KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Zelfstudiepakket Wiskunde (Algemene versie)

(Versie 2026/08/25H.51)

Inhoudsopgave

1 Inleiding 1.1

1.1 Intro . . . 1.2

1.2 Notatie . . . 1.3

2 Logica en Verzamelingen 2.1

2.1 Propositielogica . . . 2.2

2.1.1 Proposities en predicaten . . . 2.2

2.1.2 Logische connectieven: '...of...', '...en...', 'niet...' . . . 2.3

2.1.3 Implicatie: 'als ..., dan ...' . . . 2.4

2.1.4 Equivalentie: '...als en slechts als ...' . . . 2.6

2.1.5 Implicatie, equivalentie, nodige en voldoende voorwaarden . . . 2.6

2.1.6 Voorrangsregels . . . 2.7

2.1.7 Tautologieën en contradicties . . . 2.8

2.2 Kwantoren . . . 2.9

2.2.1 Negatie van kwantoren . . . 2.10

2.2.2 Volgorde van kwantoren . . . 2.10

2.3 Verzamelingen . . . 2.14

2.4 Bewerkingen met verzamelingen: unie en doorsnede . . . 2.18

2.5 Bewerkingen met verzamelingen: product en macht . . . 2.21

2.6 Intervallen . . . 2.23

2.6.A Oefeningen verzamelingen . . . 2.24

2.6.B Extra oefeningen verzamelingen . . . 2.26

2.7 Hoe oplossingen opschrijven? . . . 2.27

2.8 Bewijstechnieken . . . 2.30

2.8.1 Verschillende types eigenschappen . . . 2.30

2.8.2 Soorten bewijzen . . . 2.30

2.9 Bewijstechnieken: volledige inductie . . . 2.36

2.10 Bewijstechnieken: voorbeeld van volledige inductie . . . 2.38

2.10.A Oefeningen inductie . . . 2.40

3 Elementair Rekenen (basisversie) 3.1

3.1 Breuken (basis) . . . 3.2

3.2 Machten . . . 3.5

4 Elementair Rekenen 4.1

4.1 Intro algebraïsch rekenen . . . 4.2

4.2 Begintest Elementair rekenen . . . 4.3

4.3 Haakjes en ontbinden in factoren . . . 4.4

4.3.A Basisoefeningen haakjes . . . 4.6

4.4 Breuken . . . 4.7

4.4.A Basisoefeningen breuken . . . 4.11

4.5 Machten met gehele exponenten . . . 4.12

4.6 Machten en wortels . . . 4.14

4.6.A Basisoefeningen machten . . . 4.17

4.7 Rekenen met percentages . . . 4.18

4.7.A Herhaling basisrekenvaardigheden . . . 4.21

5 Sommatieteken en faculteit 5.1

5.1 Het sommatieteken $\sum$ . . . 5.2

5.2 Rekenregels voor de sommatie $\sum$ . . . 5.9

5.2.A Oefeningen somteken . . . 5.12

5.3 De faculteit $n!$ . . . 5.15

5.3.A Oefeningen faculteit . . . 5.16

5.4 Binomiaalgetallen . . . 5.18

5.4.A Herhaling somteken, faculteit en binomiaalgetallen . . . 5.20

6 Veeltermen 6.1

6.1 Intro veeltermen . . . 6.2

6.2 Eerstegraadsveeltermen . . . 6.3

6.3 Tweedegraadsveeltermen . . . 6.6

6.3.A Oefeningen eerste- en tweedegraadsveeltermen . . . 6.9

6.4 Veeltermen . . . 6.11

6.5 Deling van veeltermen . . . 6.14

6.6 Algoritme voor Euclidische deling . . . 6.16

6.6.A Oefeningen Euclidische deling . . . 6.20

6.7 Deling door $x - a$ . . . 6.21

6.7.A Oefeningen ontbinden in factoren . . . 6.24

6.8 Het schema van Horner . . . 6.25

6.8.A Oefeningen Horner . . . 6.27

INHOUDSOPGAVE

7 Veeltermen: extra 7.1
7.1 Ontbinden in factoren . . . 7.2
7.2 Vergelijkingen . . . 7.4

8 Ongelijkheden en absolute waarde 8.1
8.1 Intro ongelijkheden en absolute waarde . . . 8.2
8.2 Tekenverloop van rationale functies . . . 8.3
8.2.A Oefeningen tekenverloop van rationale functies . . . 8.4
8.3 Gelijkheden . . . 8.5
8.4 Ongelijkheden . . . 8.7
8.4.A Oefeningen ongelijkheden . . . 8.13
8.4.B Extra oefeningen ongelijkheden . . . 8.14
8.5 Absolute waarde . . . 8.15
8.5.A Oefeningen absolute waarde . . . 8.19
8.6 Driehoeksongelijkheden . . . 8.21

9 Ongelijkheden: extra 9.1
9.1 Zelftest ongelijkheden . . . 9.2
9.2 Orderelatie $\leqslant$ . . . 9.3
9.3 Intervallen . . . 9.5
9.3.A Basisoefeningen ongelijkheden . . . 9.6
9.4 Lineaire ongelijkheden grafisch oplossen . . . 9.8

10 Functies en hun grafieken 10.1
10.1 Intro functies en hun grafieken . . . 10.2
10.2 Intro via machines . . . 10.3
10.3 Intuïtieve definitie van het begrip functie . . . 10.9
10.4 Domein, codomein en beeld van een functie . . . 10.13
10.4.A Oefeningen domein functie . . . 10.16
10.4.B Oefeningen beeld functie . . . 10.17
10.5 Voorstellingswijzen van functies . . . 10.18
10.6 Extra voorstellingswijzen van functies . . . 10.21
10.7 Grafieken van functies . . . 10.23
10.7.A Oefeningen grafieken van functies . . . 10.26
10.8 Som en verschil van functies . . . 10.28
10.8.A Oefeningen som van functies . . . 10.31
10.9 Product en quotiënt van functies . . . 10.32

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

INHOUDSOPGAVE

10.10 Samenstellen van functies . . . 10.35
10.10.1 Domein van samengestelde functies . . . 10.37
10.10.A Basisoefeningen samenstellen van functies . . . 10.39
10.11 Transformaties van functies . . . 10.42
10.11.A Oefeningen transformaties van functies . . . 10.48
10.12 Inverse functies . . . 10.52
10.12.A Oefeningen inverse functies . . . 10.60
10.13 Even en oneven functies . . . 10.61
10.14 Periodieke functies . . . 10.63
10.14.A Oefeningen periodieke functies . . . 10.66
10.15 Vectoren . . . 10.68
10.16 Matrices . . . 10.71
10.17 Rekenen met Matrices . . . 10.74
10.17.A Oefeningen matrices . . . 10.80
10.18 Stelsels: definitie . . . 10.81
10.19 Stelsels: oplossingen . . . 10.86
10.20 Stelsels: oplossen via echelonvorm . . . 10.91
10.20.1 Elementaire rijoperaties . . . 10.91
10.20.2 Eliminatiemethode van Gauss . . . 10.93
10.20.A Oefeningen stelsels . . . 10.101

11 Goniometrie (voorbereiding) 11.1

11.1 Basiseigenschappen van driehoeken . . . 11.2
11.2 Basiseigenschappen van de cirkel . . . 11.4
11.3 Basiseigenschappen van hoeken en rechten . . . 11.6

12 Goniometrie 12.1

12.1 Intro Goniometrie . . . 12.2
12.2 Definitie van een hoek . . . 12.3
12.2.A Oefeningen hoeken . . . 12.6
12.3 Goniometrische cirkel . . . 12.7
12.4 Goniometrische getallen . . . 12.9
12.4.1 Rechthoekige driehoeken . . . 12.10
12.4.2 Standaardhoeken . . . 12.11
12.5 Verwante hoeken . . . 12.14
12.6 Goniometrische formules . . . 12.16
12.6.A Oefeningen goniometrie . . . 12.17
12.7 Driehoeken oplossen . . . 12.21

CC BY-NC-SA 4.0

INHOUDSOPGAVE

12.7.A Oefeningen cosinus- en sinus regel . . . 12.23

13 Goniometrische en cyclometrische functies 13.1

13.1 Goniometrische functies . . . 13.2
13.2 Goniometrische vergelijkingen . . . 13.5
13.2.A Oefeningen goniometrische vergelijkingen . . . 13.8
13.3 Cyclometrische functies . . . 13.9
13.3.1 Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies . . . 13.11
13.3.A Oefeningen cyclometrische functies . . . 13.13

14 Poolcoordinaten 14.1

14.1 Poolcoördinaten . . . 14.2
14.1.A Oefeningen poolcoördinaten . . . 14.7
14.2 Poolvergelijkingen . . . 14.8

15 Vectoren in de fysica 15.1

15.1 Vectoren in de fysica . . . 15.2
15.1.1 Vectoren als objecten met grootte, richting en zin . . . 15.2
15.1.2 Basisbewerkingen met vectoren . . . 15.2
15.2 Assenstelsels en coördinaten . . . 15.4
15.3 Vectoren in poolcoördinaten . . . 15.8
15.4 Inwendig product van vectoren . . . 15.10
15.5 Vectorieel product van vectoren . . . 15.14
15.5.A Oefeningen vectoren . . . 15.17

16 Complexe getallen 16.1

16.1 Complexe getallen . . . 16.2
16.1.1 Het complexe vlak . . . 16.2
16.1.2 Rekenen met complexe getallen . . . 16.3
16.1.3 Modulus en complex toegevoegde . . . 16.4
16.1.4 Vierkantsvergelijkingen . . . 16.7
16.1.A Basisoefeningen complexe getallen . . . 16.9
16.2 De goniometrische schrijfwijze van complexe getallen . . . 16.11
16.2.1 Vermenigvuldiging van complexe getallen in goniometrische schrijfwijze . . . 16.13
16.2.A Oefeningen goniometrische schrijfwijze van complexe getallen . . . 16.14
16.3 Machten van complexe getallen: formule van De Moivre . . . 16.15
16.4 De exponentiële schrijfwijze van complexe getallen . . . 16.17

CC BY-NC-SA 4.0

INHOUDSOPGAVE

17 Exponentiele en logaritmische functies 17.1
17.1 Intro exponentiële en logaritmische functies . . . 17.2
17.2 Begintest Logaritme . . . 17.3
17.3 Groeimodellen . . . 17.4
17.3.A Oefeningen groeimodellen . . . 17.10
17.4 De logaritme . . . 17.12
17.4.A Basisoefeningen logaritmen . . . 17.14
17.5 Rekenregels voor logaritmen . . . 17.15
17.5.A Oefeningen rekenregels logaritmen . . . 17.19
17.6 Exponentiële functies . . . 17.21
17.7 Logaritmische functies . . . 17.27
17.7.A Oefeningen ongelijkheden met exponentiële en logaritmische functies . . . 17.32
17.7.B Extra oefeningen logaritmen (usolv-it) . . . 17.33
17.8 Exponentiële vergelijkingen . . . 17.34
17.8.A Toepassingen exponentiële en logaritmische functies . . . 17.36
17.8.B Oefeningen ongelijkheden met exponentiële en logaritmische functies . . . 17.38

18 Limieten 18.1
18.1 Definitie limieten . . . 18.2
18.2 Definitie linker- en rechterlimieten . . . 18.6
18.3 Rekenregels limieten . . . 18.10
18.4 Limieten in $\pm\infty$ . . . 18.13
18.5 Limieten in nulpunten van de noemer . . . 18.16
18.5.A Oefeningen limieten . . . 18.19

19 Afgeleiden (basisversie) 19.1
19.1 Intro afgeleiden . . . 19.2
19.2 Definitie afgeleide . . . 19.3
19.3 Basisregels . . . 19.4
19.4 Product- en quotiëntregel . . . 19.6
19.5 Kettingregel . . . 19.8
19.5.A Basisoefeningen afgeleiden . . . 19.11
19.6 Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies . . . 19.12
19.7 Afgeleiden van goniometrische functies . . . 19.14
19.7.A Oefeningen afgeleiden speciale functies . . . 19.16

CC BY-NC-SA 4.0

INHOUDSOPGAVE

20 Afgeleiden 20.1
20.1 Intro afgeleiden . . . 20.2
20.2 Definitie van afgeleide . . . 20.3
20.3 Definitie differentiaal . . . 20.10
20.4 Begintest berekening afgeleiden . . . 20.12
20.5 Basisregels . . . 20.13
20.6 Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies . . . 20.15
20.7 Afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies . . . 20.16
20.8 Product- en quotiëntregel . . . 20.17
20.9 Kettingregel . . . 20.20
20.9.A Basisoefeningen afgeleiden . . . 20.26
20.10 Hogere orde afgeleiden . . . 20.29
20.10.A Oefeningen hogere orde afgeleiden . . . 20.30
20.11 Afgeleide van de inverse functie . . . 20.31
20.11.A Basisoefeningen afgeleiden . . . 20.34
20.12 Minimum-Maximumproblemen . . . 20.37

21 Integralen (basisversie) 21.1
21.1 Definitie van integralen . . . 21.2
21.2 Basisintegralen . . . 21.4
21.3 Integratie door substitutie . . . 21.8
21.4 Partiële integratie . . . 21.10

22 Integralen 22.1
22.1 Definitie onbepaalde integraal . . . 22.2
22.2 Basisintegralen . . . 22.6
22.3 Integratie door substitutie . . . 22.10
22.3.A Oefeningen substitutie . . . 22.19
22.4 Partiële integratie . . . 22.21
22.4.A Oefeningen partiële integratie . . . 22.29
22.5 Andere integratietechnieken . . . 22.30
22.5.A Oefeningen onbepaalde integralen . . . 22.31
22.6 Bepaalde integralen . . . 22.33
22.6.1 Definitie bepaalde integraal . . . 22.33
22.6.2 Verband met de onbepaalde integraal . . . 22.34
22.6.3 Georiënteerde oppervlakte . . . 22.36
22.6.4 Substitutie bij bepaalde integralen . . . 22.40
22.6.5 Partiële integratie bij bepaalde integralen . . . 22.41

CC BY-NC-SA 4.0

INHOUDSOPGAVE

22.6.A Oefeningen bepaalde integralen . . . 22.43

23 Vectoren en matrices 23.1
23.1 Intro lineaire algebra . . . 23.2
23.2 Intro vectoren en matrices . . . 23.3
23.3 Vectoren . . . 23.4
23.4 Lineaire combinaties . . . 23.6
23.5 Inwendig product of inproduct . . . 23.7
23.6 Matrices . . . 23.8
23.7 Som en veelvoud van matrices . . . 23.11
23.8 Product van een matrix met een kolomvector . . . 23.12
23.9 Product van matrices . . . 23.15
23.10 Eigenschappen van het product van matrices . . . 23.19
23.11 Transponeren van matrices . . . 23.22
23.12 Determinanten . . . 23.24
23.13 Inwendig product van vectoren . . . 23.28
23.14 Vectorieel product . . . 23.32

24 Stelsels 24.1
24.1 Intro stelsels . . . 24.2
24.2 Stelsels: inleiding . . . 24.3
24.3 Stelsels: definitie . . . 24.5
24.4 Stelsels: enkele interpretaties . . . 24.8
24.5 Stelsels: oplossingen . . . 24.9
24.6 Stelsels: direct oplosbaar . . . 24.11
24.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm . . . 24.15
24.7.1 Elementaire rijoperaties . . . 24.15
24.7.2 Eliminatiemethode van Gauss . . . 24.17
24.8 Stelsels: met parameters . . . 24.24
24.9 Stelsels: inverse matrix via echelon . . . 24.30

25 Rechten en vlakken 25.1
25.1 Intro rechten en vlakken . . . 25.2
25.2 Vectoren en punten in het vlak . . . 25.3
25.3 Vectoren en verschuivingen in het vlak . . . 25.6
25.4 Parametervergelijking van een rechte . . . 25.9
25.5 2D: Cartesiaanse vergelijkingen . . . 25.13

CC BY-NC-SA 4.0

25.6 2D: omzetten van vergelijkingen . . . 25.17
25.7 3D, rechten: parametervergelijkingen . . . 25.21
25.8 3D, vlakken: Cartesiaanse vergelijkingen . . . 25.23
25.9 3D, rechten: Cartesiaanse vergelijkingen . . . 25.26
25.10 3D, vlakken: parametervergelijkingen . . . 25.28
25.11 3D: omzetten van vergelijkingen . . . 25.29
25.12 Doorsneden van rechten en vlakken . . . 25.32
25.12.1 Twee cartesiaanse vergelijkingen gegeven . . . 25.32
25.12.2 Een cartesiaanse en een parametervergelijking gegeven . . . 25.32
25.12.3 Twee parametervergelijkingen gegeven . . . 25.33

26 Formularia 26.1

26.1 Overzicht symbolen en notaties . . . 26.2
26.3 Overzicht verzamelingen . . . 26.3
26.5 Overzicht logica . . . 26.4
26.7 Overzicht bewijstechnieken . . . 26.5
26.9 Overzicht rekenen . . . 26.6
26.11 Overzicht functies . . . 26.7
26.13 Overzicht veeltermen en ongelijkheden . . . 26.8
26.15 Overzicht explog . . . 26.9
26.17 Overzicht limieten . . . 26.10
26.19 Overzicht limieten en oneindig . . . 26.11
26.21 Overzicht limieten berekenen . . . 26.12
26.23 Overzicht limieten en asymptoten . . . 26.13
26.25 Overzicht afgeleiden . . . 26.14
26.27 Overzicht integralen . . . 26.15
26.29 Overzicht afgeleiden en integralen (formularium) . . . 26.16
26.31 Overzicht integralen berekenen . . . 26.17
26.33 Overzicht goniometrie . . . 26.18
26.35 Overzicht basismeetkunde . . . 26.19
26.37 Overzicht basiseigenschappen rechten en cirkels . . . 26.20
26.39 Overzicht vergelijking van rechte . . . 26.21
26.41 Overzicht matrices . . . 26.22
26.43 Overzicht stelsels (2 bij 2) . . . 26.23
26.45 Overzicht vectoren . . . 26.24

27 Appendix 27.1

27.1 Het Griekse alfabet . . . 27.2

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 1
Inleiding

(Versie 2026/08/25H.51)

1.1 Intro

Deze cursus behandelt een erg uitgebreide selectie basiskennis en basistechnieken wiskunde, die nuttig of nodig zullen zijn tijdens een universitaire studie. Van een aantal onderwerpen zijn er zelfs meerdere versies: een basisversie met minder technische begrippen en meer eenvoudige voorbeelden naast (of beter meestal vòòr ...) een meer volledige behandeling.

Voor een aantal opleidingen bestaan er speciaal samengestelde selecties die speciaal zijn afgestemd op die opleiding. Je vindt daarover meer informatie via de websites van die opleidingen. Het is dus zeker niet het geval dat al deze topics voor alle opleidingen 'basiskennis' zijn.

Voor veel toekomstige studenten is dit grotendeels een opfrissing van leerstof die ze al hebben gezien. Toch is geprobeerd om bij de invoering van begrippen en technieken ook voldoende rekening te houden met studenten voor wie de leerstof volledig nieuw is.

Deze cursus is *niet* expliciet geschreven als voorbereiding op een ijkingstoets of toegangsexamen, en deze cursus overlapt met allerlei Zomercursussen die worden aangeboden maar vervangt die niet.

Deze cursusnota's zijn beschikbaar in meerdere vormen:

(a) als PDF, die je ofwel op je computer kan lezen, ofwel kan printen.

Als je de PDF op de computer leest, werken allerlei interne links naar oefeningen, definities en eigenschappen. In een geprinte versie verdwijnt een deel van die functionaliteit.

Op https://set.kuleuven.be/voorkennis/blik-op-wiskunde/handboek vind je een online versie die extra functionaliteiten biedt.

(b) als online applicatie, met volgende extra functionaliteiten:

- interactieve antwoordmogelijkheden, met feedback en/of hints
- directe links naar extra oefeningen in Usolv-it
- een aantal filmpjes

Je kan zowel elk afzonderlijk onderdeel als de volledig cursus als PDF bestand downloaden.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Notatie

We maken speciaal voor deze cursus volgende afspraken, die *niet algemeen gebruikt* worden in de wiskunde:

Notatie 1.2.1 (*Specifieke* begrippen en notaties voor deze cursus)**.**

(a) Definities, eigenschappen en andere belangrijke zaken staan in een kader (zoals deze Notatie). Er is daarvoor volgende kleurcode: groen voor definities en eigenschappen, blauw voor voorbeelden en oefeningen, en geel-bruin voor opmerkingen en uitweidingen.

Zeer belangrijke formules vallen nog meer op, zoals bijvoorbeeld:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

We gebruiken meestal *italics* om iets te laten opvallen, en **vet** om een nieuw begrip te definiëren.

(b) Een **pseudo-definitie** is iets dat erg lijkt op een definitie, maar strikt wiskundig geen correcte definitie is. Bijvoorbeeld voor limieten en continuïteit van functies geven we in de hoofdtekst enkel 'pseudo-definities', omdat strikt wiskundige definities ons te ver zouden leiden.

(c) Een **niet-eigenschap** of een **niet-voorbeeld** illustreren (meestal zo typisch mogelijk) iets dat *niet* (algemeen) geldig is. We geven dergelijke niet-eigenschappen meestal doorstreept weer. Bijvoorbeeld $(1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2$ (omdat $(1+1)^2 = 4$ en $1^2 + 1^2 = 2$) is een niet-voorbeeld om aan te tonen dat het kwadraat van een som niet gelijk is aan de som van de kwadraten:

$$\cancel{(a+b)^2 = a^2 + b^2} \text{ want } \underbrace{(1+1)^2}_{=2^2=4} \neq \underbrace{1^2 + 1^2}_{=1+1=2}$$

Het is in het algemeen belangrijk zowel de eigenschappen te kennen als de niet-eigenschappen.

We gebruiken ook volgende *algemeen geldende afspraken en notaties* in de wiskunde. Deze notaties worden in de betreffende hoofdstukken nog uitgebreider toegelicht.

Notatie 1.2.2 (*Algemeen* geldende wiskundige begrippen en notaties)**.**

(a) We gebruiken de pijl $\mapsto$ in formules van het type $x \mapsto f(x)$ of $f : x \mapsto f(x)$ altijd om een functie aan te duiden die x afbeeldt op $f(x)$. Dus, $x \mapsto x^2$ is de functie 'kwadrateer', en $x \mapsto \sin x$ is de sinusfunctie, en betekent hetzelfde als de voor sommigen meer vertrouwde notatie $y = f(x)$ en $y = \sin(x)$. We gebruiken de pijl $\to$ in formules $x \to c$ altijd om aan te duiden dat x naar c gaat (dus bij limieten), of in formules $f : A \to B$ om aan te duiden dat f een functie is van de verzameling A naar de verzameling B. Als we een volledige definitie van een functie willen geven, schrijven we dus $f : A \to B : x \mapsto f(x)$, en dat lezen we als '$f$ is een *functie* van (de verzameling) A naar (de verzameling) B die x *afbeeldt* op $f(x)$'.

(b) We gebruiken het symbool $\iff$ om aan te geven dat twee uitdrukkingen equivalent zijn: $A \iff B$ betekent dat A waar is *als en slechts als* B waar is.

(c) We gebruiken verzamelingen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (*natuurlijke getallen*), $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (*gehele getallen*), $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ (*rationale getallen*) en $\mathbb{R}$ (*reële getallen*).

