen, vinden we dat $(x + y) + (x - y) = 5 + 1$ moet zijn, en dus $2x = 6$, of $x = 3$. Door $x = 3$ in te vullen in één van de twee oorspronkelijke vergelijkingen vinden we dan dat $3 + y = 5$, en dus $y = 2$.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_1) = \{(3, 2)\}$, of $x = 3$ en $y = 2$ is de enige oplossing van het stelsel S_1

2. $S_2 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x + y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Het is onmiddellijk duidelijk dat het onmogelijk is dat $x + y$ zowel gelijk is aan 1 als aan 5. Er zijn dus *geen oplossingen*.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_2) = \emptyset$

3. $S_3 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 12 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet ook aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$), en is dus een oplossing van het hele stelsel.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_3) = \{(3, 2)\}$

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Stelsels: oplossingen

4. $S_4 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 13 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet niet aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \neq 13$), en er kan dus geen oplossing bestaan voor het hele stelsel.

Resultaat: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$

5. $S_5 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ 2x + 2y & = 10 \end{cases}$

Uitwerking: De tweede vergelijking is eigenlijk dezelfde als de eerste, want als $x+y = 5$, dan is automatisch ook $2x + 2y = 2(x + y) = 2 \cdot 5 = 10$. Dus zodra $y = 5 - x$ (of ook: zodra $x = 5 - y$), hebben we een oplossing. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 5 - x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(5 - y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn natuurlijk twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels. Voorbeelden van oplossingen zijn dus de koppels $(0, 5), (1, 4), (2, 3), (5, 0), (\pi, 5 - \pi), (\pi + 5, -\pi), (5 - \pi, \pi), \ldots$

Resultaat: $\text{Opl}(S_5) = \{(t, 5 - t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(5 - s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -x + 5$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel S_5 is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -x + 5$.

6. $S_6 = \{ \; 2x + y \; = 6 \;$ (een 'stelsel' met één vergelijking)

Uitwerking: Er is maar één vergelijking, en die zegt dat $x = 3 - \frac{1}{2}y$, of ook dat $y = 6 - 2x$. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 6-2x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(3-\frac{1}{2}y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels.

Resultaat: $\text{Opl}(S_6) = \{(t, 6 - 2t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(3 - \frac{1}{2}s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -2x+6$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel $\{2x+y = 6$ is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -2x + 6$.

Een algemene strategie om lineaire stelsels op te lossen is:

Bereken een *gelijkwaardig* stelsel waarvoor de oplossingsverzameling direct af te lezen is.

Bij stelsels waarvan de coëfficiëntenmatrix een diagonaalmatrix is kunnen we de oplossingen gewoon aflezen:

Voorbeeld 5.4.2.

Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in matrixvorm:

1. $S_1 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_1) = \{ \; (2, 4, 6) \; \}$ via gewoon aflezen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Stelsels: oplossingen

2. $S_2 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_2) = \{\ (2,2,1)\ \}$ via aflezen met een kleine berekening: $4/2 = 2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $S_3 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_3) = \{\ (2,2,0)\ \}$ via gewoon aflezen, waarbij we $z = 0$ krijgen, maar dat is niets speciaal.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $S_4 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$ via gewoon aflezen, want de laatste vergelijking is duidelijk strijdig: voor geen enkel getal z kan $0z = 1$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $S_5 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_5) = \{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$, waarbij de laatste vergelijking $0z = 0$ voor alle getallen z voldaan is . Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die we naar keuze kunnen schrijven als $\{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,z) \mid z \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\ \} = \ldots$

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_5) = \{\ (2,4,0) + t(0,0,1) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$, want $(2,4,0) + t(0,0,1) = (2,4,t)$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. $S_6 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\ \}$. Enkel de eerste vergelijking is een echte vergelijking. Als $x = 2$, mogen y en z willekeurig zijn. Er zijn dus 'twee keer oneindig' veel oplossingen omdat er twee parameters nodig zijn om *alle* oplossingen te bekomen.

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Stelsels: oplossingen

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,0,0) + s(0,1,0) + t(0,0,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \}$

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$

7. $S_7 = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,t,3) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,0,3) + t(0,1,0) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\6\end{bmatrix}$

Stelsels waarvan de coëfficiëntenmatrix een bovendriehoeksmatrix is kunnen we oplossen met achterwaartse substitutie:

Voorbeeld 5.4.3 (Achterwaartse substitutie)**.** Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in matrixvorm:

1. $S_{21} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y+ & 1z & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{21}) = \{\ (2,-2,6)\ \}$

We beginnen met de laatste vergelijking: $z = 6$. We vullen die waarde voor z in in de tweede vergelijking, en bekomen $y+6 = 4$, dus $y = -2$. De eerste vergelijking zegt dat $x = 2$. Dus, de oplossing is $(x,y,z) = (2,-2,6)$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$

2. $S_{22} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 2 \\ & +y & +z & = & 4 \\ & & +z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{22}) = \{\ (-2,-2,6)\ \}$

Opnieuw van beneden naar boven invullen (achterwaarts, vandaar *achterwaartse substitutie*). $z = 6$, dus $y+6 = 4$ en dus $y = -2$. Tenslotte is $x + (-2) + 6 = 2$, of $x = -2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$

3. $S_{23} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & +5y & +3z & = & 4 \\ & & +2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{23}) = \{\ (1/6,-1,3)\ \}$

Opnieuw aan de hand van achterwaartse substitutie eerst z, vervolgens y en dan x berekenen.

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Stelsels: oplossingen

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 6
Rechten en vlakken

(Versie 2026/08/25H.56)

6.1 Vectoren en punten in het vlak

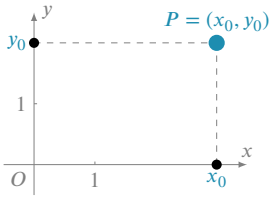
De verzameling koppels van reële getallen $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ kan je meetkundig beschouwen als een *vlak* waarin een x-as en een y-as zijn gekozen: het koppel (x_0, y_0) komt overeen met het punt met coördinaten x_0 en y_0 ten opzichte van deze assen. Omgekeerd kan je aan elk punt in een vlak met behulp van een assenstelsel een koppel getallen associëren. Op deze manier komen 'meetkunde doen' en 'rekenen met koppels van getallen' met elkaar overeen. Dat wordt uitgelegd in het eerste deel van volgend filmpje

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/vFcePhDXMeo

en hieronder verder uitgelegd. (Het filmpje bespreekt verder ook al de verschuivingen met vectoren)

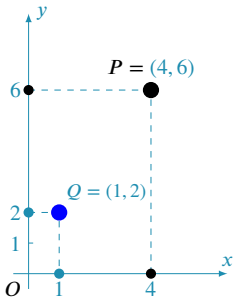


Een punt in een verder leeg vlak

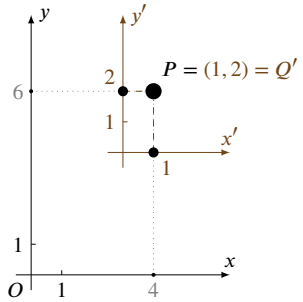


Een punt in een vlak met een assenstelsel

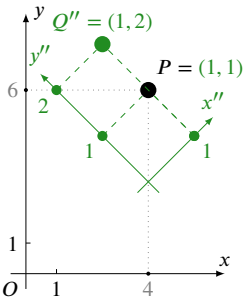
We tekenen het assenstelsel traditioneel met de x-as horizontaal naar rechts en de y-as vertikaal naar boven, maar zullen verder zien dat soms andere keuzen mogelijk en handiger zijn.
Volgende figuren tonen dat de *keuze van het assenstelsel* het verband bepaalt tussen *meetkundige punten en koppels*:
eenzelfde punt P komt overeen met *andere* koppels getallen $(4, 6), (1, 2)$ en $(1, 1)$, en
eenzelfde koppel getallen $(1, 2)$ bepaalt *andere* punten Q, Q' en Q'' in verschillende assenstelsels:



Een punt in een assenstelsel

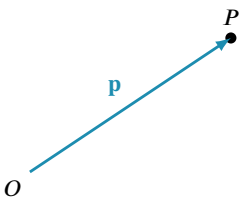


Een ander assenstelsel

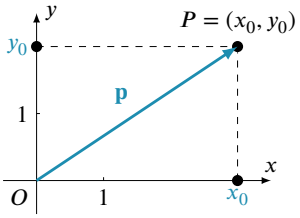


Nog een ander assenstelsel

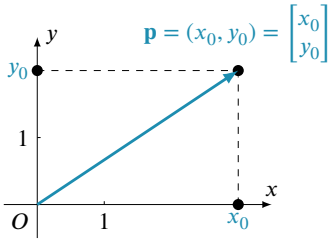
In een vlak met een assenstelsel kan je elk *punt* (x_0, y_0) van $\mathbb{R}^2$ ook beschouwen als een *vector* met beginpunt $(0, 0)$ en eindpunt (x_0, y_0). Je hebt hiervoor zelfs niet het volledige assenstelsel nodig: de oorsprong volstaat. Een vlak waarin een punt als *oorsprong* is aangeduid, noemen we een *gepunt vlak*. Om het vectorkarakter te benadrukken tekenen we een koppel (x_0, y_0) als een pijl vanuit de oorsprong naar dat punt (x_0, y_0). Dat komt bijvoorbeeld vaak voor in de fysica.



Een punt bepaalt een vector in een gepunt vlak



Een punt bepaalt een vector in een assenstelsel

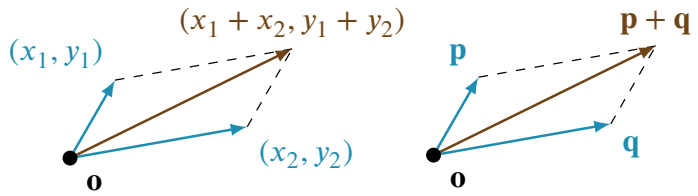


Een vector bepaalt een punt in een assenstelsel

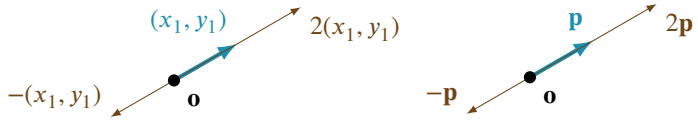
6.1 Vectoren en punten in het vlak

Merk op dat we wel degelijk gebruik maken *van de oorsprong* om met een punt een vector te associëren. We gebruiken in $\mathbb{R}^2$ de termen "koppel", "2-tal", "vector" en "punt" dikwijls als *synoniemen van elkaar*. Als we het punt-karakter willen benadrukken gebruiken we meestal hoofdletters P, Q of A, B en we gebruiken dan kleine, vette letters $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ voor de bijhorende vectoren. We noteren (de coördinaten van) een punt soms als een koppel $P = \mathbf{p} = (x_0, y_0)$, maar soms ook als een kolomvector $P = \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

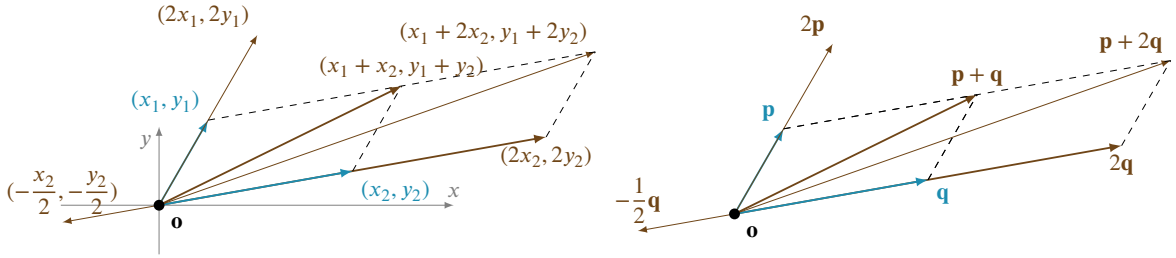
We kunnen zowel koppels als vectoren optellen, en beide operaties geven hetzelfde resultaat. De som van de vectoren $\mathbf{p} = (x_1, y_1)$ en $\mathbf{q} = (x_2, y_2)$ is de vector $\mathbf{p} + \mathbf{q} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ die ook wordt bekomen via de zogenaamde parallellogramregel:



De veelvouden $r\mathbf{p} = r(a, b) = (ra, rb)$ van een vector $\mathbf{p} = (a, b)$ met $(a, b) \neq (0, 0)$) zijn meetkundig *herschalingen* van $\mathbf{p}$, en liggen allemaal op de rechte door $(0, 0)$ en $\mathbf{p}$. Als we *alle* herschalingen $r\mathbf{p}$ beschouwen (met zowel positieve als negatieve r), krijgen we *de rechte* door de punten $\mathbf{O}$ en $\mathbf{p}$.



Een *lineaire combinatie* van de twee vectoren $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ is een *som van veelvouden* van $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$, dus een vector van de vorm $r\mathbf{p} + s\mathbf{q}$, mer $r, s \in \mathbb{R}$. We kunnen *alle* vectoren van het vlak schrijven als een lineaire combinatie van twee willekeurige $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$, *tenzij* $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ op dezelfde rechte liggen door de oorsprong.

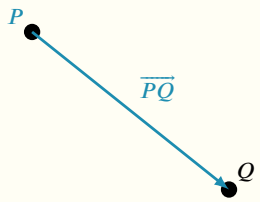


Opmerking 6.1.1. Dit verband tussen punten en vectoren veralgemeent onmiddellijk in de driedimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$, en het geldt ook in willekeurige dimensies $\mathbb{R}^n$.

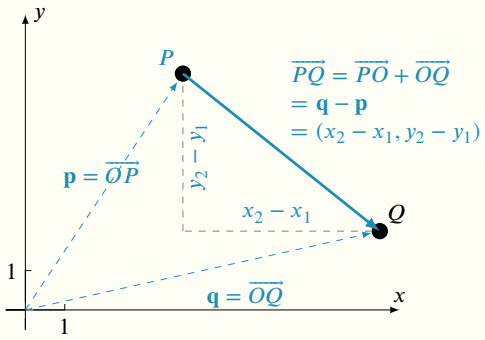
Opmerking 6.1.2. Met twee punten P en Q kan je ook de vector met beginpunt P en eindpunt Q associëren. Dit aspect wordt bij verschuivingen uitgebreider behandeld.

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Vectoren en punten in het vlak



Twee punten P en Q bepalen een vector $\overrightarrow{PQ}$ in een vlak



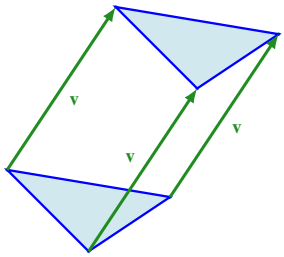
Twee punten P en Q bepalen *drie* vectoren $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{OQ}$ en $\overrightarrow{PQ}$ in een vlak

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

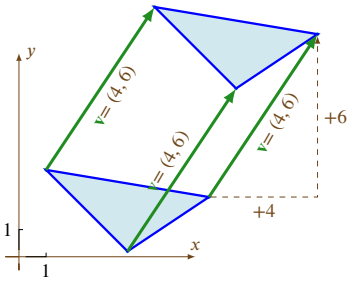
6.2 Vectoren en verschuivingen in het vlak

Vectoren zijn bijzonder nuttig bij het bestuderen van *verschuivingen* in het vlak. Dat wordt uitgelegd in het vervolg van vorig filmpje

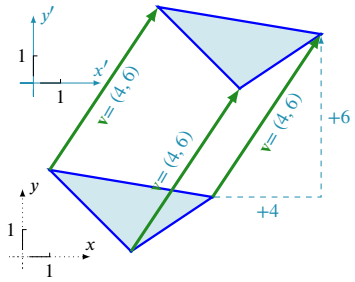
YouTube link: https://www.youtube.com/embed/vFcePhDXMeo?start=50&



Een verschuiving van een driehoek



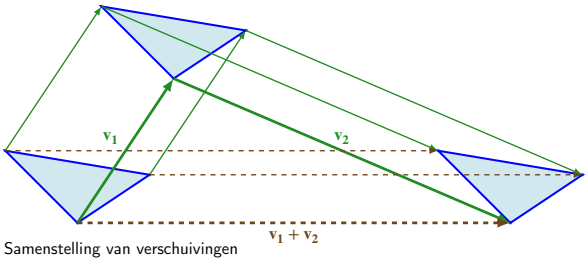
Een verschuiving van een driehoek in een assenstelsel



Een verschuiving van een driehoek in een verschoven assenstelsel

Een *vector* geeft hier aan hoe een figuur wordt *verschoven*. In de linkse figuur wordt de verschuiving van de driehoek aangeduid door de drie groene pijlen $\mathbf{v}$. In de tweede figuur is er een assenstelsel gekozen, en dan kunnen we met de vector $\mathbf{v}$ een koppel getallen associëren, namelijk hoeveel eenheden er wordt verschoven in de x-richting, in dit geval 4 eenheden, en hoeveel eenheden in de y-richting, in dit geval 6 eenheden. Alle groene pijlen hebben dezelfde componenten, en in elk ander assenstelsel met evenwijdige assen en dezelfde schaal behoudt de vector $\mathbf{v}$ dezelfde componenten. Als vectoren gebruikt worden voor verschuivingen noemen we ze soms **vrije vectoren**. We zeggen ook dat een vector dan de **stap** aanduidt waarover iets wordt verschoven of verplaatst. Als vectoren gebruikt worden om punten aan te duiden spreken we over **gebonden vectoren**. Verder zal blijken dat dit onderscheid afhankelijk van de concrete context al dan niet belangrijk is.

Je kan meerdere verschuivingen na elkaar uitvoeren. Dat heet wiskundig het *samenstellen* van de verschuivingen, en komt overeen met het *optellen* van de vectoren:

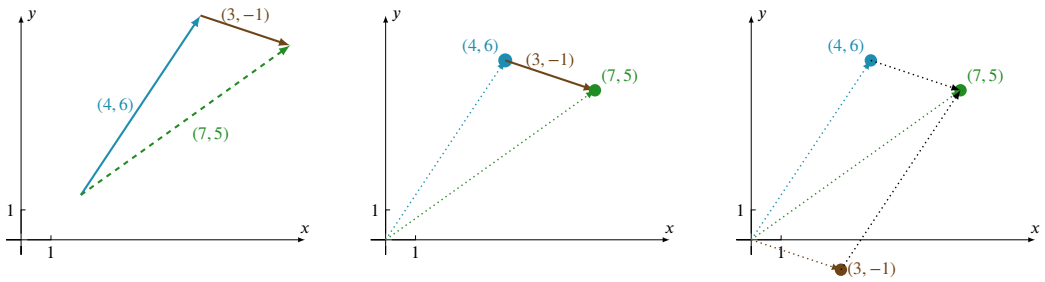


Samenstelling van verschuivingen

We kunnen het optellen van vectoren op verschillende manieren interpreteren, naargelang een vector een punt dan wel een stap of verschuiving voorstelt. Het daarbij steeds om *dezelfde* optelling, enkel de interpretatie en de bijhorende tekening verschilt telkens.

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Vectoren en verschuivingen in het vlak



$$\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+3\\6+(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+3\\6+(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+3\\6+(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$$

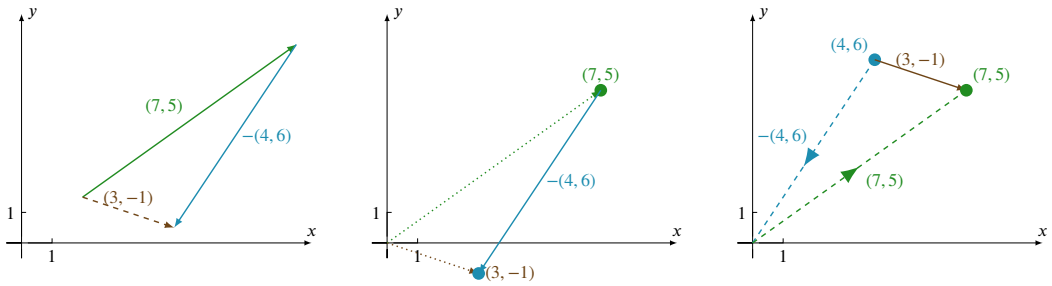
stap + stap = stap *punt + stap = punt* *punt + punt = punt*

Deze interpretaties kunnen worden samengevat in volgende eigenschap:

Eigenschap 6.2.1. De som $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ van vectoren kan op volgende equivalente manieren begrepen worden als:

- het samenstellen van twee verschuivingen, eerst over een afstand $\mathbf{p}$ en dan over $\mathbf{q}$
- het verschuiven van het punt $\mathbf{p}$ over een afstand $\mathbf{q}$
- het optellen van koppels $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ component per component
- het optellen van punten of vectoren $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ via de parallellogramregel

Het *verschil* van vectoren is per definitie de optelling met de tegengestelde vector, maar is meetkundig ook op verschillende manieren te begrijpen:



$$\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

stap − stap = stap *punt − stap = punt* *punt − punt = STAP*

Eigenschap 6.2.2.

Het verschil $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ van vectoren kan op volgende equivalente manieren begrepen worden als:

- het samenstellen van twee verschuivingen, eerst over een afstand $\mathbf{p}$ en dan over $-\mathbf{q}$
- het verschuiven van het punt $\mathbf{p}$ over een afstand $-\mathbf{q}$
- het verschil van koppels $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ component per component
- de verschuiving om van het punt $\mathbf{q}$ naar het punt $\mathbf{p}$ te gaan

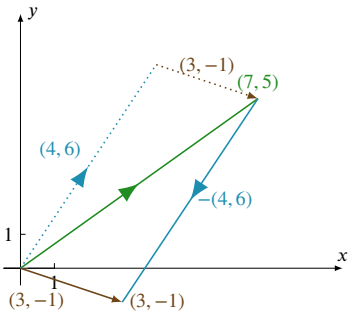
Vooral de laatste karakterisering is erg belangrijk. Je kan ze begrijpen als 'het verschil tussen twee punten

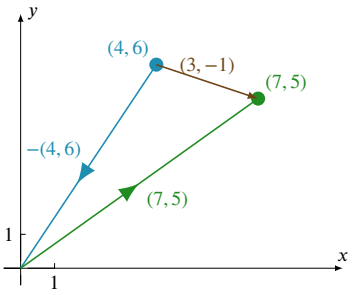
CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

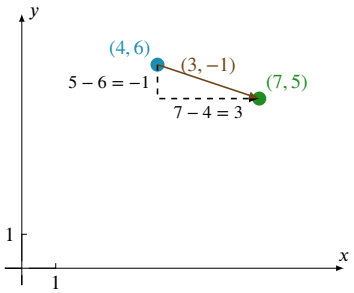
6.2 Vectoren en verschuivingen in het vlak

P en Q is de vector om van Q naar P te gaan'. Dat is volledig analoog met het verschil v tussen twee getallen a en b: $a-b=v$ betekent dat v het getal is dat je bij het tweede getal b moet bijtellen om het eerste getal a te bekomen: $a-b=v \iff a=b+v$.
Het $\mathbf{p}-\mathbf{q}=\mathbf{v}$ betekent precies dat $\mathbf{v}$ de vector is die je nodig hebt om van de tweede term $\mathbf{q}$ naar de eerste term $\mathbf{p}$ te gaan: $\mathbf{p}-\mathbf{q}=\mathbf{v} \iff \mathbf{p}=\mathbf{q}+\mathbf{v}$.

Het verschil tussen 6 en 4 is 2, en 2 is precies wat nodig is om van de tweede term 4 de eerste term 6 te maken: $6-4=2 \iff 4+2=6$.
Het verschil tussen $\mathbf{p}=(7,5)$ en $\mathbf{q}=(4,6)$ is $\mathbf{p}-\mathbf{q}=(3,-1)$, en $(3,-1)$ is precies wat je nodig hebt om van de tweede term $\mathbf{q}=(4,6)$ naar de eerste term $\mathbf{p}=(7,5)$ te gaan.







$$\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \qquad - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

stap − stap = stap | *−stap + stap = stap* | *punt − punt = stap*

De laatste tekening wordt algebraïsch eenvoudiger met de notatie $\overrightarrow{PQ}$ voor de (gebonden) vector met beginpunt P en eindpunt Q, en de afkorting $\overrightarrow{P}$ voor de vector $\overrightarrow{OP}$. Met deze notatie wordt de optelling

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR} \text{ en } \overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{QP}$$

en dan volgt uit

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{Q}-\overrightarrow{P}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$$

volgende belangrijke eigenschap:

Eigenschap 6.2.3 (Verband gebonden en ongebonden vectoren)**.** Voor punten P en Q in het vlak geldt:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{Q}-\overrightarrow{P}$$

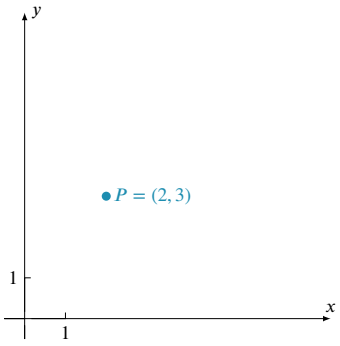
of met een alternatieve notatie:

$$\overrightarrow{pq}=\vec{q}-\vec{p}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$$

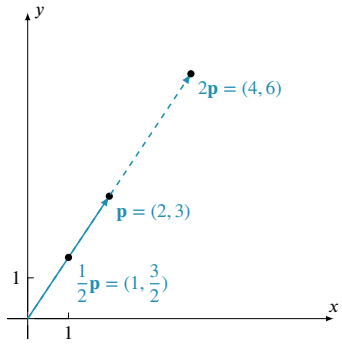
CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

6.3 Parametervergelijking van een rechte

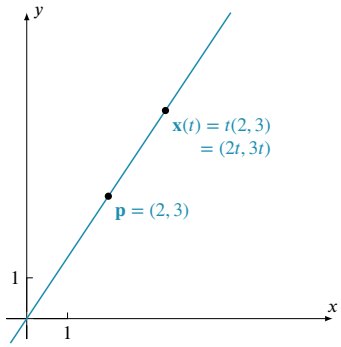
Alle veelvouden van een vector vormen een rechte door de oorsprong:



$$P = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



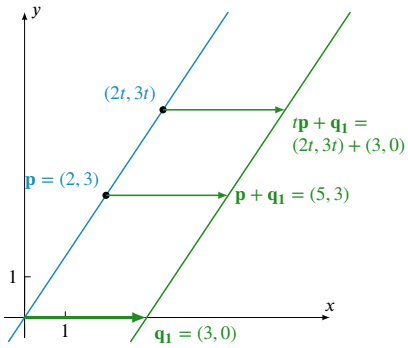
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, 2\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \ldots$$



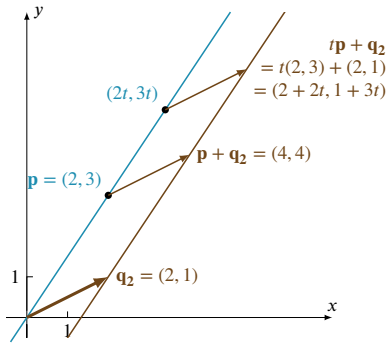
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ of } (x, y) = t(2, 3) \text{ of } \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Alle punten van de rechte door $(0, 0)$ en door het punt $P(x_1, y_1)$ zijn van de vorm $t(x_1, y_1)$, of dus (tx_1, ty_1), met t een willekeurig reëel getal.
Merk op dat deze rechte samenvalt met de rechte door $(2x_1, 2y_1)$ of meer algemeen door (kx_1, ky_1), met $k \in \mathbb{R}_0$.