(d) We noteren $a \in \mathbb{R}$ voor 'a is een element van $\mathbb{R}$', dus a is een (willekeurig) reëel getal.

(e) We noteren $A \subset \mathbb{R}$ (of soms $A \subseteq \mathbb{R}$) voor 'A is een deelverzameling van $\mathbb{R}$'. Beide notaties betekenen in deze cursus hetzelfde, en $A \subset B$ sluit *niet* uit dan $A = B$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Notatie

(f) We noteren $[a,b]$ voor het *interval* tussen a en b met a en b inbegrepen, en $[a,b[$ voor hetzelfde interval, maar zonder de b. Hierbij zijn $a,b \in \mathbb{R}$ met $a < b$.

(g) We gebruiken $A \overset{\text{def}}{=} B$ om aan te duiden dat uitdrukking A *per definitie* gelijk is aan B. We veronderstellen dus dat uitdrukking A voordien geen betekenis had, uitdrukking B wel, en dat vanaf nu A hetzelfde betekent als B.

Voorbeeld: $\sqrt{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{2}}$ definieert het symbool $\sqrt{a}$ als we rationale machten al kennen, maar $a^{\frac{1}{2}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a}$ definieert een rationale macht, als we het symbool $\sqrt{a}$ al zouden kennen.

Soms gebruiken we $\overset{\text{notatie}}{=}$ om een nieuwe *notatie* in te voeren.

(h) Als we zeggen dat 'men kan bewijzen dat ...', dan bedoelen we inderdaad dat 'men' dat kan bewijzen, maar dat we niet verwachten dat jij dat ook kan bewijzen. Het bewijs is dus *geen* leerstof, en allicht ook niet volledig triviaal. Het woord *triviaal* betekent vanzelfsprekend. Als het bewijs wel relatief eenvoudig is, zullen we soms zeggen 'je kan als oefening bewijzen dat...'.

(i) Als we zeggen dat iets *natuurlijk* is, of dat iets *onmiddellijk duidelijk of evident* is, dan bedoelen we dat zodra je de leerstof voldoende beheerst die uitspraken inderdaad **makkelijk**, **evident** of **triviaal** zouden moeten zijn. MAAR, als je een dergelijke zin *voor de eerste keer* leest, en als het gaat over voor jou geheel nieuwe begrippen, dan is het evident en vanzelfsprekend dat je over die uitspraken *toch* moet nadenken, en dat het best een tijdje kan duren voor je de 'natuurlijkheid' of 'onmiddellijkheid' ervan inziet. We gebruiken dergelijke woorden dus om aan te geven dat je voldoende vertrouwd raakt met de leerstof van zodra deze uitspraken voor jou inderdaad makkelijk worden. We bedoelen *niet* dat dit al bij de eerste lezing van de tekst zo zal zijn.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 2
Logica en Verzamelingen

(Versie 2026/08/25H.51)

2.1 Propositielogica

Mensen denken en communiceren in een taal, bijvoorbeeld in het Nederlands. Soms is het niet eenvoudig om precieze bewoordingen te vinden om een gedachte of redenering exact weer te geven. Bovendien heeft iedereen een eigen taalgevoel, wat tot gevolg kan hebben dat degene die een zin *uitzendt* hem anders interpreteert dan degene die de zin *ontvangt*.

Stel, je belooft aan een kleuter het volgende:

Als je braaf bent, dan krijg je een zuurtje of een reep chocolade.

Wat mag die kleuter dan precies verwachten?

- Kan hij als hij braaf is ook een zuurtje *en* een reep chocolade krijgen?
- Als hij braaf is, mag hij dan *zelf* kiezen tussen een zuurtje of een reep chocolade?
- Kan hij ook iets krijgen als hij *niet* braaf is, of is dat uitgesloten?
- Hoe braaf moet hij eigenlijk zijn om iets te krijgen? Wat als hij *een heel klein beetje* niet braaf is?

Om dergelijke onduidelijkheden en verwarring te vermijden kan men sommige zinnen en sommige redeneervormen proberen onttrekken aan de gewone taal. Men kan ze **formaliseren** in de *symbolische* of *formele logica*. We beperken ons hier tot een kleine selectie van notaties uit de logica die worden gebruikt voor het formuleren van wiskundige definities, eigenschappen en redeneringen.

2.1.1 Proposities en predicaten

Definitie 2.1.1.

Een **propositie** is een zinvolle mededelende volzin, die al dan niet *waar* kan zijn.

De precieze voorwaarden voor *zinvolheid* en *waarheid* zullen van de context afhangen. We zullen daar hier niet verder op ingaan. We spreken af om *uitspraak* als synoniem te gebruiken voor *propositie* in deze cursus.

Voorbeeld 2.1.1 (proposities)**.**

'De aarde is een planeet'	is	een ware propositie
'De aarde is plat'	is	een onware propositie
'De een planeet aarde is'	is	geen propositie (want niet 'zinvol' of 'betekenisvol')
'1+1=2'	is	een ware proposite
'1+1=3'	is	een onware propositie
'1+=!,-5'	is	geen propositie (want niet 'zinvol' of 'betekenisvol')
'De vakantie is voorbij'	is	een propositie (waarvan de waarheid afhangt van de context)
'Is er leven op Pluto?'	is	geen propositie (want een vraag)
'Begreep ik wiskunde maar'	is	geen propositie (want een wens of verzuchting)
'Die is gek'	is	geen propositie (tenzij uit de context blijkt over wie het gaat)
'5 is een priemgetal'	is	een ware propositie
'n is een priemgetal'	is	geen propositie (tenzij uit de context blijkt over welke n het gaat)

Definitie 2.1.2.

Een **predicaat** is een zinvolle mededelende volzin met (één of meerdere) **vrije variabelen** in.

Een vrije variabele is een uitdrukking waarvoor concrete dingen moeten worden ingevuld voordat het predicaat al dan niet waar kan worden. Een predicaat heeft dus een *context* nodig waarin de betekenis van de vrije variabele wordt vastgelegd.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Propositielogica

Voorbeeld 2.1.2 (predicaten).

'n is een priemgetal' is een predicaat met vrije variabele n:

Als
- $n = 5$ dan wordt dit de *ware* propositie '5 is een priemgetal'
- $n = 10$ dan wordt dit de *onware* propositie '10 is een priemgetal'
- $n = 1/2$ dan krijgen we geen betekenisvolle propositie

'Er bestaan natuurlijke getallen n zodat n een priemgetal is.'	is een ware propositie
'Voor alle natuurlijke getallen n is n een priemgetal.'	is een onware propositie
'Voor alle reële getallen n geldt dat n een priemgetal is.'	is geen betekenisvolle propositie
'Voor alle letters n geldt dat n een priemgetal is.'	is geen betekenisvolle propositie

2.1.2 Logische connectieven: '... of...', '... en...', 'niet...'

De propositielogica probeert de betekenis en waarheidswaarde van samengestelde proposities te bepalen op basis van de samenstellende, eenvoudigere proposities. De betekenis van samengestelde proposities kan vastgelegd of verduidelijkt worden door een **waarheidstabel**. Alle basisproposities p, q, enz. kunnen ofwel waar zijn ofwel niet waar (we zeggen ook 'onwaar' of 'vals'). Er is geen andere optie voor de waarheidswaarde van een propositie dan waar of niet waar, er is geen grijze zone. De waarheid van een samenstelling hangt dan af van de waarheidswaarden van p, q enz., zoals aangegeven in de waarheidstabel. We gebruiken hier de afspraak dat 'w' aanduidt dat de propositie waar is en 'o' dat de propositie onwaar is. Soms wordt ook de afspraak gemaakt dat het getal 1 aanduidt dat de propositie waar is en het getal 0 dat de propositie onwaar is.

Proposities kunnen worden samengesteld via conjunctie ('en'), disjunctie ('of') en negatie ('niet'):

Definitie 2.1.3 (Conjunctie, disjunctie en negatie).

Als p en q proposities zijn, dan noteren we de propositie 'p of q' met $p \vee q$ en 'p en q' met $p \wedge q$. De uitspraak dat p niet waar is, dus 'niet p' of 'p is onwaar', wordt genoteerd met $\neg p$.

De waarheidstabellen zijn als volgt:

p	q	$p \vee q$ p of q	$p \wedge q$ p en q
w	w	w	w
w	o	w	o
o	w	w	o
o	o	o	o

p	$\neg p$ niet p
w	o
o	w

Merk dus op dat in de wiskunde (en in alle wetenschappen) het gebruik van 'of' *niet exclusief* is: 'p of q' betekent per definitie dat *minstens één van de twee* waar is, maar mogelijk ook beide.

Wie wat Latijn kent, kan het symbool $\vee$ onthouden via het latijnse woordje 'vel' voor 'of'. Anderen merken op dat $\vee$ lijkt op $\cup$, en de unie $A \cup B$ bestaat uit de elementen die in A **of** B zitten, terwijl $\wedge$ lijkt op $\cap$, en $A \cap B$ zijn de elementen die in A **en** B zitten. De negatie $\neg$ komt overigens op dezelfde manier enigszins overeen met het complement.

Oefening 2.1.1. Vul volgende waarheidstabel aan:

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Propositielogica

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
w	w	.....	.....	.....	.....	.....
w	o	.....	.....	.....	.....	.....
o	w	.....	.....	.....	.....	.....
o	o	.....	.....	.....	.....	.....

2.1.3 Implicatie: 'als . . . , dan . . . '

Hier is de kloof tussen de betekenis in de omgangstaal en die in de wiskunde soms erg groot. We bestuderen uitspraken van het type 'als . . . , dan . . . ' dan ook wat uitgebreider.

Voorbeeld 2.1.3. Welke van volgende proposities zijn waar?

(1) 'Als het vandaag zaterdag is, dan is het morgen zondag.' Juist ✓

(2) 'Als 9 een drievoud is, dan is 9 even.' Fout ✓

(3) 'Als een mus een reptiel is, dan is $1 + 1 = 3$.' Juist ✓

(4) 'Als een mus een reptiel is, dan is $1 + 1 = 2$.' Juist ✓

Beschrijf wat een vader waarschijnlijk bedoelt als hij tegen zijn zoon zegt:

(1) 'Als jij kan slagen zonder te studeren, dan ben ik Napoleon.'
(2) 'Als je er door bent in juni, dan mag je naar Pukkelpop.'

Alle proposities in vorig voorbeeld hebben de vorm

als p, dan q,

met p en q proposities.

Formeel noteren we dit als

$$p \Rightarrow q$$

en lezen 'p impliceert q', 'als p, dan q of soms ook 'q volgt uit p'.

In het dagelijks leven suggereert 'p impliceert q' een *causaal* verband tussen p en q: meestal bedoelen we inderdaad dat q waar is *omdat* ook p waar is, of dus dat de waarheid van q *veroorzaakt* wordt door de waarheid van p. In de strikte logische zin wordt er echter *geen causaal verband* verondersteld. De logica volgt een erg strikte, eenduidige en letterlijke interpretatie: $p \Rightarrow q$ betekent 'ALS het het geval is dat p waar is, DAN moet zeker ook q waar zijn'. In het geval dat p *niet* waar is, is $p \Rightarrow q$ steeds waar, zowel in het geval dat q waar is als in het geval dat q niet waar is.

Definitie 2.1.4 (De implicatie "⇒")**.**

De **implicatie** $p \Rightarrow q$ tussen twee proposities p en q betekent dat zodra een bepaalde propositie p waar is, ook de propositie q waar is.

We lezen $p \Rightarrow q$ als 'p impliceert q', of 'als p, dan q' of ook 'q volgt uit p'.

We noemen p het **antecedens** of de **hypothese** en q het **consequens** of de **conclusie**.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Propositielogica

De waarheidstabel voor $p \Rightarrow q$ is:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	o	o
o	w	w
o	o	w

Dus de enige manier waarop $p \Rightarrow q$ *onwaar* kan zijn, is als p waar is en q onwaar.
Als p *niet waar* is, dan is de implicatie $p \Rightarrow q$ *waar*, *ongeacht* of q al dan niet waar is.

Onthoud: "Als een mus een reptiel is, dan is 1+1=3" is een *ware* uitspraak. Dit is een implicatie van de vorm $p \Rightarrow q$. Een mus is geen reptiel (p is niet waar) en bijgevolg is de implicatie *waar*.

Ook de Romeinen en de middeleeuwse logici interpreteerden de implicatie op deze manier, en gebruikten de term "Ex falso [sequitur] quod libet": uit een onware uitspraak volgt al wat je maar wil.

Voorbeeld 2.1.4 (Pukkelpop)**.** Wanneer is volgende uitspraak (of belofte) van je vader al dan niet waar:

Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.

Er zijn drie proposities p, q en $(p \Rightarrow q)$:

p : je slaagt in juni
q : je mag naar Pukkelpop
$p \Rightarrow q$: Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.

We krijgen de volgende waarheidstabel.

(Als)	p	(dan)	q	als p dan q $(p \Rightarrow q)$
p is waar:	je slaagt in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	waar
p is waar:	je slaagt in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	onwaar
p is **onwaar**:	je slaagt niet in juni	q is **waar**:	je mag naar Pukkelpop	**waar**
p is **onwaar**:	je slaagt niet in juni	q is **onwaar**:	je mag niet naar Pukkelpop	**waar**

Dus, enkel in het geval dat je slaagt, maar toch niet naar Pukkelpop mag, breekt je vader zijn belofte (en wordt zijn uitspraak dus onwaar). Als je niet slaagt, en je mag toch naar Pukkelpop, is er geen enkel logisch probleem. De uitspraak 'Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.' is in dit geval waar (derde lijn in de waarheidstabel).

Merk wel op dat je vader allicht volgende uitspraak *bedoelde*:

Alleen als je slaagt in juni, mag je naar Pukkelpop.

en dus, als je *niet* slaagt, dan mag je ook *niet* naar Pukkelpop. In dat geval is de situatie als volgt

(*Alleen als*)	p	(dan)	q	**alleen als** p dan q
p is waar:	je slaagt in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	waar
p is waar:	je slaagt in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	onwaar
p is onwaar:	je slaagt niet in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	onwaar
p is onwaar:	je slaagt niet in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	waar

In dit geval mag je *alleen als* je geslaagd bent naar Pukkelpop. Dus, p en q moeten nu ofwel beide waar zijn, ofwel beide niet waar. Dus p is waar *als en slechts als* q waar is, en we noemen p en q *equivalent*.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Propositielogica

Oefening 2.1.2. Vul volgende waarheidstabel aan

p	q	$p \Rightarrow q$	$(\neg p) \vee q$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
w	w	.....	.....	.....
w	o	.....	.....	.....
o	w	.....	.....	.....
o	o	.....	.....	.....

2.1.4 Equivalentie: '... als en slechts als ...'

Definitie 2.1.5 (Equivalentie "$\Leftrightarrow$").

Twee proposities zijn **equivalent** als ze elkaar impliceren, of ook als ze ofwel beide waar zijn, ofwel beide onwaar. We noteren dit met $p \Leftrightarrow q$ en we zeggen dat p en q **equivalent** zijn:

$$p \Leftrightarrow q \quad \text{betekent} \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

De waarheidstabel voor $p \Leftrightarrow q$ is:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	o	o
o	w	o
o	o	w

In de wiskunde wordt $p \Leftrightarrow q$ vaak gelezen als 'p **als en slechts als** q', en men schrijft soms ook 'p **asa** q'. In het Engels schrijft men dan 'iff' voor 'if and only if', en in het Frans 'ssi' voor 'si et seulement si'.

Als $p \Leftrightarrow q$ dan noemen we p ook wel **een nodige en voldoende voorwaarde** voor q, en dan is automatisch ook q een nodige en voldoende voorwaarde voor p.

Uit de waarheidstabel blijkt dus duidelijk dat $p \Leftrightarrow q$ waar is als p en q allebei waar zijn of allebei niet waar zijn. Als een van de twee waar is en de andere niet dan is $p \Leftrightarrow q$ *niet* waar.

Voorbeeld 2.1.5 (Pukkelpop bis).

De vader uit Voorbeeld 2.1.4 *bedoelde* allicht: je mag naar Pukkelpop als *en slechts als* je slaagt in juni.

Oefening 2.1.3. Met welke uitspraken is $\neg(p \Rightarrow q)$ equivalent? Probeer het antwoord eerst te vinden door te redeneren. Controleer je antwoord met een waarheidstabel.

1. $p \wedge \neg q$ ..... **4.** $\neg p \vee \neg q$ .....

2. $p \vee \neg q$ ..... **5.** $q \Rightarrow \neg p$ .....

3. $\neg p \wedge q$ ..... **6.** $\neg(\neg p \vee q)$ .....

2.1.5 Implicatie, equivalentie, nodige en voldoende voorwaarden

In verband met de implicatie gebruikt men ook de uitdrukkingen 'nodige voorwaarde' en 'voldoende voorwaarde'.

Definitie 2.1.6. Volgende uitspraken zijn allemaal equivalente formuleringen van hetzelfde:

$$p \Rightarrow q$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Propositielogica

$\neg p \vee q$

als p, dan q

p impliceert q

q is waar, of p is onwaar

p is een **voldoende voorwaarde** voor q

$\neg q \Rightarrow \neg p$

als q niet waar is , dan is ook p niet waar

q kan enkel onwaar zijn als p ook onwaar is

q is een **nodige voorwaarde** voor p

opdat p zou gelden, is het **nodig** dat q geldt

opdat q zou gelden, is het **voldoende** dat p geldt

Opmerking 2.1.1 (Te veel gemaakte redeneerfout)**.**

We benadrukken nogmaals de betekenis van $p \Rightarrow q$. Het komt immers al te vaak voor dat studenten bij $p \Rightarrow q$ *verkeerdelijk* denken dat als p niet waar is, dan ook q niet waar zal zijn.

Als je weet dat $p \Rightarrow q$ geldt, en je weet dat p *niet* geldt, dan kan je *niets* besluiten over de geldigheid van q. Dit is eigenlijk een evidentie. Toch leert de ervaring dat daar in de praktijk al te vaak tegen gezondigd wordt.

In het dagelijks taalgebruik betekent "als . . . , dan . . ." soms meer dan wat men strikt genomen zegt. Als je vader zegt 'Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop', dan *bedoelt* hij wellicht dat je *enkel* naar Pukkelpop mag als je slaagt. Hij bedoelt dus behalve wat hij expliciet zegt, impliciet ook: als je *niet* slaagt, dan mag je *niet* naar Pukkelpop. Als we met p de propositie "je slaagt in juni" aanduiden en met q de propositie "je mag naar Pukkelpop", dan zegt je vader "$p \Rightarrow q$" maar daar bovenop bedoelt hij stilzwijgend eigenlijk ook "$q \Rightarrow p$". Eigenlijk wil hij dus zeggen "$p \Leftrightarrow q$".

In de wetenschap en in de wiskunde in het bijzonder veroorloven we ons dergelijk slordig en dubbelzinnig taalgebruik niet, en "als ... dan .." betekent ook steeds gewoon "als ... dan ...".

2.1.6 Voorrangsregels

Definitie 2.1.7.

Bij de combinatie van connectieven gelden volgende voorrangsregels (van links naar rechts):

$$(\,) \qquad \neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \Rightarrow / \Leftarrow / \Leftrightarrow$$

waarbij de haakjes ( ) dus de hoogste voorrang hebben en de pijlen $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ en $\Leftrightarrow$ de laagste.

Voorbeeld 2.1.6.

$\neg p \vee q$	betekent	$(\neg p) \vee q$
$p \vee q \Rightarrow r$	betekent	$(p \vee q) \Rightarrow r$
$p \wedge q \Leftrightarrow r$	betekent	$(p \wedge q) \Leftrightarrow r$
$\neg p \Rightarrow q \vee r$	betekent	$(\neg p) \Rightarrow (q \vee r)$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Propositielogica

2.1.7 Tautologieën en contradicties

Definitie 2.1.8.

Een **tautologie** of **logische stelling** is een (samengestelde) propositie die *altijd waar* is, onafhankelijk van de waarheidswaarden van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.

Een **contradictie** of **tegenspraak** is een (samengestelde) propositie die *altijd onwaar* is, voor alle mogelijke waarheidswaarden van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.

De logica telt vele tautologieën. Vooral equivalenties zijn handig omdat ze soms toelaten proposities te vervangen door equivalente maar duidelijkere proposities.
Volgende tautologieën kan je allemaal als oefening bewijzen met een waarheidstabel:

Eigenschap 2.1.1 (Tautologieën of logische stellingen)**.**

$\neg(\neg p)$	$\Leftrightarrow$	p	*dubbele negatie*
$\neg(p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	*negatiewet van De Morgan voor* $\wedge$
$\neg(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	*negatiewet van De Morgan voor* $\vee$
$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \vee q)$	*definitie van* $\Rightarrow$
$\neg(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \neg q)$	*negatie van* $\Rightarrow$
$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow \neg p)$	*contrapositie*
$p \wedge (q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	*distributiviteit van* $\wedge$ *t.o.v.* $\vee$
$p \vee (q \wedge r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	*distributiviteit van* $\vee$ *t.o.v.* $\wedge$
q	$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow (p \wedge \neg p))$	*redenering uit het ongerijmde*
$(p \vee q) \Rightarrow r$	$\Leftrightarrow$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	*gevalsonderscheid*
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$	$(p \Rightarrow r)$	*transitiviteit van* $\Rightarrow$
p	$\vee$	$\neg p$	*de wet van de uitgesloten derde*

Verder zijn $\wedge$, $\vee$ en $\Leftrightarrow$ associatief en commutatief.

Oefening 2.1.4.

Toon aan met behulp van een waarheidstabel dat

$$p \wedge \neg p$$

een **contradictie** is.

Eigenschap 2.1.2 (Samenvatting en overzicht van connectieven met waarheidstabellen)**.**

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	o	o	w	w	w	w	w
w	o	o	w	o	w	o	w	o
o	w	w	o	o	w	w	o	o
o	o	w	w	o	o	w	w	w

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Kwantoren

De betekenis van sommige beweringen hangt af van de context: de betekenis van de zin "hij is president van Amerika"wordt bepaald door welke 'hij' precies wordt bedoeld. In de wiskunde hangt de waarheidswaarde van een bewering als 'n is even' af van welke n precies wordt bedoeld.

Een **predicaat** is een zinvolle mededelende zin met **vrije variabelen**. Deze vrije variabelen worden voorgesteld met letters (n, x, ...). Kwantoren gaan de vrije variabelen binden, de vrije variabelen worden zo **gebonden variabelen**.

Voor de predicaten

(a) $n^2 = 4$ (b) $n^2 = -4$ (c) $n^2 \geq 0$

is (a) $n^2 = 4$ enkel waar als $n = 2$ of $n = -2$, terwijl (b) $n^2 = -4$ voor geen enkel natuurlijk getal n waar is (maar wel voor de complexe getallen $\pm 2i$), en (c) $n^2 \geq 0$ is waar voor alle natuurlijke getallen n (maar niet voor bijvoorbeeld het complexe getal i, want $i^2 = -1 < 0$).

Er zijn essentieel drie verschillende manieren om een dergelijke 'vrije variabele n' te 'binden', dus vast te leggen. We kunnen bedoelen dat een predicaat al dan niet moet gelden voor

- één *concrete* waarde: $n = 2$, of $n = 6$
- *alle* mogelijke waarden van n (eventueel enkel van een bepaald type)
- *minstens één* waarde van n (eventueel van een bepaald type)

De predicaten worden pas waar of onwaar van zodra de vrije variabele niet meer vrij zijn, maar gebonden worden door kwantoren. De twee laatste gevallen kunnen we uitdrukken met "voor alle" en "er bestaat". Dit geeft aan *voor hoeveel* waarden (dus voor welke *kwantiteit* van waarden) het predicaat zou moeten gelden: voor allemaal of voor minstens één. Men noemt ze in de logica daarom **kwantoren** en men voert volgende notaties in:

Definitie 2.2.1.