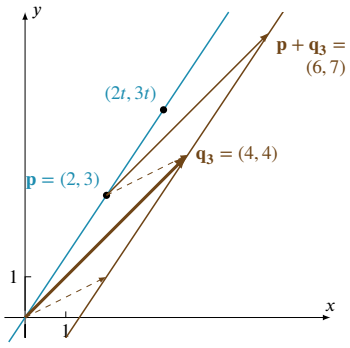
Door een dergelijke rechte te verschuiven bekomen we *evenwijdige rechten*:



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



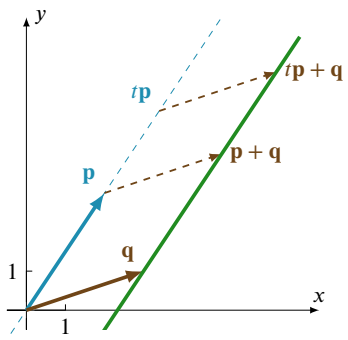
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Merk op dat verschuiven over $\mathbf{q_2} = (2, 1)$ of verschuiven over $\mathbf{q_3} = (4, 4)$ hier *dezelfde* rechte oplevert.

Als de parameter loopt doorheen de reële getallen bekom je *alle punten van een rechte* die door een punt $\mathbf{q}$ gaat en evenwijdig is met een vector $\mathbf{p}$. Op onderstaande tekening is de groene rechte de verschuiving van de blauwe rechte over een afstand $\mathbf{q}$ maar ook de som van alle herschalingen van $\mathbf{p}$ en het punt $\mathbf{q}$:

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Parametervergelijking van een rechte



Definitie 6.3.1 (Parametervergelijkingen van een rechte)**.**

Een **parametervergelijking** van een rechte met **richtingsvector** $\mathbf{p} = (x_1, y_1)$, **positievector** $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ en parameter t is een uitdrukking van de vorm

$$L \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

die we ook kunnen schrijven als

$$L \leftrightarrow \begin{cases} x = tx_1 + q_x \\ y = ty_1 + q_y \end{cases} \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y) = t(x_1, y_1) + (q_x, q_y), \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y) = (tx_1 + q_x, ty_1 + q_y), \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow \mathbf{x} = t\mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

Deze rechte *bevat* de positievector $\mathbf{q}$ en is *evenwijdig* met de richtingsvector $\mathbf{p}$.

Deze rechte is de *verschuiving* van de rechte bepaald door de richtingsvector $\mathbf{p}$ over de positievector $\mathbf{q}$.

Deze rechte is de positievector $\mathbf{q}$ waarbij willekeurige veelvouden van de richtingsvector $\mathbf{p}$ zijn opgeteld.

De **richtingscoëfficiënt** m is de y-coördinaat van de richtingsvector met x-coördinaat 1, en geeft dus aan hoeveel de rechte stijgt of daalt als je één eenheid naar rechts gaat:

$$m = \frac{y_1}{x_1} \text{ want } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ is evenwijdig met } \begin{bmatrix} 1 \\ y_1/x_1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 6.3.1.

De rechte door de oorsprong en het punt $(2, 3)$ heeft als parametervergelijking $L_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

De rechte door $(2, 3)$ evenwijdig met de x-as heeft als parametervergelijking $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, wat ook geschreven kan worden als $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Parametervergelijking van een rechte

De rechte door $(3,4)$ evenwijdig met L_1 heeft als parametervergelijking $L_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 3t+4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Opmerking 6.3.1.

- Parametervergelijkingen zijn niet uniek bepaald, een rechte heeft erg veel verschillende parametervergelijkingen:

$$L \leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 3t+4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 4t+3 \\ y = 6t+4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 20t+3 \\ y = 30t+4 \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+5 \\ y = 3t+7 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+23 \\ y = 3t+34 \end{cases}$$

  Inderdaad, de richtingsvector vermenigvuldigen met een getal verschillend van nul, of bij de positievector een willekeurig veelvoud optellen van de richtingsvector verandert de rechte niet.

- Om na te gaan of twee parametervergelijkingen al dan niet dezelfde rechte bepalen, gebruik je de eigenschap dat twee rechten gelijk zijn ofwel zodra ze *twee* punten gemeenschappelijk hebben, ofwel zodra ze één gemeenschappelijk punt en dezelfde richting hebben. Twee rechten zijn evenwijdig als ze *geen* gemeenschappelijke punten hebben.

- Als $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ twee punten zijn van een rechte, dan zijn $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ en $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ beide richtingsvectoren.

- Een parametervergelijking *genereert* punten van een rechte: elke waarde van de parameter levert onmiddellijk een punt op van de rechte, en elk punt van de rechte wordt ook bereikt voor een bepaalde parameterwaarde. Maar, als je van een willekeurig punt van het vlak wil weten of het tot de rechte behoort dan moet je nagaan of er een parameter bestaat waarvoor dat punt bereikt wordt, en dat vraagt meestal rekenwerk, namelijk het oplossen van een stelsel. Merk op dat dit voor de cartesische vergelijkingen precies omgekeerd is: nagaan of een punt tot de rechte behoort is dan eenvoudig, want je moet gewoon de coördinaten invullen. Maar, alle punten van de rechte vinden komt dan neer op het oplossen van een stelsel!

- Parametervergelijkingen van rechten in de ruimte $\mathbb{R}^3$ zijn volledig gelijkaardig: er is enkel een extra coördinaat.

Oefening 6.3.1. Geef een parametervergelijking van volgende rechten:

1. door $(-1,-2)$ en evenwijdig met de vector $(7,8)$

2. door $(-1,-2)$ en evenwijdig met de vector $(7,7)$

3. door $(-1,-2)$ en $(7,8)$

Oefening 6.3.2. Geef telkens drie punten en een richtingsvector van volgende rechten:

1. $L \leftrightarrow \begin{cases} x = 7t-1 \\ y = 8t-2 \end{cases}$

2. $L \leftrightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = 8t-2 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Parametervergelijking van een rechte

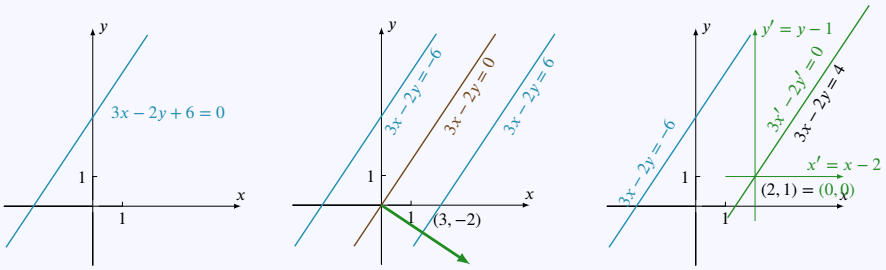
3. $L \leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 8t - 2 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 2D: Cartesiaanse vergelijkingen

Een lineaire vergelijking in x en y bepaalt een rechte in het vlak.

Voorbeeld 6.4.1. Bestudeer de vergelijking $3x-2y+6=0$. Wie dit voorbeeld onmiddellijk begrijpt, kan het hoofdstukje over cartesiaanse vergelijkingen overslaan.



We kunnen over de vergelijking $3x-2y+6=0$ het volgende opmerken:

- door $x=0$ resp. $y=0$ te kiezen vinden we onmiddellijk twee punten van de rechte: $(0,-3)$ en $(2,0)$. Daarmee is de rechte al volledig bepaald.
- door de vergelijking te herschrijven als $y=\dfrac{3x+6}{2}$ vinden we *voor elke* x een bijhorende y. Op deze manier is de rechte de grafiek van de (lineaire) functie $x \mapsto \dfrac{3x+6}{2}$.
- door de vergelijking te herschrijven als $x=\dfrac{2y-6}{3}$ vinden we *voor elke* y een bijhorende x.
- liefhebbers van *stelsels* kunnen de vergelijking beschouwen als een stelsel van één vergelijking in twee onbekenden. Er is dan één hoofdonbekende, en één nevenonbekende, en de oplossingen van het stelsel zijn

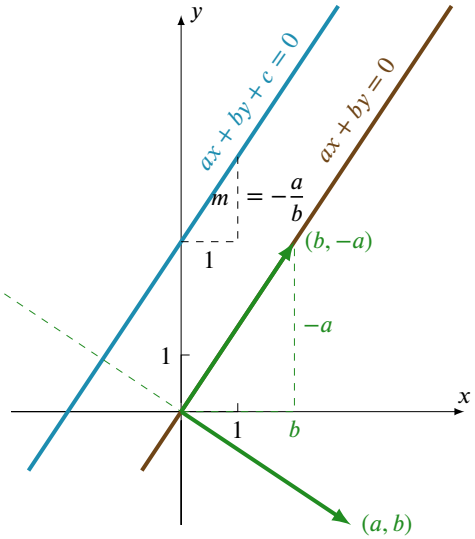
$$\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{3}{2}t+3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{of ook} \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t-2 \\ y=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

  Dit blijken precies de parametervergelijkingen te zijn van de rechte met vergelijking $3x-2y+6=0$.
- de vergelijking $3x-2y+6=0$ is een *voorwaarde* op koppels (x,y). De koppels die voldoen vormen een rechte in het vlak.
- de vergelijking $3x-2y+7=0$ is een *evenwijdige rechte* (want als $3x-2y=-6$, dan kan natuurlijk niet ook $3x-2y=-7$). Dus, de rechten $2x-2y+a=0$ zijn allemaal onderling evenwijdig voor verschillende $a\in\mathbb{R}$. En dergelijke rechte gaat door de oorsprong precies als $a=0$.
- om a te vinden zodat de evenwijdige $3x-2y=a$ door het punt $(2,1)$ gaat volstaat het te eisen dat $(2,1)$ op $3x-2y=a$ ligt, dus dat $3(2)-2(1)=a$. Je vindt dan direct $a=6-2=4$. Een alternatieve manier is om het xy-assenstelsel te verschuiven over de vector $(2,1)$ via $(x',y')=(x-2,y-1)$, en op te merken dat de rechte in $x'y'$-coördinaten door de oorsprong gaat, dus van de vorm $3x'-2y'=0$ moet zijn. Dus moet $3(x-2)-2(y-1)=0$, of $3x-2y-6+2=0$ waaruit ook volgt dat $a=4$.
- liefhebbers van het *scalair product* kunnen opmerken dat $3x+2y=0$ ook kan geschreven worden als $(2,3)\cdot(x,y)=0$, en bijgevolg vaststellen dat de vector $(2,3)$ loodrecht staat op de rechte met vergelijking $3x-2y=0$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 2D: Cartesiaanse vergelijkingen

- liefhebbers van *analogieën* kunnen opmerken dat de rechte met vergelijking $3x - 2y + 6 = 0$ min of meer *bepaald wordt door de drie getallen* $3, -2, 6$. In de negentiende eeuw hebben wiskundigen haakjes rond die getallen gezet en opgemerkt dat je dergelijk drietal $(3, -2, 6)$ misschien kan beschouwen als *coördinaten van een rechte*, net zoals $(2, 3)$ *coördinaten* zijn van een punt. Dat leidt tot de bijzonder interessante zogenaamde projectieve meetkunde, die we hier echter niet verder zullen behandelen.



Definitie 6.4.1 (Cartesiaanse vergelijkingen van een rechte)**.**

Een **cartesiaanse vergelijking** van een rechte is een uitdrukking van de vorm

$$ax + by + c = 0 \quad (\text{ of ook } ax + by = d)$$

met a en b niet beide nul, en waarbij een punt (x_0, y_0) op de rechte ligt als en slechts als $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Als $b \neq 0$ kan dergelijke vergelijking na delen door b ook worden geschreven in de vorm

$$y = mx + q$$

We noemen $m = -\frac{a}{b}$ de **richtingscoëfficiënt** van de rechte.
De richtingscoëfficiënt geeft de stijging of daling van de rechte aan als x met één eenheid toeneemt.

Eigenschap 6.4.1. Voor de rechte met vergelijking $ax + by + c = 0$ geldt:

$a = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de x-as	$\iff$	$y = k$
$b = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de y-as	$\iff$	$x = k$
$c = 0$	$\iff$	de rechte gaat door de oorsprong	$\iff$	$ax + by = 0$ of $y = kx$ of $x = k'y$

Eigenschap 6.4.2 (Evenwijdigheid en loodrechte stand)**.**

- Alle rechten $ax + by = k$, $k \in \mathbb{R}$ zijn onderling *evenwijdig*
  en hoe groter k, hoe verder de rechte verwijderd is van de oorsprong.
- De rechte $ax + by + c = 0$ staat *loodrecht* op de vector (a, b)

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 2D: Cartesiaanse vergelijkingen

want $ax + by = (a, b) \cdot (x, y) = 0 \iff (a, b) \perp (x, y)$).

Bij volgende eigenschap volgt elk aspect telkens uit het voorgaande. Behalve het laatste, maar dat is evident.

Eigenschap 6.4.3 (Vergelijking van een rechte)**.**

- De rechte door de oorsprong en punt (x_1, y_1) heeft vergelijking

$$y_1 x - x_1 y = 0 \quad \text{of dus} \quad y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x \quad \text{of} \quad \boxed{y = mx}$$

  met $m = \dfrac{y_1}{x_1}$ de richtingscoëfficient.

- De rechte door punt (x_1, y_1) met richtingscoëfficiënt m heeft (wegens verschuiving van voorgaande) vergelijking

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

- De rechte door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) heeft als richting het verschil tussen beide punten, en dus als richtingscoëfficiënt

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left(= \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} \right),$$

  en dus als vergelijking

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)}$$

- De rechte die de x-as snijdt in $(a, 0)$ en de y-as in $(0, b)$ (met a en b beide verschillend van 0) heeft vergelijking

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

  want beide punten $(a, 0)$ en $(0, b)$ voldoen duidelijk aan de vergelijking.

Enkel wie over een echt goed geheugen beschikt met bovendien voldoende vrije capaciteit die toch niet voor meer nuttige dingen kan gebruik worden, ofwel wie heel erg fan is van cartesiaanse vergelijkingen moet bovenstaande formules proberen onthouden en van buiten leren. Voor al de anderen volstaat het volgende voorbeelden en oefeningen met de nodige aandacht te maken, en ze zullen de formules sneller kunnen reconstrueren zodra ze ze ergens nodig hebben dan dat de anderen ze zich kunnen herinneren.

Voorbeeld 6.4.2. Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door de oorsprong en $(3, 6)$: $y = 2x$
2. door $(0, 1)$ en $(3, 7)$: $y = 2x + 1$
3. door de oorsprong en $(-1, -2)$: $y = 2x$
4. door $(0, 0)$ en $(-1, -1)$: $x = y$
5. door $(0, 0)$ en $(-1, -2)$: $y = 2x$
6. door $(0, 1)$ en $(-1, -1)$: $y = 2x + 1$
7. door $(1, 2)$ en $(-1, -2)$: $y = 2x$

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 2D: Cartesiaanse vergelijkingen

Oefening 6.4.1. Teken de rechten met volgende vergelijkingen:

1. $y = 3x + 2$
2. $y = 2x + 3$
3. $y = -3x$
4. $y = -2x + 3$

Duidt telkens de snijpunten aan met de assen en de richtingscoëfficiënten.

Oefening 6.4.2. Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door de oorsprong en $(3, 6)$
2. door de $(0, 1)$ en $(3, 7)$
3. door de oorsprong en $(-1, -2)$
4. door de $(0, 0)$ en $(-1, -1)$
5. door de $(0, 0)$ en $(-1, -2)$
6. door de $(0, 1)$ en $(-1, -1)$
7. door de $(1, 2)$ en $(-1, -2)$

CC BY-NC-SA 4.0

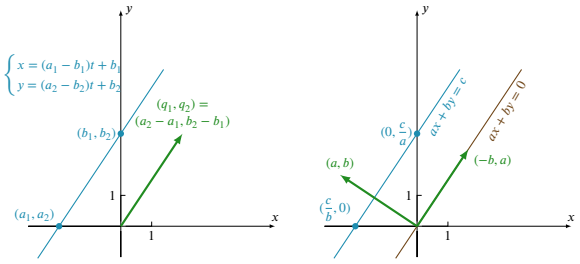
6.5 2D: omzetten van vergelijkingen

Een rechte in het vlak wordt bepaald door twee punten, één punt en een richting, een parametervergelijking of een cartesiaanse vergelijking. Het is nuttig vlot te kunnen overschakelen tussen deze voorstellingen.

Eigenschap 6.5.1. Eigenschappen en alternatieve karakteriseringen van rechten gegeven door:

punten (a_1, a_2) en (b_1, b_2)	richtingsvector	$(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$
	parametervergelijking	$\begin{cases} x = (a_1 - b_1)t + b_1 \\ y = (a_2 - b_2)t + b_2 \end{cases}$
	cartesiaanse vergelijking	$y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)$
punt (a_1, a_2) en richting (q_1, q_2)	punten	(a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$
	parametervergelijking	$\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
	cartesiaanse vergelijking	$y - a_2 = \frac{q_2}{q_1}(x - a_1)$
vergelijking $\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}$	punten	(a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$
	richtingsvector	(q_1, q_2)
	cartesiaanse vergelijking	$y - a_2 = \frac{q_2}{q_1}(x - a_1)$
vergelijking $ax + by = c$	punten	$(0, \frac{c}{b})$ en $(\frac{c}{a}, 0)$
	loodrichting	(a, b)
	richtingsvector	$(-b, a)$
	parametervergelijking	$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{a}{b}t + \frac{c}{b} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

(Op de volgende bladzijde vind je *hetzelfde* schema met uitleg)



6.5 2D: omzetten van vergelijkingen

punten (a_1, a_2) en (b_1, b_2)

richtingsvector $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

verschil van twee punten; ook $k(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ zijn richtingsvectoren

parametervergelijking $\begin{cases} x = (a_1 - b_1)t + b_1 \\ y = (a_2 - b_2)t + b_2 \end{cases}$

via 'punt + parameter maal richting'; ook $\begin{cases} x = (a_1 - b_1)t + a_1 \\ y = (a_2 - b_2)t + a_2 \end{cases}$,

$\begin{cases} x = (b_1 - a_1)t + a_1 \\ y = (b_2 - a_2)t + a_2 \end{cases}$ en $\begin{cases} x = a_1 t + (1-t)b_1 \\ y = a_2 t + (1-t)b_2 \end{cases}$

zijn parametervergelijkingen van dezelfde rechte

cartesiaanse vergelijking $y - a_2 = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)$

via formule 'rechte door twee punten', of eenvoudiger via

de rechte met helling $m = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ is $y = mx$, en omdat de rechte door (a_1, a_2)

moet gaan passen we de verschuiving $(x, y) \mapsto (x - a_1, y - a_2)$ toe.

Ook $(b_2 - a_2)(x - a_1) - (b_1 - a_1)(y - a_2) = 0$

en $(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y = (b_2 - a_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2$

zijn cartesiaanse vergelijkingen van dezelfde rechte.

punt (a_1, a_2) en richting (q_1, q_2)

punten (a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$

alle $(a + kp, b + kq)$ liggen op de rechte, met $k \in \mathbb{R}$

parametervergelijking $\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

via 'punt + parameter maal richting'

cartesiaanse vergelijking $y - a_2 = \dfrac{q_2}{q_1}(x - a_1)$

$\dfrac{q_2}{q_1}$ is de helling, dan verschuiven over (a_1, a_2);

kan via uitwerken in de vorm $ax + by = c$ worden geschreven.

vergelijking $\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}$

punten (a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$

elke waarde van ty levert een punt op

richtingsvector (q_1, q_2)

via aflezen uit de parametervergelijkingen in standaard vorm

cartesiaanse vergelijking $y - a_2 = \dfrac{q_2}{q_1}(x - a_1)$

ofwel via 'eliminatie van t': bereken uit de eerste vergelijking $t = \dfrac{1}{q_1}(x - a_1)$, en substitueer dat in de tweede vergelijking; ofwel via de formule voor 'punt+richting gegeven', of zelfs voor 'twee punten gegeven'.

vergelijking $ax + by = c$

punten $(0, \dfrac{c}{b})$ en $(\dfrac{c}{a}, 0)$

via invullen $x = 0$, en daarna $y = 0$

loodrichting (a, b)

via aflezen: $ax + by = 0 \iff (a, b) \cdot (x, y) = 0 \iff (a, b) \perp (x, y)$

richtingsvector $(-b, a)$

omdat $(-b, a)$ loofdrecht staat op (a, b) (wegens kwartdraai is $(x, y) \mapsto (-y, x)$)

parametervergelijking $\begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{a}{b}t + \dfrac{c}{b} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

via 'kies $x = t$ en bereken y uit $ax + by = c$'

ook $\begin{cases} x = -\dfrac{b}{a}t + \dfrac{c}{a} \\ y = t \end{cases}$ is een parametervergelijking van dezelfde rechte.

Opmerking 6.5.1. Opmerkingen over cartesiaanse- en parametervergelijkingen in het vlak:

- parametervergelijkingen *genereren* punten: elke waarde van de parameter levert een punt van de rechte. Een bepaald punt (x, y) ligt op de rechte ligt als er een parameter bestaat die precies

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 2D: omzetten van vergelijkingen

dat punt (x, y) geeft. Het vinden van die parameter komt neer op het oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen in één onbekende t, met parameters x en y. De oplossingsvoorwaarde voor dat stelsel is precies de cartesiaanse vergelijking. Merk op dat deze techniek de rol van 'parameters' en 'onbekenden' omkeert!

- cartesiaanse vergelijkingen leggen voorwaarden op aan punten: een bepaald punt (x, y) ligt op de rechte als het voldoet aan de vergelijking. Om alle punten te vinden, moet je de éne vergelijking in twee onbekenden oplossen, en die oplossing is precies de parametervergelijking van die rechte.
- dezelfde dualiteit tussen 'genereren' en 'beperken' vind je ook terug in andere contexten: de verzameling van de even natuurlijke getallen kan je schrijven als

  $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ genereren, met parameter n
  $\{n \mid \exists m \in \mathbb{N} : 2m = n\}$ beperken, met oplosbaarheidvoorwaarde voor vergelijking $2x = n$

- omzetten van cartesiaans naar parameter is 'oplossen van een (stelsel van) vergelijkingen'
- omzetten van parameter naar cartesiaans is 'parameter elimineren', of dus het opstellen van een oplosbaarheidsvoorwaarde voor een stelsel.
- een parametervergelijking $\mathbf{x} = \mathbf{q}t + \mathbf{p}$ bevat een **richtvector** $\mathbf{q}$.
- een cartesiaanse vergelijking $ax + by = c$ bevat een **loodvector** (a, b).
- in het vlak is het erg eenvoudig een loodvector te vinden: $(a, b) \perp (-b, a)$.
- de rechte door de oorsprong en
  - met richting $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ bestaat uit de veelvouden van $\mathbf{q}$, en heeft dus parametervergelijking
    $$(x, y) = t(q_1, q_1)$$
    Dit betekent $x = tq_1$ en $y = tq_2$, en door $x = tq_1 \iff t = \frac{x}{q_1}$ in te vullen in $y = tq_2$ bekomen we de cartesiaanse vergelijking
    $$y = \frac{x}{q_1}q_2 \text{ of } y = \frac{q_2}{q_1}x \text{ of } q_1y = q_2x \text{ of } q_2x - q_1y = 0 \text{of } (q_2, -q_1)\cdot(x, y) = 0 \text{ of } (-q_2, q_1) \perp (x, y)$$
  - loodrecht op de vector $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ heeft als cartesiaanse vergelijking
    $$(q_1, q_2)\ cdot(x, y) = 0 \text{ of } q_1x + q_2y = 0$$
    Deze vergelijking oplossen betekent voor een willekeurige $x = t$ de bijhorende y te vinden. Als $q_1x + q_2y = 0$ en $x = t$, dan moet $y = -\frac{q_1}{q2}t$ en dus bekomen we de parametervergelijking
    $$(x, y) = (t, -\frac{q_1}{q2}t)$$
    Als $q_2 \neq 0$ krijg je equivalente maar eenvoudigere formules door de keuze $x = q_2t$:
    $$(x, y) = (q_2t, -q_1t)$$

- met de formule $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ van een 2×2 determinant kunnen we ook schrijven:

  rechte loodrecht op (a, b) : $(a, b) \cdot (x, y) = 0$ of $ax + by = 0$ of $\begin{vmatrix} x & y \\ -b & a \end{vmatrix} = 0$

  rechte met richting (a, b) : $(-b, a) \cdot (x, y) = 0$ of $-bx + ay = 0$ of $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 0$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

6.5 2D: omzetten van vergelijkingen

- in het vlak gelden dus volgende eigenschappen van evenwijdigheid en loofrechte stand:

$$\begin{aligned} (a,b)\cdot(c,d) = 0 &\iff (a,b)\perp(c,d) \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 &\iff (a,b)\parallel(c,d) \end{aligned}$$

Opmerking 6.5.2. We zullen deze vergelijkingen verder veralgemenen naar de driedimensionale ruimte. In de driedimensionale ruimte zijn niet alleen rechten van belang, maar ook *vlakken*. We bouwen in wat volgt deze theorie stap voor stap op, maar merken hier als inleiding en voorsmaakje al het volgende op:

- de parametervergelijking van een rechte in het vlak veralgemeent onmiddellijk naar een parametervergelijking van een rechte in de ruimte:

  rechte in het vlak: $(x,y) = (q_1,q_2)t + (p_1,p_2)$
  rechte in de ruimte: $(x,y,z) = (q_1,q_2,q_3)t + (p_1,p_2,p_3)$

- een cartesiaanse vergelijking van een rechte in het vlak veralgemeent onmiddellijk naar een cartesiaanse vergelijking van een **vlak** in de ruimte:

  rechte in het vlak: $ax + by = c$
  vlak in de ruimte: $ax + by + cd = d$

- een parametervergelijking van een vlak heeft **twee parameters**:

  vlak in de ruimte: $(x,y,z) = (q_1,q_2,q_3)t + (r_1,r_2,r_3)s + (p_1,p_2,p_3)$

- een cartesiaanse vergelijking van een rechte in de ruimte is een stelsel van **twee vergelijkingen**:

  rechte in de ruimte: $\begin{cases} ax + by + cz = g \\ dx + ey + fz = h \end{cases}$

Dus parametervergelijkingen van rechten en cartesiaanse vergelijkingen van vlakken zijn eenvoudig, voor parametervergelijkingen van vlakken is er een complicatie dat er meer dan één parameter is, en vooral voor cartesiaanse vergelijkingen van rechten stelt zicht de uitdaging dat er niet langer één vergelijking is, maar een stelsel van meerdere vergelijkingen.