Als $p(a)$ een predicaat is dat afhangt van een variabele a, en A een verzameling, dan betekent

$\forall a \in A : p(a)$ *voor elk* element a van A geldt $p(a)$

$\exists a \in A : p(a)$ *er bestaat (minstens) een* element a van A waarvoor $p(a)$ geldt

Hierbij noemen we

$\forall$ de **universele kwantor** of **alkwantor**
$\exists$ de **existentiële kwantor** of **bestaanskwantor**

Opmerking 2.2.1.

- We schrijven de kwantor in echte formules altijd vóór het predicaat, en dus niet ~~$p(a), \forall a \in A$~~. Maar, in een meer informele context schrijven we soms toch uitdrukkingen als

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

- In sommige handboeken schrijft men *altijd* haakjes rond een kwantor $(\forall x) : p(x)$, en dan laat men de dubbele punt soms weg $(\forall x)p(x)$. Sommigen gebruiken een komma: $\forall x, p(x)$
- De uitspraken $\forall a \in A : p(a)$ en $\forall x \in A : p(x)$ betekenen precies hetzelfde, dus de *naam* (letterkeuze) van de variabele heeft geen belang.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Kwantoren

Met deze notaties kunnen we nu compact schrijven

- $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$ voor 'er bestaat een natuurlijk getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 4'. (waar)
- $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$ voor 'alle natuurlijke getallen hebben als kwadraat 4'. (niet waar)
- $\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \geq 0$ voor 'alle gehele getallen hebben een positief kwadraat'. (waar)

Het is belangrijk dat je deze uitdrukkingen met kwantoren spontaan leert lezen als volwaardige zinnen.

2.2.1 Negatie van kwantoren

Er is een interessante wisselwerking tussen kwantoren en ontkenningen: beweren dat *niet iedereen* geslaagd is, betekent dat er *iemand is* die niet geslaagd is. En beweren dat *iedereen* iets *niet* heeft komt op hetzelfde neer als beweren dat *niemand* dat iets *wel* heeft.

Voorbeeld 2.2.1.

Als X de verzameling is van alle studenten die in deze cursus hebben gelezen en $p(x)$ is het predicaat "student x heeft blond haar", dan lezen we de uitspraak

$$\forall x \in X : p(x)$$

als "alle studenten die in deze cursus hebben gelezen zijn blond".

Deze uitspraak kan in de praktijk zowel waar als niet waar zijn, maar ze is uiteraard *niet waar* van zodra er minstens één student is die niet blond is. In symbolen uitgedrukt betekent dit

$$\neg(\forall x \in X : p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in X : \neg p(x).$$

Op gelijkaardige manier betekent 'niemand is geslaagd' hetzelfde als 'iedereen is gebuisd'. In formules, met $q(x)$ het predicaat "x is geslaagd", wordt dit:

$$\neg(\exists x \in X : q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : \neg q(x).$$

en 'niemand is gebuisd' betekent hetzelfde als 'iedereen is geslaagd':

$$\neg(\exists x \in X : \neg q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : q(x).$$

Samengevat:

Eigenschap 2.2.1 (Negatie van kwantoren)**.** Voor elk predicaat $p(x)$ geldt:

(1)	$\neg(\forall x \in X : p(x))$	$\Leftrightarrow$	$\exists x \in X : \neg p(x)$	of	$\neg(\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x))$
(2)	$\neg(\exists x \in X : p(x))$	$\Leftrightarrow$	$\forall x \in X : \neg p(x)$	of	$\neg(\exists x)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg p(x))$

In woorden: 'niet voor alle' is hetzelfde als 'er bestaat waarvoor niet',

en ook: 'niet er bestaat' is hetzelfde als 'voor alle geldt niet'.

2.2.2 Volgorde van kwantoren

Als in een wiskundige formule meerdere kwantoren voorkomen, dan is de *volgorde* soms erg belangrijk.

Oefening 2.2.1. Zij P een verzameling potjes van allemaal onderling *verschillende* formaten en D de verzameling van de bijhorende deksels. Zij $p(x, y)$ met $x \in D$ en $y \in P$ het predicaat 'x past op y'.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Kwantoren

Kies voor elk van volgende formules de overeenkomstige Nederlandse zin, en zeg of de uitspraak waar of onwaar is.

A Op elk potje past een dekseltje
B Er is een potje waar elk dekseltje op past
C Er is een potje waarop geen dekseltje past
D Er is een dekseltje dat op geen enkel potje past
E Er is een dekseltje dat op elk potje past
F Er is een dekseltje dat op een potje past
G Elk dekseltje past op elk potje
H Elk dekseltje past op een potje

1. $\forall x \in D : \forall y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
2. $\forall y \in P : \forall x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
3. $\exists x \in D : \exists y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
4. $\exists y \in P : \exists x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
5. $\exists x \in D : \forall y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
6. $\forall y \in P : \exists x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
7. $\forall x \in D : \exists y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
8. $\exists y \in P : \forall x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
9. $\exists a \in P : \forall b \in D : p(b,a)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
10. $\exists x \in P : \forall y \in D : p(y,x)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout

Deze oefening kan worden veralgemeend in volgende eigenschappen:

Eigenschap 2.2.2 (Verwisselen van kwantoren)**.** Voor elk predicaat $p(x,y)$ geldt:

$$
\begin{array}{lccl}
(1) & \forall x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) & \Leftrightarrow & \forall y \in Y : \forall x \in X : p(x,y) \\
(2) & \exists x \in X : \exists y \in Y : p(x,y) & \Leftrightarrow & \exists y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) \\
(3) & \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) & \Rightarrow & \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) \\
(4) & \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) & \not\Rightarrow & \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y)
\end{array}
$$

Dit betekent:

- Gelijksoortige kwantoren mogen altijd van plaats worden verwisseld: de uitspraak verandert niet van betekenis. Daarom mogen we ook schrijven $\forall x, y \in X$ of $\exists x, y \in Y$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Kwantoren

- Een bestaanskwantor mag achter een alkwantor worden geschoven: de uitspraak blijft waar, maar wordt zwakker.
- Een alkwantor **mag niet** achter een bestaanskwantor worden geschoven: de uitspraak wordt dan mogelijk onwaar.
  Bij $\forall y \in Y : \exists x \in X$ kan de x afhangen van y, maar bij $\exists x \in X : \forall y \in Y$ kan dat *niet*.

Opmerking 2.2.2.

- Onthoud: **als op elk potje een dekseltje past, dan betekent dat *niet* dat er een dekseltje is dat op elke potje past**. Maar, als er omgekeerd toch een dekseltje zou zijn dat op elk potje past, dan is er natuurlijk automatisch ook voor elke potje een passend dekseltje: namelijk dat 'universeel passend' dekseltje.
- Bij een uitspraak van de vorm $\forall x \in X : \exists y \in Y : p(x,y)$ volstaat het dat voor elke x een mogelijk *andere* y gevonden wordt: de y is dus mogelijk afhankelijk van x. Je zou met functie-notatie ook $y(x)$ kunnen schrijven, of met een subscript y_x:

  $$\forall x \in X : \exists y_x \in Y : p(x, y_x)$$

  Bij een uitspraak van de vorm $\exists y \in Y : \forall x \in X : p(x,y)$ moet er één vaste y bestaan die *niet* afhangt van x, maar voor alle x tegelijk werkt. Dat is een veel strengere eis.
- In deze eigenschap wordt steeds de kwantor-met-de-variabele van plaats verwisseld. De eigenschap geldt *niet* als je *enkel de kwantor* verplaatst. In dat geval krijg je een nieuwe uitspraak die in het algemeen geen logisch verband heeft met de oorspronkelijke uitspraak:

  $$\exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) \quad \text{vs} \quad \forall x \in X : \exists y \in Y : p(x,y)$$

Oefening 2.2.2. Vergelijk de betekenis van volgende twee uitspraken en geef voor elke uitspraak aan of ze waar of onwaar is:

1. $\forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : n > m$

2. $\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n > m$.

Oefening 2.2.3. Onderzoek of volgende uitspraken al dan niet waar zijn. Geef ook telkens een vlotte, korte equivalente Nederlandse zin.

1. Juist | Fout $\forall n \in \mathbb{N}_0, \exists m \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

2. Juist | Fout $\exists m \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

3. Juist | Fout $\forall m \in \mathbb{N}_0, \exists n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

4. Juist | Fout $\exists n \in \mathbb{N}_0, \forall m \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

5. Juist | Fout $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

6. Juist | Fout $\exists m, n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

7. Juist | Fout $\exists n \in \mathbb{N} : \big(n > 1 \wedge \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N} : \big(m_1 > 1 \wedge m_2 > 1\big) \Rightarrow m_1 \cdot m_2 \neq n\big)$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Kwantoren

Oefening 2.2.4.

Onderzoek of volgende uitspraken waar of onwaar zijn.

(a) Juist | Fout $\forall m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(b) Juist | Fout $\exists m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(c) Juist | Fout $\forall m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(d) Juist | Fout $\exists m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(e) Juist | Fout $\forall n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(f) Juist | Fout $\exists n \in \mathbb{Z} : \forall m \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

Oefening 2.2.5.

Geef telkens een wiskundige formule met dezelfde betekenis als de zin. Zijn de uitspraken waar of onwaar? (Er zijn soms andere formuleringen dan de gegeven oplossing mogelijk.)

1. Er bestaan twee gehele getallen zodat het eerste groter is dan het tweede.

2. Er bestaan twee gehele getallen zodat beide positief zijn.

3. Voor elk geheel getal bestaat er een groter geheel getal.

4. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een groter natuurlijk getal.

5. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een groter geheel getal.

6. Voor elk geheel getal bestaat er een groter natuurlijk getal.

7. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een kleiner natuurlijk getal.

8. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een kleiner geheel getal.

9. Er bestaat een natuurlijk getal dat groter is dan elk ander natuurlijk getal.

10. Er bestaat een geheel getal dat groter is dan elk geheel getal.

11. Er bestaat een geheel getal dat kleiner is dan elk natuurlijk getal.

12. Er bestaat een positief reëel getal dat kleiner is dan elk strikt positief natuurlijk getal.

13. Voor elke twee natuurlijke getallen geldt dat het eerste groter is dan het tweede of het tweede groter dan het eerste.

14. Voor elke twee verschillende natuurlijke getallen geldt dat het eerste groter is dan het tweede of het tweede groter dan het eerste.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Verzamelingen

Een belangrijk aspect van de wiskunde is het *ontdekken* of *introduceren* van *structuur* in allerlei dingen om vervolgens die structuur verder te bestuderen. Dat werkt zo voor hoeveelheden, groottes, vormen, configuraties, uitspraken enzovoort.

De eenvoudigste vorm van structureren is gewoon dingen samennemen, dat heet 'verzamelen'. De wiskundige studie daarvan is de 'verzamelingenleer'. Het is een hoogst merkwaardig feit dat een zodanig eenvoudig idee als het 'verzamelen van verschillende dingen in één nieuw ding dat we dan een verzameling noemen' een uiterst krachtige taal oplevert om op effectieve wijze over allerlei erg complexe dingen te kunnen spreken en denken.

Definitie 2.3.1.

– Een **verzameling** is een grondbegrip in de wiskunde. We zullen hier niet ingaan op exacte definities of axioma's. Volgens een intuïtieve definitie kan je een verzameling beschouwen als een geheel van objecten zodanig dat

  - je van *elk* object ondubbelzinnig kan zeggen of het al dan niet tot dat geheel behoort, en
  - je elk object ondubbelzinnig kan identificeren. Dit betekent dat je moet kunnen nagaan wanneer twee objecten aan elkaar gelijk zijn en dus in feite hetzelfde object zijn. Als je dat niet zou kunnen, zou immers zelfs het tellen van de elementen al een probleem zijn.

  Een verzameling wordt dus *enkel* en *volledig* bepaald door de objecten die ertoe behoren.

  Meestal noteren we een verzameling met een hoofdletter zoals A, B of X. Soms krijgen verzamelingen standaard notaties, zoals de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ of de reële getallen $\mathbb{R}$.

– De **elementen** van een verzameling zijn de objecten waaruit die verzameling bestaat. Elementen worden meestal aangeduid met kleine letters $a, b, x, y \ldots$.
  Notatie: $a \in A$ betekent "object a behoort tot verzameling A" of "a is element van A".
  Notatie: $a \notin A$ betekent "object a behoort *niet* tot verzameling A".
  Notatie: $A = \{a, b, c\}$ betekent "verzameling A bestaat uit objecten a, b en c".

– Verzamelingen A en B zijn **gelijk**, genoteerd $A = B$, als A en B *dezelfde elementen* hebben.

  Hieruit volgt bijvoorbeeld dat de elementen van een verzameling geen 'volgorde' hebben en dat er ook geen 'dubbels' in een verzameling kunnen zitten. De verzamelingen $\{a, b\}$ en $\{b, a\}$ zijn dus aan elkaar gelijk want ze hebben dezelfde elementen. Om dezelfde reden zijn ook $\{a, b\}$ en $\{a, a, b\}$ aan elkaar gelijk.

– Een **lege verzameling** is een verzameling *zonder elementen*. We noteren ze als $\emptyset \overset{\text{def}}{=} \{\}$.

  Omdat verzamelingen gelijk zijn als ze gelijke elementen hebben, is er maar één lege verzameling.

– Een **deelverzameling** van een verzameling B is een verzameling A waarbij elk element van A ook tot B behoort. Zo zijn $\{a\}$ en $\{a, b\}$ deelverzamelingen van $\{a, b, c\}$, maar a en $\{a, d\}$ niet.
  Notatie: $A \subseteq B$, of ook $A \subset B$, betekent "verzameling A is deelverzameling van B".

  Voor de relatie $A \subseteq B$ gebruikt men soms ook de **inclusie** van A in B.

  Merk op dat om historische redenen de notatie hier *verschilt* van de verwante symbolen $<$ en $\leqslant$. Het symbool $<$ betekent *strikt kleiner dan*, terwijl $\leqslant$ *kleiner dan of gelijk aan* betekent. Bij verzamelingen daarentegen heeft het symbool $\subset$ precies dezelfde betekenis als $\subseteq$, en er geldt dus *wel* dat $A \subset A$.

  Notatie: $A \not\subseteq B$ of $A \not\subset B$ betekent dat A geen deelverzameling van B is.

  Notatie: $A \subsetneq B$ betekent $A \subseteq B$ maar $A \neq B$.

  Dus als $A \subsetneq B$ dan is toch $A \subseteq B$, maar als $A \not\subseteq B$ dan geldt (per definitie) dat *niet* $A \subseteq B$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Verzamelingen

Een **echte deelverzameling** van B is een deelverzameling A waarvoor $A \subsetneq B$ en $A \neq \emptyset$. Dus, elke verzameling heeft de lege verzameling en zichzelf als *onechte* deelverzamelingen. (Dat zijn dus *twee* onechte deelverzamelingen, behalve in het geval $B = \emptyset$.)

– Een **eindige verzameling** is een verzameling die slechts een eindig aantal elementen bevat. Notatie: $\#A$ is "het aantal elementen van A". Met $A = \{1, 2\}$ is $\#A = \#\{1, 2\} = 2$, en $\#\{\} = 0$.
Een **singleton** is een verzameling met *één* element en
een **paar** is een verzameling met *twee* elementen.

Voorbeeld 2.3.1 (Basisvoorbeelden)**.**

- Alle leerlingen van een school vormen een verzameling. Leerlingen An en Bart zijn elementen van die verzameling, leerkracht Carla niet. Leerkracht Carla is wel een element van de verzameling van de leerkrachten van die school. De verzameling leerlingen heeft erg veel deelverzamelingen: de leerlingen van Klas 1A vormen samen een deelverzameling, maar ook alle meisjes, alle leerlingen met een bril, alle leerlingen die met de fiets komen, en alle leerlingen die al een Nobelprijs Economie hebben behaald vormen telkens een deelverzameling. De laatste deelverzameling van leerling-Nobelprijswinnaars is op dit ogenblik voor alle Vlaamse scholen *leeg*: er zijn zo (nog) geen leerlingen.
- Alle natuurlijke getallen vormen een verzameling. De getallen 42 en 1302 zijn elementen van die verzameling. De even getallen, de priemgetallen en de delers van 24 vormen telkens een deelverzameling.

Er zijn verschillende manieren om een concrete verzameling te definiëren.

Definitie 2.3.2.

Een verzameling wordt in de praktijk gegeven door één van volgende mogelijkheden:

(a) een **opsomming**, waarbij de elementen worden *opgesomd* tussen accolades:

$A = \{1, 2, 3\}$, de verzameling met de getallen $1, 2$ en 3.

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de verzameling van de cijfers 0 t.e.m 9.

$C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$, de (oneindige) verzameling van de even natuurlijke getallen, waarbij de puntjes 'enzovoorts' betekenen. Er geldt dat $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$.

(b) een **omschrijving**, waarbij de elementen aan een *voorwaarde* moeten voldoen:

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is deelbaar door } 2\}$ is dezelfde verzameling C van de even natuurlijke getallen als hierboven. Je leest dit als: 'C is de verzameling natuurlijke getallen x *waarvoor geldt dat* x deelbaar is door 2'.
Ja kan ook schrijven $C = \{x \mid x \text{ is een natuurlijk getal dat deelbaar is door } 2\}$ of $C = \{x \mid x \text{ is een even natuurlijk getal } 2\}$

Een rechte streep $\mid$ tussen accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

(c) een **constructieve definitie**, waarbij elementen worden gegeven door een *formule*:

$D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, de verzameling van alle kwadraten van natuurlijke getallen.

Je kan opmerken dat een getal dus behoort tot D als het kan geschreven worden als n^2 voor een zeker natuurlijk getal n. Dus kunnen we ook volgende omschrijvingen geven:

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is een kwadraat}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ er bestaat een getal } x \in \mathbb{N} \text{ zodat } x^2 = n\}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Verzamelingen

De verzameling C van de even natuurlijke getallen kunnen we met deze methode dus ook schrijven als

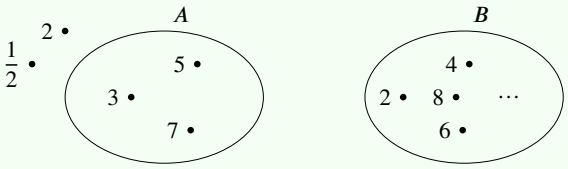
$$C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

De naam van de variabele binnen in de accolades heeft immers geen belang.

(d) een **Venndiagram**:

Een *Venndiagram* is een gesloten kromme (de 'verzameling') waarbinnen de elementen van A door stippen worden voorgesteld. Dingen die geen elementen van A zijn krijgen een stip *buiten* de kromme. We tekenen geen stippen *op* de kromme. Niet alle elementen van A moeten worden weergegeven door een stip, maar in dat geval zetten we drie puntjes in de verzameling. De naam van de verzameling wordt meestal buiten de kromme geplaatst.

Voorbeelden: $A = \{3, 5, 7\}$ en $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$



Opmerking 2.3.1.

(a) We gebruiken dus accolades { en } om verzamelingen te noteren. We herhalen:

- De volgorde van elementen heeft geen belang: $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- Eventuele dubbels hebben geen belang: $\{a, a\} = \{a\} = \{a, a, a\}$.
- Een rechte streep | tussen de accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

(b) De lege verzameling is een deelverzameling van elke verzameling A. (Inderdaad, de lege verzameling bevat geen elementen, we kunnen dus geen element in de lege verzameling vinden dat niet tot A behoort, dus elk element in de lege verzameling behoort tot A.)

(c) Uit de definities volgt dat

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ en } B \subseteq A.$$

Dit betekent dat we de gelijkheid van twee verzamelingen A en B kunnen aantonen door $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$ te bewijzen. Deze techniek wordt erg dikwijls gebruikt om een gelijkheid van verzamelingen aan te tonen.

(d) Het is belangrijk om goed onderscheid te maken tussen de symbolen $\in$ en $\subseteq$. Ze hebben een verschillende betekenis, maar zijn wel nauw verwant want

$$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A.$$

Sommige veel voorkomende verzamelingen krijgen een speciale notatie:

Definitie 2.3.3.

(a) Volgende getallenverzamelingen hebben een standaardnotatie:

- $\mathbb{N}$ is de verzameling van natuurlijke getallen $0, 1, 2, 3 \ldots$.
- $\mathbb{Z}$ is de verzameling van gehele getallen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.
- $\mathbb{Q}$ is de verzameling van rationale getallen (breuken).

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Verzamelingen

– $\mathbb{R}$ is de verzameling van reële getallen ("kommagetallen").

– $\mathbb{C}$ is de verzameling van complexe getallen.

Er geldt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

(b) De verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0 wordt genoteerd als:

– $\mathbb{N}_0 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$.

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}_0, \mathbb{Q}_0$ en $\mathbb{R}_0$ gedefinieerd.

Pas op: Engelstalige handboeken en websites hebben dikwijls een *omgekeerde afspraak*: $\mathbb{N}$ zijn dan de natuurlijke getallen *zonder nul*, en $\mathbb{N}_0$ zijn de natuurlijke getallen *inclusief nul*.

Sommige handboeken gebruiken notaties $\mathbb{N}_{>0}, \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$, met de voor zich sprekende betekenis.

(c) De verzameling van de (strikt) positieve reële getallen wordt genoteerd als:

– $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x \geqslant 0\}$ en $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^+ | \ x \neq 0\}$.

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$ gedefinieerd.

(d) De *intervallen* van reële getallen:

$]2, 3[$: de reële getallen strikt groter dan 2 en strikt kleiner dan 3.

$[1, 7[$: de reële getallen groter of gelijk aan 1 en strikt kleiner dan 7.

Dus $]2, 3[= \{x \in \mathbb{R} | \ 2 < x < 3\}$ en $[1, 7[= \{x \in \mathbb{R} | \ 1 \leq x < 7\}$.

(e) De even en de oneven getallen:

$2\mathbb{N} = \{2n | \ n \in \mathbb{N}\}$ en $2\mathbb{N} + 1 = \{2n + 1 | \ n \in \mathbb{N}\}$.

Voorbeeld 2.3.2. De verzameling van de natuurlijke getallen kan geschreven worden als :

$\mathbb{N}$	$= \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	opsomming	de lijst van natuurlijke getallen
	$= \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \}$	omschrijving	de gehele getallen waarvoor geldt dat ze positief zijn
	$= \{ \lvert x \rvert \mid x \in \mathbb{Z} \}$	constructief	de verzameling van de absolute waardes van de gehele getallen
	$= \mathbb{Z}_{\geq 0}$		een alternatieve notatie voor de positieve gehele getallen

Voorbeeld 2.3.3. De verzameling van de even getallen kan als volgt worden opgeschreven:

$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$	opsomming
$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is even } \}$	omschrijving
$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m\}$	omschrijving (in formule)
$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$	constructief

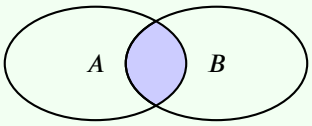
CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met verzamelingen: unie en doorsnede

Je kan in zekere zin 'rekenen' met verzamelingen door volgende bewerkingen uit te voeren:

Definitie 2.4.1. Met twee verzamelingen A en B associëren we:

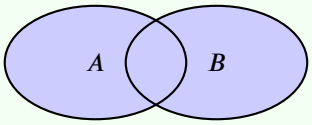
- $A \cap B$ = de **doorsnede** van A en B.
  $A \cap B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A **en** tot B.



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$

We noemen twee verzamelingen A en B **disjunct** als $A \cap B = \emptyset$.

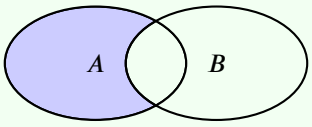
- $A \cup B$ = de **unie** of **vereniging** van A en B.
  $A \cup B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A **of** tot B.



$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$

Als $C = A \cup B$ waarbij $A \cap B = \emptyset$, dan noemt men C de **disjuncte unie** van A en B.

- $A \setminus B$ = het **verschil** van A en B.
  $A \setminus B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A maar niet tot B.



$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$

Merk op dat in het algemeen $A \setminus B \neq B \setminus A$ en dat
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Voorbeeld 2.4.1. Bepaal volgende verzamelingen.

(a) $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

(b) $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

(c) $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

(d) $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3\} = \{4\}$

Voorbeeld 2.4.2. Bepaal volgende unies, doorsnedes en verschillen van intervallen:

(a) $[2,4[\cap]3,5[=]3,4[$

(b) $[2,4[\cup]3,5[= [2,5[$

(c) $[2,4[\setminus]3,5[= [2,3]$

(d) $]3,5[\setminus [2,4[= [4,5[$

(e) $[2,4[\cap [5,6] = \emptyset$

(f) $[2,4[\cup [5,6]$ is geen interval. Zo zit bijvoorbeeld 4.5 niet in deze verzameling.

Opmerking 2.4.1.

De doorsnede $A \cap B$ van twee verzamelingen is de *grootste* verzameling die zowel een deelverzameling is van A als van B. De unie is de *kleinste* verzameling waarvan zowel A als B deelverzamelingen zijn.

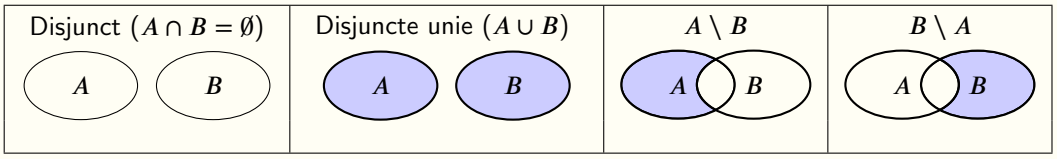
CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met verzamelingen: unie en doorsnede

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B, \quad A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$$

Opmerking 2.4.2.

Disjuncte verzamelingen, de disjuncte unie, $A \setminus B$ en $B \setminus A$ stel je als volgt voor met Venndiagrammen:

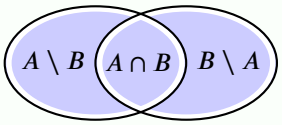


Er zijn enkele voor de hand liggende eigenschappen voor doorsnedes, unies en verschillen met zichzelf of de lege verzameling. Er is ook een handigheid om indien nodig elke unie te schrijven als een *disjuncte* unie:

Eigenschap 2.4.1. Voor elke verzameling A geldt:

$$A \cap A = A \qquad A \cup \emptyset = A \qquad A \setminus A = \emptyset$$
$$A \cup A = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \setminus \emptyset = A$$

Elke unie kan geschreven worden als een disjuncte unie:

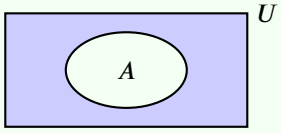


$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Dikwijls zijn alle relevante verzamelingen in een bepaalde context *deelverzamelingen van een vaste verzameling*, bijvoorbeeld de reële getallen in de context van het bestuderen van reële functies. We noemen die vaste verzameling dan een **universele verzameling** (of **universum**) U en tekenen haar Venndiagram met een rechthoek in plaats van een ovaal. Als er een universum is, dan bestaat er niets 'buiten' dat universum. We kunnen dan het *complement* van een verzameling A definiëren als alles wat *niet* in A zit:

Definitie 2.4.2.

Het **complement** A^c van een deelverzameling A in een universum U is de verzameling van de elementen van U die *niet* tot A behoren. A^c is dus gelijk aan het verschil van U en A:



$$A^c = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Volgende eigenschappen kan je aflezen op Venndiagrammen, zoals in de oefeningen wordt besproken.

Eigenschap 2.4.2. Voor A, B en C deelverzamelingen van een universele verzameling U geldt:

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met verzamelingen: unie en doorsnede

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	en	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(associativiteit)
$A \cup B = B \cup A$	en	$A \cap B = B \cap A$	(commutativiteit)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	en	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(distributiviteit)
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	en	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	(wetten van De Morgan)
$A \cup A^c = U$	en	$A \cap A^c = \emptyset$	(complementering)
$(A^c)^c = A$			(dubbel complement)

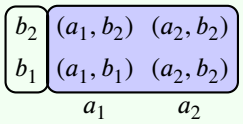
CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Bewerkingen met verzamelingen: product en macht

Van twee verzamelingen kan je niet alleen hun doorsnede, unie en verschil bepalen, maar ook hun *product*:

Definitie 2.5.1.

$A \times B$, het **cartesiaans product** of de **productverzameling** van A en B, is de verzameling van koppels (= geordende tweetallen) (a, b) met $a \in A$ en $b \in B$:



$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ en } b \in B\}.$$

De productverzameling is moeilijk voorstelbaar met venndiagrammen. Je kan wel $A = \{a_1, a_2\}$ horizontaal tekenen en $B = \{b_1, b_2\}$ verticaal, dan is $A \times B$ een rechthoek met 'zijden' A en B.

Als A en B eindige verzamelingen zijn, is $A \times B$ ook eindig en $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$.

Als $A = B$ dan schrijven we $A^2 = A \times A, A^3 = A \times A \times A$ en $A^n = A \times \cdots \times A$ voor de koppels, drietallen en n-tallen van elementen van A.

Twee koppels (a_1, b_1) en (a_2, b_2) zijn gelijk als en slechts als $a_1 = a_2$ en $b_1 = b_2$. Let op dat bij een *koppel* de volgorde dus *wel* van belang is. Als $a \neq b$ dan is $(a, b) \neq (b, a)$. Dit is *anders* dan bij het *paar* $\{a, b\}$ want bij *verzamelingen* geldt $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Voorbeeld 2.5.1 (Basisvoorbeelden productverzameling)**.**

(a) $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

(b) $\{1, 2\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

(c) $\{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4\} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

(d) $\{2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3\} = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

Als je geïnteresseerd bent in een bepaald soort dingen, is het altijd nuttig die dingen alvast in een *verzameling* te stoppen, want dan kan je er meestal eenvoudiger over spreken en mee redeneren.

Als je één of andere verzameling A hebt, zal je al snel interesse hebben voor de *deel*verzamelingen van A. Je kan dan *al* die deelverzamelingen alvast ook in een nieuwe verzameling stoppen:

Definitie 2.5.2.

De **machtsverzameling $P(A)$** van een verzameling A is de verzameling van de deelverzamelingen van A:

$$P(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

Voorbeeld 2.5.2. Als $A = \{a, b, c\}$, dan is

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

De lege verzameling $\emptyset$ is een element van de machtsverzameling van elke verzameling A omdat $\emptyset \subset A$ voor elke A. Ook de verzameling A zelf is steeds een element van $P(A)$.

Met volgende eigenschap kan je relatief eenvoudig het aantal elementen van $P(A)$ bepalen:

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Bewerkingen met verzamelingen: product en macht

Eigenschap 2.5.1. Als A een eindige verzameling is met $\#A = n$, dan is

$$\#P(A) = 2^n.$$

Je kan dit ook schrijven als $\#P(A) = 2^{\#A}$.

Dit verklaart de naam *machtsverzameling* voor $P(A)$. Men noteert soms $2^A \overset{\text{def}}{=} P(A)$.

Merk op dat het aantal deelverzamelingen zeer snel groot wordt, zelfs voor relatief kleine verzamelingen A. Zo heeft een verzameling met 20 elementen al 2^{20} deelverzamelingen, dat zijn er meer dan een miljoen.

Je kan begrijpen waarom een verzameling met n elementen precies 2^n deelverzamelingen heeft door ze allemaal op te schrijven voor verzamelingen met $0,1,2,\cdots$ elementen:

A	deelverzamelingen van A	aantal
$\emptyset = \{\}$	$\{\}$	$1 = 2^0$
$\{a\}$	$\{\}$, $\{a\}$	$2 = 2^1$
$\{a,b\}$	$\{\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$	$4 = 2^2$
$\{a,b,c\}$	$\{\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{c\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$	$8 = 2^3$
$\{a,b,c,d\}$	$\{\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{c\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$ $\{d\}$, $\{a,d\}$, $\{b,d\}$, $\{a,b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,b,c,d\}$	$16 = 2^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Je merkt dat telkens als je een element aan de verzameling A toevoegt, het aantal deelverzamelingen van A *verdubbelt*. Inderdaad, enerzijds behoud je natuurlijk alle vorige deelverzamelingen, maar anderzijds krijg je extra deelverzamelingen door het nieuwe element aan elke van de vorige deelverzamelingen toe te voegen.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Intervallen

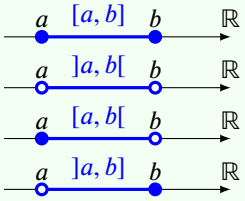
Een *interval* bestaat uit alle getallen die tussen twee gegeven getallen liggen:

Definitie 2.6.1 (Intervallen). Voor $a, b \in \mathbb{R}$, met $a < b$, geldt:

- $[a, b]$, het **gesloten interval** van a tot b, bevat de getallen tussen a en b, met a en b inbegrepen.
- $]a, b[$, het **open interval** van a tot b, bevat de getallen tussen a en b, met a en b *niet* inbegrepen.
- $[a, b[$ en $]a, b]$ zijn op gelijkaardige manier telkens een **half-open interval**.

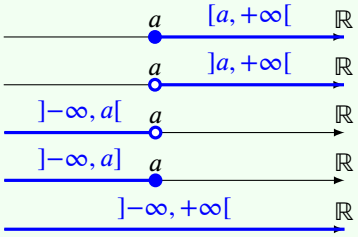
In formules:

$$
\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} & \text{het gesloten interval } [a,b] \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & \text{het open interval }]a,b[\\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} & \text{het half-open interval } [a,b[\\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} & \text{het half-open interval }]a,b]
\end{array}
$$



De notatie wordt als volgt uitgebreid voor halfrechten of 'oneindige intervallen':

$$
\begin{array}{rcl}
[a, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\} \\
]a, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
]-\infty, a[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \\
]-\infty, a] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\} \\
]-\infty, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}
\end{array}
$$



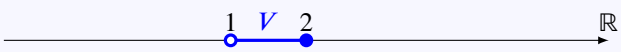
Merk op dat $\pm\infty$ zelf nooit tot het interval behoort, want $\pm\infty$ is geen reëel getal.

Met $\cap$ en $\cup$ kunnen we ook de unie en doorsnede van intervallen aanduiden:

$$
\begin{array}{rcl}
[a,b] \cup [c,d] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b] \text{ of } x \in [c,d]\}, \\
[a,b] \cap [c,d] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b] \text{ en } x \in [c,d]\}.
\end{array}
$$

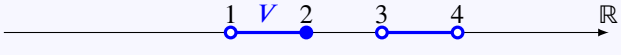
Voorbeeld 2.6.1. Volgende verzamelingen zijn telkens een (unie van) interval(len):

1.



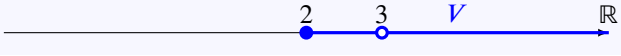
$V =]1, 2]$

2.



$V =]1, 2] \cup]3, 4[$

3.



$V = [2, 3[\cup]3, +\infty[$

Let op: in het Engels gebruikt men ook de notatie $(a, b), [a, b)$ en $(a, b]$ voor (half-)open intervallen.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.A Oefeningen verzamelingen

Oefening 2.6.1. Zijn volgende uitspraken waar?

1. Juist | Fout $\{1,2,3\} \stackrel{?}{\subseteq} \mathbb{N}$

2. Juist | Fout $\{1\} \stackrel{?}{\subseteq} \mathbb{N}$

3. Juist | Fout $1 \stackrel{?}{\subseteq} \mathbb{N}$

4. Juist | Fout $\{5,7\} \stackrel{?}{\subseteq} \{n \in \mathbb{N} | n \text{ priemgetal}\}$

Oefening 2.6.2. Bepaal volgende verzamelingen.

1. $\{1,2,3,4\} \cap \{2,3,4\} = \ldots\ldots$

2. $\{1,2,3,4\} \cup \{2,3,4\} = \ldots\ldots$

3. $\{1,2,3,4\} \backslash \{2,3,4\} = \ldots\ldots$

4. $\{2,3,4\} \backslash \{1,2,3,4\} = \ldots\ldots$

Oefening 2.6.3. Zijn volgende uitspraken waar of onwaar? Verbeter de foute uitspraken.

1. Juist | Fout $\mathbb{N} \backslash \{0\} = \mathbb{N}_0$

2. Juist | Fout $\{1,2,3\} \backslash \{2\} = \{1,3\}$

3. Juist | Fout $\mathbb{R} \backslash \,]\,2,5\,[=]-\infty, 2\,[\cup [\,5, +\infty[$

4. Juist | Fout $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ is de verzameling van de irrationale getallen.

5. Juist | Fout $\{1, \{1,2\}\} \backslash \{1\} = \{1,2\}$

6. Juist | Fout $\{1, \{1\}\} \backslash \{1\} = \{1\}$

Oefening 2.6.4. Supportersclub 'de Sortie' gaat regelmatig kijken naar de thuiswedstrijden van OHL. Er is echter onzekerheid over het aantal leden. Uit de archieven blijkt het volgende:

- de vorige drie wedstrijden waren tegen AA Gent, KV Kortrijk en KV Mechelen.
- er gingen 14 supporters kijken naar de wedstrijd tegen AA Gent, 11 naar de wedstrijd tegen KV Kortrijk en 8 naar de wedstrijd tegen KV Mechelen.
- een aantal van die supporters gingen naar minstens 2 matchen: 5 naar zowel AA Gent als KV Kortrijk, 3 gingen naar de wedstrijd tegen KV Kortrijk en KV Mechelen, en 3 gingen naar AA Gent en KV Mechelen kijken.
- er waren 2 supporters die de drie wedstrijden bijwoonden.

Als we er van uitgaan dat alle leden van 'de Sortie' minstens 1 keer gingen supporteren, hoeveel leden telt 'de Sortie' dan? | 33 | 20 | 24 | 46 | 18 |

Oefening 2.6.5. In een klas beoefent elke leerling(e) minstens een van de volgende drie sporten: zwemmen, atletiek en tennis. De atleten en zij die tennissen zijn samen met 15. 14 leerlingen

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.A Oefeningen verzamelingen

tennissen niet. 5 leerlingen doen zowel aan zwemmen als aan atletiek, 4 zowel aan tennis als aan zwemmen. Onder de 3 leerlingen die zowel tennissen als atletiek doen, zijn er 2 die bovendien zwemmen. De atleten zijn samen met 11.

Hoeveel leerlingen doen alleen aan zwemmen? | 4 | 6 | 8 | 9 | 10 | 13 |

Oefening 2.6.6. Toon de gelijkheid $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ aan op een Venndiagram.

Oefening 2.6.7. Illustreer met een Venndiagram volgende uitspraken. A, B zijn willekeurige verzamelingen.

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

2.6.B Extra oefeningen verzamelingen

Oefening 2.6.8. Zijn volgende uitspraken waar?

1. Juist | Fout $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is veelvoud van } 12\} \overset{?}{\subseteq} \{n \in \mathbb{N} | n \text{ is veelvoud van } 6\}$

2. Juist | Fout $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is veelvoud van } 6\} \overset{?}{\subseteq} \{n \in \mathbb{N} | n \text{ is veelvoud van } 12\}$

3. Juist | Fout $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is een oneven priemgetal} < 10\} \overset{?}{\subseteq} \{n \in \mathbb{N} | n - 5 \in \{-2, 0, 2\}\}$

4. Juist | Fout $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is een oneven priemgetal} < 10\} \overset{?}{=} \{n \in \mathbb{N} | n - 5 \in \{-2, 0, 2\}\}$

Oefening 2.6.9. Het **symmetrisch verschil** van twee verzamelingen A en B wordt gedefinieerd als:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Duid deze verzameling aan op een Venndiagram.

Oefening 2.6.10.

De **karakteristieke functie** $k_A : U \to \{0, 1\}$ van een deelverzameling A van een verzameling U is gedefinieerd door

$$\begin{cases} k_A(x) = 1 & \text{als } x \in A, \\ k_A(x) = 0 & \text{als } x \in U \setminus A. \end{cases}$$

In woorden gezegd: elk element van A wordt op 1 afgebeeld en elk element dat niet tot A behoort, wordt op 0 afgebeeld. Welke van volgende uitspraken zijn waar voor willekeurige $A, B \subset U$?

1. Juist | Fout $k_A \cdot k_B$ is de karakteristieke functie van $A \cap B$.

2. Juist | Fout $k_A + k_B$ is de karakteristieke functie van $A \cup B$.

3. Juist | Fout Als A en B disjunct zijn (of lege doorsnede hebben), dan is $k_A + k_B$ de karakteristieke functie van $A \cup B$.

4. Juist | Fout $k_A - k_{A \cap B}$ is de karakteristieke functie van $A \setminus B$.

Extra: Verbeter de foute uitspraken.

Merk op: de karakteristieke functie van een deelverzameling van U is dus een *functie* $k_A : U \to \{0, 1\}$ op U waarmee we de verzameling A kunnen reconstrueren: $A = \{x \in U \mid k_A(x) = 1\}$. Met dergelijke functies kan dus een probleem van *deelverzamelingen* worden omgezet naar een probleem van *functies*.

CC BY-NC-SA 4.0

2.7 Hoe oplossingen opschrijven?

Wiskunde wordt dikwijls geassocieerd met 'formules' en 'rekenen', maar eigenlijk is 'redeneren op basis van structuren' een veel belangrijker aspect. Dergelijke *redeneringen* worden typisch weergegeven in gewoon Nederlands. Daarbij worden weliswaar regelmatig formules en berekeningen gebruikt, en sommige uitdrukkingen krijgen een specifieke technische betekenis, maar de redenering zelf bestaat bijna altijd uit Nederlandse zinnen. Wie wiskunde leert moet eerst vertrouwd worden met dit taalgebruik, en moet het vervolgens ook zelf leren toepassen bij het oplossen van oefeningen.

Enkele belangrijke principes bij het *opschrijven* van wiskunde zijn:

Axioma 2.7.1. Een wiskundige tekst moet voldoen aan volgende voorwaarden:

(a) **Duidelijk**: wat er staat moet een betekenis hebben, die voor de lezer zo makkelijk mogelijk begrijpbaar is, zonder dubbelzinnigheden of onvolledigheden.

(b) **Exact**: wat er staat moet juist zijn.

(c) **Beknopt**: wat er staat is enkel wat ook echt nodig is, in korte zinnen zonder overtollige uitweidingen.

(d) **Voorleesbaar**: wat er staat kan je luidop voorlezen. Dat *klinkt* dan minstens als een normale betekenisvolle tekst.

Opmerking 2.7.1.

- Gebruik deze richtlijnen bij toetsen en examens, maar ook bij opdrachten, tijdens oefenzittingen en als je zelf oefeningen oplost.
- Een duidelijk, exact en beknopt taalgebruik heeft onmiddellijk volgende voordelen:
  - je kan zelf makkelijker je oplossing *onthouden* en *nakijken*
  - je kan zelf makkelijker de oplossing *vinden* met duidelijke, exacte en beknopte tussenstappen
  - het *verhoogt je punten* bij examens
  - gedachten en redeneringen duidelijk, exact en beknopt kunnen weergeven is ook *buiten het domein van de wiskunde* belangrijk, bijvoorbeeld bij sollicatie- of evaluatiegesprekken.

Wie het eens van iemand anders wil horen kan terecht bij volgende video:

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/p8LIJVmPj6g

Eigenschap 2.7.1. De **oplossing van een oefening** heeft meestal volgende globale structuur, die je kent van de lessen Nederlands:

(a) **Inleiding**: definitie van de termen, variabelen of eigenschappen die je zal gebruiken. Indien nodig geef je een kort overzicht van de structuur van je oplossingsmethode.

(b) **Hoofdtekst**: volledige uitwerking van de oplossing, met een duidelijke logische structuur, volledige Nederlandse zinnen en zo nodig duidelijke en correcte formules, diagrammen en tekeningen.

(c) **Conclusie**: een bondige samenvatting van je oplossing, met het duidelijke *eindantwoord*.

Voor de meeste oefeningen volstaat zowel voor de inleiding als voor de conclusie één (korte) zin.

CC BY-NC-SA 4.0

2.7 Hoe oplossingen opschrijven?

Voorbeeld 2.7.1. Enkele goede voorbeelden van mogelijke inleidingen.

- Noem n het aantal konijnen op tijd $t = 0$. Dan is ...
- Zij $\vec{v} = (x, y)$ een willekeurige vector in het vlak. Dan is ...
- Noem de beginsnelheid van de bal v_b en de eindsnelheid v_e. Dan is ...

De inleiding hangt af van de precieze formulering van de vraag. Je moet de vraag *niet* herhalen. Als in de vraag zelf al letters zoals f, n of x worden gebruikt moet je die definitie *niet* noodzakelijk herhalen. Maar als in de vraag geen n of x voorkomt is gebruik van x of n zonder verdere uitleg *fout*. Je mag natuurlijk wel zonder meer de *algemeen gekende* symbolen gebruiken zoals $\mathbb{N}$ of $\sqrt{2}$.

Voorbeeld 2.7.2. Enkele slechte voorbeelden van inleidingen.

- $n(t) + n(0) = 7 \implies 5$
- $|\vec{v}| = 2$ dus $x^2 + y^2 = 4$ ....
- Eerst hebben we snelheid x en uiteindelijk nog snelheid s.

Voorbeeld 2.7.3. Voorbeelden van het gebruik van Nederlandse zinnen.

- Een zin begint met een hoofdletter, en eindigt met een punt. Dat geldt ook als de zin eindigt met een formule zoals
$$a^2 + b^2 = c^2.$$
- Splits je redenering in verschillende puntjes. Laat voldoende witruimte. Maak duidelijke ~~correkties~~ correcties indien nodig. Gebruik kleur of kaders, maar best geen rood. Gebruik eventueel potlood.
- Formules zijn meestal een deel van een zin via bindwoorden als *dus, daarom, maar, welnu, ...*
- Voorbeelden:
  - Als $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de priemgetallen zijn kleiner dan N, dan definiëren we $K = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$.
  - Hieruit volgt dus dat
$$\begin{aligned}(a+b)^2 - (a-b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= 4ab\end{aligned}$$
    en deze uitdrukking is positief omdat zowel a als b positief zijn.

Voorbeeld 2.7.4. Voorbeelden van conclusies.