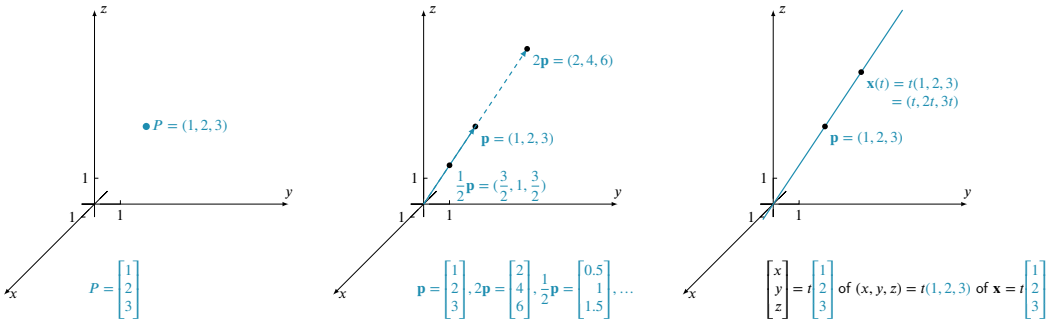
CC BY-NC-SA 4.0

6.6 3D, rechten: parametervergelijkingen

Parametervergelijkingen voor rechten in de driedimensionale ruimte zijn volledig gelijkaardig aan de parametervergelijkingen van rechten in het vlak. Het enige verschil is dat de punten en vectoren nu drie componenten hebben in plaats van twee. Als gevolg daarvan kunnen we wel geen richtings*coëfficiënt* meer definiëren maar zullen we steeds met richtings*vectoren* moeten werken.

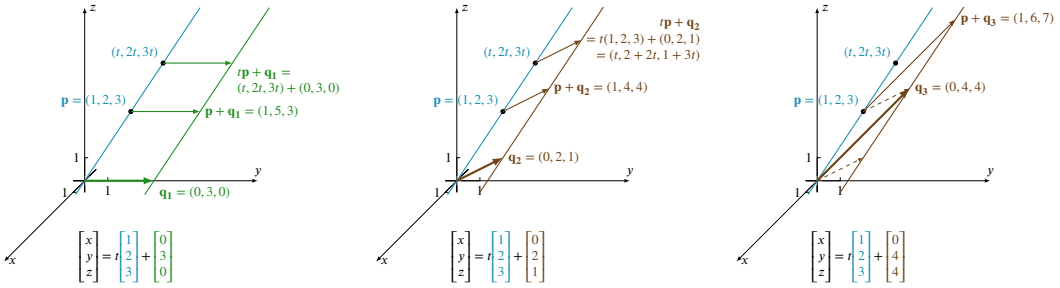
Dit hoofdstuk is volledig analoog opgebouwd als dat over parametervergelijkingen in het *vlak*.

Alle veelvouden van een vector vormen een rechte door de oorsprong:



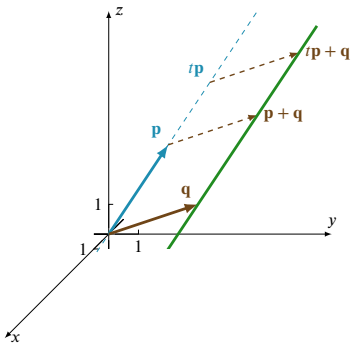
Alle punten van de rechte door $(0,0,0)$ en door het punt $P(x_1, y_1, z_1)$ zijn van de vorm $t(x_1, y_1, z_1)$, of dus (tx_1, ty_1, tz_1), met t een willekeurig reëel getal. Merk op dat deze rechte samenvalt met de rechte door $(2x_1, 2y_1, 2z_1)$ of meer algemeen door (kx_1, ky_1, kz_1), met $k \in \mathbb{R}_0$.

Door dergelijke rechte te verschuiven bekomen we *evenwijdige rechten*:



Merk op dat verschuiven over $\mathbf{q_2} = (0,2,1)$ of verschuiven over $\mathbf{q_3} = (0,4,4)$ hier *dezelfde* rechte oplevert.

Als de parameter loopt doorheen de reële getallen bekom je *alle punten van een rechte* die door een punt $\mathbf{q}$ gaat en evenwijdig is met een vector $\mathbf{p}$. Op onderstaande tekening is de groene rechte de verschuiving van de blauwe rechte over een afstand $\mathbf{q}$ maar ook de som van alle herschalingen van $\mathbf{p}$ en het punt $\mathbf{q}$:



CC BY-NC-SA 4.0

6.6 3D, rechten: parametervergelijkingen

Definitie 6.6.1 (Parametervergelijkingen van een rechte)**.**

Een **parametervergelijking** van een rechte met **richtingsvector** $\mathbf{p} = (x_1, y_1, z_1)$, **steunvector** $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ en parameter t is een uitdrukking van de vorm

$$L \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

die we ook kunnen schrijven als

$$L \leftrightarrow \begin{cases} x = tx_1 + q_x \\ y = ty_1 + q_y \\ z = tz_1 + q_z \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y, z) = t(x_1, y_1, z_1) + (q_x, q_y, q_z), \quad t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y, z) = (tx_1 + q_x, ty_1 + q_y, tz_1 + q_z), \quad t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow \mathbf{x} = t\mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Deze rechte *bevat* de steunvector $\mathbf{q}$ en is *evenwijdig* met de richtingsvector $\mathbf{p}$.

Deze rechte is de *verschuiving* van de rechte bepaald door de richtingsvector $\mathbf{p}$ over de steunvector $\mathbf{q}$.

Deze rechte is de steunvector $\mathbf{q}$ waarbij willekeurige veelvouden van de richtingsvector $\mathbf{p}$ zijn opgeteld.

Voorbeeld 6.6.1.

De rechte door de oorsprong en het punt $(1, 2, 3)$ heeft als parametervergelijking $L_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t, \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

De rechte door $(1, 2, 3)$ evenwijdig met de x-as heeft als parametervergelijking $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, wat ook geschreven kan worden als $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

De rechte door $(3, 4, 5)$ evenwijdig met L_1 heeft als parametervergelijking $L_3 \leftrightarrow \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t + 4 \\ z = 3t + 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

De opmerkingen voor parametervergelijkingen van rechten in het vlak blijven gelden.

CC BY-NC-SA 4.0

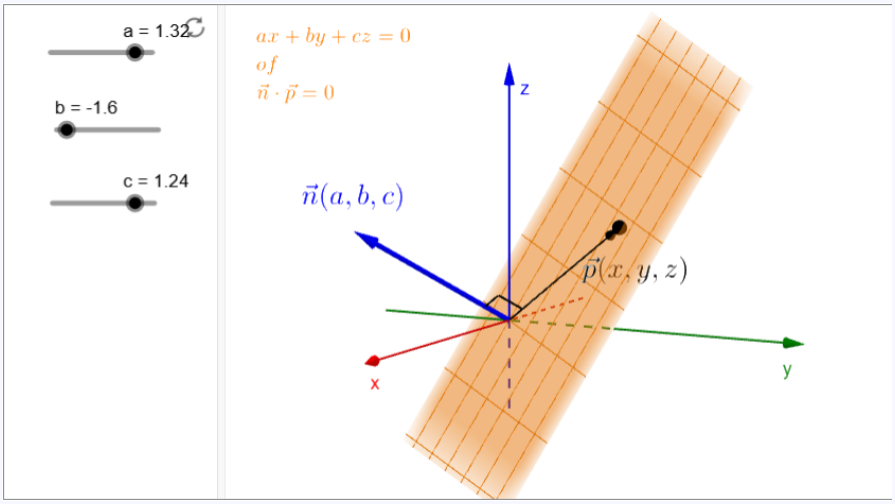
6.7 3D, vlakken: Cartesiaanse vergelijkingen

Cartesiaanse vergelijkingen voor *vlakken* in de driedimensionale ruimte zijn volledig gelijkaardig aan de cartesiaanse vergelijkingen van *rechten* in het vlak. Het enige verschil is dat de punten en vectoren nu drie componenten hebben in plaats van twee. Dit hoofdstuk is dan ook volledig analoog opgebouwd als dat over cartesiaanse vergelijkingen van rechten in het *vlak*.

Een lineaire vergelijking in drie variabelen x, y en z bepaalt een vlak in de ruimte.

Voorbeeld 6.7.1. Bestudeer de vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/kdAmrQZF



We kunnen over de vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$ het volgende opmerken:

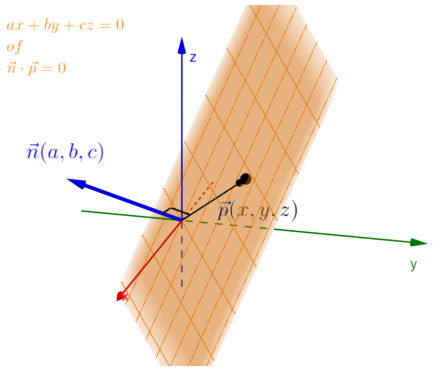
- door telkens twee van x, y en z nul te kiezen vinden we onmiddellijk drie punten van de vlak: $(-2, 0, 0), (0, 3, 0)$ en $(0, 0, 6)$. Daarmee is het vlak al volledig bepaald.
- door de vergelijking te herschrijven als $z = 3x - 2y + 6$ vinden we *voor elke* x *en* y een bijhorende z. Op deze manier kan het vlak beschouwd worden als de grafiek van de (lineaire) functie in twee veranderlijken $(x, y) \mapsto 3x - 2y + 6$.
- door de vergelijking te herschrijven als $x = \dfrac{2y + z - 6}{3}$ vinden we *voor elke* y *en* z een bijhorende x. Analoog voor $y = \dfrac{3x - 3 + 6}{2}$.
- liefhebbers van *stelsels* kunnen de vergelijking beschouwen als een stelsel van één vergelijking in drie onbekenden. Er zijn dan twee hoofdonbekenden, en één nevenonbekende, en de oplossingen van het stelsel zijn
$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 3s - 2t + 6 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$
Dit zullen precies parametervergelijkingen zijn van het vlak met vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$.
- de vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$ is een *voorwaarde* op drietallen (x, y, z). De drietallen die voldoen vormen een vlak in de ruimte.
- de vergelijking $3x - 2y - z + 7 = 0$ is een *evenwijdig vlak* (want als $3x - 2y - z = -6$, dan kan natuurlijk niet ook $3x - 2y - z = -7$). Dus, de vlakken $3x - 2y - z + a = 0$ zijn allemaal

CC BY-NC-SA 4.0

6.7 3D, vlakken: Cartesiaanse vergelijkingen

onderling evenwijdig voor verschillende $a \in \mathbb{R}$. En dergelijk vlak gaat door de oorsprong precies als $a = 0$.

- om a te vinden zodat het evenwijdige valk $3x - 2y - z = a$ door het punt $(2, 1, 1)$ gaat volstaat het te eisen dat $(2, 1, 1)$ op $3x - 2y - z = a$ ligt, dus dat $3(2) - 2(1) - (1) = a$. Je vindt dan direct $a = 6 - 2 - 1 = 3$. Een alternatieve manier is om het xy-assenstelsel te verschuiven over de vector $(2, 1, 1)$ via $(x', y', z') = (x - 2, y - 1, z - 1)$, en op te merken dat het vlak in $x'y'z'$-coördinaten door de oorsprong gaat, dus van de vorm $3x' - 2y' - z' = 0$ moet zijn. Dus moet $3(x - 2) - 2(y - 1) - (z - 1) = 0$, of $3x - 2y - z - 6 + 2 + 1 = 0$ waaruit ook volgt dat $a = 3$.
- liefhebbers van het *scalair product* kunnen opmerken dat $3x + 2y - z = 0$ ook kan geschreven worden als $(2, 3, -1) \cdot (x, y, z) = 0$, en bijgevolg vaststellen dat de vector $(2, 3, -1)$ loodrecht staat op het vlak met vergelijking $3x - 2y - z = 0$.
- liefhebbers van *analogieën* kunnen opmerken dat het vlak met vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$ min of meer *bepaald wordt door de vier getallen* $3, -2, -1, 6$. In de negentiende eeuw hebben wiskundigen haakjes rond die getallen gezet en opgemerkt dat je dergelijk viertal $(3, -2, -1, 6)$ misschien kan beschouwen als *coördinaten van een vlak*, net zoals $(2, 3, 1)$ *coördinaten* zijn van een punt. Dat leidt tot de bijzonder interessante zogenaamde projectieve meetkunde, die we hier echter niet verder zullen behandelen.



Definitie 6.7.1 (Cartesiaanse vergelijkingen van een vlak)**.**

Een **Cartesiaanse vergelijking** van een vlak V is een uitdrukking van de vorm

$$V \leftrightarrow \boxed{ax + by + cz + d = 0} \quad (\text{ of ook } ax + by + cz = f)$$

met a, b en c niet alle drie tegelijk nul.
Een punt (x_0, y_0, z_0) ligt op het vlak V als en slechts als $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

Merk op dat het niet mogelijk is een 'richtingscoëfficiënt' te definiëren van een vlak omdat 'richtingen' in het vlak meer dan één vrijheidsgraad hebben. We werken bij vlakken dus steeds met de richtings*vectoren*.

Eigenschap 6.7.1 (Evenwijdigheid en loodrechte stand)**.**

- Alle vlakken $V_k \leftrightarrow ax + by + cz = k$, $k \in \mathbb{R}$ zijn onderling *evenwijdig* want voor verschillende k zijn hun doorsnedes (natuurlijk) leeg.
- Elk vlak $V_k \leftrightarrow ax + by + cz = k$ staat *loodrecht* op de vector (a, b, c) want $ax + by + cz = (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0 \iff (a, b, c) \perp (x, y, z)$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.7 3D, vlakken: Cartesiaanse vergelijkingen

Eigenschap 6.7.2 (Vergelijking van een vlak)**.**

- Een vlak door de oorsprong en loodrecht op (a, b, c) heeft vergelijking

$$ax + by + cz = 0$$

- Een vlak door punt (x_1, y_1, z_1) en loodrecht op (a, b, c) heeft vergelijking

$$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1 \quad \text{of} \quad a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(y - y_1) = 0$$

- Het vlak dat de x-as snijdt in $(a, 0, 0)$, de y-as in $(0, b, 0)$ en de z-as in $(0, 0, c)$ (met a, b en c verschillend van 0) heeft vergelijking

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

want de drie punten $(a, 0, 0), (0, b, 0)$ en $(0, 0, c)$ voldoen duidelijk aan de vergelijking.

Voorbeeld 6.7.2. Geef de vergelijking van volgende vlakken:

1. door de oorsprong, $(3, 6, 9)$ en $(1, 2, 9)$: $y = 2x$

2. door $(0, 1, 0)$, $(3, 7, 42)$ en $(1, 3, 0)$: $y = 2x + 1$

3. door de oorsprong,$(-1, -2, -1)$ en $(-3, -6, 9)$: $y = 2x$

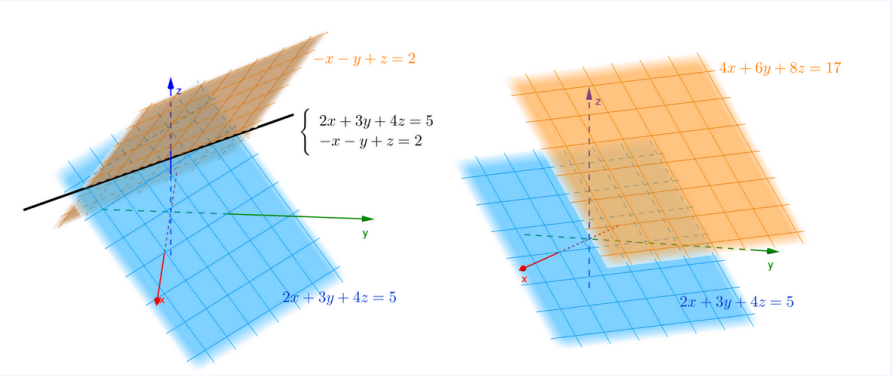
4. door de $(1, 0, 0), (42, 42, 42)$ en $(42, 0, 0)$: $y = z$

CC BY-NC-SA 4.0

6.8 3D, rechten: Cartesiaanse vergelijkingen

Een lineaire vergelijking in x, y en z bepaalt een vlak in de ruimte. De *doorsnede* van twee vlakken bepaalt (meestal) een rechte. De cartesiaanse vergelijking van een rechte bestaat uit *twee* vergelijkingen, of dus een stelsel van vergelijkingen.

Voorbeeld 6.8.1. Bestudeer het stelsel $\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ -x-y+z=2 \end{cases}$.



- Dit stelsel beschrijft de punten die zowel aan de eerste als aan de tweede vergelijking voldoen, en dus de *doorsnede* van twee vlakken.
- Om effectief punten te vinden in die doorsnede moet je het *stelsel oplossen*.
- Als de vlakkken *evenwijdig* zijn is de doorsnede *leeg*. Als ze *samenvallen* is de doorsnede een *vlak*.

Definitie 6.8.1. Een **Cartesiaanse vergelijking** van een rechte L is een uitdrukking van de vorm

$$L \leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$$

met $(a_1,b_1,c_1) \neq (0,0,0)$, $(a_2,b_2,c_2) \neq (0,0,0)$ en (a_1,b_1,c_1) geen veelvoud van (a_2,b_2,c_2).
Een punt (x_0,y_0,z_0) ligt op de rechte L ligt als en slechts als het punt voldoet aan beide vergelijkingen.

De cartesiaanse vergelijking van een rechte is niet uniek: elk stel vlakken met die rechte als snijlijn levert er één.

Voorbeeld 6.8.2.

Vergelijking	Beschrijving	Alternatieve vergelijkingen
$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$	de x-as	$\begin{cases} y=0 \\ z=y \end{cases}$
$\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$	de 'hoofddiagonaal' in het xy-vlak	$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ 42x-42y+z=0 \end{cases}$
$\begin{cases} x=y \\ z=y \end{cases}$	de 'hoofddiagonaal' in de ruimte	$\begin{cases} x=y \\ x=z \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

6.8 3D, rechten: Cartesiaanse vergelijkingen

Voorbeeld 6.8.3. Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door $(0,0,1)$ en $(3,6,1)$: $\begin{cases} y = 2x \\ z = 1 \end{cases}$

2. door $(0,1,1)$ en $(3,7,7)$: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$

3. door de oorsprong en $(-1,-2,1)$: $\begin{cases} y = 2x \\ z = 1 \end{cases}$

4. door $(0,0,0)$ en $(-1,-1,-1)$: $\begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

6.9 3D, vlakken: parametervergelijkingen

Omdat vlakken *twee*dimensionaal zijn bevatten de parametervergelijkingen van een vlak *twee* parameters.

Definitie 6.9.1 (Parametervergelijkingen van een vlak)**.**

Een **parametervergelijking** van een vlak V met **richtingsvectoren** $\mathbf{p_1} = (x_1, y_1, z_1)$ en $\mathbf{p_2} = (x_2, y_2, z_2)$, met **steunvector** $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ en met parameters s en t

is een uitdrukking van de vorm

$$V \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

die als de parameters s, t alle reële waarden doorlopen, alle punten levert van het vlak V.

Dezelfde uitdrukking kan ook geschreven worden als

$$V \leftrightarrow \begin{cases} x = sx_1 + tx_2 + q_x \\ y = sy_1 + ty_2 + q_y \\ z = sz_1 + tz_2 + q_z \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

of als $V \leftrightarrow (x, y, z) = s(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2) + (q_x, q_y, q_z), \qquad s, t \in \mathbb{R}$

of als $V \leftrightarrow (x, y, z) = (sx_1 + tx_2 + q_x, sy_1 + ty_2 + q_y, sz_1 + tz_2 + q_z), \qquad s, t \in \mathbb{R}$

of als $V \leftrightarrow \mathbf{x} = s\mathbf{p_1} + t\mathbf{p_2} + \mathbf{q}, \qquad s, t \in \mathbb{R}$

Dit vlak V *bevat* de steunvector $\mathbf{q}$ en is *evenwijdig* met de richtingsvectoren $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$.

Dit vlak V is het vlak V_o bepaald door de richtingsvectoren $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ de *verschoven* over de steunvector $\mathbf{q}$.

Dit vlak V bestaat uit de steunvector $\mathbf{q}$ waarbij willekeurige veelvouden van de richtingsvectoren $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ zijn opgeteld.

Terwijl de cartesiaanse vergelijking een voorwaarde geeft opdat een punt (x, y, z) op het vlak ligt, geeft de parametervergelijking een meer constructieve beschrijving: elke invulling van s of t als een reëel getal levert een punt van het vlak.

Voorbeeld 6.9.1.

Vlak	Cartesiaanse vergelijking	Parametervergelijking	
xy-vlak	$z = 0$	$(x, y, z) = (s, t, 0)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
$\parallel$ aan xy-vlak	$z = 42$	$(x, y, z) = (s, t, 42)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
xz-vlak	$y = 0$	$(x, y, z) = (s, 0, t)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
Diagonaalvlak	$x = y$	$(x, y, z) = (s, s, t)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
Will. vlak	$2x + 2y - z = 42$	$(x, y, z) = (s, t, 42 + 2x + 2y)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
	of ook	$(x, y, z) = (0, 0, 42) + (s, t, 2s + 2t)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
	of ook	$(x, y, z) = (21 - s + \frac{t}{2}, s, t)$,	$s, t \in \mathbb{R}$

CC BY-NC-SA 4.0

6.10 3D: omzetten van vergelijkingen

We leggen met enkele voorbeelden uit hoe je parametervergelijkingen en cartesiaanse vergelijkingen voor rechten en vlakken in de driedimensionale ruimte in elkaar kan omzetten. Dat komt neer op het '*oplossen van een stelsel*' of het '*elimineren van de parameter(s)*'.

Omdat parametervergelijkingen worden bepaald door *richtingsvectoren*, terwijl cartesische vergelijkingen worden bepaald door *loodrichtingen*, kan het omzetten dus ook door het vinden van *loodvectoren*.

Voorbeeld 6.10.1. Cartesiaanse vergelijking rechte naar parametervergelijkingen via '**oplossen stelsel**'

		Matrixnotatie:
Cartesiaanse vergelijking rechte:	$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$
Werk term met x weg uit vgl 2: (via $R_2 \to R_2 - 3R_1$)	$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$
Werk term met y weg uit vgl 1: (via $R_1 \to 3R_1 - R_2$)	$\begin{cases} 3x-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$
Kies z willekeurig en los op naar de andere variabelen:	$z=u, \quad x=\frac{1}{3}u, \quad y=\frac{2}{3}u$	
Dit zijn al de parametervergelijkingen, die met een nieuwe parameter $3t=u$ nog eenvoudiger kunnen geschreven worden:	$\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$	of $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
of nog eenvoudiger:	$(x,y,z)=(1,2,3)t, t \in \mathbb{R}$	

Opmerking 6.10.1. Een alternatieve methode gebruikt **loodvectoren**: voor de parametervergelijking hebben we een richtingsvector nodig, de cartesische vergelijking levert twee loodvectoren. De gezocht richting moet dus loodrecht staan op beide loodvectoren, en het vectorieel product levert onmiddellijk zo'n vector:

De richtingsvector moet loodrecht staan op de vectoren $(1,1,-1)$ en $(3,6,-5)$, en dat is het geval voor $(1,1,-1)\times(3,6,-5) = (1(-5)-6(-1), -1(-5)-3(-1), 1\cdot 6 - 3\cdot 1) = (1,2,3)$.

De gezochte parametervergelijking is dus $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Voorbeeld 6.10.2. Parametervergelijking rechte naar cartesiaanse vergelijkingen via '**eliminatie**'

Punt $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ligt op de rechte met parametervergelijking $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ zodra een t bestaat zodat

$$\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}.$$

We beschouwen deze laatste uitdrukking dus als een stelsel in één onbekende t, met parameters x, y, z, en onderzoeken de oplossingsvoorwaarden voor dat stelsel in t, in dit geval door uit elke vergelijking

CC BY-NC-SA 4.0

6.10 3D: omzetten van vergelijkingen

t te berekenen:

$$t = x, t = \frac{1}{2}y, \quad t = \frac{1}{3}z.$$

Dergelijke t kan dus enkele bestaan als de drie uitdrukkingen aan elkaar gelijk zijn, dus als:

$$x = \frac{1}{2}y \quad \text{en} \quad x = \frac{1}{3}z \quad \text{of dus} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

en dit zijn precies cartesiaanse vergelijkingen.

Merk op dat cartesiaanse vergelijkingen niet uniek bepaald zijn: *elke* twee vlakken door een rechte leveren een stel cartesiaanse vergelijkingen op:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 5x - y - z = 0 \end{cases}$$

Opmerking 6.10.2. Ook hier is er een alternatieve methode met **loodvectoren**: we kennen de richtingsvector $(1,2,3)$, en het volstaat twee vectoren te vinden die daar loodrecht op staan.

Uit de formule $(a,b,c) \perp (x,y,z) \iff (a,b,c) \cdot (x,y,z) = 0$ volgt onmiddellijk dat

$$(a,b,c) \perp (0,-c,b) \quad \text{en } (a,b,c) \perp (c,0,-a) \quad \text{en } (a,b,c) \perp (-b,-a,0)$$

Let op: als bijvoorbeeld $b = c = 0$ levert dit maar twee niet-nulvectoren, maar dat volstaat.

Voor $(1,2,3)$ zijn loodvectoren bijvoorbeeld $(2,-1,0), (3,0,-1)$ en $(0,3,-2)$, en cartesiaanse vergelijkingen zijn dus

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} 3x - z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Voorbeeld 6.10.3. Parametervergelijking vlak naar cartesiaanse vergelijkingen via '**eliminatie**'

Punt $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ligt in het vlak met parametervergelijking $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ zodra s en t bestaan zodat

$$\begin{cases} x = s + 2t \\ y = 2s + 3t \\ z = 3s + 4t \end{cases}.$$

We beschouwen deze laatste uitdrukking dus als een stelsel in twee onbekenden s, t, met parameters x, y, z, en onderzoeken de oplossingsvoorwaarden voor dat stelsel, in dit geval door s en t te berekenen uit de eerste twee vergelijkingen, en het resultaat in te vullen in de derde vergelijking:

$$\begin{cases} x = s + 2t \\ y = 2s + 3t \end{cases} \iff \begin{cases} s + 2t = x \\ 2s + 3t = y \end{cases} \iff \begin{cases} s + 2t = x \\ -t = -2x + y \end{cases} \; iff \; \begin{cases} s = -3x + 2y \\ t = 2x - y \end{cases}$$

Dit invullen in de derde vergelijking $z = 3s + 4t$ levert de voorwaarde, en dus cartesiaanse vergelijking

$$z = 3(-3x + 2y) + 4(2x - y) \text{of dus } -x + 2y - z = 0 \text{ of ook } x - 2y + z = 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.10 3D: omzetten van vergelijkingen

Opmerking 6.10.3. Ook hier is er een alternatieve methode met **loodvectoren**: we kennen twee richtingsvectoren $(1,2,3)$ en $(2,3,4)$, en het volstaat één vector te vinden die daar loodrecht op staat.

Het vectorieel product levert onmiddellijk zo'n vector:

$$(1,2,3)\times(2,3,4) = (-1,2,-1)$$

en dus is de cartesiaanse vergelijking $-x+2y-z=0$, of dus ook $x-2y+z=0$ (of $2y=x+z$ en dergelijke ...).

CC BY-NC-SA 4.0

6.11 Doorsneden van rechten en vlakken

Doorsneden van rechten en/of vlakken kunnen altijd worden berekend. De techniek is afhankelijk of cartesiaanse dan wel parametervergelijkingen zijn gegeven, en of cartesiaanse dan wel parametervergelijkingen worden gevraagd van de doorsnede. We bespreken hier niet alle gevallen rechte/rechte, rechte/vlak, vlak/vlak, gegeven door parameter- of cartesiaanse vergelijkingen, en snijdend, kruisend, omvattend, evenwijdig,... maar geven op basis van enkele voorbeelden de belangrijkste principes aan.