- Geef duidelijk aan wat je eindoplossing is:
$$\text{en dus } x = \frac{3}{2} + \frac{7}{5} = \frac{21+10}{14} = \frac{31}{14}.$$
- Zorg dat je antwoord inderdaad ook een oplossing is op de gestelde vraag. Duidelijk, exact en beknopt antwoorden dat er in totaal $n = 1438$ konijnen zijn op tijd $t = 7$ helpt niet als gevraagd werd naar het *aantal mannelijke* konijnen of naar het *gewicht* van de konijnen.
- Wees eerlijk en correct als je de oplossing niet vindt. Vermeld eventueel wel een deeloplossing

CC BY-NC-SA 4.0

2.7 Hoe oplossingen opschrijven?

of een strategie. Bijvoorbeeld: Ik kan deze vergelijking niet exact oplossen naar x, omdat ik de precieze formule met de discriminant niet meer ken. In ieder geval zal $x \geq 0$, en dus zal het aantal konijnen op tijd $t = 7$ zeker groter zijn dan 1000.

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Bewijstechnieken

2.8.1 Verschillende types eigenschappen

Wiskundige eigenschappen en stellingen worden op allerlei verschillende manieren geformuleerd. We sommen hier enkele mogelijkheden op, telkens met een kort voorbeeld.

(a) **Een *universele* uitspraak**: $\forall a \in A : p(a)$

> **Voorbeeld 2.8.1.** 'Voor elk reëel getal x is x^2 positief. '
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

In een universele uitspraak $\forall a \in A : p(a)$ kan het predicaat $p(a)$ ook de vorm aannemen van een implicatie of een equivalentie.

> **Voorbeeld 2.8.2.**
>
> **1.** 'Voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n een viervoud is, dan is n even.'
>
> $$\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ is een viervoud} \Rightarrow n \text{ is even}$$
>
> **2.** 'Voor elk reëel getal x geldt dat x positief is als en slechts als x gelijk is aan zijn absolute waarde. '
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$$

(b) **Een *existentiële* uitspraak**: $\exists a \in A : p(a)$

> **Voorbeeld 2.8.3.** 'Er bestaan strikt positieve natuurlijke getallen zodat de som van hun kwadraten terug een kwadraat is.'
>
> $$\exists x, y, z \in \mathbb{N}_0 : x^2 + y^2 = z^2$$

(c) **De negatie van een existentiële uitspraak**: $\neg(\exists a \in A : p(a))$:

> **Voorbeeld 2.8.4.** 'Er bestaan geen gehele getallen n en m zodat $8n - 6m = 101$. '
>
> $$\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101)$$

(d) **De negatie van een universele uitspraak**: $\neg(\forall a \in A : p(a))$:

> **Voorbeeld 2.8.5.** 'Niet alle priemgetallen zijn oneven.'

Merk op dat deze uitspraak niet equivalent is met 'Alle priemgetallen zijn even. '

2.8.2 Soorten bewijzen

Een wiskundig bewijs is een logische redenering die de waarheid van een uitspraak aantoont. Een bewijs is niet uniek, uitspraken kunnen op meerdere manieren aangetoond worden. Naast de verschillende types eigenschappen, zijn er ook verschillende types bewijzen. We bespreken er enkele.

We veronderstellen dat volgende basiseigenschappen gekend zijn zodat we deze kunnen gebruiken in de voorbeeld-bewijzen:

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Bewijstechnieken

Eigenschap 2.8.1 (De orde $\leq$ in $\mathbb{R}$)**.**

(o1) Voor alle reële getallen a, b en c geldt

$$a < b \Rightarrow (a + c < b + c)$$

(o2) Voor alle reële getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow ac < bc$$

$$(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$$

(o3) Voor alle reële getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c.$$

Deze laatste eigenschap heet de **transitiviteit** van de ordening.

2.8.2.1 Bewijs per generiek element

Dit type bewijs wordt gebruikt om een universele uitspraak $\forall a \in A : p(a)$ te bewijzen. Om te bewijzen dat iets geldt *voor alle elementen* van een verzameling, volstaat het te bewijzen dat het geldt voor *elk willekeurig element* van die verzameling.

Om een universele uitspraak te bewijzen beginnen we het bewijs met de uitdrukking "Kies a in A *willekeurig*." en daarna volgt een redenering die $p(a)$ aantoont. Het is belangrijk dat in die redenering de beschouwde a ook willekeurig blijft, wat betekent dat we over a geen veronderstellingen maken. Als wie iets moeten bewijzen $\forall a \in \mathbb{R}$, mogen we (natuurlijk) niet aannemen dat a positief is, of $a > 1$. Je mag wel gebruikmaken van gevalsonderscheid, waarbij je het bewijs geeft voor verschillende gevallen: bijvoorbeeld eerst voor $a > 0$ en daarna voor $a \leq 0$. Als de uitspraak in beide gevallen bewezen kan worden, is de volledige uitspraak bewezen.

Voorbeeld 2.8.6. Bewijs dat $\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^2 > 0$

Bewijs Kies $a \in \mathbb{R}_0$ willekeurig, dus $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. Dan geldt dat ofwel $a < 0$ ofwel $a > 0$.

In het geval dat $a > 0$ volgt door beide leden van de ongelijkheid $a > 0$ met het strikt positieve getal a te vermenigvuldigen dat $a^2 > 0$ (eig (o2)).

In het geval dat $a < 0$ volgt ook door beide leden van de ongelijkheid $a < 0$ met het strikt negatieve getal a te vermenigvuldigen dat $a^2 > 0$ (eig (o2)).

In beide gevallen volgt dus dat $a^2 > 0$. Omdat $a \in \mathbb{R}_0$ willekeurig gekozen was, bewijst dit de eigenschap. ■

Opmerking 2.8.1. Wegens de equivalentie $\neg(\exists x \in X : p(x)) \iff \forall x \in X : \neg p(x)$ kan je ook voor de negatie van een existentiële uitspraak een bewijs geven per generiek element.

2.8.2.2 Bewijs per voorbeeld

Om een existentiële uitspraak $\exists a \in A : p(a)$ te bewijzen, moeten we een $a \in A$ geven waarvoor $p(a)$ geldt.

Als je moet bewijzen dat er zwarte zwanen bestaan, volstaat het een zwarte zwaan te vinden. Inderdaad, als je één zwarte zwaan effectief kan vinden, dan is het zeker dat er bestaan.

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 2.8.7.

1. Bewijs dat $\exists n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9$.

Bewijs Merk op dat $3 \in \mathbb{Z}$ en $3^2 = 9$. Dus (minstens) voor $n = 3$ geldt dat $n^2 = 9$. ■

Het gegeven voorbeeld is niet noodzakelijk uniek. Hier kan je ook -3 kiezen natuurlijk.

2. Bewijs dat $\exists x, y, z \in \mathbb{N}_0 : x^2 + y^2 = z^2$

Bewijs Neem $x = 3$ en $y = 4$, dan is $x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25$. Als we $z = 5$ nemen geldt dus dat $x^2 + y^2 = z^2$. ■

Merk wel op dat je soms ook kan aantonen dat iets moet bestaan *zonder* het ook effectief te construeren of te vinden.

2.8.2.3 Bewijs per tegenvoorbeeld

Wegens de equivalentie $\neg(\forall x \in X : p(x)) \iff \exists x \in X : \neg p(x)$, kan je voor de negatie van een universele uitspraak een bewijs geven per voorbeeld, het volstaat immers om een voorbeeld te geven waarvoor $p(x)$ niet opgaat. In dit geval wordt zo'n voorbeeld een **tegenvoorbeeld** genoemd.

Voorbeeld 2.8.8. Bewijs dat niet alle priemgetallen oneven zijn.

Bewijs We moeten dus bewijzen dat er een priemgetal bestaat dat even is. Het getal 2 is een tegenvoorbeeld, want 2 is een priemgetal en 2 is even. ■

Oefening 2.8.1. Zijn volgende uitspraken waar of onwaar? Geef een bewijs.

1. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0$.

2. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0$.

3. $\neg(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0)$.

4. $\exists x \in \mathbb{C} : x^2 + 4 = 0$.

2.8.2.4 Bewijs uit het ongerijmde

Bij een **bewijs uit het ongerijmde** nemen we aan dat het te bewijzen *niet* waar is, en leiden daaruit een contradictie af. Een uitspraak is ofwel waar ofwel niet waar. Als de aanname dat ze niet waar is leidt tot een contradictie, dan moet de uitspraak dus noodzakelijk *waar* zijn. Een typische contradictie is $p \wedge \neg p$, namelijk dat zowel p als $\neg p$ waar zijn.

Voorbeeld 2.8.9. Bewijs dat er geen gehele getallen n en m bestaan zodat $8n - 6m = 101$.

Om $\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101)$ te bewijzen nemen we dus aan dat dit te bewijzen niet waar is, we nemen dus aan dat er wel gehele getallen n en m bestaan zodat $8n - 6m = 101$ en leiden daar een contradictie uit af.

Bewijs Bewijs uit het ongerijmde: Veronderstel dat n en m gehele getallen zijn waarvoor geldt dat $8n - 6m = 101$. Omdat $8n - 6m = 2(4n - 3m)$ is $8n - 6m$ een veelvoud van 2, dus even. We hebben verondersteld dat $8n - 6m = 101$ dus is 101 ook even. Maar 101 is duidelijk oneven, zodat we een tegenspraak hebben. Uit deze tegenspraak volgt dat er geen gehele getallen n en m bestaan

CC BY-NC-SA 4.0

met $8n - 6m = 101$. ■

Om deze uitspraak te bewijzen hoef je geen bewijs uit het ongerijmde te gebruiken, je kan het bewijs ook anders formuleren. We moeten hier de negatie van een existentiële uitspraak bewijzen, dus we kunnen ook een bewijs geven per generiek element. We gebruiken dat

$$\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101) \Leftrightarrow \forall n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m \neq 101.$$

Bewijs Kies n en m twee willekeurige gehele getallen. Dan is $8n - 6m = 2(4n - 3m)$ een veelvoud van 2, dus even. Omdat 101 oneven is, kan $8n - 6m$ niet gelijk zijn aan 101. ■

2.8.2.5 Het bewijzen van implicaties

Om een uitspraak van de vorm $\forall a \in A : p(a) \Rightarrow q(a)$ te bewijzen beginnen we met "Kies a in A willekeurig." Daarna moeten we voor deze a de implicatie $p(a) \Rightarrow q(a)$ bewijzen. We overlopen hiervoor enkele mogelijkheden:

- **Direct bewijs**

  Om een implicatie $p \Rightarrow q$ te bewijzen vertrekken we van het gegeven p, en redeneren of rekenen we tot we bij het te bewijzen q uitkomen.

  Voorbeeld 2.8.10. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n een viervoud is, dan is n even.

  Bewijs Kies n een willekeurig natuurlijk getal en veronderstel dat n een viervoud is. Dan bestaat er een $m \in \mathbb{N}$ zodat $n = 4m$. Bijgevolg is $n = 2 \cdot 2m$. Stel $k = 2m$. Dan is $n = 2k$, wat betekent dat n even is. ■

- **Bewijs door contrapositie**

  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ is een tautologie. De implicatie $p \Rightarrow q$ is dus equivalent met haar *contrapositie* $\neg q \Rightarrow \neg p$. In plaats van $p \Rightarrow q$ te bewijzen, kunnen we dus evengoed de implicatie $\neg q \Rightarrow \neg p$ bewijzen. Soms is dat eenvoudiger.

  Voorbeeld 2.8.11. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n^2 even is, dan is n ook even.

  Bewijs We tonen deze eigenschap aan door middel van contrapositie. We tonen dus aan dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n oneven is, dan n^2 ook oneven is. Neem een willekeurig natuurlijk getal n dat oneven is. Dan bestaat er een $m \in \mathbb{N}$ zodat $n = 2m + 1$. Bijgevolg is $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$. Stel $k = 2m^2 + 2m$, dan is $n^2 = 2k + 1$ en bijgevolg is n^2 oneven. ■

  Door middel van contrapositie is dit een eenvoudig bewijs, de eigenschap bewijzen met een direct bewijs zou dit een hele uitdaging zijn.

- **Bewijs uit het ongerijmde**

  Om een uitspraak van de vorm

  $$\forall a \in A : p(a) \Rightarrow q(a)$$

  uit het ongerijmde te bewijzen nemen we aan dat de negatie hiervan, namelijk

  $$\exists a \in A : \neg(p(a) \Rightarrow q(a))$$

2.8 Bewijstechnieken

waar is en leiden hieruit een contradictie af. Omdat $\neg(p(a) \Rightarrow q(a))$ equivalent is met $p(a) \wedge \neg q(a)$, nemen we in het bewijs dus aan dat er een $a \in A$ bestaat waarvoor $p(a)$ waar is en $q(a)$ niet waar is en leiden hieruit een contradictie af.

Voorbeeld 2.8.12. Bewijs dat voor alle reële getallen x, y en a geldt: als $x > y$ en $ax \leq ay$ dan is $a \leq 0$.

Merk op dat we hier iets moeten bewijzen over 3 elementen uit $\mathbb{R}$.

Bewijs Bewijs uit het ongerijmde: Veronderstel dat x, y en a reële getallen zijn waarvoor geldt dat $x > y$ en $ax \leq ay$ (p waar) en $a > 0$ (q niet waar). Dan volgt uit $x > y$ en het feit dat a strikt positief is dat $ax > ay$, hetgeen in tegenspraak is met de onderstelling dat $ax \leq ay$. We vinden dus een contradictie. ■

Als laatste voorbeeld geven we nog een voorbeeld van een direct bewijs. We schrijven het bewijs niet meteen op, maar maken het proces van het zoeken naar welke stappen gezet moeten worden in het bewijs om die daarna met een leesbare redenering op te schrijven expliciet.

Voorbeeld 2.8.13. Bewijs dat voor alle strikt positieve reële getallen a en b geldt: $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

Uitwerking: We kiezen twee willekeurige strikt positieve getallen a en b, zodat $a < b$.

Omdat we iets willen weten over a^2 en b^2, lijkt een mogelijkheid om de gegeven ongelijkheid $a < b$ met a of b te vermenigvuldigen. Omdat a en b strikt positief zijn blijven de ongelijkheden behouden wegens eigenschap (o2) over de orde in $\mathbb{R}$ zodat

$$a < b \Rightarrow a^2 < ab \tag{1}$$

en

$$a < b \Rightarrow ab < b^2. \tag{2}$$

Omdat gegeven is dat $a < b$ volgt dus dat $a^2 < ab$ en $ab < b^2$. Deze twee ongelijkheden bevatten beide ab zodat uit eigenschap (o3) volgt

$$(a^2 < ab) \text{ en } (ab < b^2) \;\Rightarrow\; a^2 < b^2. \tag{3}$$

Op deze manier hebben we een correcte *redenering gevonden*, nu moeten we die redenering ook nog duidelijke en correct *opschrijven*. Een enigszins dubieuze poging gaat als volgt:

Bewijs

$$\begin{array}{c} a < b \\ \Downarrow\ a > 0 \;\; b > 0 \qquad \text{eig. (o2)} \\ a^2 < ab \quad \text{en} \quad ab < b^2 \\ \Downarrow \text{ transitiviteit eig. (o3)} \\ (a^2 < ab) \wedge (ab < b^2) \;\Rightarrow\; a^2 < b^2 \end{array}$$

■

Dit is geen goed geschreven bewijs! Enkel voor wie het bewijs al kent, is duidelijk wat er wordt bedoeld. Deze versie is hoogstens bruikbaar als schets om het bewijs te visualiseren.

Nog dubieuzer is volgend 'bewijs':

Bewijs $a < b \Rightarrow (a^2 < ab \wedge ab < b^2) \Rightarrow a^2 < b^2$. ■

Een correct en volledig bewijs is een leesbare opeenvolging van Nederlandse zinnen, met woorden zoals 'hieruit volgt', 'dus' en 'omdat' die aangeven hoe de verschillende zinnen met elkaar samenhangen. Er mogen natuurlijk wiskundige symbolen worden gebruikt, maar het geheel is een leesbaar verhaal.

Een beter bewijs van de eigenschap ziet er bijvoorbeeld zo uit:

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Bewijstechnieken

Bewijs Kies twee willekeurige strikt positieve reële getallen zodat $a < b$. We moeten bewijzen dat $a^2 < b^2$.

Omdat a strikt positief is, kunnen we in $a < b$ linkerlid en rechterlid vermenigvuldigen met a en geldt wegens eigenschap (o2) dat $a^2 < ab$.

Omdat b strikt positief is, kunnen we $a < b$ vermenigvuldigen met b en geldt opnieuw wegens eigenschap (o2) dat $ab < b^2$

Wegens de transitiviteit van de ordening (eigenschap (o3)) volgt uit $a^2 < ab$ en $ab < b^2$ dat inderdaad $a^2 < b^2$. ■

2.8.2.6 Het bewijzen van equivalenties

Omdat $p \Leftrightarrow q$ equivalent is met $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ kunnen we een equivalentie bewijzen door beide implicaties te bewijzen.

Voorbeeld 2.8.14. Bewijs dat $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$

Bewijs Kies $x \in \mathbb{R}$ willekeurig.

- We tonen aan dat $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$:

  Dit volgt rechtstreeks uit de definitie van absolute waarde.

- We tonen aan dat $|x| = x \Rightarrow x \geq 0$:

  We tonen deze implicatie aan door middel van contrapositie. Uit $x < 0$ volgt per definitie dat $|x| = -x$ en ook dat $-x \neq x$. Uit $x < 0$ volgt dus dat $|x|$ niet gelijk is aan x.

■

2.8.2.7 Het bewijzen van de gelijkheid tussen verzamelingen

Zij A en B verzamelingen. Er geldt

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ en } B \subset A$$

Een gelijkheid $A = B$ van verzamelingen bewijzen we door zowel $A \subset B$ als $B \subset A$ aan te tonen. Om bijvoorbeeld $A \subset B$ aan te tonen nemen we een willekeurig element uit A en tonen we aan dat dit element ook in B zit.

Voorbeeld 2.8.15. Bewijs dat voor elke verzameling A geldt $(A^c)^c = A$.

Bewijs

Kies een willekeurige verzameling A.

We bewijzen eerst dat $(A^c)^c \subset A$:

Neem een $x \in (A^c)^c$ willekeurig. Dan is $x \notin A^c$. Hieruit volgt dat $x \in A$.

We bewijzen nu dat $A \subset (A^c)^c$:

Neem een $x \in A$. Noteer $B = A^c$. Dan is $x \notin A^c$, of nog $x \notin B$. Dus is $x \in B^c = (A^c)^c$.

Uit $(A^c)^c \subset A$ en $A \subset (A^c)^c$ volgt dat $(A^c)^c = A$. ■

CC BY-NC-SA 4.0

2.9 Bewijstechnieken: volledige inductie

De natuurlijke getallen hebben een opvallende gelijkenis met dominostenen. Iedereen kent recordpogingen om door één rechtopstaande dominosteen om te duwen een zo lang mogelijke keten van aansluitende dominostenen te laten omvallen. De dominostenen vallen zodra de eerste steen valt omdat de vorige dominosteen telkens de val veroorzaakt van minstens één volgende steen. In het eenvoudige geval van één lange keten zonder vertakkingen, kan het 'Principe van de Vallende Dominostenen' als volgt worden samengevat:

Stelling 2.9.1 (Principe van de Vallende Dominostenen)**.**

Een rij dominostenen, opgesteld zonder vertakkingen en genummerd met getallen $k = 1, 2, 3, \ldots$ zal volledig neervallen zodra

(Startzet) de eerste steen met nummer $k = 1$ wordt omgegooid.

(Automatische vervolgzetten) de stenen zó staan dat voor elke k geldt dat als de k-de steen valt, ook de $(k+1)$-ste steen omvalt.

Met natuurlijke getallen kan men een gelijkaardig spel spelen, maar dan niet door een zo lang mogelijke keten van getallen te laten omvallen, maar door een *oneindige keten* van uitspraken over natuurlijke getallen in één klap te bewijzen. De natuurlijke getallen kan je immers beschouwen als een oneindige keten getallen die begint bij 0 en waar elk natuurlijk getal k een unieke opvolger $k+1$ heeft. Het equivalent van het Principe van de Vallende Dominostenen is het wiskundige Principe van Volledige Inductie:

Stelling 2.9.2 (Het principe van volledige inductie)**.**

Een bewering $P(n)$ die afhangt van n is waar voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ zodra

(Basisstap) de uitspraak geldt voor het eerste getal: $P(1)$ is waar

(Inductiestap) de uitspraak zodanig is dat voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ geldt: als $P(k)$ waar is, dan is ook $P(k+1)$ waar.

Het is eenvoudig in te zien waarom het Principe van Volledige Inductie werkt: we weten uit de basisstap dat $P(1)$ waar is. We passen dan de inductiestap toe voor $k = 1$, en vinden dat uit $P(1)$ volgt dat $P(1+1) = P(2)$ ook waar is. Maar dan is, opnieuw wegens de inductiestap ook $P(2+1) = P(3)$ waar, en dus ook $P(3+1) = P(4)$, en dus ook $P(4+1) = P(5)$ en zo verder. De uitspraak $P(n)$ is dus zeker waar voor *elk* natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$.

Een formeel wiskundig *bewijs* van het Principe van Volledige Inductie geven we hier niet, al was het maar omdat we ook geen formeel wiskundige definitie hebben gegeven van de natuurlijke getallen. In meer gevorderde cursussen wiskunde zal blijken dat je de natuurlijke getallen eigenlijk kan *definiëren* als die getallen die het getal 1 bevatten en waarvoor het Principe van Volledige Inductie geldt.

Het belang van het Principe is dat het een erg krachtige manier oplevert om een aantal wiskundige formules en eigenschappen te bewijzen. Dus we zullen het Principe van Volledige Inductie (dat we jammer genoeg hier niet formeel bewezen hebben) gebruiken om zelf interessante verdere eigenschappen te bewijzen.

Een **bewijs met volledige inductie** valt typisch uiteen in drie delen.

- De **basisstap**: je bewijst dat $P(1)$ inderdaad waar is. In vele gevallen is dat eerder eenvoudig, maar het is erg belangrijk dat het gebeurt. Vergelijk het met het omgooien van de eerste dominosteen: het is erg eenvoudig, maar zolang het niet gedaan wordt, gebeurt er niets.
- De **inductiestap**: je bewijst dat de implicatie $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ waar is voor elke $k \in \mathbb{N}_0$. In het bewijs van de inductiestap neem je dus aan dat $P(k)$ waar is (deze aanname heet de **inductiehypothese**), en *met behulp van* die inductiehypothese $P(k)$ bewijs je dan dat ook $P(k+1)$ waar is.

CC BY-NC-SA 4.0

2.9 Bewijstechnieken: volledige inductie

- De **conclusie**: je roept het Principe van Volledige Inductie aan om te concluderen dat $P(n)$ waar is voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. Merk op dat deze stap in elk bewijs precies hetzelfde is, maar het is toch erg belangrijk steeds duidelijk te vermelden dat het inderdaad dankzij dit Principe is dat je bewijs nu volledig is!

Hier is een eenvoudig voorbeeld:

Voorbeeld 2.9.1. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n het getal $n^2 + n$ even is.

Bewijs

- **Basisstap**: Voor $n = 0$ is $n^2 + n = 0^2 + 0 = 0$ en dit is even.
- **Inductiestap**: Neem aan (inductiehypothese) dat voor een natuurlijk getal k geldt $k^2 + k$ even is. We bewijzen dan dat ook voor $k + 1$ geldt dat $(k + 1)^2 + (k + 1)$ even is. We berekenen

$$(k + 1)^2 + (k + 1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k + 1).$$

  Duidelijk is dat $2(k + 1)$ even is. Wegens de inductiehypothese is ook $k^2 + k$ even, en dus is ook hun som $(k^2 + k) + 2(k + 1)$ even. Hiermee is de inductiestap bewezen.
- **Conclusie**: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, volgt met het principe van volledige inductie dat $n^2 + n$ een even getal is voor elke $n \in \mathbb{N}$.

■

Opmerking 2.9.1.

- deze eigenschap kan natuurlijk ook op andere manieren bewezen worden. Zo is $n^2 + n = n(n+1)$ het product van 2 opeenvolgende getallen en dus moet 1 van deze getallen even zijn. Bijgevolg is $n^2 + n$ even. Een alternatief eenvoudig bewijs maakt gebruik van gevalsonderscheid: elk getal n is even of n is oneven. Als n even is, dan is ook n^2 even, en dus ook $n^2 + n$ als som van twee even getallen. Als n oneven is, dan is ook n^2 oneven, en dus is $n^2 + n$ ook *even* als som van twee *oneven* getallen!
- dikwijls wordt ook in de inductiestap de letter n gebruikt. Dan zegt de inductiestap dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat $P(n)$ impliceert dat $P(n + 1)$. Dit dubbel gebruik van het symbool n leidt soms tot verwarring en is pas aan te raden als je voldoende vertrouwd bent met het principe van volledige inductie.
- als de eigenschap $P(n)$ enkel geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$, dan wordt de basisstap: $P(1)$ is waar. Als de eigenschap $P(n)$ enkel geldt voor alle natuurlijke getallen strikt groter dan 5, dan wordt de basisstap: $P(6)$ is waar. De inductiestap kan dan ook telkens worden beperkt tot getallen groter dan de basisstap.

CC BY-NC-SA 4.0

2.10 Bewijstechnieken: voorbeeld van volledige inductie

Bewijs volgende formule voor de som van kwadraten ($n \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bewijs Het bewijs gebruikt het principe van volledige inductie op n, het aantal termen in de som:

- **Basisstap**: We bewijzen de formule voor de kleinste n (in dit geval $n = 0$).
  Voor $n = 0$ wordt het linkerlid van de formule 0 en is het rechterlid ook 0, de formule is dus zeker waar is voor $n = 0$.
- **Inductiestap**: We bewijzen dat zodra de formule geldt voor $n = p$, ze ook geldt voor $n = p + 1$.
  Inductiehypothese: Neem aan dat de formule geldt voor een (willekeurig) getal $p \in \mathbb{N}_0$, dus dat

  $$\sum_{k=0}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

  Te bewijzen in de inductiestap: We tonen aan dat de formule dan ook geldt voor $p + 1$, dus dat

  $$\sum_{k=0}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6}$$

  Bewijs van de inductiestap: We herschrijven het linkerlid tot we het rechterlid bekomen:

  $$\begin{aligned}
  \sum_{k=0}^{p+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{p} k^2 + (p+1)^2 && \text{(laatste term afzonderen)} \\
  &= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 && \text{(inductiehypothese)} \\
  &= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6} && \text{(gemeenschappelijke noemer)} \\
  &= \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6} \\
  &= \frac{(p+1)2(p+2)\left(p+\frac{3}{2}\right)}{6} && \text{(ontbinden)} \\
  &= \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6} && \text{(herschrijven)}
  \end{aligned}$$

  Dit bewijst de inductiestap.
- **Conclusie**: Omdat hiermee zowel de basisstap als de inductiestap bewezen zijn, geldt de te bewijzen uitspraak voor elk positief natuurlijk getal wegens het principe van volledige inductie.

■

Opmerking 2.10.1. Omdat de term voor $k = 0$ toch gelijk is aan 0, kan je de formule ook schrijven als

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.10 Bewijstechnieken: voorbeeld van volledige inductie

De formule $\sum_{k=1}^{n} k^2$ heeft echter geen betekenis voor $n = 0$, en hier moet n dus strikt positief zijn (dus $n \in \mathbb{N}_0$).

Oefening 2.10.1. Bewijs volgende eigenschappen telkens door volledige inductie.

1. Voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ geldt $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ is $n(n^2 + 5)$ deelbaar door 6.

CC BY-NC-SA 4.0

2.10.A Oefeningen inductie

Oefening 2.10.2. Welke van volgende eigenschappen lijken geschikt om te bewijzen door volledige inductie? Argumenteer. Als je denkt dat een bewijs door inductie mogelijk is, formuleer dan (zonder bewijs) de basis van de inductie, de inductiehypothese en de te bewijzen inductiestap.

1. Zij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de rij reële getallen met $a_1 = 1$ en $a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$ voor $n \in \mathbb{N}_0$. Dan geldt:

$$\text{voor alle } n \in \mathbb{N}_0 : \qquad a_n \leqslant a_{n+1}.$$

2. Voor alle reële getallen a, b, r geldt: als $r < 0$ en $a < b$ dan is $ra > rb$.

3. Elke eindige niet lege verzameling reële getallen heeft een minimum.

4. Een eindige verzameling met n elementen heeft 2^n deelverzamelingen.

5. (Enkel voor wie vertrouwd is met het begrip supremum) Het supremum van $\left\{ 4 - \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_0^+ \right\}$ is 4.

Oefening 2.10.3. Bewijs volgende eigenschappen telkens door volledige inductie.

1. Voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ geldt $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ is $n(n^2 + 5)$ deelbaar door 6.

3. Zoek een formule voor de n-de afgeleide van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ en bewijs deze per inductie.

4. Stel $x \in \mathbb{R}$ en $x > -1$ dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ $(1+x)^n \geqslant (1+nx)$

5. Voor elk natuurlijk getal $n \geq 4$ geldt $n^2 \leq 2^n$.

6. Voor elk natuurlijk getal $n \geq 5$ geldt $n^2 < 2^n$.

Oefening 2.10.4. Bewijzen per inductie vereisen de nodige voorzichtigheid, zoals uit volgende opgaven blijkt.

1. Toon aan dat de *basisstap* in een bewijs per inductie erg belangrijk is, door de inductiestap te bewijzen voor de duidelijk foutieve eigenschap

$$\text{voor elk natuurlijk getal } n : n = n + 1$$

2. Vind de fout in volgend bewijs (als er een fout is) van volgende belangwekkende eigenschap die het belang van goede vriendschappen aantoont:

Als in een groepje eerste bachelorstudenten minstens één student slaagt,
dan slaagt iedereen van dat groepje.

We bewijzen de stelling via inductie op het aantal studenten in het groepje.

- Basisstap: De eigenschap geldt duidelijk voor een groepje met één student.
- Inductiestap: We veronderstellen dat de eigenschap bewezen is voor elk groepje van $k \in \mathbb{N}_0$ studenten en tonen de eigenschap nu aan voor een groep met $k + 1$ studenten.

  Zij A een groepje van $k + 1$ studenten waarvan minsten één student geslaagd is. We verwijderen uit die groep één student (en niet diegene waarvan geweten is dat hij geslaagd is). De

CC BY-NC-SA 4.0

2.10.A Oefeningen inductie

overblijvende groep A' telt k studenten, waarvan dus nog steeds minstens één geslaagd is. We passen de inductiehypothese toe op deze groep A' van k studenten en mogen dus besluiten dat elke student uit A' geslaagd is.

Blijft natuurlijk nog aan te tonen dat ook de verwijderde student geslaagd is. Dit is echter eenvoudig: beschouw een nieuwe groep A'' van k studenten die je maakt door de verwijderde student samen te nemen met $k-1$ (geslaagde) studenten uit groep A'. A'' bevat k studenten waarvan er minstens één geslaagd is (er zijn er immers wel zeker $k-1$ geslaagd!).

A'' voldoet aan de voorwaarden van de inductiehypothese, we mogen dus besluiten dat alle studenten uit groep A'' geslaagd zijn. M.a.w alle studenten uit de oorspronkelijke groep A zijn geslaagd. Hiermee is de inductiestap bewezen.

- Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, volgt met het principe van volledige inductie dat als in een groep eerste bachelorstudenten minstens één student slaagt, ze allemaal slagen in dat groepje.

Extra opgave voor wie geen fout vindt: bewijs op volledig gelijkaardige wijze volgende even spectaculaire stellingen:

- Als in een groep eerste bachelorstudenten minstens één student niet slaagt, dan slaagt niemand in dat groepje.
- Als in een Westvlaamse wei minstens één paard zwart is, dan zijn automatisch alle paarden in die wei zwart.
- Als in een klas minstens één jongen zit, bestaat de klas volledig uit jongens.
- Als in een klas minstens één meisje zit, bestaat de klas volledig uit meisjes.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 3
Elementair Rekenen (basisversie)

(Versie 2026/08/25H.51)

3.1 Breuken (basis)

Een breuk is een uitdrukking zoals $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ of $\frac{12}{10}$ waarmee je eenvoudig *verhoudingen* kunt weergeven. Je kunt met breuken ook *rekenen* en je kunt ze *omzetten naar kommagetallen*. Rekenen met kommagetallen is – zeker met een rekenmachine – erg handig maar dikwijls is rekenen met breuken toch veel duidelijker en sneller. Het is daarom belangrijk met beide vertrouwd te zijn.

Voorbeeld 3.1.1 (Breuken en pralines)**.**

Een bekende Belgische chocolatier verkoopt zeer lekkere (maar jammer genoeg ook tamelijk dure) pralines in doosjes van 8 stuks. In elk doosje zitten er steeds twee met witte chocolade en zes met bruine chocolade. Dit betekent dat twee van de acht pralines wit zijn en zes van de acht pralines bruin. Twee-van-de-acht schrijf je wiskundig als $\frac{2}{8}$, zes-van-de-acht als $\frac{6}{8}$.

Het is duidelijk dat als je twee doosjes koopt er vier-van-de-zestien, dus $\frac{4}{16}$ witte pralines zijn. Als de chocolatier ook kleinere doosjes met dezelfde verhouding witte en bruine pralines zou willen verkopen, kan dat enkel in doosjes van vier, met één witte en drie bruine pralines.

Hoeveel doosjes je ook koopt, telkens zal er één op de vier pralines wit zijn. We zeggen

één vierde of $\frac{1}{4}$ of ook wel $1/4$ (van de) pralines is wit.

Het is duidelijk dat $1/4$, $2/8$ of $25/100$ precies *dezelfde verhouding* uitdrukken van witte pralines ten opzichte van alle pralines.

We zullen verder in deze tekst uitleggen waarom je ook kan zeggen dat 25% van de pralines wit is, of dat de verhouding van de witte pralines ten opzichte van alle pralines 1 op vier is, of dat er 0,25 keer zoveel witte pralines zijn als er in het totaal pralines zijn.

Oefening 3.1.1 (Uitdaging?)**.**

Wie tijd heeft om even na te denken kan opmerken dat je ook kan zeggen dat er *drie keer zoveel* bruine pralines zijn als witte pralines. Je kunt je dan afvragen waar dat getal *drie* precies vandaan komt als één op *vier* van alle pralines wit is. En hoe werkt dat als één op zes, of één op drie van alle pralines wit is? Wat is dan de verhouding van de witte pralines ten opzichte van de bruine?

Met de *breuk* $\frac{1}{4}$ komt het *getal* $0,25$ overeen door 'de breuk uit te rekenen als een deling': $\frac{1}{4} = 1/4 = 0,25$. Merk wel op dat ook de breuken $\frac{2}{8}$ en $\frac{25}{100}$ overeenkomen met het getal $0,25$. Het blijkt handig om af te spreken dat breuken zoals $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{25}{100}$ en $\frac{0,25}{1}$ allemaal aan elkaar gelijk zijn.

We leggen deze afspraken formeler vast in volgende definitie:

Definitie 3.1.1.

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$, met a en b getallen, met $b \neq 0$.

We noemen a de **teller** van de breuk, b de **noemer**, en de streep tussen beide getallen de **breukstreep**.

De **(getal)waarde** van $\frac{a}{b}$ is het resultaat van de deling van a door b, meestal een kommagetal.

Twee breuken $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ zijn aan elkaar **gelijk** als ze dezelfde waarde hebben.

Merk op dat twee breuken met onderling verschillende tellers en noemers dus toch aan elkaar gelijk kunnen zijn: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{50}{100}$ want ze hebben allemaal de waarde $0,5$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Breuken (basis)

Alle breuken die gelijk zijn aan $\frac{1}{2}$ kan je schrijven als $\frac{k \cdot 1}{k \cdot 2}$ met k een getal verschillend van nul:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} \qquad \frac{50}{100} = \frac{50 \cdot 1}{50 \cdot 2} \quad \text{en} \quad \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{2\pi \cdot 1}{2\pi \cdot 2}$$

en al deze breuken zijn ook onderling gelijk want ze hebben elk waarde $\frac{1}{2} = 0,5$. In het algemeen geldt:

Eigenschap 3.1.1. Voor reële getallen a, b en k met $b \neq 0$ en $k \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$$

Vb: $\frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{5}{15}$ en $\frac{-1}{-2} = \frac{(-1) \cdot (-1)}{(-1) \cdot (-2)} = \frac{1}{2}$

Uit deze eigenschap volgt dat in een breuk geldt dat:
teller en noemer mag je vermenigvuldigen met eender welk getal (behalve 0)
teller en noemer mag je delen door eender welk getal (behalve 0)

Opmerking 3.1.1 (Veel te veel gemaakte fouten)**.**

Sommigen gebruiken tot hun scha en schande ook ongeoorloofde varianten van deze schrappingsregel:

$$\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} \neq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{(schrap al wat stoort)}$$

$$\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} \neq \frac{0}{0+1} = 0 \quad \text{(schrap al wat stoort)}$$

$$\frac{2x}{2x+1} = \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}+1} \neq \frac{x}{x+1} \quad \text{(schrap al wat stoort)}$$

Erg dikwijls zijn de getallen in de breuk *gehele* getallen, en dan is volgende afspraak zinvol:

Definitie 3.1.2.

Een breuk is **vereenvoudigd** als er geen gemeenschappelijke factor meer kan worden weggedeeld.

Voorbeeld 3.1.2. De breuk $\frac{1}{3}$ is vereenvoudigd, maar $\frac{2}{6}$, $\frac{-1}{-3}$ en $\frac{x}{3x}$ zijn dat niet.

Voorbeeld 3.1.3. Vereenvoudig de breuk $\frac{36}{48}$.

Uitwerking: Er zijn twee mogelijkheden om een breuk te vereenvoudigen:

- Je ziet of zoekt de grootst mogelijke gemeenschappelijke deler van de teller en de noemer en deelt die weg. Je krijgt onmiddellijk de vereenvoudigde breuk. Nadeel is dat het vinden van die grootste gemeenschappelijke deler soms niet zo eenvoudig is.
  De grootste gemeenschappelijke deler van 36 en 48 is 12, dus geldt
  $$\frac{36}{48} = \frac{36/12}{48/12} = \frac{3}{4}.$$
- Je ziet of zoekt eender welke deler van teller en noemer en deelt die weg. Daarna zoek je opnieuw een gemeenschappelijke deler, totdat er geen meer zijn. Nadeel is dat je dikwijls moet zoeken en delen; voordeel is dat het zoeken makkelijker is.
  $$\frac{36}{48} = \frac{36/2}{48/2} = \frac{18}{24} = \frac{18/2}{24/2} = \frac{9}{12} = \frac{9/3}{12/3} = \frac{3}{4}$$
  De volgorde waarin je deze delers vindt, maakt niet uit. Zo had je bijvoorbeeld ook eerst kunnen delen door 3. Misschien had je 6 als gemene deler gevonden; dat had ook gewerkt.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Breuken (basis)

Opmerking 3.1.2. De teller en noemer beide **delen of vermenigvuldigen met hetzelfde getal** verandert de waarde van een breuk niet. Meestal wordt gevraagd of verwacht een breuk zo ver mogelijk te vereenvoudigen. Vergeet dit dus niet!

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Machten

Als je iets met zichzelf vermenigvuldigt, dan kun je dat korter schrijven met behulp van machten:

$$2 \times 2 \times 2 \overset{\text{notatie}}{=} 2^3$$

We spreken 2^3 uit als 'twee tot de macht 3'. We zeggen ook wel wel dat je 2 tot de 3e macht 'verheft'. Machtsverheffen dus. Op dezelfde manier is $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ korter te schrijven als 10^5. Het getal 5 in 10^5 heet de 'exponent' en 10 is het 'grondtal'.

Definitie 3.2.1. (Machtsverheffing)

De n-**de macht** van een getal a is genoteerd a^n, bijvoorbeeld 3^4.
We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.

Als n een geheel positief getal is, dan is

$$a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$$

Vb: $2^3 = 2 \times 2 \times 2$

Als de exponent negatief is, schrijven we de macht in de noemer:

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

Vb: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2}$

Als de exponent 0 is (en het grondtal is niet 0), is de macht altijd 1:

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$$

Vb: $2^0 = 1$ en $(-2)^0 = 1$

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Voorbeeld 3.2.1 (Machten met gehele exponent)**.**

1. $5^2 = 25$
2. $-5^2 = -25$
3. $(-5)^2 = 25$
4. $(2+3)^2 = 25$
5. $2^2 + 3^2 = 13$
6. $(2+3)^2 - (2^2 + 3^2) = 12$
7. $2^{-1} = 0.5$
8. $10^3 = 1000$
9. $10^{-3} = 0.001$

Eigenschap 3.2.1 (Rekenregels machten)**.**

$(xy)^n = x^n y^n$ (macht van product)
Vb: $(3y)^2 = 3y \cdot 3y = 3 \cdot 3 \cdot y \cdot y = 3^2 y^2 = 9y^2$

$x^m x^n = x^{m+n}$ (product met gelijk grondtal)
Vb: $x^3 x^2 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^{3+2} = x^5$

$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ (macht van macht)
Vb: $\left(x^3\right)^2 = x^3 \cdot x^3 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^{3 \cdot 2} = x^6$

$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ (macht van breuk)
Vb: $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x \cdot x \cdot x}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8}$

Met bovenstaande definitie en rekenregels heb je krachtig gereedschap om uitdrukkingen met machten te vereenvoudigen. En als je je uitdijende collectie gereedschap handig combineert, wordt het nog sterker!

Bijvoorbeeld: hoe kun je $\frac{5^2}{5^3}$ vereenvoudigen tot een macht van 5?
Wellicht ken je de regel daarvoor, maar indien niet (of als je niet zeker bent) dan kun je zelf bedenken hoe deze vereenvoudiging aan te pakken:

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Machten

Mogelijke aanpak: Je kunt eerst de breuk schrijven als een product $\frac{5^2}{5^3} = 5^2 \cdot \frac{1}{5^3}$ en dan de definitie van negatieve machten gebruiken om de 5^3 uit de noemer te halen:

$$\frac{5^2}{5^3} = 5^2 \frac{1}{5^3} = 5^2 \cdot 5^{-3} = 5^{2+-3} = 5^{-1}$$

We zien hier dat:

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ (breuk met gelijk grondtal) Vb: $\frac{x^2}{x^3} = x^{2-3} = x^{-1}$

Andere mogelijke aanpak: Je kunt ook eerst teller en noemer delen door hetzelfde 'getal' (*zie breuken*). Dit ken je wellicht als 'schrappen'.

$$\frac{5^2}{5^3} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{(5 \cdot 5)/5^2}{(5 \cdot 5 \cdot 5)/5^2} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5}}{5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}} = \frac{1}{5} = 5^{-1}$$

Waarschuwing:

$$\frac{x + 5^2}{5^3} \neq \frac{x}{5}$$

Je kunt hier niet zomaar 'schrappen', want je zou dan ook de x moeten delen door 5^2. Je verkrijgt dan

$$\frac{x + 5^2}{5^3} = \frac{\frac{x}{5^2} + 1}{5}$$

en dat is wel juist maar ook wel lelijk en zeker niet eenvoudiger dan de eerste uitdrukking.

Voorbeeld 3.2.2 (Uitdrukkingen met machten vereenvoudigen)**.**

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^5$
2. $(2^2)^3 = 2^6$
3. $2^{(2^3)} = 2^8$
4. $\frac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^3$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = 2604^5$

Machtsverheffen heeft veel te maken met worteltrekken. Immers, worteltrekken is de inverse (omgekeerde) bewerking van machtsverheffen. Dit zien we bijvoorbeeld bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen:

$$\begin{aligned} & x^2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & x = \sqrt{9} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{9} \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 \quad \text{of} \quad x = -3 \end{aligned}$$

Een wortel kunnen we dan ook schrijven met behulp van een macht, bijvoorbeeld $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$. Dit betekent dat we de rekenregels voor machten ook kunnen gebruiken voor wortels.

Definitie 3.2.2. We schrijven de vierkantswortel ook als 'tot de macht een half':

$\sqrt{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{2}}$ Vb: $\sqrt{25} \overset{\text{def}}{=} 25^{\frac{1}{2}} = 5$

$a^{\frac{1}{2}}$ is het (positieve) getal waarvan de 2e macht gelijk is aan a. Vb: $9^{\frac{1}{2}} = 3$ want $3^2 = 9$.

Meer in het algemeen schrijven we ook n-de machtswortels als 'tot de macht $\frac{1}{n}$':

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Machten

$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} = b \iff b^n = a$ Vb: $\sqrt[3]{8} \overset{\text{def}}{=} 8^{\frac{1}{3}} = 2$ want $2^3 = 8$

Opmerking 3.2.1.

(a) Voor $n = 2$ schrijven we gewoon $\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt[2]{a}$.

(b) $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

De bovenstaande definitie is enkel zinvol als er inderdaad een dergelijk uniek positief getal b bestaat. Dat gaat goed voor POSITIEVE a en b. Voor negatieve grondtallen is de situatie subtieler. Een negatief getal heeft géén vierkantswortel (in de reële getallen), maar bv wel een derdemachtswortel. Voorbeeld: $\sqrt[3]{-8} = -2$ want $2^3 = -8$. In praktische situaties kom je dit weinig tegen.

Voorbeeld 3.2.3. Bereken

1. $\dfrac{4}{\sqrt{4}} = 2$

Uitwerking: $\dfrac{4}{\sqrt{4}} = \dfrac{4}{2} = 2$

2. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Uitwerking: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = (4 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 4
Elementair Rekenen

(Versie 2026/08/25H.51)

4.1 Intro algebraïsch rekenen

Franse literatuur is enkel genietbaar als je de basisregels van de Franse taal voldoende beheerst.
Autorijden is enkel veilig en aangenaam als je niet meer moet nadenken over rijtechnieken.
Wiskunde is enkel aangenaam en nuttig als je de basistechnieken voldoende beheerst.

In de volgende pagina's worden daarom een aantal *basisrekentechnieken* herhaald.

De nadruk ligt daarbij op het *symbolisch rekenen*. Rekenen werkt inderdaad niet alleen met getallen, bijvoorbeeld $(3+2)^2 = 25$, maar ook met letters: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Dat inzicht dateert uit de renaissance, en heeft een enorme vooruitgang mogelijk gemaakt in het wetenschappelijk denken.

We behandelen het uitwerken van haakjes, het buiten haakjes brengen van factoren en het ontbinden in factoren. Verder wordt het rekenen met breuken herhaald, en de rekenregels voor machten met reële exponenten.