6.11.1 Twee cartesiaanse vergelijkingen gegeven

Als we *twee cartesiaanse vergelijkingen* gegeven hebben is de situatie het eenvoudigste. Cartesiaanse vergelijkingen bieden een manier om te testen of een willekeurig punt op een rechte of vlak gelegen is. Als we moeten testen of een punt op de doorsnede van twee rechten gelegen is, d.w.z. op de ene én op de andere, dan moeten we gewoon de vergelijkingen van beide rechten samenvoegen. Voor twee rechten vinden we zo een stelsel van 4 vergelijkingen. Bijvoorbeeld voor de rechten

$$\begin{cases} x & +2y & +z & =4 \\ -2x & & +z & =-1 \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} x & +y & & =2 \\ x & & -z & =0 \end{cases}$$

wordt de doorsnede bepaald door het stelsel

$$\begin{cases} x & +2y & +z & =4 \\ -2x & & +z & =-1 \\ x & +y & & =2 \\ x & & -z & =0 \end{cases}$$

De rest van het verhaal is het oplossen van stelsels. Een stelsel van 4 vergelijkingen in 3 onbekenden kan strijdig zijn. We besluiten dan dat de rechten geen punten gemeen hebben. Het kan dan gaan om *evenwijdige* of *kruisende rechten*. (Het onderscheid tussen deze twee gevallen kan gemaakt worden door de richting van beide rechten te vergelijken). Er kan ook een unieke oplossing zijn. De doorsnede bevat één punt en we spreken van *snijdende* rechten. Dit is het geval voor het voorbeeld hierboven. Het snijpunt is $(1,1,1)$. Het kan ook zijn dat beide rechten samenvallen. In dat geval vinden we heel de rechte terug als doorsnede.

Voor de doorsnede van een vlak en een rechte bekomen we een stelsel van *drie* vergelijkingen. Voor de doorsnede van twee vlakken bekomen we een stelsel van *twee* vergelijkingen (dat voor twee snijdende vlakken onmiddellijk de cartesiaanse vergelijking van de snijlijn levert). Werk zelf uit.

6.11.2 Een cartesiaanse en een parametervergelijking gegeven

Indien een *cartesiaanse* vergelijking van een rechte of vlak en een *parametervergelijking* van een andere rechte of vlak gegeven is, gaan we als volgt te werk. Parametervergelijkingen bieden een manier om willekeurige punten van een rechte of vlak te vinden door willekeurige waarden voor de parameters te kiezen. Cartesiaanse vergelijkingen bieden een manier om te testen of een gegeven punt op een rechte of vlak gelegen is. Om de doorsnede te bepalen, nemen we daarom een willekeurig punt van de verzameling die beschreven is door een parametervergelijking, en testen of dat punt ook in de andere verzameling ligt, die gegeven wordt door een cartesiaanse vergelijking.

Voor de doorsnede van het vlak met parametervergelijking

$$(x,y,z) = (1,2,3) + k(1,1,1) + l(1,0,1) \quad \text{met } k,l \in \mathbb{R}$$

en de rechte met cartesiaanse vergelijking

$$\begin{cases} x & +2y & +z & =10 \\ -2x & & +z & =0 \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.11 Doorsneden van rechten en vlakken

gaan we dus na of het punt $(1+k+l, 2+k, 3+k+l)$ dat in het vlak ligt ligt, ook op de rechte ligt, of

$$\begin{cases} (1+k+l) & +2(2+k) & +(3+k+l) & = 10 \\ -2(1+k+l) & & +(3+k+l) & = 0 \end{cases}$$

Na wat herschrijven komt dit neer op

$$\begin{cases} 4k & +2l & = 2 \\ -k & -l & = -1 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft als unieke oplossing $(k, l) = (0, 1)$. Het willekeurig punt $(1+k+l, 2+k, 3+k+l)$ van het vlak ligt dus enkel op de rechte als $k = 0$ en $l = 1$. Het gaat dan om het punt $(2, 2, 4)$.

6.11.3 Twee parametervergelijkingen gegeven

Indien de gegeven verzamelingen beschreven worden door *twee parametervergelijkingen* is het vaak het eenvoudigste om minstens één van beide eerst om te zetten in een cartesiaanse vergelijking. We beschouwen toch een eenvoudig voorbeeld van twee snijdende rechten. Om het snijpunt van de rechte met parametervergelijking

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, 0, 1) \quad \text{met } k \in \mathbb{R}$$

en de rechte met parametervergelijking

$$(x, y, z) = (2, 2, 1) + k(-2, 0, 1) \quad \text{met } k \in \mathbb{R}$$

te bepalen, gaan we op zoek naar een punt van de vorm $(1+k, 2, 3+k)$ dat ook te schrijven is in de vorm $(2-2k', 2, 1+k')$. We lossen daartoe het stelsel

$$\begin{cases} 1+k & = 2-2k' \\ 2 & = 2 \\ 3+k & = 1+k' \end{cases}$$

op. We vinden als unieke oplossing $k = -1$ en $k' = 1$. Dit komt overeen met het punt $(0, 2, 2)$.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 7

Lineaire combinaties en vectorruimten

(Versie 2026/08/25H.56)

7.1 Lineaire combinaties en deelruimten

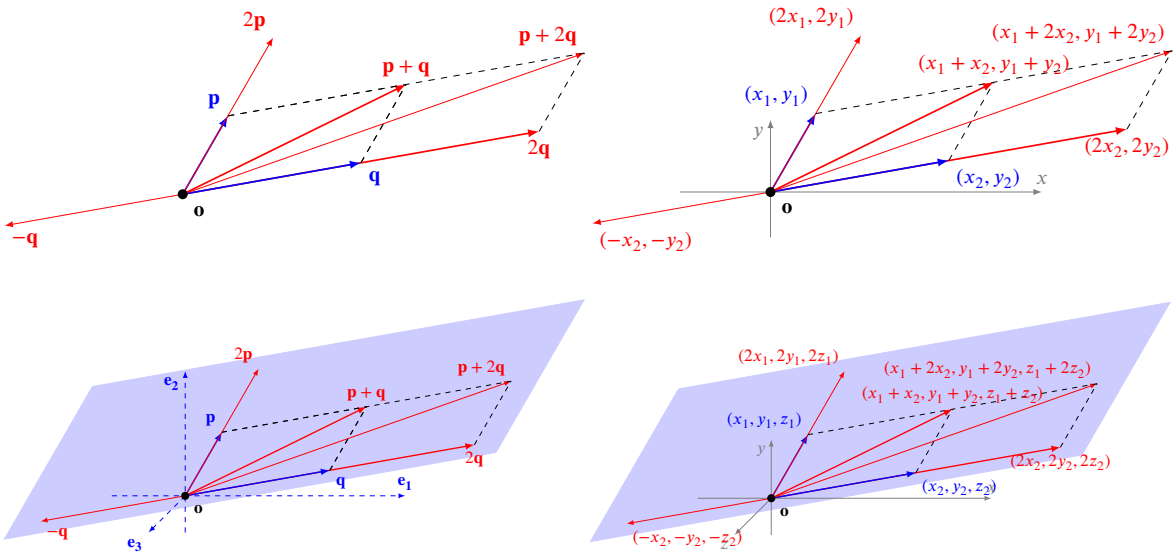
We bespreken kort de belangrijke begrippen lineaire combinatie, lineaire afhankelijkheid en deelruimte, die bijvoorbeeld een nieuwe blik bieden op stelsels.

Dit is geen veronderstelde voorkennis, maar geeft een voorsmaakje van wat in een aantal cursussen van de eerste bachelor wordt behandeld.

Een **lineaire combinatie van vectoren** is per definitie een **som van veelvouden** van die vectoren:

$$r\mathbf{p} + s\mathbf{q}, \qquad \text{met } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, r, s \in \mathbb{R}.$$

De twee basisbewerkingen op vectoren hebben een meetkundige interpretatie: optellen via de *parallellogramregel* en veelvouden via *herschalingen*. Door geschikte combinaties te nemen van som en veelvoud kan je met behulp van twee vectoren in een vlak elk willekeurig punt van dat vlak bereiken, tenminste als de vectoren niet in elkaars verlengde liggen. Een *lineaire combinatie* van de twee vectoren is precies dergelijke *som van veelvouden*.



De *verzameling van alle lineaire combinaties* van een stel vectoren noemen we de **ruimte voortgebracht door dat stel vectoren**, of ook de **ruimte opgespannen door** dat stel vectoren. In het 3D voorbeeld hierboven is de ruimte voortgebracht door $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ *een vlak door de oorsprong* in de driedimensionale ruimte. We noemen een *vlak door de oorsprong* ook een **tweedimensionale deelruimte** van de driedimensionale ruimte. Een *rechte door de oorsprong* is een **ééndimensionale deelruimte**.

Voorbeeld 7.1.1. In de driedimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$ betekent dit concreet:

- een niet-nulvector brengt een rechte voort, dus een ééndimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^3$.
  Zo brengt de vector $(1, 2, -1)$ alle vectoren van de vorm $r(1, 2, -1)$ voort, dus alle $(r, 2r, -r)$ met r een willekeurig reëel getal.
- twee niet-nulvectoren die geen veelvoud zijn van elkaar brengen een vlak voort, dus een tweedimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^3$.
  Zo brengen de vectoren $(1, 2, -1)$ en $(2, 0, 3)$ alle vectoren $r(1, 2, -1) + s(2, 0, 3) = (r+2s, 2r, -r+3s)$ voort met r en s willekeurige reële getallen. Deze vectoren vormen een *tweedimensionale* deelruimte van $\mathbb{R}^3$. Merk op dat de vectoren wel nog steeds met *drie* componenten worden geschreven omdat het vectoren van $\mathbb{R}^3$ zijn.

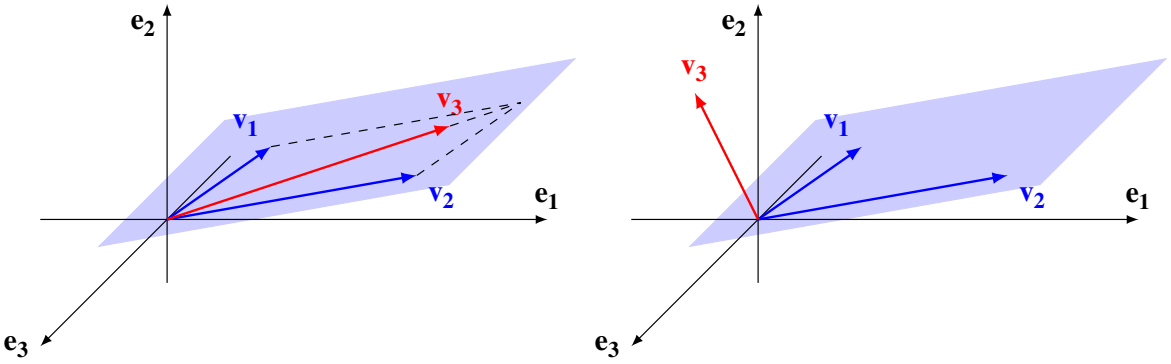
CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Lineaire combinaties en deelruimten

Dezelfde constructies kunnen ook uitgevoerd worden in meerdimensionale ruimten. Zo brengen in $\mathbb{R}^5$ de vectoren $(1,2,3,0,-1)$ en $(-2,1.5,2,0,1)$ een tweedimensionale deelruimte voort, bestaande uit alle vectoren $r(1,2,3,0,-1)+s(-2,1.5,2,0,1)$.

Wat gebeurt er met grotere sets van vectoren, bijvoorbeeld met *drie* vectoren? Als de derde vector in het vlak ligt voortgebracht door de eerste twee, levert deze extra vector geen extra lineaire combinaties op: alle vectoren die kunnen geschreven worden als lineaire combinatie van de drie vectoren zijn dan ook al lineaire combinatie van de eerste twee. Maar als die derde vector *niet* in de tweedimensionale deelruimte ligt die we al hadden, komen er wel extra mogelijkheden bij, en we bekomen dan een driedimensionale (deel)ruimte.

In $\mathbb{R}^n$ kan je je afvragen welke vorm de ruimte kan aannemen die wordt voorgebracht door een groter aantal vectoren. Telkens een nieuwe vector wordt toegevoegd kan hij al dan niet behoren tot de deelruimte voortgebracht door de vorige vectoren. Dat is het geval telkens een volgende vector een lineaire combinatie is van de vorige.



In de wiskunde gebruikt men het begrip 'lineaire afhankelijkheid' om deze situatie te beschrijven. Een vector die lineaire combinatie is van vectoren $\{\mathbf{v_1},\dots,\mathbf{v_l}\}$ noemt men **lineair afhankelijk van** $\{\mathbf{v_1},\dots,\mathbf{v_l}\}$, en een stel vectoren waarbij minstens één lineair afhankelijk is van de andere noemt men **(onderling) lineair afhankelijk**.

Voorbeeld 7.1.2. De vector $(1,2,3)$ is lineair afhankelijk van de vectoren $(1,2,1)$ en $(0,0,1)$ want $(1,2,3)=(1,2,1)+2(0,0,1)$ en de vectoren $(1,2,3),(1,2,1)$ en $(0,0,1)$ zijn dus onderling lineair afhankelijk.

De gelijkheid voor een lineair afhankelijke vector $\mathbf{v_3}=3\mathbf{v_1}-2\mathbf{v_2}$ kunnen we ook schrijven als

$$3\mathbf{v_1}-2\mathbf{v_2}-\mathbf{v_3}=\mathbf{0}$$

en dergelijke lineaire combinatie die de nulvector oplevert zonder dat alle coëfficiënten gelijk zijn aan 0 noemt men een **lineair verband** tussen die vectoren. Hierbij vervalt dus de speciale rol die $\mathbf{v_3}$ speelde in de formulering '$\mathbf{v_3}$ is lineair afhankelijk van $\mathbf{v_1}$ en $\mathbf{v_2}$'. Je kan immers elke vector die met een coëfficiënt verschillend van 0 voorkomt schrijven als lineaire combinatie van de andere: als $3\mathbf{v_1}-2\mathbf{v_2}-\mathbf{v_3}=\mathbf{0}$ dan is ook $\mathbf{v_1}=\frac{2}{3}\mathbf{v_2}-\frac{1}{3}\mathbf{v_3}$ en $\mathbf{v_2}=-\frac{3}{2}\mathbf{v_2}+\frac{1}{2}\mathbf{v_3}$.

We vatten deze bespreking samen in volgende definities:

Definitie 7.1.1 (Deelruimten)**.**

Een **deelruimte** van $\mathbb{R}^n$ is een deel*verzameling* die gesloten is onder lineaire combinaties.

De **deelruimte voortgebracht door** $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\dots,\mathbf{v_k}\in\mathbb{R}^n$ is de verzameling van alle lineaire combinaties

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Lineaire combinaties en deelruimten

van de $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$.

Concreet betekent dit dat als $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ tot een deelruimte behoren ook $r\mathbf{p}$ en $\mathbf{p}+\mathbf{q}$ tot die deelruimte moeten behoren, en dat $\{r\mathbf{p} + s\mathbf{q} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$ de deelruimte is voortgebracht door $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$. In $\mathbb{R}^2$ zijn de deelruimten de rechten door de oorsprong, in $\mathbb{R}^3$ de rechten en de vlakken door de oorsprong. De oorsprong zelf en de hele ruimte $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ zijn natuurlijk ook steeds deelruimten.

Definitie 7.1.2 (Lineair (on)afhankelijk)**.**

Een vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ is **lineair afhankelijk van** de vectoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ als $\mathbf{v}$ kan geschreven worden als lineaire combinatie van de $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$:

$$\exists r_1 \ldots, r_k \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = r_1\mathbf{v_1} + \ldots + r_k\mathbf{v_k}$$

Vectoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ zijn **(onderling) lineair afhankelijk** als er een *lineair verband* is tussen hen, dus als er een lineaire combinatie bestaat met niet alle coëfficiënten nul die toch de nulvector oplevert:

$$\exists r_1 \ldots, r_k \in \mathbb{R} : r_1\mathbf{v_1} + \ldots + r_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0} \quad \text{met niet alle } r_i = 0$$

Vectoren zijn **(onderling) lineair onafhankelijk** als ze *niet* lineair afhankelijk zijn, dus als er *geen lineaire verbanden* zijn:

$$\forall r_1 \ldots, r_k \in \mathbb{R} : r_1\mathbf{v_1} + \ldots + r_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0} \implies r_1 = \ldots = r_k = 0$$

Definitie 7.1.3 (Voortbrengend)**.**

Een stel vectoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k} \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ is **voortbrengend voor** V als elke vector uit V een *lineaire combinatie* is van $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$.

Opmerking 7.1.1.

- Een vector die met een coëfficiënt verschillend van 0 voorkomt in een lineair verband, kan geschreven worden als lineaire combinatie van de andere. Als we dergelijke vector weglaten uit het stel, wordt nog steeds dezelfde ruimte voortgebracht.
- Als $\mathbf{v}$ *lineair afhankelijk is van* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$, dan *zijn* $\mathbf{v}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$ lineair afhankelijk.
- Als $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$ *lineair afhankelijk zijn*, dan is $\mathbf{v_1}$ *niet noodzakelijk lineair afhankelijk van* $\mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_k}$.
  Inderdaad, de vectoren $(1,0,0), (0,1,1), (0,2,2)$ zijn onderling lineair afhankelijk, maar $(1,0,0)$ is toch *niet* lineair afhankelijk van $(0,1,1)$ en $(0,2,2)$.

Definitie 7.1.4 (Basis)**.**

Een **basis** van een (deel)vectorruimte V is een *lineair onafhankelijk* stel vectoren dat V *voortbrengt*.

Een basis van V is dus een stel vectoren dat V voortbrengt zonder dat één van de vectoren overtollig is. Je kan ook zeggen dat een basis *een zo klein mogelijk voorbrengend deel* is, of ook *een zo groot mogelijk lineair onafhankelijk deel*. Men kan bewijzen dat elke basis evenveel elementen heeft, en dat leidt tot het begrip **dimensie** van de deelruimte:

Eigenschap 7.1.1 (Dimensie)**.**

Alle basissen van een gegeven deelruimte V hebben evenveel elementen.

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Lineaire combinaties en deelruimten

De **dimensie** van een (deel)vectorruimte V is het aantal vectoren in een (en dus in elke) *basis* van V.

Basissen zijn belangrijk omdat ze de invoering van *coördinaten* mogelijk maken:

Eigenschap 7.1.2 (Coördinaten)**.**

Elke vector kan op *precies één manier* geschreven worden als lineaire combinatie van de vectoren van een basis (op de volgorde van de basisvectoren na).

De **coördinaten** van een vector ten opzichte van die basis zijn de coëfficiënten van deze lineaire combinatie.

Deze begrippen zijn geen voorkennis, en ze worden allemaal opnieuw behandeld in de cursus Lineaire Algebra.

CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Lineaire combinaties en homogene stelsels

We schetsen hier kort een verband tussen de begrippen *lineaire combinatie* en *lineaire afhankelijkheid* met de theorie van lineaire stelsels.

Stelsels leveren een methode om te testen of een vector in $\mathbb{R}^n$ lineair afhankelijk is van andere vectoren, want het oplossen van het stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ kan geïnterpreteerd worden als het zoeken naar coëfficiënten $\mathbf{x}$ om $\mathbf{b}$ te schrijven als een lineaire combinatie van de kolommen van A. Inderdaad, nagaan of een vector $(1, 2, 3)$ te schrijven is als lineaire combinatie van $(2, 0, 2)$ en $(0, 1, 1)$, betekent nagaan of er coëfficiënten x en y bestaan zodat

$$(1, 2, 3) = x(2, 0, 2) + y(0, 1, 1),$$

en dat kunnen we in kolomvectoren schrijven als

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

en komt dus neer op de oplosbaarheid nagaan van het stelsel

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Als (x, y) een oplossing is van het stelsel, dan geldt $(1, 2, 3) = x(2, 0, 2) + y(0, 1, 1)$.

Merk op dat het in een aantal gevallen dus volstaat om na te gaan *of* het stelsel oplossingen heeft, en dat is veelal eenvoudiger dan de oplossingen effectief vinden.

Een *stel* vectoren is lineair onafhankelijk als er geen enkel lineair verband tussen de vectoren bestaat, dus als er geen lineaire combinatie bestaat die de nulvector oplevert zonder dat alle coëfficiënten 0 zijn. Nagaan of het stel vectoren $\{(1, 2, 0, -1), (2, 3, -1, 2), (3, 1, 2, 2)\}$ lineair afhankelijk is betekent nagaan of het homogene stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oplossingen heeft die verschillen van de nulvector.

Dit levert volgende interpretatie op van de oplossingenverzameling van een homogeen stelsel:

Eigenschap 7.2.1 (Homogene lineaire stelsels en lineaire verbanden)**.**

Elke niet-nul oplossing $\mathbf{x}$ van een homogeen stelsel $\mathbf{Ax} = 0$ kan geïnterpreteerd worden als de coëfficiënten van een lineair verband tussen de kolommen van de matrix $\mathbf{A}$.

En ook omgekeerd geldt:

De coëfficiënten van een lineair verband tussen de kolommen van $\mathbf{A}$ leveren een oplossing van $\mathbf{Ax} = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Lineaire combinaties en echolonvorm

De begrippen lineaire combinatie en lineaire afhankelijkheid zijn nauw verweven met de echelonvorm in de theorie van lineaire stelsels.

De echelonvorm levert *twee manieren* om een basis te vinden voor een deelruimte V voortgebracht door een stel vectoren.

(a) Schrijf de vectoren *als rijen* in een matrix $\mathbf{B}$, bereken de echelonvorm $\mathbf{B}'$ van $\mathbf{B}$.

Dan vormen de van 0 verschillende rijen van $\mathbf{B}'$ een basis van V.

(b) Schrijf de vectoren *als kolommen* in een matrix $\mathbf{A}$, bereken de echelonvorm $\mathbf{A}'$ van $\mathbf{A}$.

Dan vormen de spilkolommen van $\mathbf{A}$, dus de kolommen van $\mathbf{A}$ (en niet van $\mathbf{A}'$) waarvoor de overeenkomstige kolom van $\mathbf{A}'$ een spil bevat, een basis van V.

Voor het bewijs van de eerste manier is het van belang in te zien dat de verschillende operaties bij de berekening van een echelonvorm niets veranderen aan de ruimte die wordt voortgebracht door de rijen (net zoals ze niets veranderen aan de oplossingenverzameling van een stelsel).

Het bewijs van de tweede manier steunt op de interpretatie van de oplossingen van het homogeen stelsel als lineaire verbanden tussen de kolommen hierboven. Omdat de stelsels $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ en $\mathbf{A}'\mathbf{x} = 0$ (met $\mathbf{A}'$ de echelonvorm van $\mathbf{A}$) dezelfde oplossingenverzameling hebben, bestaan dezelfde lineaire verbanden tussen de kolommen van $\mathbf{A}$ als tussen de kolommen van $\mathbf{A}'$. Een blik op de echelonvorm leert dat de niet-spilkolommen te schrijven zijn als lineaire combinaties van de spilkolommen, terwijl de spilkolommen zelf onafhankelijk zijn. We gaan hier niet dieper op in.

Merk ook op dat de oplossing van een homogeen stelsel bestaat uit alle lineaire combinaties van een stel vectoren en dus een deelruimte vormt. We kunnen een deelruimte dus niet alleen beschrijven door een stel vectoren te geven dat de deelruimte voortbrengt maar ook door een stel (homogene) vergelijkingen te geven waaraan de punten van de deelruimte moeten voldoen.

De oplossing van een niet-homogeen stelsel is een *verschoven* deelruimte, bijvoorbeeld een vlak in $\mathbb{R}^5$ dat niet door de oorsprong van het assenstelsel gaat (zo'n vlak is geen deelruimte). We tellen immers bij elke oplossing van het homogene stelsel een vaste vector op.

Uit de manier waarop we lineaire afhankelijkheid aangebracht hebben, is hopelijk intuïtief duidelijk dat hoe *meer lineaire verbanden* er zijn tussen een stel vectoren, hoe *kleiner de deelruimte* is die wordt voortgebracht. Ook dit resultaat vinden we terug in de echelonvorm. *Meer verbanden* tussen de kolommen betekenen *meer nevenonbekenden* en dus *meer oplossingen* van het homogeen stelsel. *Meer nevenonbekenden* betekenen (bij een zelfde aantal kolommen) *minder hoofdonbekenden*, en dus *minder spilkolommen* en dus een *kleinere basis* voor de ruimte voortgebracht door de kolommen. Het aantal spillen van de echelonvorm van een matrix $\mathbf{A}$, is dan ook een uiterst belangrijk getal, dat de **rang** van $\mathbf{A}$ genoemd wordt.

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Vectoren in abstracte wiskunde

Het begrip *vector* wordt in verschillende contexten en betekenissen gebruikt. We hebben *n-tallen van reële getallen* vectoren genoemd, maar in de meetkunde en de fysica spreekt men van *gebonden vectoren* en *vrije vectoren* in het vlak of de ruimte. Als er geen assenstelsel is gekozen, dan hebben deze vectoren geen coördinaten en dan zijn deze vectoren dus zeker geen n-tallen.

Wiskundigen zijn er in de loop van de negentiende eeuw in geslaagd de belangrijkste eigenschappen te isoleren van 'vectoren' zoals ze in de wiskunde en de fysica worden gebruikt. Er er is een lijst opgesteld van eenvoudige, duidelijk formuleerbare eigenschappen waaraan een verzameling objecten moet voldoen om zich *te gedragen als* een verzameling vectoren. Vertrekkend van die beperkte lijst van abstracte kenmerken bekomt men erg krachtige en algemene eigenschappen en algoritmen die een veel ruimere toepassing hebben dan enkel voor de n-tallen of de grootte-richting-en-zin vectoren uit de meetkunde en fysica.

De twee fundamentele basiskenmerken van deze *abstracte vectoren* zijn dat men ze moet kunnen *optellen* en *herschalen*. Voor de concrete vectoren uit de fysica of $\mathbb{R}^n$ gebeurt optellen meetkundig via de parallellogramregel of algebraïsch via het optellen van reële getallen. Herschalen komt neer op vermenigvuldigen met een reëel getal, de schaalfactor. Voor *abstracte* vectoren maakt het niet uit *hoe* we ze optellen en herschalen, het enige wat telt is *dat* we het kunnen en dat de operaties aan enkele redelijke voorwaarden voldoen.

Definitie 7.4.1. Een **vectorruimte** is een verzameling V, waarvan we de elementen **vectoren** noemen, en waarop *twee bewerkingen* (of *operaties*) gedefinieerd zijn:

- twee vectoren kunnen steeds steeds bij elkaar worden **opgeteld**
  (en dat levert dus telkens een vector op, namelijk de *som* van de twee vectoren)
- elke vector kan steeds met elk reëel getal worden **herschaald**
  (en dat levert telkens een vector op, namelijk het *scalair veelvoud*).