Een aantal van de oefeningen zijn eerder eenvoudig. Bovendien is het meestal duidelijk dat de rekenregels uit de vorige paragraaf moeten worden toegepast. In de praktijk moet je natuurlijk ook leren om zelf te weten wanneer je welke regel op nuttige wijze kan en mag toepassen. Je zou daar zelfs niet te lang over mogen nadenken. Je bent pas vaardig in wiskunde als je deze technieken bijna automatisch, zonder veel nadenken, kan toepassen. Net zoals je pas kan autorijden als je quasi automatisch, zonder nadenken kan schakelen. En net zoals je pas Franse teksten kan lezen als je niet steeds moet nadenken over de betekenis van woorden en zinsconstructies.

Wie deze rekenregels al voldoende vlot kan gebruiken mag dit deel uiteraard overslaan.

De leerstof over elementaire rekentechnieken is als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Rekenen met **haakjes** (met ontbinden in factoren)

(3) Rekenen met **breuken**

(4) Rekenen met **machten**

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Begintest Elementair rekenen

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je Elementair Rekenen verder overslaan, anders herhaal je best grondig de rekenregels.

Oefening 4.2.1. Vul aan: $(p+1)^2 + \frac{(p+1)^3}{2} + \frac{(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)^2}{2} \cdot [\ldots\ldots]$

Oefening 4.2.2. Ontbind in factoren. $81x^2y^2 - 25 = \ldots\ldots$

Oefening 4.2.3. Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Je mag veronderstellen dat een uitdrukking die in de noemer staat steeds verschilt van 0.

1. $\dfrac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}} =$ $\ldots\ldots$
2. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} =$ $\ldots\ldots$
3. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2y}}{xy}\right)^4 =$ $\ldots\ldots$
4. $\dfrac{-1}{1-\frac{x+1}{x}} =$ $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Haakjes en ontbinden in factoren

Optellen $(2+3)$ en vermenigvuldigen $(2\cdot 3)$ zijn de twee basisoperaties met getallen. Bij combinaties zoals $2+3\cdot 5$ wordt om historische redenen eerst vermenigvuldigd en dan opgeteld, dus $2+3\cdot 5 = 2+(3\cdot 5) = 2+15 = 17$. Als je de andere volgorde wil *moet* je haakjes zetten: $(2+3)\cdot 5 = 5\cdot 5 = 25$.

Zeker zodra er ook met letters wordt gerekend, wordt het snel belangrijk om naargelang het geval van sommen producten te kunnen maken, of omgekeerd van producten sommen te maken:

$2\cdot(a+3) = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2a+6$	product wordt som	(weliswaar met een term $2a$ die zelf een product is)
$2\cdot a+6 = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2\cdot(a+3)$	som wordt product	(weliswaar met een factor $a+3$ die zelf een som is)

Uitwerken van haakjes betekent *producten* herschrijven als *sommen*: $2(a+b) = 2a+2b$.
Ontbinden in factoren betekent een *som* (of getal) herschrijven als een *product*: $2a^2+6a = 2a(a+3)$.

Voor 'haakjes uitwerken' en 'ontbinden' gelden dezelfde regels, maar ze moeten telkens in de andere richting worden gelezen. Van links naar rechts zeggen ze hoe je een product (of een macht, dat is ook een product) schrijft als een som, maar van rechts naar links gelezen zeggen ze hoe je een som schrijft als een product.

Eigenschap 4.3.1. Voor rekenen met letters of met reële getallen geldt:

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ac+bc && \text{(distributiviteit van } \cdot \text{ t.o.v. } +)\\
a(c+d) &= ac+ad && \text{(idem, maar met som rechts)}\\
(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd && \text{(want gelijk aan } (a+b)c+(a+b)d)\\
-(a+b) &= -a-b && \text{(want } (-1)(a+b) = (-1)a+(-1)b)\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \text{(kwadraat van een tweeterm)}\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \text{(kwadraat van tweeterm via } (a+(-b))^2)\\
a^2-b^2 &= (a+b)(a-b) && \text{(verschil van twee kwadraten)}
\end{aligned}$$

Als referentie vermelden we ook volgende formules voor hogere machten:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad \text{(derdemacht van een tweeterm)}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \text{(Binomium van Newton)}$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad \text{(som van derdemachten)}$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad \text{(verschil van derdemachten)}$$

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1}) \qquad \text{(verschil van } n^{\text{de}} \text{ machten)}$$

$$a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1}) \qquad \text{(som } n^{\text{de}} \text{ machten, } n \textbf{ oneven})$$

Oefening 4.3.1. Werk de haakjes uit en vereenvoudig:

1. $a(x+3)-3a = \ldots\ldots$

2. $ax+3+(-ax) = \ldots\ldots$

3. $2ax+3-(-ax) = \ldots\ldots$

4. $1-(x-y+1)+x = \ldots\ldots$

5. $1-(x-y-1) = \ldots\ldots$

6. $1-(p-q)+p = \ldots\ldots$

Oefening 4.3.2. Werk de haakjes uit:

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Haakjes en ontbinden in factoren

1. $2(a+3)^2 = \ldots\ldots$

2. $2(a-3)^2 = \ldots\ldots$

3. $2(-a-3)^2 = \ldots\ldots$

4. $(x+y)(x+3y)^2 = \ldots\ldots$

Voorbeeld 4.3.1. Breng de voorgestelde factor buiten de haakjes, en vereenvoudig zo ver mogelijk.

1. $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot \left(4p+5\right)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4(p+1)) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4p + 4) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (4p+5)\,.
\end{aligned}$$

2. $(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) = \frac{4r}{3} \cdot (5)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) &= \frac{4r}{3} \cdot (3p+2) - \frac{4r}{3} \cdot 3 \cdot (p-1) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3 \cdot (p-1)) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3p + 3) \\
&= \frac{4r}{3} \cdot 5.
\end{aligned}$$

3. $\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 = \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 &= \frac{xs}{8} \cdot 1 + \frac{xs}{8} \cdot 2s + \frac{xs}{8} \cdot 24x^2s^2 \\
&= \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2).
\end{aligned}$$

Oefening 4.3.3. Ontbind in factoren.

1. $81x^2y^2 - 25 = \ldots\ldots$

2. $9r^2 - 24r + 16 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.3.A Basisoefeningen haakjes

Oefening 4.3.4. Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan en vereenvoudig:

1. $23 \cdot (1000 - 1) = \ldots\ldots$
2. $(923 + 77)/4 = \ldots\ldots$
3. $-\dfrac{2x + 4xy}{-2x} = \ldots\ldots$
4. $p - (p + q) + 2q = \ldots\ldots$

Oefening 4.3.5. Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan en vereenvoudig:

1. $18x + 24y + 30z = \ldots\ldots$
2. $20ab^3 + 30bc + 25b^2c^3\sqrt{d} = \ldots\ldots$
3. $-9x^2y - 3xy = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{p^2q^3}{8} - \dfrac{p^2q}{2} + pq = \ldots\ldots$

Oefening 4.3.6. Ontbind in factoren (of vul aan), met $u, s, t \in \mathbb{R}$.

1. $24st + 12t - 60ut = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{st^2}{8} + \dfrac{s^2t^2}{12} + s^2t = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{2s + 3}{2} + (2s + 3)^2 = \dfrac{2s + 3}{2} \cdot (\ldots\ldots)$
4. $\left(\dfrac{5s}{8}\right)(u - 1) - 5s(3u + 1) = \left(\dfrac{5s}{8}\right) \cdot (\ldots\ldots)$

Oefening 4.3.7. Ontbind in factoren, met $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $25x^2y^4 - 64 = \ldots\ldots$
2. $4x^2 + 24xy + 36y^2 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Breuken

Een *breuk* is per definitie een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$. Met de breuk $\frac{a}{b}$ associëren we het resultaat van de deling van a door b, dat is een getal dat we ook noteren als $\frac{a}{b}$. Bijvoorbeeld:

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{1}{2} = 0,5 \qquad \frac{1}{3} = 0,333\ldots \qquad \text{en} \qquad \frac{\pi}{2} = 1,57\ldots.$$

Voor breuken definiëren we volgende regels voor gelijkheid, optelling en vermenigvuldiging:

Definitie 4.4.1 (Definitie gelijkheid en basisbewerkingen breuken)**.**

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $b \neq 0$.

We noemen a de **teller** en b de **noemer**. Zodra de noemers verschillend zijn van 0, geldt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \qquad \text{(gelijkheid van (getalwaarde van) breuken (kruisproduct))}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{ad + cb}{bd} \qquad \text{(optelling (op gelijke noemer brengen))}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \text{(vermenigvuldiging (teller} \times \text{teller, noemer} \times \text{noemer))}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \text{(deling (maal omgekeerde))}$$

Twee breuken zijn **gelijknamig** als ze dezelfde noemer hebben.
Als zowel a als b verschillend zijn van nul, is $\frac{b}{a}$ de **omgekeerde breuk van** $\frac{a}{b}$.

Opmerking 4.4.1.

- Gelijke breuken hebben dezelfde getalwaarde:

  $$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ want } 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \text{ en beide hebben getalwaarde } 0,5.$$

- Eenzelfde getal kan weergegeven worden door meerdere breuken: $2 = \frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{50}{25}$.
- Uitdrukkingen van de vorm $\frac{a}{0}$ zijn niet gedefinieerd.
- We noteren breuken ook als a/b (dus met een *schuine* streep: $a/b \overset{\text{notatie}}{=} \frac{a}{b}$).
- Deze definitie is alleen geformuleerd voor breuken van reële getallen. We zullen de definitie verder ook stilzwijgend gebruiken voor bijvoorbeeld breuken van letters zoals $\frac{a}{x}$, van veeltermen zoals $\frac{x^2+1}{x-1}$, van functies zoals $\frac{\sin(x)}{2x}$ en zelfs voor breuken van breuken:

  $$\frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ maar } \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{0,5}{4} = 0,125.$$

  Voor breuken van breuken spreken we dus af dat de *grootte* en de precieze *plaats* van de symbolen belangrijk is. In bovenstaand voorbeeld mogen beide breukstrepen niet even groot

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Breuken

zijn want dan is de uitdrukking niet ondubbelzinnig. We schrijven voor de leesbaarheid de grootste breukstreep altijd in het midden van de relevante formule. Dus

$$x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}} \text{ maar nooit } x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}}.$$

- Met behulp van het kleinste gemene veelvoud kan de optelling soms sneller:

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{29}{36} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}+\frac{7\cdot 12}{18\cdot 12}=\frac{174}{216}=\ldots$$

Oefening 4.4.1. Voer de bewerking uit en geef een zo eenvoudig mogelijke breuk als resultaat.

1. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\ldots\ldots$
2. $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=\ldots\ldots$
3. $\frac{1+1}{1}=\ldots\ldots$
4. $\frac{1}{1+1}=\ldots\ldots$

Eigenschap 4.4.1 (Eenvoudige maar belangrijke gevolgen)**.**

Zodra de noemers verschillend zijn van 0, geldt voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a\cdot c}{a\cdot d}=\frac{\cancel{a}\cdot c}{\cancel{a}\cdot d}=\frac{c}{d} \qquad \text{(gemeenschappelijke factor } a \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{a\cdot d} \qquad \text{(met factor } a \text{ vermenigvuldigen)}$$

$$a\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{d} \qquad \text{(getal maal breuk)}$$

$$\frac{a\cdot c}{d}=a\cdot\frac{c}{d} \qquad \text{(factor uit teller halen)}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \text{(breuken optellen, gelijke noemers)}$$

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b} \qquad \text{(som in teller splitsen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{c} \qquad \text{(gelijke noemer } \frac{1}{b} \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{b\cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door getal is maal in noemer)}$$

$$\frac{a}{\frac{c}{d}}=a\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{c} \qquad \text{(getal gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Breuken

Opmerking 4.4.2.

- Deze eigenschappen zijn eenvoudige gevolgen van de vorige definities. Het is erg belangrijk de evidentie van deze eigenschappen in te zien, en ze vlot te kunnen toepassen op zowel numerieke als symbolische uitdrukkingen.
- Het heeft geen zin deze eigenschappen *van buiten* te leren, je moet ze *van binnen* kennen, dus door en door kennen. Dat is hopelijk al het geval, maar indien niet moet je hierover (erg veel) oefeningen maken.
- De eerste zes formules zijn twee per twee elkaars omgekeerde. We zullen dat verder niet meer zo uitvoerig weergeven, maar denk er aan dat elke gelijkheid in twee richtingen kan worden gelezen. $A = B$ betekent dat A gelijk is aan B, maar dus ook dat B gelijk is aan A. De formule $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ kan je dus van links naar rechts lezen om twee breuken op te tellen, maar ook van rechts naar links om een optelling *in* een breuk te vervangen door een optelling *van* breuken.

Eigenschap 4.4.2 (Eenvoudige maar enigszins gekke gevolgen)**.**

$$
\begin{aligned}
a + c &= d \cdot \left(\frac{a}{d} + \frac{c}{d}\right) && \text{(niet bestaande factor buiten haakjes brengen)}\\
a &= \frac{a}{1} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken)}\\
a &= \frac{1}{1/a} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken (variant))}\\
a \cdot b &= \frac{a}{1/b} && \text{(van een product een breuk maken)}\\
\frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} && \text{(van een breuk een product maken)}\\
a \cdot b = 1 &\iff a = \frac{1}{b} && \text{(van een product een breuk maken (variant))}
\end{aligned}
$$

Opmerking 4.4.3 (Vaak gemaakte fouten)**.**

Zelfs als de noemers verschillend zijn van 0, geldt *in het algemeen niet*:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} && \text{(som in de noemer)}\\
&\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} && \text{(schrap al wat stoort)}\\
&\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} = \frac{0}{0+1} = 0 && \text{(schrap al wat stoort (variant 1))}\\
&\frac{2x}{2x+1} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}x+1} = \frac{x}{x+1} && \text{(schrap al wat stoort (variant 2))}
\end{aligned}
$$

Pas op: sommige van de formules gelden *soms* toch wel. De laatste formule bijvoorbeeld:

$$\frac{2x}{2x+1} = \frac{x}{x+1}$$

is een erg zinvolle en mogelijk interessante formule, als je ze beschouwt als een vergelijking in x. Voor x verschillend van $-1/2$ en verschillend van -1 (want daar is de noemer 0, en bestaat de breuk al niet), onderzoeken we wanneer de formule waar is:

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Breuken

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2x+1} &= \frac{x}{x+1} \\ &\iff && \text{(kruisproduct, of op gelijke noemer brengen)} \\ 2x\cdot(x+1) &= (2x+1)\cdot x \\ &\iff && \text{(uitwerken en alles naar linkerlid brengen)} \\ 2x^2+2x-2x^2-x &= 0 \\ &\iff && \text{(uitrekenen)} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Dus: de formule is waar als x gelijk is aan 0 maar fout in alle andere gevallen.

Voorbeeld 4.4.1 (Numeriek rekenen met breuken)**.**

1. $\frac{120+74}{2} \underset{\text{(breuk splitsen)}}{=} \frac{120}{2}+\frac{74}{2} = 60+37 = 97.$ Of natuurlijk ook $\frac{120+74}{2} = \frac{194}{2} = 97.$
2. $\frac{1}{8}+\frac{5}{6} \underset{\text{(gelijke noemer)}}{=} \frac{1\cdot 6+5\cdot 8}{48} = \frac{46}{48} = \frac{23}{24}$
3. $\frac{125}{50} \underset{\text{(gemeenschappelijke factor)}}{=} \frac{25\cdot 5}{25\cdot 2} \underset{\text{(vereenvoudigen)}}{=} \frac{5}{2}$
4. $\frac{\frac{80}{2}}{10} \underset{\text{(dubbele breukstreep)}}{=} \frac{80}{2\cdot 10} = \frac{80}{20} = 4.$ Er geldt natuurlijk ook $\frac{\frac{80}{2}}{10} = \frac{40}{10} = 4.$

Oefening 4.4.2. Vereenvoudig.

1. $\frac{x+y}{\frac{x}{y}} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\frac{x+y}{x}}{y} = \ldots\ldots$
3. $\frac{p^2-q^2}{p-q} = \ldots\ldots$
4. $\frac{\frac{p+qp}{pq^2}}{\frac{p^2}{q}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.4.A Basisoefeningen breuken

Oefening 4.4.3. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\ldots\ldots$
2. $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=\ldots\ldots$
3. $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\ldots\ldots$
4. $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\ldots\ldots$
5. $\frac{15}{6}\cdot\frac{3}{2}=\ldots\ldots$
6. $\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{22}\cdot\frac{4}{18}=\ldots\ldots$
7. $\frac{6}{5}:\frac{2}{15}=\ldots\ldots$
8. $\frac{12}{25}:\frac{18}{35}=\ldots\ldots$
9. $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}=\ldots\ldots$
10. $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=\ldots\ldots$

Oefening 4.4.4. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $20\cdot(\frac{5}{4}-\frac{4}{5})=\ldots\ldots$
2. $-\frac{6}{27}+\frac{27}{1}+\frac{16+14}{9}-\frac{3}{14+13}-3\cdot 9=\ldots\ldots$
3. $-\frac{(1-a)-2}{a+1}=\ldots\ldots$ $(a\neq -1)$

Oefening 4.4.5. Schrijf als een zo eenvoudig mogelijke breuk. Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan.

1. $\frac{a-b}{c}-\frac{a-2b}{2c}=\ldots\ldots$
2. $\frac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}}=\ldots\ldots$
3. $\frac{1-\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2}{b}}=\ldots\ldots$
4. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}=\ldots\ldots$
5. $a+\frac{a}{1+a}=\ldots\ldots$
6. $1+\frac{a}{1+a}=\ldots\ldots$
7. $1+\frac{1}{1+a}=\ldots\ldots$
8. $a+\frac{1}{1+a}=\ldots\ldots$
9. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}=\ldots\ldots$
10. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}}=\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 Machten met gehele exponenten

Net zoals *vermenigvuldigen* 'herhaald optellen' is: $3 \times 2 \overset{\text{def}}{=} 2+2+2$ en $n \times a = a+a+\ldots+a$ (n keer),
is *machtsverheffen* 'herhaald vermenigvuldigen': $2^3 \overset{\text{def}}{=} 2\times 2\times 2$ en $a^n \overset{\text{def}}{=} a\times a\times \ldots \times a$ (n keer).

Definitie 4.5.1 (Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent)**.**
De n**-de macht** van een reëel getal a, met $n \in \mathbb{N}$, genoteerd a^n, is

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1 \quad \text{als } a \neq 0$$
$$a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}} \quad \text{als } n \in \mathbb{N}_0.$$

Vb: $5^0 = 1$, $5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ factoren}} = 125$

We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.

Als a niet nul is, definiëren we ook machten met *negatieve* exponenten:

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

Vb: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

.

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Oefening 4.5.1. Bereken:

1. $5^2 = \ldots\ldots$
2. $-5^2 = \ldots\ldots$
3. $(-5)^2 = \ldots\ldots$
4. $(2+3)^2 = \ldots\ldots$
5. $2^2 + 3^2 = \ldots\ldots$
6. $(2+3)^2 - (2^2+3^2) = \ldots\ldots$
7. $2^{-1} = \ldots\ldots$
8. $10^3 = \ldots\ldots$
9. $10^{-3} = \ldots\ldots$

Opmerking 4.5.1. Onmiddellijke gevolgen van de definities:

1. $a^1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.
2. $a^0 = 1$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
3. $0^n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.
4. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
5. 0^z is niet gedefinieerd voor $z \in \mathbb{Z}^-$.
6. $1^n = 1$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

Omdat $a^2 = a \cdot a$ en $a^3 = a \cdot a \cdot a$ volgt ook direct dat

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= (a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5 \\ (a^2)^3 &= (a \cdot a)^3 = (a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a) = a^{2 \cdot 3} = a^6 \\ a^3 \cdot b^3 &= (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = (a \cdot b)^3 \end{aligned}$$

maar een uitdrukking als $a^2 \cdot b^3$ kan je niet schrijven als één macht, wel als $(a \cdot b)^2 \cdot b$.

In het algemeen gelden volgende rekenregels:

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 Machten met gehele exponenten

Eigenschap 4.5.1 (Rekenregels machten)**.** Voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)} \\ (ab)^n &= a^n b^n && \text{(macht van product)} \\ (a^m)^n &= a^{mn} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{als } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{als } b \neq 0$$

Dezelfde regels gelden voor *gehele* $m, n \in \mathbb{Z}$ zolang het grondtal niet nul is bij negatieve exponenten.

Dezelfde regels gelden ook voor *reële* $m, n \in \mathbb{R}$ voor zover ze betekenis hebben (zie verder).

Oefening 4.5.2. Bereken volgende machten.

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$
2. $(2^2)^3 = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$
3. $2^{(2^3)} = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = a^5$ met $a = \ldots\ldots$

Voorbeeld 4.5.1. Bereken volgende machten.

1. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$
2. $\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \cdot 9 = \frac{9}{4}$

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Machten en wortels

Voor *positieve* grondtallen $a \in \mathbb{R}_0^+$ wordt de machtsverheffing a^m veralgemeend tot $a^{\frac{m}{n}}$ met *rationale exponenten* door eerst $a^{\frac{1}{n}}$ te definiëren, en dan $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. We vermelden kort ook a^r met $r \in \mathbb{R}$.

Definitie 4.6.1 (n-de machtswortel)**.**

De **macht** $a^{\frac{1}{n}}$, ook de n-**de machtswortel** $\sqrt[n]{a}$ of de n-**de wortel** van een *positief* reëel getal a met $n \in \mathbb{N}_0$, is per definitie het uniek *positief* reëel getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a:

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} \overset{\text{def}}{=} b \iff b^n = a$$

Vb: $2 = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} \iff 2^3 = 8$

We definiëren voor $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $m \in \mathbb{Z}$ ook

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Vb: $125^{\frac{2}{3}} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 5^2 = 25$

Als n oneven is definieert dezelfde formule ook de n-de machtswortel van een *negatief* getal, namelijk als het unieke *negatieve* getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a.

Opmerking 4.6.1.

(a) Voor $n = 2$ laat men de 2 in de wortel weg: $\sqrt{a} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

(b) Omdat $a^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$, is nu ook $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \in \mathbb{R}$ gedefinieerd, met $m \in \mathbb{Z}$.

(c) Pas op: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, want bv $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, terwijl $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2 \neq \sqrt{2}$.

(d) Deze definitie is enkel zinvol als een dergelijk positief reëel getal b *bestaat* en *uniek* is. Precies om dat te garanderen moet de definitie voor *even* n beperkt worden tot *positieve* a en b. Inderdaad, voor negatieve a *bestaat* er immers niet altijd een geschikte b, want er bestaat bv. geen $b \in \mathbb{R}$ zodat $b^2 = -2$. En als het getal b niet beperkt wordt tot de *positieve* getallen, dan is dergelijke b niet *uniek*, want bijvoorbeeld zowel $b = 2$ als $b = -2$ voldoen aan $b^2 = 4$.
Voor *oneven* machtswortels stelt dit probleem zich niet: $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ en $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$.

(e) Men kan ook a^r definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$ (dus uitdrukkingen zoals $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$ en $\sqrt{7}^{\sqrt{\pi}}$). Dit is technisch enigszins subtiel en we geven hier geen exacte definitie. We zullen later reële exponenten nodig hebben bij het bestuderen van zogenaamde exponentiële functies zoals $x \mapsto 2^x$.