Beide bewerkingen moeten zodanig zijn dat voor willekeurige vectoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ in V en willekeurige reële getallen r en s in $\mathbb{R}$ steeds het volgende geldt:

(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ is een vector van V (optelling)

(b) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ (*commutativiteit* van de optelling)

(c) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ (*associativiteit* van de optelling)

(d) Er bestaat een **nulvector** $\mathbf{0}$ waarvoor $\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$

(e) Elke vector $\mathbf{v}$ heeft een **tegengestelde** vector $-\mathbf{v}$ waarvoor $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$

(f) $r\mathbf{v}$ is een vector in V (scalair product)

(g) $r(\mathbf{u}+\mathbf{v})=r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$ (*distributiviteit* t.o.v. de optelling van vectoren),

(h) $(r+s)\mathbf{v}=r\mathbf{v}+s\mathbf{v}$ (*distributiviteit* t.o.v. de optelling van scalars),

(i) $r(s\mathbf{v})=(rs)\mathbf{v}$ (*gemengde associativiteit*).

(j) $1\mathbf{v}=\mathbf{v}$.

Een belangrijke stelling uit de theorie van vectorruimten zegt dat elke eindigdimensionale reële vectorruimte isomorf is met $\mathbb{R}^n$, met n de *dimensie* van die vectorruimte. Intuïtief betekent dit dat bovenstaande eigenschappen voldoende zijn opdat een object zich, wat de optelling en de vermenigvuldiging met een getal betreft, precies gedraagt als een vector in $\mathbb{R}^n$.

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Vectoren in abstracte wiskunde

Voorbeeld 7.4.1.

- $\mathbb{R}^n$, de verzameling van de n-tallen vormt een vectorruimte.
- $\mathbb{R}^{m\times n}$, de $m\times n$ matrices met de optelling en scalaire vermenigvuldiging vormen een vectorruimte. Je kan zelf nagaan dat matrices inderdaad voldoen aan alle regels uit de bovenstaande definitie. Wat de optelling en de scalaire vermenigvuldiging betreft gedragen $m \times n$ matrices zich dus precies zoals vectoren met mn componenten.
- De verzameling van de functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is een vectorruimte, net zoals de verzameling van de functies $A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de verzameling van de continue functies $[a, b] \to \mathbb{R}$ en ook de verzameling van de afleidbare functies.

De n-tallen $\mathbb{R}^n$ zijn een vectorruimte van dimensie $n \in \mathbb{N}$. De functies op het interval $[a, b]$ vormen echter een *oneindigdimensionale* vectorruimte en de theorie van dergelijke oneindigdimensionale vectorruimten is veel subtieler dan de theorie van $\mathbb{R}^n$.

In een abstracte vectorruimte kan ook een **inwendig product** worden gedefinieerd. Een inwendig product is een extra bewerking die kan *toegevoegd* worden aan de optelling en scalaire vermenigvuldiging uit de definitie. Ze associeert met twee vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ een *getal* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Van deze extra bewerking worden volgende eigenschappen geeist opdat ze 'inwendig product' mag worden genoemd:

Definitie 7.4.2. Een bewerking $\cdot : V \times V \to \mathbb{R} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ is een **inwendig product** of **scalair product** als

(a) $\mathbf{u} \cdot (r\mathbf{v} + s\mathbf{w}) = r\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + r\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ en
$(r\mathbf{u} + s\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = r\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + s\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ (bilineair),

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (symmetrisch),

(c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ (positief)

(d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (positief definiet).

Het klassieke inwendig product in $\mathbb{R}^n$ voldoet aan deze eigenschappen, maar er zijn andere 'inwendige producten' mogelijk en nuttig. In de theorie van abstracte vectorruimten noemen we vectoren **loodrecht** als hun inwendig product nul is, en de gelijkheid $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ is dan geen meetkundig bewezen *eigenschap* meer, maar de *definitie van de cosinus van de hoek* $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *tussen abstracte vectoren*.

Het hoeft hierbij helemaal niet te gaan over meetkundige objecten. Zo bestaat er een belangrijke theorie over orthogonale veeltermfuncties.

Met een inwendig product kan je een **norm** of **afstand** definiëren via de formule $||\mathbf{v}||^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Met deze norm krijgt elke abstracte vector ook een *grootte*.

Erg belangrijk zijn verder de zogenaamde **lineaire afbeeldingen** die de lineaire combinaties bewaren, dus waarbij voor alle vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ en getallen r en s geldt dat

$$f(r\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = rf(\mathbf{u}) + rf(\mathbf{v})$$

Dit is opnieuw een definitie die niet vertrekt van een concrete voorstelling van vectoren maar van een voorwaarde waaraan een afbeelding moet voldoen om lineair te mogen heten. Men kan bewijzen dat afbeeldingen tussen eindigdimensionale vectorruimten altijd door een *matrix* kunnen worden voorgesteld.

Opmerking 7.4.1. Deze aanpak om wiskundige structuren te definiëren op basis van abstracte objecten en bewerkingen die aan een stel voorgeschreven eigenschappen voldoen, is helemaal niet beperkt is tot de theorie van vectorruimten. Inderdaad, vectorruimten vormen slechts één eenvoudig

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Vectoren in abstracte wiskunde

geval van een hele waaier van algebraïsche structuren die in de wiskunde bestudeerd worden: groepen, ringen, velden, ...

Allemaal laten ze toe om intuïtie die wordt opgebouwd in eenvoudige, concrete gevallen te gebruiken om veel complexere, algemenere en belangrijkere problemen te kunnen bestuderen, en hopelijk op te lossen.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 8
Vectoren (zoals) in fysica

(Versie 2026/08/25H.56)

8.1 Vectoren in de fysica

8.1.1 Vectoren als objecten met grootte, richting en zin

Als we de fysische wereld wiskundig willen beschrijven en bestuderen, stellen we al snel vast dat er twee essentieel verschillende *soorten* fysische grootheden bestaan.

Enerzijds zijn er grootheden als lengte, massa of temperatuur: die worden uitgedrukt door een *getal* en een *eenheid*, bijvoorbeeld 2 meter of 3,14 kilogram of 37,5 graden Celsius. Het getal duidt aan *hoeveel keer* de eenheid moet worden genomen, of correcter geformuleerd, met welke factor we de eenheid moeten *herschalen* om de concrete hoeveelheid te vinden: 2 meter betekent dat je de eenheidsmeter met een factor twee moet vermenigvuldigen (of herschalen), net zoals 3,14 kilogram betekent dat je de eenheidskilogram met een factor 3,14 moet herschalen. Dergelijke grootheden noemt men in de fysica **scalaire grootheden**.

Maar een verplaatsing, snelheid, kracht of elektrisch veld kan in het algemeen *niet* worden uitgedrukt door een getal en een eenheid. Deze grootheden hebben telkens een grootte, een richting en een zin, en men noemt ze **vectoriële grootheden**.

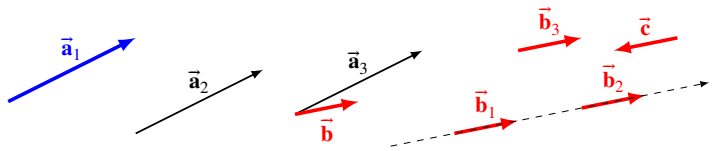
Definitie 8.1.1 (Vectoren in de fysica)**.**

Een **(vrije) vector** $\vec{\mathbf{a}}$ is een object met een *grootte*, een *richting* en een *zin*.

Twee vrije vectoren zijn aan elkaar *gelijk* zodra ze dezelfde grootte, richting en zin hebben.

De **nulvector** is de unieke vector met grootte nul.

Voor sommige fysische grootheden zoals krachten is eigenlijk zelfs nog een iets strenger begrip nodig: het aangrijpingspunt (het vertrekpunt van de pijl) is bij een kracht wel degelijk van belang. Men spreekt dan van een **gebonden vector**. De **drager** van een gebonden vector is de rechte waarop de vector ligt. Bij **vrije vectoren** die we hierboven hebben gedefinieerd, is het aangrijpingspunt *niet* van belang.



Een **vrije** vector stellen we grafisch voor door een *pijl* te tekenen vanaf een (willekeurig) *beginpunt* met de gegeven grootte, richting en zin naar een daardoor uniek bepaald *eindpunt*. Een pijl vanaf een ander beginpunt maar met dezelfde *grootte*, *richting* en *zin* stelt dan *dezelfde vrije vector* voor. Merk wel op dat het begrip richting hier in een wat speciale betekenis wordt gebruikt: in deze wiskundige context geeft de *richting* enkel aan met welke rechte(n) de vector evenwijdig is. Dat laat nog twee mogelijkheden open naar welke *kant* –in welke *zin*– de vector wijst.

In de figuur hierboven zijn $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2$ en $\vec{\mathbf{a}}_3$ telkens *dezelfde vrije vector*, maar wel *andere gebonden vectoren*. Ook $\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2$ en $\vec{\mathbf{b}}_3$ stellen vier keer dezelfde vrije vector voor. Vector $\vec{\mathbf{c}}$ heeft dezelfde richting, maar de omgekeerde zin van vector $\vec{\mathbf{b}}$. De gebonden vectoren $\vec{\mathbf{b}}_1$ en $\vec{\mathbf{b}}_2$ hebben dezelfde *drager* omdat ze op dezelfde rechte liggen.

Bij de nulvector heeft de pijl lengte nul, en het beginpunt en eindpunt vallen dus samen. De nulvector wordt dus grafisch voorgesteld als een punt, en er bestaat slechts één *nulvector*.

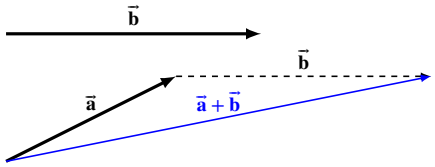
8.1.2 Basisbewerkingen met vectoren

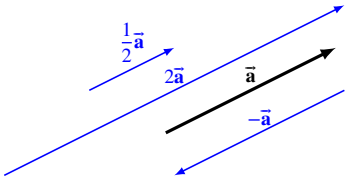
Met vrije vectoren kan je twee belangrijke bewerkingen uitvoeren:

(a) twee vectoren bij elkaar **optellen**. De *som* $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ van twee vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ bekom je door ze *achter elkaar te leggen*: je legt het *begin*punt van $\vec{\mathbf{b}}$ in het *eind*punt van $\vec{\mathbf{a}}$, en de som is dan de vector van het beginpunt van $\vec{\mathbf{a}}$ naar het eindpunt van $\vec{\mathbf{b}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.1 Vectoren in de fysica



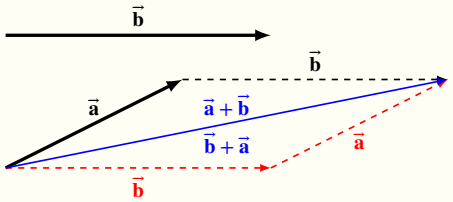


(b) een vector **scalair vermenigvuldigen** met een getal. Een vector $\vec{\mathbf{a}}$ vermenigvuldigen met een getal r geeft een nieuwe *herschaalde* vector $r\vec{\mathbf{a}}$, die *dezelfde richting* heeft als $\vec{\mathbf{a}}$ maar $|r|$ keer *groter* is. Als r positief is wordt de zin behouden en als r negatief is krijgt $r\vec{\mathbf{a}}$ de tegengestelde zin van $\vec{\mathbf{a}}$.

De scalaire vermenigvuldiging behoudt dus de richting, vermenigvuldigt de grootte met $|r|$ en behoudt al dan niet de zin naargelang het teken van r.

Opmerking 8.1.1.

- Als we de som *in de andere volgorde* zouden berekenen, dan merken we op dat we voor $\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}$ een *andere constructie* maken dan voor $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$. We construeren inderdaad een *andere* driehoek. Toch bekomen we steeds *dezelfde resultaatvector* omdat beide driehoeken samen een parallellogram vormen, en de twee sommen allebei gelijk zijn aan dezelfde diagonaal van dat parallellogram, en dus ook gelijk aan elkaar. We zeggen dat de optelling van vectoren *commutatief* is, en men spreekt ook van de *parallellogramregel* voor het optellen van vectoren.



- Behalve de optelling en de scalaire vermenigvuldiging bestaan er nog andere bewerkingen met vectoren. Zo associeert het **inwendig product** (of scalair product) met twee vectoren een *getal* (een scalar). In de driedimensionale ruimte bestaat er ook een **vectorieel product** dat met twee vectoren die nieuwe *vector* associeert.

CC BY-NC-SA 4.0

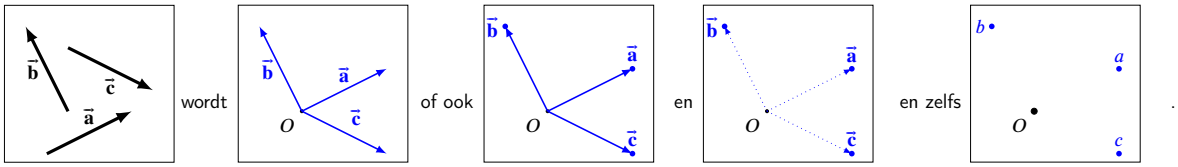
8.2 Assenstelsels en coördinaten

We zullen hier met elke vrije vector in het vlak een koppel getallen associëren, waardoor het mogelijk wordt om ook algebraïsch te rekenen met vectoren. We tonen de redenering in het vlak, maar ze werkt even goed in dimensie 3 (of in dimensie n, met $n \in \mathbb{N}$).

Door *één vast punt* te kiezen in het vlak en af te spreken om alle vrije vectoren te tekenen met dat vaste punt als aangrijpingspunt, krijgen we voor elke vrije vector een *unieke* voorstelling: de pijl die vertrekt uit dat gekozen punt. Een logische naam voor dat gekozen punt is **de oorsprong**, omdat we alle vectoren laten beginnen in dat punt. Als de oorsprong vastligt, is een vector volledig bepaald door zijn eindpunt.

Een vlak met één vast gekozen punt noemen we een **gepunt vlak**. In een gepunt vlak komt met elk *punt* een unieke *vector* overeen, en met elke *vector* een uniek *punt*. In een *gepunt* vlak kunnen we dus vectoren en punten met elkaar identificeren. Merk op dat dat in een gewoon vlak, waar *geen* oorsprong vast ligt, *niet mogelijk* is: daar heb je steeds *twee punten* nodig om een vector te bepalen. De oorsprong is dus eigenlijk een eens-en-voor-altijd afgesproken 'eerste punt' of het beginpunt van een vector.

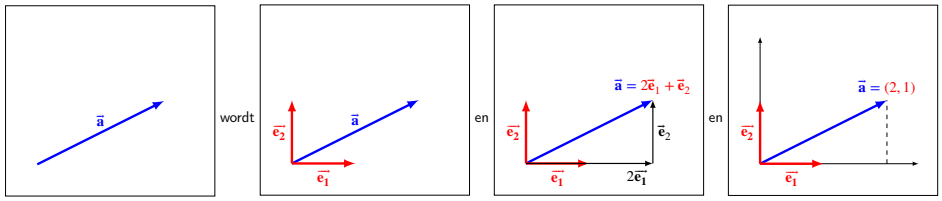
Samengevat: in *een vlak met een oorsprong* zijn *vectoren en punten* eigenlijk hetzelfde. We zullen verder zien dat hetzelfde geldt in de driedimensionale ruimte.



Vrije vectoren — 'gebonden' aan O — markeer eindpunten — beklemtoon eindpunt — beschouw als 'punten'

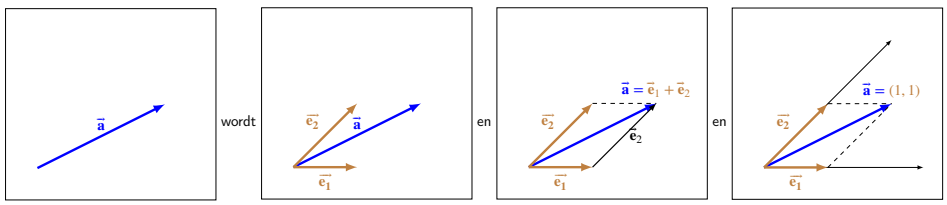
Door *twee willekeurige gebonden vectoren* $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ te kiezen met hetzelfde beginpunt en die geen veelvoud zijn van elkaar bepalen we een **assenstelsel**. De **assen** zijn de twee dragers van de vectoren en de twee vectoren $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ zelf worden de **basisvectoren** genoemd van het assenstelsel. Het gemeenschappelijke beginpunt is de **oorsprong** van het assenstelsel.

Elke vector $\vec{\mathbf{a}}$ *van het vlak* kan dan op een unieke wijze geschreven worden als $\vec{\mathbf{a}} = a_1\vec{\mathbf{e}}_1 + a_2\vec{\mathbf{e}}_2$. We noemen de getallen a_1 en a_2, of ook het koppel (a_1, a_2), de **coördinaten** of de **scalaire componenten** van de vector $\vec{\mathbf{a}}$ ten opzichte van de **basisvectoren** $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$.



Vector $\vec{\mathbf{a}}$ — Keuze $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ — $\vec{\mathbf{a}} = 2\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2$ — $\vec{\mathbf{a}} = (2, 1)$

maar ook

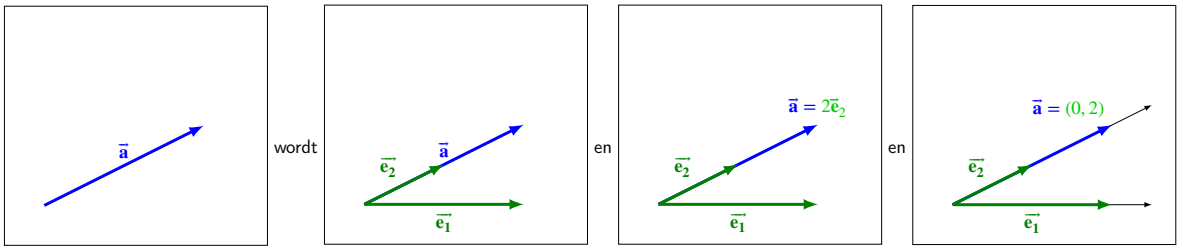


Vector $\vec{\mathbf{a}}$ — Andere $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ — $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2$ — $\vec{\mathbf{a}} = (1, 1)$

of

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Assenstelsels en coördinaten



Vector $\vec{a}$ | Andere $\vec{e_1}$ en $\vec{e_2}$ | $\vec{a} = 2\vec{e_2}$ | $\vec{a} = (0, 2)$

Eigenschap 8.2.1.

De keuze van een *oorsprong* associeert aan elke vector een punt en ook aan elk punt een vector.

De keuze van een *assenstelsel* associeert aan elke vector in het vlak een koppel reële getallen, en ook aan elk koppel reële getallen een vector.

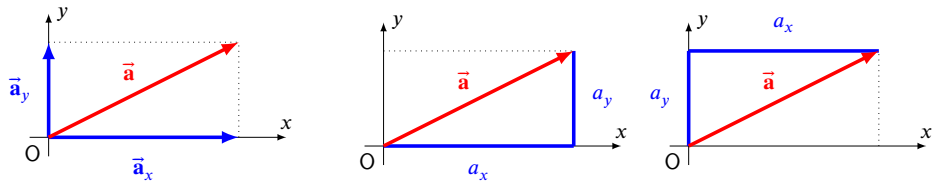
De keuze van een assenstelsel impliceert de keuze van het snijpunt van de assen als oorsprong. Zodra een oorsprong vastligt, is er eigenlijk geen onderscheid meer tussen vectoren en punten. Zodra een assenstelsel vastligt, is er geen onderscheid meer tussen vectoren, punten en koppels van getallen.

Als de basisvectoren $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ loodrecht op elkaar staan en beide lengte één hebben spreken we van een **orthonormaal**, een **euclidisch** of een **cartesiaans assenstelsel**, met bijhorende **cartesiaans coördinaten**. Zodra je met lengtes en hoeken wil rekenen, is het van belang in een orthonormaal assenstelsel te werken.

Bij de keuze van een assenstelsel neemt men dikwijls de eerste as horizontaal en georiënteerd naar rechts. Men noemt ze de x-as. De tweede as, die er loodrecht op staat, is dan verticaal en wordt meestal naar boven georiënteerd. Dat is de y-as.

In de fysica noteert men de basisvectoren dikwijls als $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$, en schrijft men $\vec{\mathbf{a}} = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y$, met de coördinaten van $\vec{\mathbf{a}}$ dus de getallen a_x en a_y. Men gebruikt ook erg dikwijls de zogenaamde **vectorcomponenten** $\vec{\mathbf{a}}_x = a_x\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{a}}_y = a_y\vec{\mathbf{e}}_y$. Er geldt dan

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_x + \vec{\mathbf{a}}_y = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y$$



Op bovenstaande tekening worden de scalaire componenten a_x en a_y van de vector $\vec{\mathbf{a}}$ op drie equivalente manieren weergegeven. De tekening toont ook dat de vectorcomponent $\vec{\mathbf{a}}_x$, respectievelijk $\vec{\mathbf{a}}_y$, de loodrechte projectie is van de vector $\vec{\mathbf{a}}$ op de x-as, respectievelijk de y-as. Soms gebruikt men de term component om zowel de scalaire component als de vectorcomponent aan te duiden. Merk wel op dat dit erg *verschillende* dingen zijn: een scalaire component is een *getal* (dat mogelijk negatief kan zijn), en een vectorcomponent is een *vector*.

In sommige handboeken en cursussen gebruikt men $\hat{\mathbf{i}}$ en $\hat{\mathbf{j}}$ als notatie voor de eenheidsvectoren, of $\hat{\mathbf{x}}$ en $\hat{\mathbf{y}}$. Wiskundigen kiezen eerder voor $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ omdat dat het makkelijkst veralgemeent naar meerdere dimensies.

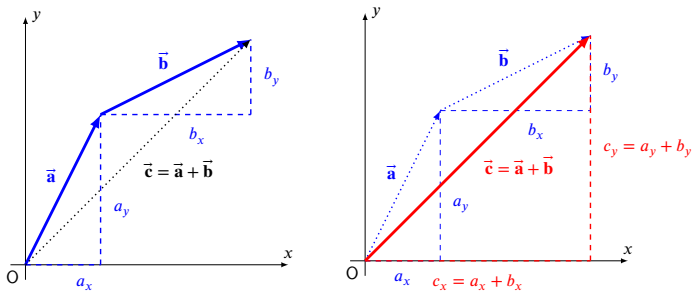
Uit een tekening blijkt onmiddellijk dat de componenten van een som van vectoren gelijk zijn aan de som van de componenten, en ook dat de componenten van een scalair veelvoud gelijk zijn aan de veelvouden van de componenten. Som en scalaire veelvoud worden dus component per component berekend:

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Assenstelsels en coördinaten

Eigenschap 8.2.2. Als $\vec{\mathbf{a}} = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{\mathbf{b}} = b_x\vec{\mathbf{e}}_x + b_y\vec{\mathbf{e}}_y$ en $r \in \mathbb{R}$ dan geldt dat

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = (a_x + b_x)\vec{\mathbf{e}}_x + (a_y + b_y)\vec{\mathbf{e}}_y \tag{1}$$
$$r\vec{\mathbf{a}} = (ra_x)\vec{\mathbf{e}}_x + (ra_y)\vec{\mathbf{e}}_y \tag{2}$$



Voorbeeld 8.2.1. Als $\vec{\mathbf{a}} = 2\vec{\mathbf{e}}_x + 3\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{\mathbf{b}} = 5\vec{\mathbf{e}}_x - 2\vec{\mathbf{e}}_y$ dan is

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = (2+5)\vec{\mathbf{e}}_x + (3-2)\vec{\mathbf{e}}_y = 7\vec{\mathbf{e}}_x + \vec{\mathbf{e}}_y\,, \quad \text{en} \quad 2\vec{\mathbf{a}} = 4\vec{\mathbf{e}}_x + 6\vec{\mathbf{e}}_y.$$

Merk op dat de scalaire componenten van een vector afhangen van het gekozen assenstelsel: een ander assenstelsel betekent andere componenten. Maar de som en veelvouden kunnen in elk assenstelsel worden berekend, en ze zijn dus onafhankelijk van de keuze van het assenstelsel.

Voorbeeld 8.2.2. In de fysica wordt de positie van een puntmassa weergegeven door een vector $\vec{\mathbf{r}}$ die de oorsprong van het assenstelsel verbindt met de locatie van de puntmassa. Deze positievector $\vec{\mathbf{r}}$ kan geschreven worden met behulp van zijn componenten: $\vec{\mathbf{r}} = r_x\vec{\mathbf{e}}_x + r_y\vec{\mathbf{e}}_y$.

Voor een bewegende puntmassa hangt de positievector af van de tijd: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$

De ogenblikkelijke snelheid is een vector $\vec{\mathbf{v}}$ die raakt aan de baan van de beweging. De lengte van de ogenblikkelijke snelheidsvector is de grootte van de ogenblikkelijke snelheid (bv. 10 m/s). Deze vector geeft dus informatie over zowel de grootte van de snelheid als de bewegingsrichting en -zin.

De versnellingsvector $\vec{\mathbf{a}}$ is de verandering van de snelheidsvector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ over een bepaald tijdsinterval Δt.

De snelheidsvector $\vec{\mathbf{v}}$ is altijd gericht volgens de bewegingszin van het deeltje, en raakt dus aan de baan van het deeltje. De versnellingsvector $\vec{\mathbf{a}}$ daarentegen kan verschillende richtingen aannemen. Typisch kan de versnelling ontbonden worden in twee componenten. Enerzijds de normale versnelling $\vec{a}_n$ die de verandering van de richting van de snelheid beschrijft en anderzijds de tangentiële versnelling $\vec{a}_t$ die verandering van de grootte van de snelheid beschrijft. De totale versnelling is dan de vectorsom

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

Opmerking 8.2.1.

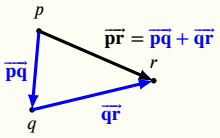
Een vector met beginpunt p en eindpunt q wordt soms ook voorgesteld als $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$, dus met *één* pijltje boven *twee* punten p en q. Met die afspraak geldt dat $\overrightarrow{\mathbf{op}} = \vec{\mathbf{p}}$, want $\vec{\mathbf{p}}$ is per definitie de vector met beginpunt oorsprong o en eindpunt p.

De vector $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ duidt de verschuiving aan om van beginpunt p naar eindpunt q te gaan. De optelling van vectoren krijgt dan een eenvoudige meetkundige interpretatie: eerst van p naar q verschuiven, en dan van q naar r is hetzelfde als direct van p naar r verschuiven:

$$\overrightarrow{\mathbf{pq}} + \overrightarrow{\mathbf{qr}} = \overrightarrow{\mathbf{pr}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

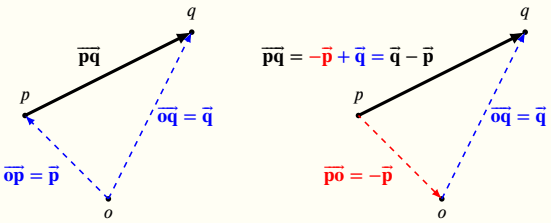
8.2 Assenstelsels en coördinaten



Als we $\overrightarrow{pq}$ dan willen uitdrukken in termen van de vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$, die de verplaatsing van oorsprong o naar p resp. q aanduiden, krijgen we

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{po} + \overrightarrow{oq} = -\overrightarrow{op} + \overrightarrow{oq} = -\vec{p} + \vec{q} \quad \text{en dus} \quad \boxed{\overrightarrow{pq} = \vec{q} - \vec{p}}$$

Er geldt natuurlijk ook dat $\overrightarrow{op} = \vec{p}$, $-\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{qp}$ en $\overrightarrow{pp} = \vec{o}$.



De betrekking $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$ staat ook gekend als de gelijkheid van Chasles-Möbius. Ze kan, gelezen van rechts naar links, gebruikt worden om een vector te schrijven als een som van twee andere vectoren.

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Vectoren in poolcoördinaten

Als we de componenten of coördinaten van een vector kennen ten opzichte van een cartesisch assenstelsel, levert de stelling van Pythagoras een eenvoudige formule op voor de grootte van die vector:

Eigenschap 8.3.1. De grootte (ook **lengte** of **norm**) van de vector $\vec{\mathbf{a}} = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y$ is

$$\|\vec{\mathbf{a}}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Om een *richting* van een vector in twee dimensies aan te geven zijn er twee opties:

- met **een eenheidsvector** (dus een vector met lengte 1 met dezelfde richting en zin).

  Voor bijvoorbeeld de vector $(2,5)$ met lengte $\sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$, vinden we een eenheidsvector met dezelfde richting en zin, door te delen door de lengte: $\dfrac{1}{\sqrt{29}}(2,5)$. Een eenheidsvector noteert men soms met $\hat{\mathbf{a}}$, en dan geldt

  $$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\|}$$

- met **een hoek t.o.v. een referentierichting**:

  Als een x,y-assenstelsel gegeven is, kiest men meestal voor de hoek in tegenwijzerzin t.o.v. de positieve x-as (maar andere referentierichtingen zijn even goed). Als $a_x \neq 0$ dan geldt voor de hoek θ die een vector maakt met de positieve x-as, wegens de formules in de rechthoekige driehoek,

  $$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

  Let wel op: er zijn *twee hoeken* met dezelfde tangens, die allebei *dezelfde richting* bepalen. De *juiste* hoek wordt bepaald door de *zin*, en daarvoor moet je nagaan in welk kwadrant de vector ligt, bijvoorbeeld door het teken van de x en y componenten te bepalen, of door een figuur te maken.

  Als $a_x > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

  $$\theta = \text{bgtan}\,\frac{a_y}{a_x}$$

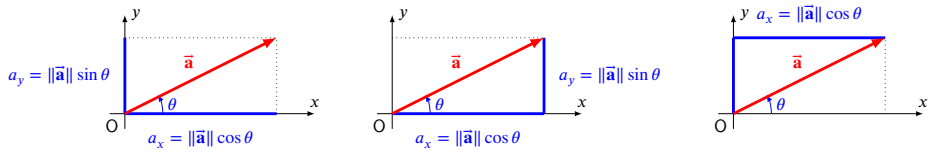
  Als $a_x < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

  $$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + \pi$$

Voor toepassingen is het belangrijk dat je snel kan overstappen van een richting gegeven door een hoek t.o.v. een as naar een richting gegeven door een eenheidsvector.

Als de hoek θ tussen vector $\vec{\mathbf{a}}$ en de positieve x-as gekend is, volgt uit de definitie van sinus en cosinus dat

$$a_x = \|\vec{\mathbf{a}}\|\cos\theta \quad \text{en} \quad a_y = \|\vec{\mathbf{a}}\|\sin\theta$$

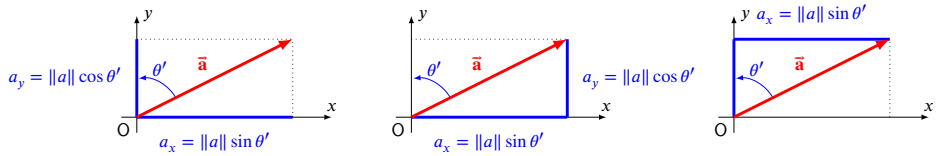


Als de hoek θ' tussen vector $\vec{\mathbf{a}}$ en de positieve y-as gekend is, volgt uit de definitie van sinus en cosinus dat

$$a_x = \|a\|\sin\theta' \quad \text{en} \quad a_y = \|a\|\cos\theta'$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

8.3 Vectoren in poolcoördinaten



Leer de formules echter niet uit het hoofd, maar probeer dit grafisch te zien. Dit kan zowel met het beeld van rechthoekige driehoeken, als door het beeld van de goniometrische cirkel te gebruiken. Hoe je het beeld van de goniometrische cirkel gebruikt kan je zien in de clip.

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/EsHYrhoYJHM

Voorbeeld 8.3.1. In de fysica wordt de positie van een puntmassa weergegeven door een vector $\vec{\mathbf{r}}$ die de oorsprong van het assenstelsel verbindt met de locatie van de puntmassa. Deze positievector $\vec{\mathbf{r}}$ kan geschreven worden met behulp van zijn componenten: $\vec{\mathbf{r}} = r_x\vec{\mathbf{e}}_x + r_y\vec{\mathbf{e}}_y$.

Voor een bewegende puntmassa hangt de positievector af van de tijd: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$

De ogenblikkelijke snelheid is een vector $\vec{\mathbf{v}}$ die raakt aan de baan van de beweging. De lengte van de ogenblikkelijke snelheidsvector is de grootte van de ogenblikkelijke snelheid (bv. 10 m/s). Deze vector geeft dus informatie over zowel de grootte van de snelheid als de bewegingsrichting en -zin.

De versnellingsvector $\vec{\mathbf{a}}$ is de verandering van de snelheidsvector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ over een bepaald tijdsinterval Δt.

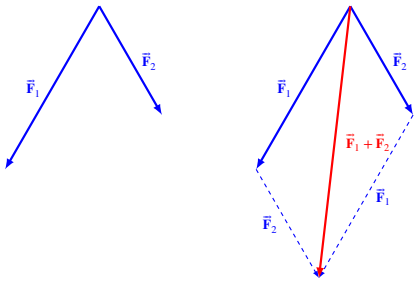
De snelheidsvector $\vec{\mathbf{v}}$ is altijd gericht volgens de bewegingszin van het deeltje, en raakt dus aan de baan van het deeltje. De versnellingsvector $\vec{\mathbf{a}}$ daarentegen kan verschillende richtingen aannemen.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 EHBO: som van vectoren

Afhankelijk van de context, zijn er verschillende manieren om de **som van twee vectoren** te berekenen:

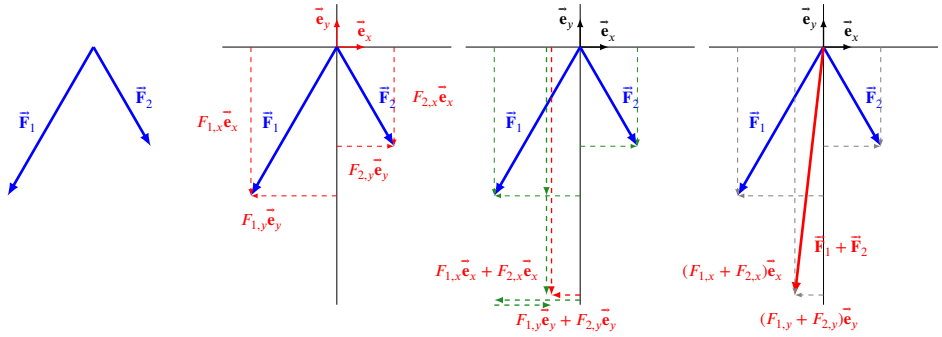
Tekening gegeven: teken de som via de parallellogramregel



Componenten gegeven: tel de componenten op

Als $\vec{\mathbf{F}}_1 = F_{1,x}\vec{\mathbf{e}}_x + F_{1,y}\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{\mathbf{F}}_2 = F_{2,x}\vec{\mathbf{e}}_x + F_{2,y}\vec{\mathbf{e}}_y$ dan is

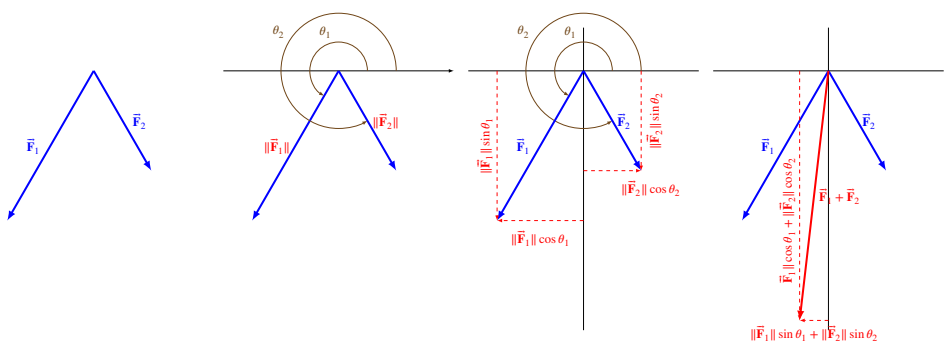
$$\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = (F_{1,x} + F_{2,x})\vec{\mathbf{e}}_x + (F_{1,y} + F_{2,y})\vec{\mathbf{e}}_y$$



Lengte en hoek met positieve x-as gegeven: bereken eerst de componenten

Als θ_1 resp. θ_2 de hoek is van $\vec{\mathbf{F}}_1$ resp. $\vec{\mathbf{F}}_1$ met de positieve x-as dan is

$$\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = (\|\vec{\mathbf{F}}_1\|\cos\theta_1 + \|\vec{\mathbf{F}}_2\|\cos\theta_2)\vec{\mathbf{e}}_x + (\|\vec{\mathbf{F}}_1\|\sin\theta_1 + \|\vec{\mathbf{F}}_2\|\sin\theta_2)\vec{\mathbf{e}}_y$$

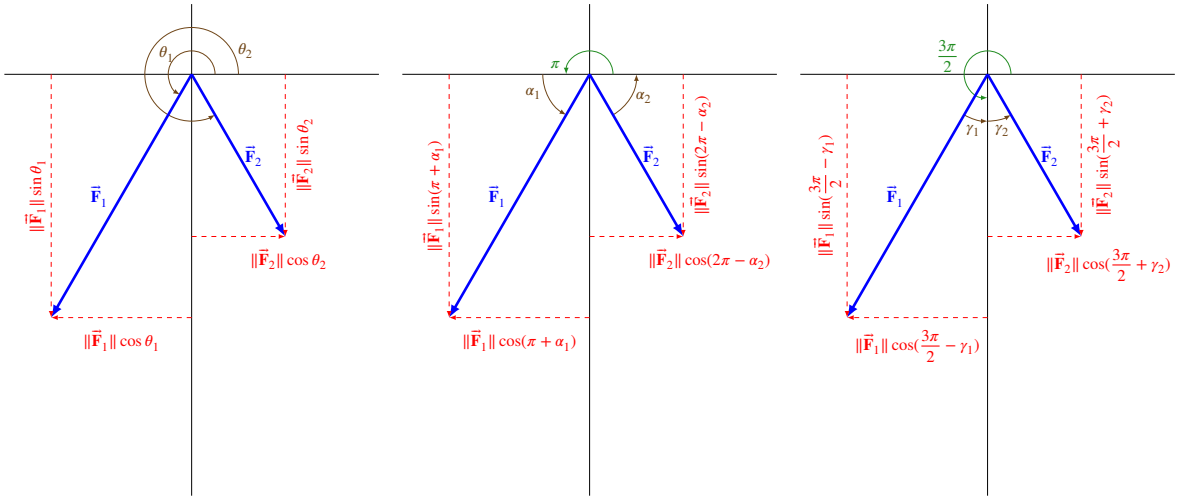


8.4 EHBO: som van vectoren

Lengte en hoek gegeven (methode 1): bereken de hoek met de positieve x-as

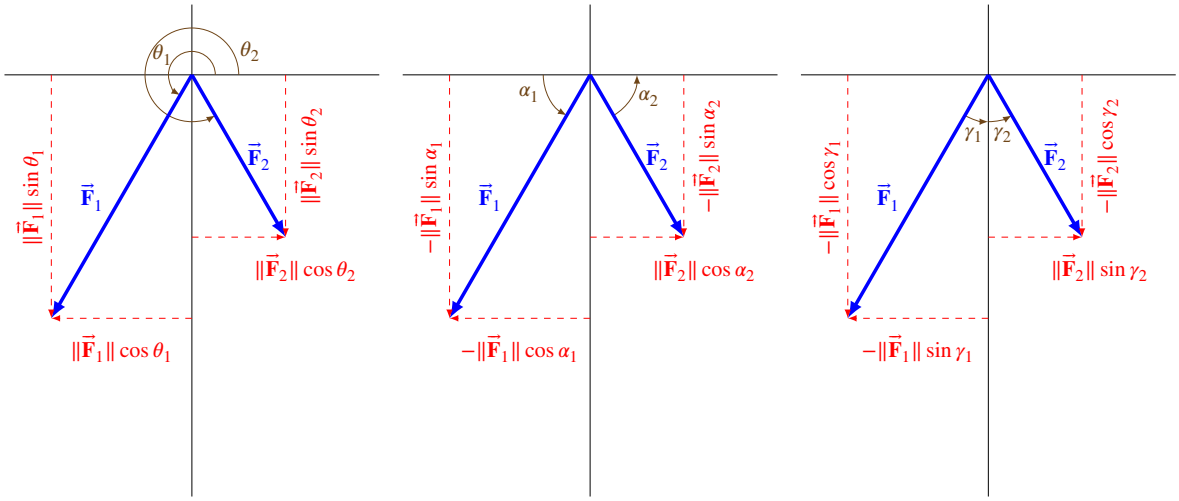
In volgende tekening geldt $\theta_1 = \pi + \alpha_1, \theta_2 = 2\pi - \alpha_2 (= -\alpha_2)$ en $\theta_1 = \frac{3\pi}{2}\pi - \gamma_1, \theta_2 = \frac{3\pi}{2}\pi + \gamma_2$.

Merk op: positieve maatgetallen van hoeken zijn steeds *tegen de klok* georiënteerd: als bijvoorbeeld α_2 gelijk is aan 60° dan wordt de hoek met de oriëntatie zoals op de middelste tekening bedoeld, en is de bijhorende hoek ten opzichte van de positieve x-as dus 300° (of ook −60°).



Lengte en hoek gegeven (methode 2): gebruik eigenschappen van driehoeken

Als andere hoeken worden gebruikt bepaalt het kwadrant het teken van de x- en de y-component.



Lengte en hoek gevraagd: bereken eerst de som via de componenten, en dan de lengte en hoek

Uit de algemene formules $\|\vec{\mathbf{F}}\| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$ en $\theta = \text{bgtan}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$ volgt onmiddellijk dat

$$\|\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2\| = \sqrt{\left(F_{1,x} + F_{2,x}\right)^2 + \left(F_{2,x} + F_{2,y}\right)} \text{ en } \theta_s = \text{bgtan}\left(\frac{F_{1,y} + F_{2,y}}{F_{1,x} + F_{2,x}}\right)$$

en/of ook

$$\|\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2\| = \sqrt{\left(\|\vec{\mathbf{F}}_1\| \cos\theta_1 + \|\vec{\mathbf{F}}_2\| \cos\theta_2\right)^2 + \left(\|\vec{\mathbf{F}}_1\| \sin\theta_1 + \|\vec{\mathbf{F}}_2\| \sin\theta_2\right)^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 EHBO: som van vectoren

en

$$\theta_s = \text{bgtan}\left(\frac{\|\vec{\mathbf{F}}_1\|\sin\theta_1 + \|\vec{\mathbf{F}}_2\|\sin\theta_2}{\|\vec{\mathbf{F}}_1\|\cos\theta_1 + \|\vec{\mathbf{F}}_2\|\cos\theta_2}\right)$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.5 Inwendig product van vectoren

Het *inwendig product* van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ is een reëel getal dat makkelijk te berekenen is en belangrijke informatie levert over de *onderlinge ligging* van die twee vectoren:

Definitie 8.5.1. Het **inwendig product** (ook **scalair product** of **inproduct** genoemd) van vectoren $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2), \vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ is het reëel getal

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 8.5.1. $(1,2)\cdot(3,4) = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = 3+8 = 11$ en $(1,2)\cdot(2,-1) = 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 2-2 = 0$

We hebben hierboven het scalair product geïntroduceerd in termen van de coördinaten van vectoren, maar er is ook een meetkundige interpretatie via lengte, projectie, loodrechte stand en hoeken.

Omdat $(a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2$, berekent het scalair product van een vector met zichzelf ook de norm van die vector, $\|(a_1, a_2)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Eigenschap 8.5.1. Voor $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^2$ is $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|^2$, en dus $\|\vec{\mathbf{a}}\| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}}$.

Een andere belangrijke meetkundige interpretatie zegt dat het scalair product van *eenheids*vectoren gelijk is aan de *cosinus van hun tussenliggende hoek*. We geven verder een verband met *projecties*.

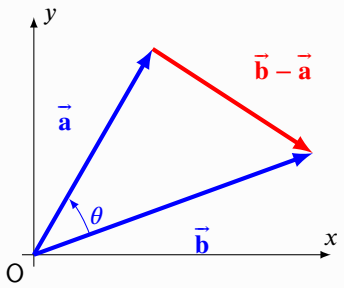
Eigenschap 8.5.2. Voor twee vectoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2$, met θ de hoek tussen de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$, geldt:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \cos(\theta)$$

Gevolg 8.5.1. Voor $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}} \neq \vec{\mathbf{b}}$ berekent het scalair product de cosinus:

$$\frac{\vec{\mathbf{a}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\|} \cdot \frac{\vec{\mathbf{b}}}{\|\vec{\mathbf{b}}\|} = \cos(\theta) \quad \text{of dus ook} \quad \cos(\theta) = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\|} \cdot \frac{\vec{\mathbf{b}}}{\|\vec{\mathbf{b}}\|}.$$

Bewijs:. De drie vectoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ en $\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$ vormen volgende driehoek:



De cosinusregel zegt:	$\|\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\|^2$	$= \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 - 2\|\vec{\mathbf{a}}\|\|\vec{\mathbf{b}}\| \cos(\theta)$
en de rekenregels voor inproduct:	$\|\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\|^2 = (\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) \cdot (\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})$	$= \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{b}} - 2\,\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$
en dus moet inderdaad		$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|\|\vec{\mathbf{b}}\| \cos(\theta).$

CC BY-NC-SA 4.0

8.5 Inwendig product van vectoren

Omdat de cosinus enkel nul is voor rechte hoeken volgt onmiddellijk een criterium voor loodrechte stand:

Gevolg 8.5.2. Voor twee vectoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2$ geldt $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0 \iff \vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}}$.

Het inwendig product berekent de cosinus van de hoek tussen vectoren, indirect dus ook die hoek zelf en het bepaalt de *loodrechte stand van vectoren*.

Oefening 8.5.1.

Beschouw de vector $\vec{\mathbf{a}} = 2\vec{\mathbf{e}}_x + 2\sqrt{3}\vec{\mathbf{e}}_y$ met $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$ de standaard orthonormale eenheidsvectoren.

1. $\vec{\mathbf{a}}$ heeft grootte $||\vec{\mathbf{a}}|| = \ldots\ldots$
2. $\vec{\mathbf{a}}$ maakt een hoek van $\ldots\ldots$ radialen met de positieve x-as.

Het inproduct berekent ook de *projectie* van een vector op een andere vector. Dit is vaak handig bij het oplossen van problemen in de fysica zoals het ontbinden van kracht of snelheid volgens bepaalde richtingen.

Opmerking 8.5.1.

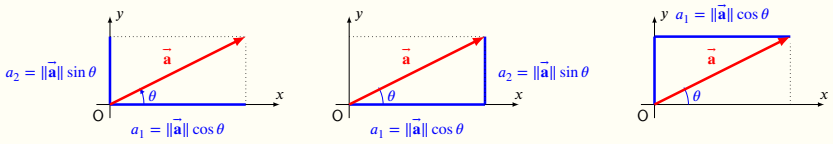
We kunnen de formule $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|\|\vec{\mathbf{b}}\| \cos(\theta)$ gebruiken om vectoren te projecteren op de x- en y-as respectievelijk. Stel $\overrightarrow{\mathbf{e_x}} = (1, 0)$ een eenheidsvector die op de x-as ligt, en θ de hoek tussen vector $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2)$ en de positieve x-as. Dan vinden we:

$$a_1 = \|\vec{\mathbf{a}}\|\|\overrightarrow{\mathbf{e_x}}\| = \|\vec{\mathbf{a}}\| \cos(\theta)$$

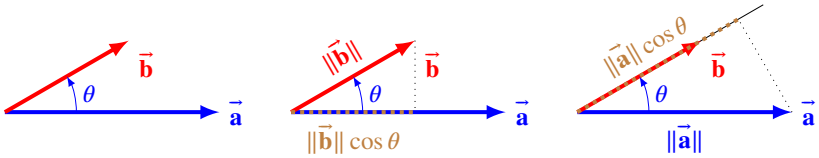
Op analoge manier kan men een eenheidsvector $\overrightarrow{\mathbf{e_y}} = (0, 1)$ op de y-as beschouwen, en θ' als de hoek tussen $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2)$ en de positieve y-as nemen. Merk op dat $\theta' = 90° - \theta$. We krijgen dus:

$$a_2 = \|\vec{\mathbf{a}}\|\|\overrightarrow{\mathbf{e_y}}\| = \|\vec{\mathbf{a}}\| \cos(\theta') = \|\vec{\mathbf{a}}\| \sin(\theta)$$

De projecties kunnen grafisch geïnterpreteerd worden als volgt:



Uit de driehoeksmeetkunde weet men dat in een rechthoekige driehoek een rechthoekszijde gelijk is aan de schuine zijde maal de cosinus van de aanliggende hoek. Bijgevolg is $\|\vec{\mathbf{a}}\| \cos\theta$ de projectie van $\vec{\mathbf{a}}$ op de drager van $\vec{\mathbf{b}}$, en ook dat $\|\vec{\mathbf{b}}\| \cos\theta$ de projectie geeft van $\vec{\mathbf{b}}$ op de drager van $\vec{\mathbf{a}}$.



Samengevat geeft dat volgende mogelijke interpretaties voro het inwendig product:

CC BY-NC-SA 4.0

8.5 Inwendig product van vectoren

Eigenschap 8.5.3. Het inwendig product $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ van vectoren kan zowel beschouwd worden als

$a_1\, b_1 \;+\; a_2\, b_2$	de algebraïsche som van de producten van hun componenten
$\|\vec{\mathbf{a}}\|\, \|\vec{\mathbf{b}}\|\, \cos(\theta)$	de grootte van $\vec{\mathbf{a}}$ maal de grootte van $\vec{\mathbf{b}}$ maal de cosinus van hun hoek
$\|\vec{\mathbf{a}}\|\Big(\|\vec{\mathbf{b}}\| \cos(\theta)\Big)$	de grootte van $\vec{\mathbf{a}}$ maal de grootte van de projectie van $\vec{\mathbf{b}}$ op $\vec{\mathbf{a}}$
$\|\vec{\mathbf{b}}\|\Big(\|\vec{\mathbf{a}}\| \cos(\theta)\Big)$	de grootte van $\vec{\mathbf{b}}$ maal de grootte van de projectie van $\vec{\mathbf{a}}$ op $\vec{\mathbf{b}}$

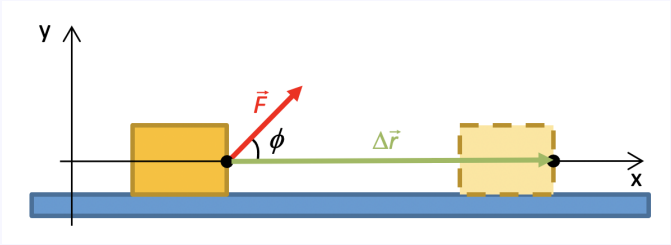
Gevolg 8.5.3. Voor een eenheidsvector $\vec{\mathbf{e}}$ is het getal $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{e}}$ de grootte van $\vec{\mathbf{a}}$ 'in de richting' $\vec{\mathbf{e}}$.

Gevolg 8.5.4. Voor een eenheidsvector $\vec{\mathbf{e}}$ is de vector $(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{e}})\vec{\mathbf{e}}$ de projectie van $\vec{\mathbf{a}}$ op de drager van $\vec{\mathbf{e}}$.

Volgend voorbeeld illustreert het belang van projecties en dus van het scalair product in de fysica.

Voorbeeld 8.5.2. Beschouw een massa die op een rechte baan een verplaatsing $\Delta\vec{r}$ maakt en daarbij een constante kracht $\vec{F}$ ondervindt (zie figuur). De arbeid geleverd door de kracht $\vec{F}$ wordt gedefinieerd als het scalair product van de kracht en de verplaatsing:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot ||\Delta r|| \cdot \cos\phi.$$



Figuur 1: Arbeid geleverd door een kracht $\vec{F}$ op een massa bij een verplaatsing $\Delta\vec{r}$.

Afhankelijk van de hoek kan de arbeid positief ($\phi < \frac{\pi}{2}$), negatief ($\phi > \frac{\pi}{2}$) of nul zijn ($\phi = \frac{\pi}{2}$). De arbeid geleverd door een kracht die loodrecht staat op de verplaatsing is dus steeds nul. Dit is bijvoorbeeld steeds het geval voor de normaalkracht, die immers steeds loodrecht staat op de bewegingsrichting.

Volgende eigenschappen kan je makkelijk verifiëren via wat rekenwerk:

Eigenschap 8.5.4. Voor vectoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ en $\vec{\mathbf{c}}$ en getallen $r, s \in \mathbb{R}$ geldt:

(a) $\vec{\mathbf{a}} \cdot (r\,\vec{\mathbf{b}} + s\,\vec{\mathbf{c}}) = r\,(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) + s\,(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})$ (lineair)

(b) $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ (symmetrisch)

(c) $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} \geq 0$ (positief)

(d) $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$ (positief definiet)

(e) $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = 0$

CC BY-NC-SA 4.0

8.5 Inwendig product van vectoren

Hieruit volgt onmiddellijk dat $(r\vec{\mathbf{a}} + s\vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}} = r(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) + s(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}})$ en dat $(r\vec{\mathbf{a}}) \cdot (s\vec{\mathbf{b}}) = rs(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$.

Oefening 8.5.2. Toon aan met de rekenregels van het scalair product dat $\dfrac{\vec{\mathbf{a}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\|}$ een eenheidsvector is.

Opmerking 8.5.2.

(a) Verwar het scalair *product* $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}$ van twee vectoren niet met het scalair *veelvoud* $r \cdot \vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^2$ van een reëel getal met een vector.

Pas dus op met haakjes bij een scalair product: $\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}})$ is namelijk een scalaire vermenigvuldiging van vector $\vec{\mathbf{a}}$ en $(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}}$ is een scalair veelvoud van vector $\vec{\mathbf{c}}$. De bewerking binnen de haakjes is een scalair product, maar de bewerking buiten de haakjes is de scalaire vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal. Dus geldt in het algemeen $\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) \neq (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}$.

(b) In principe laten we de punt bij het scalair product nooit weg: we schrijven dus $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ en niet $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.6 Vectorieel product van vectoren

Het *vectorieel product* van twee vectoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ in $\mathbb{R}^3$ is een nieuwe vector $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ in $\mathbb{R}^3$ die loodrecht staat op zowel $\vec{\mathbf{a}}$ als $\vec{\mathbf{b}}$. Dit vectorieel product speelt een belangrijke rol in meetkundige en fysische problemen in $\mathbb{R}^3$ en kan ofwel gedefinieerd worden met een directe formule, ofwel met 2×2-determinanten:

Definitie 8.6.1. Het **vectorieel product** (of **vectorproduct**) van $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ in $\mathbb{R}^3$, genoteerd $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$, is de vector

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) &\overset{\text{def}}{=} (\, a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1\,) \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \quad \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Voorbeeld 8.6.1.

$(1,2,3) \times (4,5,6) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6,\ 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = (-3, 6, -3)$

$(1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$ en $(0,1,0) \times (1,0,0) = (0,0,-1)$

Wie vertrouwd is met 3×3-determinanten kan best volgende interessante formule onthouden:

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{e}_x} & \vec{\mathbf{e}_y} & \vec{\mathbf{e}_z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

met $\vec{\mathbf{e}_x} = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{e}_y} = (0,1,0)$ en $\vec{\mathbf{e}_z} = (0,0,1)$ de drie basisvectoren van $\mathbb{R}^3$. Inderdaad:

$$\vec{\mathbf{e}_x} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{\mathbf{e}_y} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{\mathbf{e}_z} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

De grootte $\|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\|$ voldoet aan een gelijkaardige formule als het inproduct, maar met een sinus:

Eigenschap 8.6.1. Als θ de hoek is tussen de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$, dan geldt

$$\|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\| = \|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \sin\theta$$

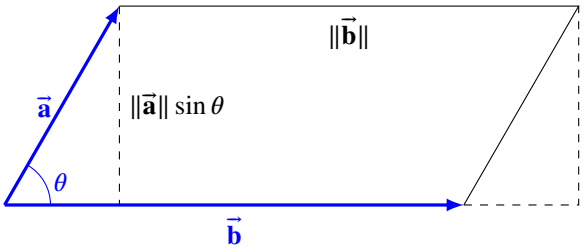
Bewijs.

$$\begin{aligned}\|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \sin\theta &= \|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \sqrt{1 - \cos^2\theta} \quad (0 \le \theta \le \pi) \\ &= \|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \sqrt{1 - \frac{(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})^2}{\|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \|\vec{\mathbf{b}}\|^2}} \\ &= \sqrt{\|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2} \\ &= \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2} \\ &= \|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\|\end{aligned}$$

We kunnen de grootte van het vectorproduct ook interpreteren als de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$:

CC BY-NC-SA 4.0

8.6 Vectorieel product van vectoren

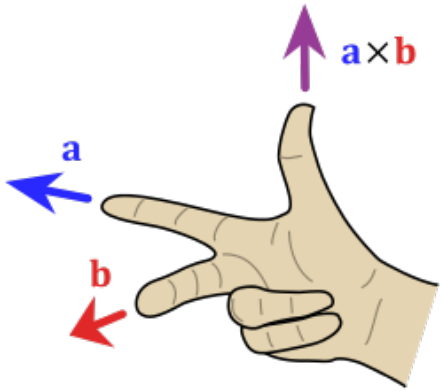


Gevolg 8.6.5. $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}} \iff \vec{\mathbf{a}} \parallel \vec{\mathbf{b}}$ (i.e.: $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ liggen op één lijn, of $\vec{\mathbf{a}} = 0$ of $\vec{\mathbf{b}} = 0$)

Gevolg 8.6.6. Als θ de hoek is tussen de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$, dan geldt

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \sin\theta \vec{\mathbf{n}}$$

met $\vec{\mathbf{n}}$ een eenheidsvector loodrecht op $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ en georiënteerd via de rechterhandregel.



Invullen en rekenen leert dat $(x, y, z) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ voldoet aan de vergelijkingen

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

Deze vergelijkingen kunnen geïnterpreteerd worden als voorwaarde dat (x, y, z) loodrecht staat op (a_1, a_2, a_3) en op (b_1, b_2, b_3), en dus volgt dat de vector $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$ loodrecht staat op (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3). Dit geeft volgende eigenschap, die drie keer in een andere vorm precies hetzelfde weergeeft:

Eigenschap 8.6.2.

(a) Het vectorieel product $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ staat *loodrecht* op $\vec{\mathbf{a}}$ en op $\vec{\mathbf{b}}$: $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \perp \vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \perp \vec{\mathbf{b}}$.

(b) Het vectorieel product $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ voldoet aan de *identiteiten* $\begin{cases} \vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = 0 \\ \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = 0 \end{cases}$.

(c) Het vectorieel product $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ is een *oplossing* van het stelsel $\begin{cases} \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0 \\ \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0 \end{cases}$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

8.6 Vectorieel product van vectoren

Opmerking 8.6.1.

- Het vectorproduct is *niet commutatief*, want $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}}$. Hieruit volgt dat $\vec{\mathbf{a}}\times k\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}, k \in \mathbb{R}$.
- Het vectorproduct is *niet associatief*: $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) \neq (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \times \vec{\mathbf{c}}$. Inderdaad, je kan bijvoorbeeld eenvoudig nagaan dat $\overrightarrow{\mathbf{e_x}} \times (\overrightarrow{\mathbf{e_x}} \times \overrightarrow{\mathbf{e_y}}) = \overrightarrow{\mathbf{e_x}} \times \overrightarrow{\mathbf{e_z}} = -\overrightarrow{\mathbf{e_y}}$, terwijl $(\overrightarrow{\mathbf{e_x}} \times \overrightarrow{\mathbf{e_x}}) \times \overrightarrow{\mathbf{e_y}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Het concept van een vectorproduct wordt vaak gebruikt in de fysica. Een bekend voorbeeld is wanneer een magnetisch veld een kracht uitoefent op bewegende ladingen (en bijgevolg ook op een stroomvoerende geleider). Deze kracht noemt men de laplacekracht.

Voorbeeld 8.6.2.

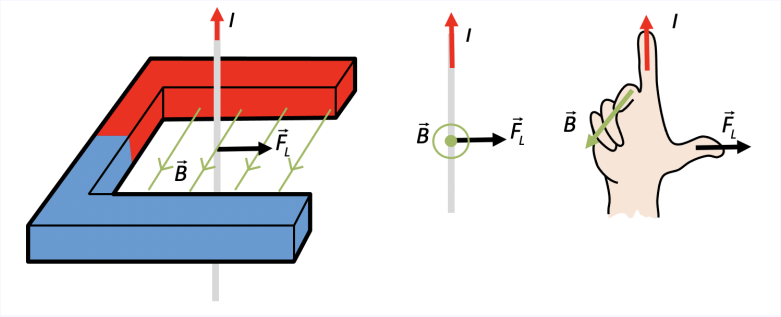
Met een gedetailleerd onderzoek kan men nagaan dat de grootte van de laplacekracht F_L op een stroomdraad met lengte ℓ die zich in een magnetisch veld $\vec{B}$ bevindt en waardoor je een stroom I stuurt, gelijk is aan

$$F_L = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin(\widehat{\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{l}}})$$

De kracht zelf is een vectoriële grootheid die we kunnen schrijven als een vectorproduct:

$$\overrightarrow{\mathbf{F_L}} = I\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}}$$

waarbij $\vec{\ell}$ een vector gericht langs de draad volgens de conventionele stroomzin $(\vec{\mathbf{l}})$. De kracht staat loodrecht op de stroomdraad $\vec{\mathbf{l}}$ en ook loodrecht op de veldlijnen $\vec{\mathbf{B}}$.



Figuur 2: Kracht op een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld.

Merk op dat

- Het aangrijpingspunt van de kracht ligt op de draad.
- De richting: de kracht staat loodrecht op het vlak gevormd door de draad en het magnetische veld op die plaats.
- De zin van de laplacekracht kun je gemakkelijk bepalen met de rechterhandregel: als je de wijsvinger (Index) van je rechterhand volgens de conventionele stroomzin I houdt en je Middenvinger in de zin van het Magnetische veld, geeft je duim de zin van de kracht aan.
- De grootte van de kracht hangt o.a. af van de sterkte van de stroom en van de sterkte van het veld.

CC BY-NC-SA 4.0

8.6.A Oefeningen vectoren

We werken steeds in een gegeven xy-assenstelsel, en noteren $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$ voor de eenheidsvectoren op respectievelijk de x- en de y-as. We tekenen vrije vectoren door ze te laten aangrijpen in de oorsprong.

Oefening 8.6.1. Duid op een tekening de vectoren $\vec{a} = 2\vec{\mathbf{e}}_x + \vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{b} = \vec{\mathbf{e}}_x - \vec{\mathbf{e}}_y$ aan.

Duid daarna ook de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ aan.

Oefening 8.6.2. Teken de vectoren $\vec{a} = \vec{\mathbf{e}}_x + 2\vec{\mathbf{e}}_y$, $\vec{b} = -2\vec{\mathbf{e}}_x + 3\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{c} = \vec{\mathbf{e}}_x - \vec{\mathbf{e}}_y$. Bereken en construeer daarna ook de vectoren

- $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b}$
- $\vec{t} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right)$

Oefening 8.6.3. $\vec{a} = \vec{\mathbf{e}}_x - \sqrt{3}\vec{\mathbf{e}}_y$

1. $\vec{a}$ heeft grootte $||\vec{a}|| = \ldots\ldots$

2. $\vec{a}$ maakt een hoek van $\ldots\ldots$ radialen met de positieve x-as.

Oefening 8.6.4. Een gegeven vector $\vec{a}$ met lengte 10 maakt een hoek van $5\pi/4$ met de x-as. Bereken de vectorcomponenten volgens $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$.
Antwoord: $a_x = \ldots\ldots, a_y = \ldots\ldots$

Oefening 8.6.5. Bereken de grootte van de vectoren $\vec{a} = 3\vec{\mathbf{e}}_x + 4\vec{\mathbf{e}}_y$, $\vec{b} = 4\vec{\mathbf{e}}_x - 3\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
Antwoord: $||\vec{a}|| = \ldots\ldots, ||\vec{b}|| = \ldots\ldots, ||\vec{c}|| = \ldots\ldots$

Geef ook eenheidsvectoren met dezelfde richting en zin als deze vectoren.

Oefening 8.6.6. Is volgende uitspraak waar: voor vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt steeds dat $||\vec{a} + \vec{b}|| = ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$.
Antwoord: Fout

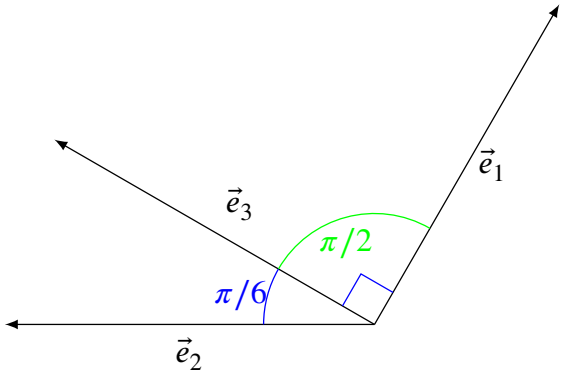
Oefening 8.6.7. De vector $\vec{a}$ heeft lengte $\sqrt{2}$ en maakt een hoek van $\pi/4$ radialen met de positieve x-as. De vector $\vec{b}$ heeft lengte 4, staat loodrecht op $\vec{a}$ en voldoet bovendien aan $b_y > 0$.
Bepaal de componenten van de vector $\vec{b}$ en teken de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Antwoord: $b_x = \ldots\ldots, b_y = \ldots\ldots$

Volgende oefening is een voorbeeld van het oplossen van vectorvergelijkingen.

Oefening 8.6.8. Beschouw volgende drie eenheidsvectoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ en $\vec{e}_3$ in het vlak:

CC BY-NC-SA 4.0

8.6.A Oefeningen vectoren



Los op twee manieren volgende vectorvergelijking op naar v_2 en v_3.

$$\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = v_3\vec{e}_3.$$

1. Meetkundig: door snijpunten van rechten te bepalen.

Antwoord: $v_2 = \ldots\ldots$ en $v_3 = \ldots\ldots$

2. Algebraïsch: door te rekenen met componenten. Je moet natuurlijk hetzelfde antwoord bekomen als hierboven.

Oefening 8.6.9. Gegeven zijn de vectoren

- $\overrightarrow{\mathbf{r_1}} = 2\overrightarrow{\mathbf{e_x}} + 3\overrightarrow{\mathbf{e_y}}$
- $\overrightarrow{\mathbf{r_2}} = 4\overrightarrow{\mathbf{e_x}} - 5\overrightarrow{\mathbf{e_y}}$
- $\overrightarrow{\mathbf{r_3}} = 5\overrightarrow{\mathbf{e_x}} + 2\overrightarrow{\mathbf{e_y}}$
- $\overrightarrow{\mathbf{r_4}} = 4\overrightarrow{\mathbf{e_x}} - 10\overrightarrow{\mathbf{e_y}}$

Bepaal welk van deze vectoren loodrecht op elkaar staan.

Oefening 8.6.10. Teken de vector $\vec{a} = -4 \cdot \vec{e}_x + 5 \cdot \vec{e}_y$. Bepaal de hoek die deze vector maakt met de positieve x-as.

$$\theta = \ldots\ldots\ ^\circ$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.56)

KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Module 9
Lineaire Algebra(Extra materiaal)

(Versie 2026/08/25H.56)

9.1 Matrices: alternatief overzicht

Extract uit Lineaire Algebra A ZONDER DE TEKENINGEN

In heel wat problemen beschikken we over veel getallen die we op een geordende en overzichtelijke wijze trachten bij te houden. Dikwijls gebruiken we hiervoor *tabellen*, waarin de getallen volgens hun betekenis een plaats krijgen op een rij en in een kolom.

Zo'n gerangschikte tabel (reële) getallen noemen we een *matrix*.

9.1.1 Het begrip matrix

In een school wil men de examenresultaten van de leerlingen overzichtelijk bijhouden. Men maakt een tabel, waarvan een deel er als volgt uitziet :

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
Max	80	80	40	20
Jan	72	62	23	11
Greet	74	65	38	10
Michel	73	70	29	17
Hilde	75	71	30	15

Deze gegevens houden we bij in de (punten)matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}.$$

A is een 5×4-matrix of een (5,4)-matrix met 5 *rijen* en 4 *kolommen*. Het element op de 3de rij en de 2de kolom stellen we voor door A_{32}.
Matrices worden zowel met ronde als met rechte haken genoteerd.

We werken hier dus met 2 indices om de individuele elementen van de matrix A aan te duiden. De eerste index is steeds het nummer van de rij, de tweede index dat van de kolom.

De verschillende getallen (punten) noemen we de *elementen* van de matrix A. A zelf dus is het geheel van deze 20 getallen, elk op hun eigen plaats.

Een vector wordt ook vaak voorgesteld door een kolommatrix, dit is een matrix met slechts één kolom (ook "kolomvector") genoemd, dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ i.p.v. } (1, 3, -2).$$

Soms wordt ook gesproken over rijmatrices of rijvectoren. Dit zijn matrices met slechts één rij. Het is echter van belang in te zien dat rijmatrices en kolommatrices verschillende matrices zijn. Dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Matrices: alternatief overzicht

9.1.2 Som van matrices

Stel nu dat A de punten bevat van het eerste semester. De uitslagen van het tweede semester worden bijgehouden in een gelijkaardige matrix B.

Stel dat

$$B = \begin{bmatrix} 160 & 160 & 80 & 40 \\ 130 & 132 & 50 & 28 \\ 120 & 110 & 70 & 20 \\ 145 & 120 & 55 & 35 \\ 145 & 100 & 62 & 30 \end{bmatrix}.$$

De jaaruitslagen kunnen we dan eenvoudig berekenen door alle overeenkomstige uitslagen op te tellen. Deze jaaruitslagen zetten we in een nieuwe matrix C, en we stellen

$$C = A + B.$$

C is de *som* van de matrices A en B.

Definitie 9.1.1 (Optelling van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}$$

Merk op dat de optelling alleen gedefinieerd is voor matrices van hetzelfde formaat (d.w.z. aantal rijen en kolommen).

9.1.3 Scalair veelvoud van matrices

In het volgende voorbeeld gaat het over een aantal steden die verbonden zijn door spoorlijnen. In een matrix houden we de kortste verbindingsafstanden bij tussen 6 steden. De informatie is af te lezen uit het volgende schema en om te zetten in een $(6,6)$-*afstandenmatrix*.

Om de matrix op te stellen zetten we zowel in de rijen als de kolommen de steden in alfabetische volgorde.

Als de prijs per km 0.07 euro bedraagt, kan men uit deze matrix gemakkelijk de prijs van een treinkaartje van Oostende naar Antwerpen aflezen.

We kunnen alle prijzen onmiddellijk bij de hand houden in een nieuwe *prijzen*matrix P.

We verkrijgen P uit A door alle elementen van A met 0.07 te vermenigvuldigen.

We stellen $P = (0.07) \cdot A$.

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Matrices: alternatief overzicht

Definitie 9.1.2 (Scalaire vermenigvuldiging van een matrix met een getal)**.**

$$r\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{1,1} & ra_{1,2} & \cdots & ra_{1,n} \\ ra_{2,1} & ra_{2,2} & \cdots & ra_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m,1} & ra_{m,2} & \cdots & ra_{m,n} \end{bmatrix}$$

Ook het aftrekken van matrices, en de tegengestelde matrix, worden gedefinieerd in analogie met de begrippen voor vectoren.

We definiëren ook de nulmatrix:

Definitie 9.1.3 (Nulmatrix)**.** De *nulmatrix* $O_{m\times n}$ is een $m\times n$ matrix waarvan alle elementen nul zijn.

De index $m\times n$ wordt vaak weggelaten indien het formaat duidelijk is uit de context.

9.1.4 Product

De prijs van een spoorweg km is tussen alle steden hetzelfde. De prijsberekening verandert als we artikelen van verschillende prijs gaan verkopen. Veronderstel dat een (kleine) firma 4 verschillende artikelen verkoopt, die per stuk resp. 25, 60, 48 en 125 euro kosten. Deze prijzeninformatie verzamelen we in een (4,1)-eenheidsprijzenmatrix

$$B = \begin{bmatrix} 25 \\ 60 \\ 48 \\ 125 \end{bmatrix}.$$

Er komt een bestelling :
130 stuks van artikel 1,
200 stuks van artikel 2,
20 stuks van artikel 3,
80 stuks van artikel 4,

We maken een bestellingenmatrix $A = [130 \quad 200 \quad 20 \quad 80]$. De kostprijs van de bestelling bedraagt dan natuurlijk

$$130\times 25 + 200\times 60 + 20\times 48 + 80\times 125 = \ldots$$

Het resultaat (de bestellingskostprijs) is het *product* van de rijmatrix A en de kolommatrix B.

$$[130 \quad 200 \quad 20 \quad 80]\begin{bmatrix} 25 \\ 60 \\ 48 \\ 125 \end{bmatrix} = 130\times 25 + 200\times 60 + 20\times 48 + 80\times 125$$

Na die eerste bestelling komen er nieuwe bestellingen. Alle bestellingen houden we bij in een (uitgebreidere) bestellingenmatrix, bijvoorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 130 & 200 & 20 & 80 \\ 250 & 100 & 100 & 0 \\ 3 & 10 & 1 & 5 \\ 0 & 30 & 200 & 100 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{ bestelling } 1 \\ \rightarrow \text{ bestelling } 2 \\ \rightarrow \text{ bestelling } 3 \\ \rightarrow \text{ bestelling } 4 \end{matrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Matrices: alternatief overzicht

De bestellingskostprijzen worden steeds op dezelfde wijze berekend en houden we ook bij in een (4,1)-matrix

$$\begin{bmatrix} 130 & 200 & 20 & 80 \\ 250 & 100 & 100 & 0 \\ 3 & 10 & 1 & 5 \\ 0 & 30 & 200 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 60 \\ 48 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{kostprijs bestelling } 1 \\ \text{kostprijs bestelling } 2 \\ \text{kostprijs bestelling } 3 \\ \text{kostprijs bestelling } 4 \end{array}$$

$$A \quad \cdot \quad B \quad = \quad K$$

We definiëren nu het product van een matrix met een (kolom)vector. Dit levert een nieuwe vector. De vector die vermenigvuldigd wordt, moet evenveel componenten hebben als het aantal kolommen van de matrix. De resultaatvector heeft evenveel componenten als het aantal rijen van de matrix.

Definitie 9.1.4 (Matrix-vector-product)**.** Het product van een $m \times n$ matrix met een vector met n componenten is een vector met m componenten, gegeven door

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + \ldots + a_{1,n}b_n \\ a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + \ldots + a_{2,n}b_n \\ \vdots \\ a_{m,1}b_1 + a_{m,2}b_2 + \ldots + a_{m,n}b_n \end{bmatrix}.$$

We keren terug naar het voorbeeld:

We kunnen de eenheidsprijzenmatrix B nog uitbreiden met een tweede kolom : de eenheidsprijzen inclusief BTW (het BTW % is niet noodzakelijk hetzelfde op elk artikel). De prijzen inclusief BTW zetten we in de tweede kolom van B.

In een tweede kolom van K zetten we natuurlijk de kostprijzen van de bestellingen inclusief BTW.

$$\begin{bmatrix} 130 & 200 & 20 & 80 \\ 250 & 100 & 10 & 0 \\ 3 & 10 & 1 & 5 \\ 0 & 30 & 200 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 28 \\ 60 & 71 \\ 48 & 51 \\ 125 & 156 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

$$A \quad \cdot \quad B \quad = \quad K$$

We berekenen bijvoorbeeld het element K_{32} als $A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} + A_{33}B_{32} + A_{34}B_{42}$.

Om het product van de matrix A met de matrix B te kunnen uitrekenen moet

$$aantal\ kolommen\ van\ A = aantal\ rijen\ van\ B.$$

Een bepaald element van AB, zeg $(AB)_{ij}$ wordt berekend door de elementen van de i-de rij van A te vermenigvuldigen met de elementen van de j-de kolom van B en alle producten op te tellen :

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj},$$

Voorbeeld 9.1.1.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{bmatrix} =$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Matrices: alternatief overzicht

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+a_{1,3}b_{3,1}+a_{1,4}b_{4,1} & a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2}+a_{1,3}b_{3,2}+a_{1,4}b_{4,2} \\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1}+a_{2,3}b_{3,1}+a_{2,4}b_{4,1} & a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2}+a_{2,3}b_{3,2}+a_{2,4}b_{4,2} \\ a_{3,1}b_{1,1}+a_{3,2}b_{2,1}+a_{3,3}b_{3,1}+a_{3,4}b_{4,1} & a_{3,1}b_{1,2}+a_{3,2}b_{2,2}+a_{3,3}b_{3,2}+a_{3,4}b_{4,2} \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 9.1.2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

Een belangrijke matrix is de eenheidsmatrix:

Definitie 9.1.5 (Eenheidsmatrix)**.** De *eenheidsmatrix* I_n is een $n \times n$ matrix waarvan de diagonaalelementen gelijk zijn aan 1 en alle andere elementen gelijk zijn aan 0.

Voorbeeld 9.1.3. De 3×3 eenheidsmatrix is

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De index bij I geeft het formaat van de (vierkante) matrix aan. Indien het formaat duidelijk is uit de context wordt dit vaak weggelaten.

De belangrijkste eigenschap van de eenheidsmatrix is

$$I_m A = A \text{ en } AI_n = A \text{ (voor } A \text{ een } m \times n \text{ matrix).}$$

Merkwaardig is dat - hoewel de productregel vrij ingewikkeld is - een aantal bekende rekenregels van getallen ook voor matrices in hun geheel blijven gelden. Toch zijn er ook verschillen !

We beginnen met een lijst van eigenschappen die ook voor matrices gelden.

(1) $A + B = B + A$

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $A + 0 = A$. Hier is 0 een nulmatrix.

(4) Voor elke matrix A is er een matrix $-A$ zodat $A + (-A) = 0$.

(5) $A(B + C) = AB + AC$.

(6) $A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$

De tussenresultaten en de berekeningen die men moet maken om eerst $A(BC)$ en dan $(AB)C$ te bepalen zijn wel heel verschillend. Verrassend genoeg is het eindresultaat hetzelfde.

De eigenschap laat toe om meerdere matrices probleemloos met elkaar te vermenigvuldigen. Zo is ABC bepaald door $A(BC)$ of door $(AB)C$.

Zo kan men ook machten van vierkante matrices berekenen : $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$.

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Matrices: alternatief overzicht

Wat mag niet?

Let wel op dat we niet alles mogen doen met matrices wat we met symbolen die getallen voorstellen mogen doen:

(1) In het algemeen geldt NIET $AB = BA$.

Voorbeeld 9.1.4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

maar

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dit kan wel gelden voor specifieke matrices A en B.

Voorbeeld 9.1.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Uit $AB = O$ (met O de nulmatrix) kunnen we (in tegenstelling tot bij getallen) niet besluiten dat $A = O$ of $B = O$.

Voorbeeld 9.1.6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) Uit de matrixgelijkheid $AB = AC$ mag niet besloten worden dat $B = C$. Bij getallen mag dit wel als $A \neq 0$.

Uit $AB = AC$ kan wel besloten worden dat $A(B - C) = O$. Dat we hieruit niet kunnen besluiten dat als $A \neq O$, $B - C = O$ en dus $B = C$ kan gezien worden als een speciaal geval punt (2).

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Vectoren en matrices

We leren rekenen met n-tallen van reële getallen, dus rekenen in $\mathbb{R}^n$.

- Dat is een veralgemening van rekenen met koppels (of dus punten in het vlak, of vectoren in het vlak)
- Dat is handig bij het oplossen van lineaire stelsels
- Dat is een voorbereiding op de studie van vectorruimten

Om redenen die verder duidelijk zullen worden, noemen we een n-tal reële getallen een *vector*:

Definitie 9.2.1 (Vector (voorlopige definitie))**.**

Een *vector* is een element van $\mathbb{R}^n$. Dat wil zeggen, een vector is stel van n reële getallen, die we noteren als

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

De getallen $a_1, a_2, \dots$ worden de *componenten* van de vector a genoemd.

Soms noteert men een vector a met een pijltje als $\vec{a}$ of vet als $\mathbf{a}$.

Voorbeeld 9.2.1.

$(1,2)$ is een vector in $\mathbb{R}^2$; $(1,2,\frac{1}{2})$ is een vector in $\mathbb{R}^3$; $(\sqrt{2},0,-0.5,\pi)$ is een vector in $\mathbb{R}^4$.

De belangrijkste bewerkingen op vectoren zijn de *optelling* en de *scalaire vermenigvuldiging*. Met behulp van de optelling definiëren we ook onmiddellijk de *aftrekking* en de *tegengestelde*.

Definitie 9.2.2 (Rekenen met vectoren)**.**

De **som** van twee vectoren $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ en $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ in $\mathbb{R}^n$ is

$$a + b = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \overset{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

De **nulvector** $0_n = (0, \dots, 0)$ is de vector die bestaat uit n nullen.

De **tegengestelde vector** van $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ is

$$-a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \overset{\text{def}}{=} (-a_1, -a_2, \dots, -a_n).$$

Het **verschil** van twee vectoren is

$$a - b \overset{\text{def}}{=} a + (-b).$$

De **scalaire vermenigvuldiging** van een vector $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ met een getal $r \in \mathbb{R}$ is

$$ra = r(a_1, a_2, \dots, a_n) \overset{\text{def}}{=} (ra_1, ra_2, \dots, ra_n) \in \mathbb{R}^n.$$

We noemen $r(a_1, a_2, \dots, a_n)$ een **scalair veelvoud** van $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Voorbeeld 9.2.2.

$$(1,2) + (3,4) = (1+3, 2+4) = (4,6).$$
$$(1,-1.5,3) + (2.2,-1,0) = (3.2,-2.5,3).$$
$$3(1,2) = (3,6)$$
$$3(1,-1,0.5) = (3,-3,1.5).$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Vectoren en matrices

Opmerking 9.2.1.

- De som en het verschil van vectoren is alleen gedefinieerd voor vectoren van hetzelfde formaat. Zo is de som van ~~$(1,2)+(3,4,5)$~~ niet gedefinieerd.
- Indien het formaat duidelijk is uit de context wordt voor de nulvector de index n weggelaten.
- Net zoals voor de vermenigvuldiging van getallen, schrijven we soms een punt voor de scaliare vermenigvuldiging: $r \cdot a = ra$.
- Pas op: verder zullen we ook een scalair *product* definiëren, en dat zal iets totaal anders zijn dat het scalair *veelvoud* hier. Per uitzondering noemen we het resultaat van een vermenigvuldiging hier geen *product*, maar een *veelvoud*. Merk ook op dat we hier twee verschillende dingen met elkaar vermenigvuldigen: een vector en een getal. Het resultaat is een vector.

Eigenschap 9.2.1. Voor elke vector $a \in \mathbb{R}^n$ en elk getal $r \in \mathbb{R}$ geldt

$$a + 0 = a.$$

$$a + (-a) = 0.$$

$$1a = a \text{ en } (-1)a = -a.$$

$$0a = 0 \text{ en } r0_n = 0_n.$$

Een heel belangrijk concept in de theorie van vectoren is de *lineaire combinatie*.

Definitie 9.2.3 (Lineaire combinatie)**.**

Een *lineaire combinatie* van vectoren is een som van scalaire veelvouden van die vectoren.

Dus als $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ en $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, dan is de vector

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \in \mathbb{R}^n$$

een lineaire combinatie van de vectoren $v_1, \ldots, v_n$.
De getallen a_i heten de *coëfficiënten* of *gewichten* van de lineaire combinatie.

Voorbeeld 9.2.3.

1. $2(1,2) + 3(4,5)$ is een lineare combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

2. $(1,2)$ is een lineare combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

3. $(2,4)$ is een lineare combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

4. $(2,4,0)$ is een lineare combinatie van de vectoren $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$

5. $(2,4,1)$ is geen lineare combinatie van de vectoren $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$

6. $3(1,2.5,-1,1)-2(2,0,1,-1)+2(1,-1,0.5,0) = (1,5.5,-4,5)$ is een lineare combinatie van $(1,2.5,-1,1)$, $(2,0,1,-1)$ en $(1,-1,0.5,0)$

Definitie 9.2.4 (Matrix)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Vectoren en matrices

Een $m \times n$ *matrix* is een rechthoekig rooster van getallen.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

De verzameling van alle $m \times n$ matrices met reële getallen wordt genoteerd als $\mathbb{R}^{m \times n}$.

De afzonderlijke getallen $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots$ worden *matrixelementen* genoemd. De eerste index geeft het nummer van de *rij* aan, de tweede index van de *kolom*.

Voorbeeld 9.2.4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is een 2×2 matrix; $\begin{bmatrix} 1 & 2.3 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 2×3 matrix.

Een vector wordt soms ook voorgesteld door een kolommatrix, dit is een matrix met slechts één kolom (ook "kolomvector") genoemd, dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ i.p.v. } (1, 3, -2).$$

In sommige handboeken wordt dan ook geen onderscheid gemaakt tussen $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n \times 1}$. Op analoge wijze wordt meestal geen onderscheid gemaakt tussen een 1×1 matrix of een vector met 1 component of gewoon een getal.
Soms wordt ook gesproken over rijmatrices of rijvectoren. Dit zijn matrices met slechts één rij (dus in $\mathbb{R}^{1 \times n}$). Het is echter van belang in te zien dat rijmatrices en kolommatrices verschillende matrices zijn. Dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

De gehele matrix of vector kan ook voorgesteld worden door één symbool, bv.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

In deze tekst zullen we vectoren meestal voorstellen met een kleine letter, en matrices met hoofdletters. In sommige handboeken worden symbolen die vectoren voorstellen vetgedrukt, of met een pijltje erboven weergegeven. In andere handboeken worden matrices vetgedrukt. In deze tekst wordt geen van deze conventies gevolgd.

Ook voor matrices wordt op analoge manier de optelling en de scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd.

Definitie 9.2.5 (Optelling van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}$$

De optelling is alleen gedefinieerd is voor matrices van hetzelfde formaat (d.w.z. aantal rijen en kolommen).

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Vectoren en matrices

Definitie 9.2.6 (Scalaire vermenigvuldiging van een matrix met een getal)**.**

$$r\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{1,1} & ra_{1,2} & \cdots & ra_{1,n} \\ ra_{2,1} & ra_{2,2} & \cdots & ra_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m,1} & ra_{m,2} & \cdots & ra_{m,n} \end{bmatrix}$$

Ook het aftrekken van matrices, en de tegengestelde matrix, worden gedefinieerd in analogie met de begrippen voor vectoren.

We definiëren ook de nulmatrix:

Definitie 9.2.7 (Nulmatrix)**.** De *nulmatrix* $O_{m\times n}$ is een $m\times n$ matrix waarvan alle elementen nul zijn.

De index $m\times n$ wordt vaak weggelaten indien het formaat duidelijk is uit de context.

Een veelgebruikte operatie op matrices is het transponeren: spiegelen rond de diagonaal, of ook rijen en kolommmen verwisselen.

Definitie 9.2.8 (Transponeren)**.**

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 9.2.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Merk op dat de getransponeerde van een $n\times m$ matrix een $m\times n$ matrix is, en dat de kolommen van A overeenkomen met de rijen van A^T.

We definiëren nu het product van een *matrix* met een *vector*. Dit levert een nieuwe *vector*. De vector die vermenigvuldigd wordt, moet evenveel componenten hebben als het aantal kolommen van de matrix. De resultaatvector heeft evenveel componenten als het aantal rijen van de matrix.

Definitie 9.2.9 (Matrix-vector-product)**.** Het product van een $m\times n$ matrix met een vector met n componenten is een vector met m componenten, gegeven door

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}.$$

We zullen verder zien hoe deze definitie nuttig is bij het compact voorstellen en manipuleren van stelsels lineaire vergelijkingen. We geven hier ook een interpretatie als lineaire combinatie:

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Vectoren en matrices

Voorbeeld 9.2.6 (Matrix-vector-product)**.** Als A een $m\times n$ matrix is en x een vector met n componenten dan is Ax de lineaire combinatie van de kolommen van A met als coëfficiënten de componenten van x:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \dots x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

We kunnen matrices ook met elkaar vermenigvuldigen. In tegenstelling tot de optelling gebeurt dit niet door de overeenkomstige elementen met elkaar te vermenigvuldigen. (Een dergelijke definitie kan uitzonderlijk toch nuttig zijn, en heet dan meestal het *elementsgewijs* product).

Een $m\times n$ matrix A kan maar vermenigvuldigd worden (aan de rechter kant) met een $m'\times n'$ matrix B als $n=m'$, d.w.z. als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B. Er zijn verschillende equivalente manieren om de definitie van het product van twee matrices te beschrijven.

Definitie 9.2.10 (Matrix-matrix-product 1)**.** Het product van een $m\times n$ matrix A met een $n\times p$ matrix B is een $m\times p$ matrix C waarvan de j-de kolom gelijk is aan het matrix-vector product van A met de j-de kolom van B (voor alle j van 1 tot p).

Voorbeeld 9.2.7.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+a_{1,3}b_{3,1}+a_{1,4}b_{4,1} & a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2}+a_{1,3}b_{3,2}+a_{1,4}b_{4,2} \\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1}+a_{2,3}b_{3,1}+a_{2,4}b_{4,1} & a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2}+a_{2,3}b_{3,2}+a_{2,4}b_{4,2} \\ a_{3,1}b_{1,1}+a_{3,2}b_{2,1}+a_{3,3}b_{3,1}+a_{3,4}b_{4,1} & a_{3,1}b_{1,2}+a_{3,2}b_{2,2}+a_{3,3}b_{3,2}+a_{3,4}b_{4,2} \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 9.2.8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

Volgens interpretatie 9.2.6 zijn de kolommen van $C=AB$ dan lineaire combinaties van de kolommen van A.

Voorbeeld 9.2.9. In example 9.2.8 is de tweede kolom van het product gelijk aan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Een equivalente manier om het product te lezen is de volgende:

Voorbeeld 9.2.10 (Matrix-matrix-product 2)**.** Als $AB=C$ dan is het element op rij i en kolom j van C gelijk aan het product van rij i van A met kolom j van B.

Voorbeeld 9.2.11. In example 9.2.8 geldt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 1\cdot 6+2\cdot 8 = 22.$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Vectoren en matrices

Nog een equivalente manier om een matrixproduct te lezen is de volgende:

Voorbeeld 9.2.12 (Matrix-matrix-product 3)**.** Als $AB = C$ dan is rij i van C gelijk is aan rij i van A vermenigvuldigd met B.

Voorbeeld 9.2.13. In example 9.2.8 geldt

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

Of nog:

Voorbeeld 9.2.14 (Matrix-matrix-product 4)**.** Als $AB = C$ dan is rij i van C gelijk aan een lineaire combinatie van de rijen van B met als coëfficiënten de elementen van rij i van A.

Voorbeeld 9.2.15. In voorbeeld 9.2.8 geldt

$$3\begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

De belangrijkste reden om het product op deze manier te definiëren is de volgende eigenschap:

$$A(Bx) = (AB)x.$$

In woorden: als we een vector x met een matrix B vermenigvuldigen (volgens het hogerbeschreven matrix-vectorproduct (definitie 9.2.9)) en de bekomen vector nog eens (links) met een matrix A vermenigvuldigen, dan kunnen we hetzelfde resultaat bekomen door de vector x (links) met het product van A en B te vermenigvuldigen.

Een belangrijke matrix is de eenheidsmatrix:

Definitie 9.2.11 (Eenheidsmatrix)**.** De *eenheidsmatrix* I_n is een $n \times n$ matrix waarvan de diagonaalelementen gelijk zijn aan 1 en alle andere elementen gelijk zijn aan 0.

Voorbeeld 9.2.16. De 3×3 eenheidsmatrix is

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De index bij I geeft het formaat van de (vierkante) matrix aan. Indien het formaat duidelijk is uit de context wordt dit vaak weggelaten.

De belangrijkste eigenschap van de eenheidsmatrix is

$$I_m A = A \text{ en } AI_n = A \text{ (voor } A \in \mathbb{R}^{m \times n}).$$

Hieronder geven we nog een lijst van eigenschappen van de hogerbeschreven bewerkingen op vectoren en matrices. De eigenschappen zijn geformuleerd in termen van matrices, maar leveren ook eigenschappen van vectoren op door ze waar mogelijk toe te passen op $n \times 1$ matrices. Het zijn allemaal eigenschappen die je kent van het rekenen met symbolen die getallen voorstellen. Minstens even belangrijk is echter de opsomming van eigenschappen die je wel mag toepassen op getallen maar niet op vectoren of matrices (zie verder onder "Wat mag niet?"). De opgesomde eigenschappen gelden voor alle getallen a,b,c, en matrices A,B,C. Overal waar een optelling of vermenigvuldiging van matrices voorkomt, wordt verondersteld dat de matrices een formaat hebben dat deze bewerkingen toelaat. (Merk ook op dat 0 hieronder het getal

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Vectoren en matrices

0 voorstelt en O de nulmatrix van een gepast formaat, eventueel te interpreteren als de nulvector in het geval van een kolommatrix.)

(a) $A + B = B + A$,
(De optelling van matrices of vectoren is *commutatief*),

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
(De optelling van matrices of vectoren is *associatief*),

(c) $A + O = A$,
(De nulmatrix/vector is het *neutraal element* voor de optelling van matrices/vectoren),

(d) $A + (-A) = O$,
($-A$ is het *tegengestelde* van A voor de optelling van matrices of vectoren).

(e) $a(A + B) = aA + aB$,
(De scalaire vermenigvuldiging is *distributief* t.o.v. de optelling van matrices of vectoren).

(f) $(a + b)A = aA + bA$,
(De scalaire vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling van getallen),

(g) $a(bA) = (ab)A$,
(De vermenigvuldiging van getallen en de scalaire vermenigvuldiging zijn gemengd associatief),

(h) $1A = A$

(i) $0A = O$

(j) $OA = O$

(k) $aO = O$

(l) $(-1)A = -A$

(m) $IA = A$ en $AI = A$,
(De eenheidsmatrix is het *neutraal element* voor de vermenigvuldiging van matrices),

(n) $A(BC) = (AB)C$,
(De vermenigvuldiging van matrices is *associatief*),

(o) $A(B + C) = AB + AC$,
(De vermenigvuldiging van matrices is *distributief* t.o.v. de optelling van matrices).

Wat mag niet?

Let wel op dat we niet alles mogen doen met matrices wat we met symbolen die getallen voorstellen mogen doen:

(1) In het algemeen geldt NIET $AB = BA$.

Voorbeeld 9.2.17.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

maar

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dit kan wel gelden voor specifieke matrices A en B.

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Vectoren en matrices

Voorbeeld 9.2.18.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Je kan niet delen door een matrix of een vector. Voor vierkante matrices A bestaat in sommige gevallen wel een inverse matrix. Dit is een matrix die als A^{-1} genoteerd wordt en waarvoor $AA^{-1} = I$ en $A^{-1}A = I$.

Voorbeeld 9.2.19.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

want

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrices A waarvoor de inverse bestaat heten inverteerbaar. Als de inverse bestaat is hij uniek. We benadrukken nog eens dat alleen vierkante matrices een inverse kunnen hebben. We zullen in hoofdstuk **??** zien hoe je een inverse matrix kan berekenen.

(3) Uit $AB = O$ (met O de nulmatrix) kunnen we (in tegenstelling tot bij getallen) niet besluiten dat $A = O$ of $B = O$.

Voorbeeld 9.2.20.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4) Uit de matrixgelijkheid $AB = AC$ mag niet besloten worden dat $B = C$. Bij getallen mag dit wel als $A \neq 0$. Bij matrices mag dit als A inverteerbaar is. We kunnen dan immers beide leden van $AB = AC$ links vermenigvuldigen met A^{-1}:

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C.$$

We zullen dergelijke tussenstappen meestal weglaten.

Merk op dat uit $AB = AC$ kan besloten worden dat $A(B - C) = O$. Dat we hieruit niet kunnen besluiten dat als $A \neq O$, $B - C = O$ en dus $B = C$ kan ook gezien worden als een speciaal geval punt (3).

(5) Als A inverteerbaar is, is de matrixvergelijking

$$AX = B$$

equivalent met

$$X = A^{-1}B$$

(met A^{-1} aan de linker kant van B!). Uit

$$AX = B$$

volgt immers

$$X = A^{-1}B$$

door beide leden links te vermenigvuldigen met A^{-1}. Omgekeerd, volgt uit $X = A^{-1}B$ dat $AX = B$ door beide leden links te vermenigvuldigen met A.

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Vectoren en matrices

Op analoge wijze is

$$XA = B$$

equivalent met

$$X = BA^{-1}, \text{(waarbij } A^{-1} \text{ rechts staat!)}.$$

Bij getallen zouden we in beide gevallen ($AX = B$ en $XA = B$) besluiten dat $X = B/A$. Bij matrices moet je als het ware weten of je "links of rechts moet delen".

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Stelsels: definitie

We bespreken hier het oplossen van *stelsels van lineaire vergelijkingen*. Dergelijke lineaire stelsels komen erg vaak voor bij allerlei problemen in de wiskunde, fysica, scheikunde, economie, ... Lineair betekent daarbij dat de onbekenden voorkomen *zonder machten* of meer ingewikkelde uitdrukkingen als wortels of sinussen. En stel of stelsel betekent dat de onbekenden aan *meerdere vergelijkingen tegelijk* moeten voldoen.

Voorbeeld 9.3.1.

1. Zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan in dit geval de gezochte getallen snel vinden door te *proberen*: de som moet 5 zijn, dus als we ons beperken tot natuurlijke getallen zijn de mogelijkheden $0+5$, $1+4$ of $2+3$. Enkel voor $2+3$ is het verschil 1, dus de oplossing is 2 en 3.
  In dit eenvoudige geval is het niet echt nuttig om onbekenden en stelsels op te schrijven. Maar zodra de voorwaarden wat ingewikkelder zijn, wordt *proberen* snel moeilijk en is *uitrekenen* meestal sneller.
- Als je toch een stelsel opschrijft, kan je in dit eenvoudige geval dat stelsel ook makkelijk oplossen. Als $x+y=5$ en $x-y=1$ dan is ook hun som gelijk: $(x+y)+(x-y)=5+1$. Deze laatste vergelijking reduceert zich echter tot $2x=6$ en dus $x=3$. Invullen dat $x=3$ in de eerste vergelijking $x+y=5$ levert $3+y=5$ of $y=2$.
  De methode voor het oplossen van stelsels is eigenlijk een veralgemening van dit eenvoudig trucje.
- Je kan dit stelsel ook opschrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\cdot x+1\cdot y=5 \\ 1\cdot x+(-1)\cdot y=1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Zoek twee getallen waarvan de som 3.1415 is en het verschil 1.2345.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=3.1415$ en het verschil $x-y=1.2345$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel.

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan de getallen x en y nu veel minder makkelijk vinden door *proberen*.
- Je kan in dit eenvoudige geval het stelsel toch makkelijk oplossen met dezelfde methode als hiervoor: als $x+y=3.1415$ en $x-y=1.2345$ dan moet natuurlijk ook $(x+y)+(x-y)=3.1415+1.2345=4.3760$. Deze vergelijking reduceert zich tot $2x=4.376$ en dus $x=2.188$. Invullen van $x=2.188$ in de eerste vergelijking geeft $2.188+y=3.1415$ of $y=3.1415-2.188=1.9535$.

- Je kan ook dit stelsel schrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.1415 \\ 1.2345 \end{bmatrix}$$

3. Zoek drie getallen waarvan het grootste dubbel zo groot is als het kleinste, het middelste de helft is van de som van de twee anderen, en het gemiddelde 42 is.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Stelsels: definitie

Uitwerking: Noem de gezochte getallen, geordend van groot naar klein, x, y en z. Dan weten we dat $x = 2z$, $y = \frac{x+z}{2}$ en $\frac{x+y+z}{3} = 42$, en zoeken we dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases}$$

We bestuderen verder een oplossingsmethode voor een stelsel als dit. We schrijven het alvast met matrices:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 126 \end{bmatrix}$$

Niet alle problemen leiden tot lineaire stelsels:

Voorbeeld 9.3.2 (Niet lineaire stelsels)**.**

1. Zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het *product* 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x + y = 5$ en het product $x \cdot y = 1$, en we zoeken getallen x en y die voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$$

Merk op dat dit *wel een stelsel* is, maar *geen lineair stelsel*, want er komt een *product* van de onbekenden in voor. De tweede vergelijking is *geen lineaire vergelijking*. Dat soort stelsels is in het algemeen *veel moeilijker* om op te lossen. Merk ook op dat je dit stelsel niet op dezelfde manier als hierboven kan schrijven met matrices.

Definitie 9.3.1 (Lineair stelsel)**.**

Een **lineair stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden** is een stel van m lineaire vergelijkingen met in totaal n onbekenden. Dergelijk lineair stelsel noteren we als

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

met S de naam van het stelsel, a_{ij} de **coëfficiënten**, $x_1, \ldots, x_n$ de **onbekenden** en b_i de **rechterleden** of **constante termen**.

De **coëfficiëntenmatrix** van het stelsel is de $m \times n$ matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De **uitgebreide matrix** van het stelsel is de $m \times (n+1)$ matrix met de constante termen toegevoegd:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Stelsels: definitie

Een lineair stelsel is **homogeen** als alle constante termen nul zijn, dus alle $b_i = 0$.

De belangrijkste uitdaging bij dergelijke stelsels is om de letters x_i te vervangen door geschikte reële getallen zodat alle gelijkheden opgaan. We noemen dat het *oplossen van het stelsel* en de gevonden reële getallen zijn dan *oplossingen van het stelsel*.

Opmerking 9.3.1.

- De term *rechterlid* is gebruikelijk in de wiskunde, maar is eigenlijk verwarrend of zelfs misleidend: een vergelijking $x+y=2$ kan natuurlijk ook geschreven worden als $x+y-2=0$, maar $x+y-2=0$ is *geen* homogene vergelijking, en volgens bovenstaande definitie is het 'rechterlid' gelijk aan 2. Het begrip 'rechterlid' slaat dus op vergelijkingen in standaardvorm: alle onbekenden in het linkerlid en de constante term rechts.
- Om verwarring te voorkomen is het belangrijk steeds de verticale lijn van de uitgebreide matrix te noteren.

Voorbeeld 9.3.3. Het stelsel

$$S_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{cases}$$

is een lineair stelsel met twee vergelijkingen in drie onbekenden x_1, x_2, x_3.
Het stelsel

$$S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

is een homogeen lineair stelsel met twee vergelijkingen in drie onbekenden x_1, x_2, x_3.

Eigenschap 9.3.1 (Matrixvorm van een lineair stelsel)**.**

Elk lineair stelsel

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kan in **matrixvorm** worden geschreven als $\mathbf{Ax = b}$

$$S : \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

waarbij

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 9.3.4. Het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Stelsels: definitie

heeft als coëfficiëntenmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

en als uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

We kunnen het stelsel dus schrijven als

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 9.3.5. Bepaal alle reële getallen s, t, u, v, w waarvoor

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$$

Dit is een *lineair stelsel van drie vergelijkingen in vijf onbekenden*.

- Dit is de wiskundige weergave van een probleem waarbij we weten dat er tussen de vijf onbekende grootheden s, t, u, v, w drie lineaire verbanden bestaan. De uitdaging is *alle waarden* te vinden voor de onbekende grootheden die aan *alle* (lineaire) verbanden voldoen.
- Met matrices en vectoren kunnen we het stelsel eenvoudiger schrijven: de vijf onbekenden (s, t, u, v, w) worden een 5×1 kolomvector $\mathbf{x}$, de coëfficiënten van de vergelijkingen vormen de 3×5 *coëfficiëntenmatrix* $\mathbf{A}$ en de rechterleden zetten we in een 3×1 kolomvector $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel kan nu geschreven worden als $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ of

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De uitgebreide matrix, die dus alle gegevens van het stelsel bevat, is

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

Oefening 9.3.1. Welke van de volgende stelsels zijn lineair in de onbekenden u en v? Schrijf de lineaire stelsels ook in matrixvorm.

1. Lineair $\begin{cases} 2u + v & = 5 \\ 4u + 2v & = 1 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Stelsels: definitie

2. Lineair $\begin{cases} 2u + v &= 5 \\ 4u + 2v &= u \end{cases}$

3. Lineair $\begin{cases} 2u &= 5 \\ 2v &= 1 \end{cases}$

4. Lineair $\begin{cases} (u+2)u - u^2 &= 5 \\ 4u + 2v &= 1 \end{cases}$

5. Niet lineair $\begin{cases} \sin(u) + \cos(v) &= 1 \\ \sin(u) - 2\cos(v) &= 1/2 \end{cases}$

6. Niet lineair $\begin{cases} u^2 + v &= 1 \\ -u^2 - 2v &= 2 \end{cases}$

7. Lineair $\begin{cases} au + 2v &= 5 \\ 4u + bv &= 1 \end{cases}$ (met $a, b \in \mathbb{R}$)

8. Lineair $\begin{cases} x^3u + \cos(y)v &= 5 \\ 4u + x^3v &= 1 \end{cases}$ (met $x, y \in \mathbb{R}$)

CC BY-NC-SA 4.0

9.3.A Oefeningen stelsels

Oefening 9.3.2. Schrijf de volgende stelsels in matrixvorm. Bepaal de oplossingenverzameling door met de eliminatiemethode van Gauss de uitgebreide matrix in rijgereduceerde echelonvorm te brengen.

1. $S_1 = \left\{ \begin{array}{rrrl} 3x & -2y & +z & = 4 \\ 3x & +y & -z & = 2 \\ x & & +3z & = 1 \end{array} \right.$

2. $S_2 = \left\{ \begin{array}{rl} s+2t+3w & = 1 \\ u+2w & = 2 \\ v-w & = 3 \end{array} \right.$

3. $S_3 = \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & +y & +z & = 1 \\ 4x & +y & +3z & = 1 \\ -2x & +2y & +z & = 7 \end{array} \right.$

4. $S_4 = \left\{ \begin{array}{rrrrl} x & +2y & +z & +4u & = -1 \\ 2x & +4y & +2z & +u & = 5 \\ -x & -2y & & -u & = 0 \end{array} \right.$

5. $S_5 = \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +2y & & = a \\ 4x & +7y & +z & = b \\ -2x & +2y & -6z & = c \end{array} \right.$

voor de gevallen

(a) $(a, b, c) = (0, 0, 0)$,

(b) $(a, b, c) = (-1, -2, -10)$,

(c) $(a, b, c) = (0, -2, 3)$.

Oefening 9.3.3. Schrijf $(1, 7, 0, 6)$ als een lineaire combinatie van $(0, 2, 3, 1)$, $(1, -1, 1, -1)$ en $(2, 1, 0, 1)$.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3.B Oefeningen matrices

Oefening 9.3.4. Voer de bewerkingen uit indien ze gedefinieerd zijn. Bepaal de afmetingen van alle matrices.

1. Bereken $A+B$ en $5A$ voor de matrices $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&5\\-2&3\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\2&1\end{bmatrix}$.

2. Bereken AB en BA voor de matrices $A=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}5&-1&2\\15&4&8\end{bmatrix}$.

3. Bereken AB en BA voor de matrices $A=\begin{bmatrix}-1&0\\-2&3\\5&4\\0&1\end{bmatrix}$ end $B=\begin{bmatrix}0&6&1&1\\3&8&-2&-2\end{bmatrix}$.

4. Bereken AB en BA voor de matrices $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}-1&5&2\\2&3&4\\9&-1&3\end{bmatrix}$.

5. Bereken $A(BC)$ en $(AB)C$ en bepaal de afmetingen van BC, AB, $A(BC)$ en $(AB)C$ voor de matrices

$$A=\begin{bmatrix}2&1&5\\1&3&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3&4\\-1&2\\2&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&3\\-1&1\end{bmatrix}$$

Oefening 9.3.5. Welke gelijkheden gelden voor alle 2×2-matrices A, B en C?

1. Juist $A+B=B+A$

2. Fout $(A+B)^2=A^2+2A\cdot B+B^2$

3. Juist $A(BC)=(AB)C$

4. Juist $I_2A=A$, met $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

Oefening 9.3.6. Als van de matrices $A=\begin{bmatrix}1&b\\1+a&1\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}1&b\\a&-1\end{bmatrix}$ geweten is dat $AB=BA$, wat kan dan je besluiten over de reële getallen a en b?

$a=-1$ en $b=0$

CC BY-NC-SA 4.0