Ook voor rationale en reële exponenten (en dus voor wortels) gelden volgende bekende rekenregels:

Eigenschap 4.6.1. Voor $x, y > 0$ en $r, s \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{aligned} x^r x^s &= x^{r+s} && \text{(product met zelfde grondtal)} \\ (xy)^r &= x^r y^r && \text{(macht van product)} \\ (x^r)^s &= x^{rs} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$ax^r + bx^r = (a+b)x^r \qquad \text{(som van } \textit{gelijke} \text{ machten)}$$

Uit bovenstaande regels en de definities volgt ook

4.6 Machten en wortels

$$x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad 1^r = 1, \quad 0^r = 0 \ (r \neq 0)$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m} \qquad x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1}$$

en

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad \text{en} \quad a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x}$$

Het is dikwijls belangrijk te weten of twee uitdrukkingen met machten of wortels al dan niet aan elkaar gelijk zijn. Daarom worden dergelijke uitdrukkingen meestal als volgt vereenvoudigd. De procedure is eenvoudiger dan ze lijkt als je ze toepast op een voorbeeld.

Algoritme 4.6.1 (Vereenvoudigen van wortelvormen en wortelvrij maken van de noemer)**.**

Om een vierkantswortel van de vorm $\sqrt{ax^n}$ $(a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z})$ te **vereenvoudigen**

(a) ontbind je a in factoren

(b) haal je voor de *even* exponenten alle factoren uit de wortel

(c) haal je voor de *oneven* exponenten alle factoren behalve één uit de wortel

(d) behandel je daarbij exponenten van letters op dezelfde manier als die van getallen

Om van een breuk met een wortel in de noemer **de noemer wortelvrij** te maken

(a) vereenvoudig je indien mogelijk zowel de voorkomende wortelvormen als de breuk zelf

(b) vermenigvuldig je teller en noemer *met de wortel die voorkomt in de noemer*

(c) vereenvoudig je (opnieuw) zowel de voorkomende wortelvormen als de breuk zelf

Voorbeeld 4.6.1.

1. Vereenvoudig $\sqrt{200a^5}$.

Uitwerking: $\sqrt{200a^5} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2 \cdot a^5} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot a^4 \cdot a} = 2 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{2a} = 10a^2\sqrt{2a}$

2. Maak de noemer wortelvrij in $\sqrt{\frac{32}{12a}}$.

Uitwerking: $\sqrt{\frac{32}{12a}} = \sqrt{\frac{2^5}{2^2 \cdot 3a}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{3a}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3a}}{\sqrt{3a} \cdot \sqrt{3a}} = \frac{2\sqrt{2 \cdot 3a}}{3a} = \frac{2\sqrt{6a}}{3a}$

Oefening 4.6.1. Vereenvoudig volgende wortelvormen.

1. $-\sqrt{20} = \ldots\ldots$ **2.** $\sqrt{a^9} = \ldots\ldots$ **3.** $\sqrt{x^4 \cdot y^5} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Machten en wortels

Oefening 4.6.2. Maak de noemer wortelvrij en vereenvoudig (met $b > 0$).

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \ldots\ldots$

2. $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{5b^6}} = \ldots\ldots$

3. $\sqrt{\dfrac{32x^5y^4}{12x}} = \ldots\ldots$

Oefening 4.6.3. Vereenvoudig volgende uitdrukkingen (met $x, y \in \mathbb{R}_0^+$).

1. $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{64} = \ldots\ldots$

2. $\sqrt{x}\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = \ldots\ldots$

3. $\dfrac{4}{\sqrt{8}} = \ldots\ldots$

4. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$

5. $\sqrt{48x^9y^4} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.6.A Basisoefeningen machten

Oefening 4.6.4. Bereken

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^{\cdots\cdots}$
2. $(2^2)^3 = 2^{\cdots\cdots}$
3. $2^{(2^3)} = 2^{\cdots\cdots}$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^{\cdots\cdots}$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = \ldots\ldots^5$

Oefening 4.6.5. Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel $x, y, a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

1. $\dfrac{\sqrt{a}}{a^5} = \ldots\ldots$
2. $\left(x^6 y^8\right)^{-1/2} = \ldots\ldots$
3. $a^4 b \left(\dfrac{\sqrt{a^2 b^4}}{ab}\right)^3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Rekenen met percentages

Percentages zijn erg nuttig om verhoudingen uit te drukken. Als je een *deel* wil vergelijken met het *geheel* is de *verhouding* tussen beide soms belangrijker dan het *verschil*.

- De *verhouding* tussen twee grootheden A en B is het *getal* $r = A/B$ dat weergeeft hoeveel keer A groter of kleiner is dan B. Een halve taart A is *half* zo groot als een hele taart B ($r = 0.5$), een dozijn eieren A weegt *twaalf* keer meer dan één ei B ($r = 12$), of één ei A weegt *één twaalfde* van een dozijn eieren B ($r = 1/12 = 0.0833\ldots$). Als je r en B kent, kan je de grootte van A berekenen door te *vermenigvuldigen*: een halve taart is 0.5 keer een hele taart en één ei is $0.0833\ldots$ keer een dozijn eieren. In formules:

$$r = \frac{A}{B} \iff r \cdot B = A \quad \left(\iff \frac{1}{r} = \frac{B}{A} \iff B = \frac{A}{r} \right)$$

  Een verhouding $r = 1$ betekent dat A en B even groot zijn, $r < 1$ betekent dat A kleiner is dan B en $r > 1$ dat A groter is dan B. De verhouding vergelijkt dus met 1, en hoewel dat wiskundig bijzonder handig is hebben de meeste mensen een erg slechte directe intuïtie voor kleine getallen. Daarom vermenigvuldigt men de verhouding r graag met 100 en noteert $100 \cdot r$ dan als een **percentage**: $0.5 = 0.5 \times 100\% = 50\%$. En terwijl het in de praktijk meestal niet duidelijker is om te spreken 50% van een taart in plaats van gewoon een halve taart, spreken we toch liever van 12% van de Belgische bevolking dan wel van 0.12 keer de Belgische bevolking.

- Een *percentage* geeft dus een verhouding ten opzichte van 100: 100% is alles, 50% is de helft en 200% is het dubbel. Je leest het symbool $\%$ als 'per-cent', dus 'per honderd', en wiskundig betekent het symbool $\%$ eigenlijk gewoon 'gedeeld door 100' en er geldt de wiskundige gelijkheid

$$4\% = 4/100 = \frac{4}{100} = 0.04.$$

- Om een bepaald percentage van een grootheid te berekenen, *vermenigvuldig* je de grootheid met het percentage. Je kan een vermenigvuldiging $r \cdot A$ naargelang de context dus lezen als 'r maal A', als 'r keer A' ($2h$ is *twee keer* de hoogte h) maar soms ook als 'r van A'($\frac{1}{2}h$ is *de helft van* h). Bijvoorbeeld:

$$5\% \text{ van } 200 = \frac{5}{100} \cdot 200 = \frac{1}{20} \cdot 200 = 0.05 \cdot 200 = 10.$$

  en

$$20\% \text{ van } 1 = \frac{20}{100} \cdot 1 = 0.20 \text{ en dus ook } 20\% = 0.20.$$

  Met de interpretatie van '%' als '/100' schrijf je de *van* in 5% *van* 20 als een punt: $5\% \cdot 20$.

Voorbeeld 4.7.1.

(a) Als van 100 mensen er zes werkloos zijn, dan is het werkloosheidspercentage:

$$\frac{6}{100} = 0.06 = 6\%.$$

(b) Als in een bedrijf met 500 werknemers gisteren 25 zieken waren, dan bedroeg het ziektepercentage:

$$\frac{25}{500} = 0.05 = 5\%.$$

Opmerking 4.7.1. Het *verschil* tussen twee percentages kan ofwel **procentueel** ofwel in **procentpunten** uitgedrukt worden. De procentpunten geven de *absolute* stijging/daling weer tussen de twee

CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Rekenen met percentages

percentages, terwijl de procentuele verandering deze stijging/daling *relatief* uitdrukt.
Voorbeeld: in een klas met 20 leerlingen waren er gisteren 2 zieke leerlingen, dus $\frac{2}{20} = 10\%$ was ziek. Vandaag zijn er echter 3 leerlingen ziek, dus is $\frac{3}{20} = 15\%$ ziek. De *toename* kan je als volgt beschrijven:

(a) Er is een toename van 5 **procentpunten** (van 10% naar 15%).

(b) Er is een **procentuele toename** van 50%: 3 is immers 150% van 2, want $150\% \cdot 2 = \frac{150}{100} \cdot 2 = 3$.

Beide uitdrukkingen zijn correct, maar ze mogen niet verward worden!

Bij procentpunten vergelijk je met het oorspronkelijke *geheel*, hier de oorspronkelijke klas van 20 leerlingen. Bij procentuele toename vergelijk je met het oorspronkelijke *deel*, hier de 2 zieke leerlingen.

Merk ook op dat sommen en verschillen van percentages niet altijd zinvol zijn: bij een levering van 25% Jonagold appelen en 10% rotte appelen hebben de percentages $25\% - 10\% = 15\%$ en $25\% + 10\% = 35\%$ geen directe betekenis.

Voorbeeld 4.7.2. We bekijken opnieuw de vorige voorbeelden:

(a) Als er drie werklozen bijkomen, dan wordt het werkloosheidspercentage $\frac{9}{100} = 0.09 = 9\%$. Dit betekent een stijging met 3 procentpunten, maar ook een stijging met 50 procent want $\frac{9}{6} = 1.5$ zodat 9 gelijk is aan 150% van 6.

(b) Als het aantal zieken vandaag met 1 procentpunt stijgt van 5% tot 6% van alle werknemers, dan zijn er nu 30 zieke werknemers, want

$$6\% \text{ van } 500 = 0.06 \cdot 500 = \frac{6}{100} \cdot 500 = 30.$$

Omdat 30 zieken 120% is van 25 zieken (want $\frac{30}{25} = \frac{6}{5} = \frac{120}{100} = 120\%$), is het aantal zieken echter gestegen met 20% ten opzichte van gisteren. Je kan ook redeneren dat 1 procentpunt van 500 werknemers overeenkomt met 5 extra zieken. Ten opzichte van de oorspronkelijke 25 zieken zijn dat dus 1/5 of 20% extra zieken.

Oefening 4.7.1.

1. 8% van 50 mensen zijn | 2 | 4 | 8 | 16 | mensen.

2. Een stijging van 4 naar 5 is een stijging met | 1% | 10% | 20% | 25% | 40% |.

3. Een daling van 20% naar 10% is een daling met | 50 | 10 | 100 | procentpunten.

4. Als je resultaat stijgt van 40% naar | 50% | 60% | 90% |, dan is je resultaat met 50% gestegen.

5. Een verdubbeling van het geld op je rekening betekent een stijging met | 50% | 100% | 200% |.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Rekenen met percentages

Oefening 4.7.2.

1. Een sofa kost 750 euro, exclusief btw. Hoeveel moet de consument betalen als er 21% btw wordt geheven.

2. Je fietsherstelling kost 25 euro, inclusief de geldende 6% btw. Hoeveel zou je betalen zonder btw?

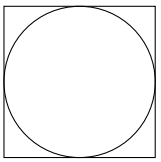
3. Op restaurant geldt voor een dagmenu 12% btw. De dagmenu staat in promo voor 40 euro, exclusief btw. Hoeveel moet je uiteindelijk betalen voor de menu?

Oefening 4.7.3.

1. Tijdens de solden is je favoriete jeans in korting. De winkel geeft 30% korting. Als je nog 63 euro moet betalen, wat was dan de prijs voor de solden?

2. Je krijgt in de supermarkt 50% korting op het tweede product als je 2 identieke producten koopt. Hoeveel korting heb je dan op je totale aankoop (van 2 producten).

Oefening 4.7.4. Beschouw een vierkant met een ingeschreven cirkel met straal r.



1. Hoeveel procent van de oppervlakte van het vierkant wordt bedekt door de oppervlakte van de ingeschreven cirkel?

2. Hoeveel procent is de oppervlakte van het vierkant groter dan de oppervlakte van cirkel?

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.A Herhaling basisrekenvaardigheden

Oefening 4.7.5. Vul aan. Je mag veronderstellen dat een uitdrukking die in de noemer staat steeds verschilt van 0.

1. $\frac{4x^2}{5} - 3x = 4x \cdot [\dots\dots]$

2. $(p+1)^2 + \frac{(p+1)^3}{2} + \frac{(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)^2}{2} \cdot [\dots\dots]$

3. $\frac{(m+n)}{2} \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2} - \frac{m}{2} = \frac{\dots\dots}{2(m+n)}$

4. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = \dots\dots \cdot \sqrt{2}$

5. $\frac{4}{q} - \frac{8+q}{2q^2} = \frac{\dots\dots}{2q^2}$

6. $\frac{-8}{2x} + \frac{4}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{\dots\dots}{2x(x-1)^2}$

7. $\left(a^{-1} \cdot b^{-3} \cdot c^2\right)^3 \cdot \left(a^{-2} \cdot b^{-4} \cdot c^3\right)^{-2} = a^{\dots\dots} \cdot b^{\dots\dots} \cdot c^{\dots\dots}$

8. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right)^{-1} = \frac{\dots\dots}{x+y^2}$

9. $(a+b)^3 - \left(a^3 + b^3\right) = (a+b) \cdot \dots\dots$

10. $\frac{a+b}{a^2+b^2} - \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{\dots\dots}{a^4-b^4}$

11. $(t-1) \cdot (1+t+t^2) = \dots\dots$

12. $\frac{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}}{2p-2} = \dots\dots \cdot \frac{1}{p}$

13. $\frac{1}{2 + \frac{1}{2+1}} = \dots\dots$

14. $n^{-1} + n^{-2} + n^{-3} = n^{-3} \cdot (\dots\dots) = \frac{\dots\dots}{n^3}$

15. $x + 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{\dots\dots}{x-1}$

16. $xy^2z^3 + \frac{x^2yz}{2} + \frac{xyz^2w}{3} = xyz \cdot [\dots\dots]$

17. $\frac{3}{q} + \frac{1}{2q} - \frac{2}{4q} = \frac{\dots\dots}{4q} = \frac{\dots\dots}{q}$

18. $\left(\frac{n^4}{m^3} \cdot \frac{m^{-5}}{n^3}\right)^2 = \frac{n^{\dots\dots}}{m^{\dots\dots}}$

19. $\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c} = \frac{\dots\dots}{c(b+c)}$

20. $\frac{x^2z}{2} + zyx + \frac{zy^2}{2} = \frac{x+y}{2} \cdot [\dots\dots]$

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.A Herhaling basisrekenvaardigheden

21. $\left(\frac{-4}{a}\right)^2 + \frac{3}{2a} = \frac{3}{a^2} \cdot [\ldots\ldots]$

22. $a^x \cdot a^{-\frac{2x}{3}} = a^{\ldots\ldots x}$

23. $(k+l+m)^2 = ((k+l)+m)^2 = k^2 + 2kl + l^2 + \ldots\ldots$

24. $\left(-(-x+y)\cdot(-1)^{-3}\right)^2 =$ $\boxed{+(y-x)^2}$ $\boxed{-(y-x)^2}$

25. $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot 3a - \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\ldots\ldots}{a(a+1)}$

26. $\dfrac{-1}{1 - \dfrac{x+1}{x}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 5
Sommatieteken en faculteit

(Versie 2026/08/25H.51)

5.1 Het sommatieteken $\sum$

Met het **sommatieteken** $\sum$ kunnen sommen met veel termen kort worden opgeschreven. Zodra je er enigszins mee vertrouwd bent, kan je er ook gemakkelijk mee rekenen. Het sommatieteken wordt vaak gebruikt in wetenschappen zoals statistiek, fysica, economie,....

In veel problemen komen sommen voor van termen die telkens op basis van een repetitief patroon zijn opgebouwd. We noteren dergelijke sommen dikwijls met puntjes. Zo schrijven we voor de som van de eerste honderd natuurlijke getallen bijvoorbeeld

$$1+2+3+\ldots+100$$

en de som van de eerste 10 kwadraten als

$$1+4+9+16+\ldots+100.$$

Het is voor iedereen duidelijk wat hiermee wordt bedoeld, en iedereen kan uitrekenen dat $1+2+3+\ldots+100 = 5050$ en $1+4+9+16+\ldots+100 = 385$.

Maar, in sommige gevallen is er toch verwarring mogelijk over wat er precies met de puntjes wordt bedoeld. Bijvoorbeeld: hoeveel is

$$3+5+7+\ldots+19 = ?$$

Bedoelen we hier de som van de *oneven* getallen $3+5+7++9+11+13+15+17+19$ of de som van de *priemgetallen* $3+5+7+11+13+17+19$?

Wanneer het patroon duidelijk is levert het sommatieteken een handige en elegante manier om dergelijke sommen te noteren. Een zogenaamde *sommatie-index* loopt daarbij over de verschillende termen:

$$\sum_{i=1}^{100} i \overset{\text{notatie}}{=} 1+2+3+\ldots+100.$$

We lezen dat als 'de som voor i gaande van 1 tot 100 van telkens het getal i'. Dus, $\sum_{i=1}^{100} i = 5050$, want $1+2+3+\cdots+100 = 5050$.

We kunnen natuurlijk niet alleen gewoon i optellen, maar bijvoorbeeld ook de eerste tien kwadraten

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 \overset{\text{notatie}}{=} 1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2 = 385,$$

dus 'de som voor i gaande van 1 tot 10 van telkens i^2'. Ook veel ingewikkeldere uitdrukkingen komen voor

$$\sum_{i=1}^{365} \frac{\sqrt{i+5}}{i^2+1} \overset{\text{notatie}}{=} \frac{\sqrt{1+5}}{1^2+1} + \ldots + \frac{\sqrt{365+5}}{(365)^2+1} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{370}}{133226}.$$

Merk op dat er bij het leren gebruiken van het sommatieteken twee problemen enigszins door elkaar lopen: enerzijds willen we een lange som korter en exacter *opschrijven*, anderzijds willen we die som meestal ook *uitrekenen*. We beperken ons verder hoofdzakelijk tot het *opschrijven* van sommen met het sommatieteken. Vooraleer een formele definitie te geven, bekijken we eerst nog enkele eenvoudige voorbeelden:

Voorbeeld 5.1.1 (Inleidende voorbeelden)**.**

- Beschouw de som $2+4+8+16+32+64$.
  Dit is een som van machten van 2. Elke term is van de vorm 2^i waarbij i loopt van 1 tot en

5.1 Het sommatieteken $\sum$

met 6. We schrijven die som verkort als

$$2+4+8+16+32+64 = \underbrace{2^1}_{i=1} + \underbrace{2^2}_{i=2} + \underbrace{2^3}_{i=3} + \ldots + \underbrace{2^6}_{i=6} = \sum_{i=1}^{6} 2^i\,.$$

We kunnen met deze notatie ook veel langere sommen opschrijven:

$$2+4+8+16+\ldots+4096 = 2^1+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{11}+2^{12} = \sum_{i=1}^{12} 2^i\,.$$

- Beschouw de som $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

  Dit is de som van de termen $\frac{1}{i}$, waarbij i loopt van 1 tot en met 5. We kunnen die som verkort schrijven als

  $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}\,.$$

- Beschouw de som $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}$.

  We kunnen de som verkort schrijven als

  $$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i^2}\,.$$

De letter die gebruikt wordt bij het sommatieteken hoeft niet i te zijn, dat mag een willekeurige letter zijn. Andere vaak gebruikte letters zijn j en k. De sommatie hoeft ook niet bij 1 te starten.

Voorbeeld 5.1.2 (Extra eenvoudige voorbeelden van het sommatieteken)**.**

- Beschouw de som $2+3+4+\cdots+8$.

  We kunnen die som verkort schrijven als $\sum_{k=2}^{8} k = 2+3+4+5+6+7+8$.

  Merk op dat deze schrijfwijze niet uniek is: men kan dezelfde som bijvoorbeeld ook noteren als

  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7}(k+1) &= (1+1)+(2+1)+\ldots+(7+1)\\ &= 2+3+4+5+6+7+8 = 35\end{aligned}$$

  of

  $$\begin{aligned}\sum_{j=3}^{9}(j-1) &= (3-1)+(4-1)+\ldots+(9-1)\\ &= 2+3+4+5+6+7+8 = 35.\end{aligned}$$

- Als we 100 getallen hebben die we aanduiden met $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, dan noteren we de som van de laatste 50 als

  $$\sum_{i=51}^{100} a_i \overset{\text{notatie}}{=} a_{51}+a_{52}+a_{53}+\cdots+a_{99}+a_{100}\,.$$

  We lezen dit als 'de som van de termen a_i waarbij (de index) i loopt van 51 tot 100'.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Het sommatieteken $\sum$

Oefening 5.1.1.

1. Zoek de algemene term: $2+3+4+\cdots+8=\sum_{i=0}^{6} \ldots\ldots$

2. Bereken de som $\sum_{j=3}^{5} j^2 = \ldots\ldots$

3. Schrijf met een sommatieteken: $\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49} = \ldots\ldots$

Een algemene definitie van de sommatie, enigszins abstract geformuleerd, gaat als volgt:

Definitie 5.1.1 (Het sommatieteken)**.**

Voor $n \in \mathbb{N}$ en $a_1, a_2, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen definiëren we :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Vb: $\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2+4+8 = 14$

Meer algemeen is voor $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m \leqslant n$ en $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Vb: $\sum_{k=2}^{4} 2^k = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 4+8+16 = 28$

We lezen $\sum_{k=m}^{n} a_k$ als de som van (de) a_k voor k gaande van m tot en met n.

Men noemt a_k de **algemene term** en k de **sommatie-index**.
Men noemt m de **ondergrens** en n de **bovengrens** van de sommatie.

Men noteert $\sum_{k=m}^{n} a_k$ soms ook als $\sum_{k=m}^{n} a_k$.

Voorbeeld 5.1.3 (Nog enkele eenvoudige voorbeelden)**.**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 100 \\
\sum_{i=0}^{9} (i+1)^2 &= (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + \cdots + (9+1)^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 100 = \sum_{i=1}^{10} i^2 \\
\sum_{i=-2}^{3} i^3 &= (-2)^3 + (-1)^3 + 0 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 27 \\
\sum_{i=10}^{14} i &= 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60 \\
&= (10+0) + (10+1) + (10+2) + (10+3) + (10+4) = \sum_{i=0}^{4} (10+i) \\
&= 50 + 1 + 2 + 3 + 4 = 50 + \sum_{i=1}^{4} i
\end{aligned}$$

Uit deze definitie volgen volgende eigenschappen:

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Het sommatieteken $\sum$

Eigenschap 5.1.1 (Basiseigenschappen sommatie)**.**

(a) De som $\sum_{k=1}^{n} a_k$ heeft n termen.

Vb: $\sum_{k=1}^{2} 2^k = 2^1 + 2^2$, 2 termen

(b) De som $\sum_{k=0}^{n} a_k$ heeft $n+1$ termen.

Vb: $\sum_{k=0}^{2} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2$, $2+1=3$ termen

(c) De som $\sum_{k=m}^{n} a_k$ heeft $n-m+1$ termen.

Vb: $\sum_{k=5}^{6} 2^k = 2^5 + 2^6$, $3-2+1=2$ termen

(d) $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ als en slechts als $a_0 = 0$

Vb: $\sum_{k=0}^{3} k = \sum_{k=1}^{3} k = 0+1+2+3$

(e) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$ als en slechts als $a_{n+1} = 0$

Vb: $\sum_{k=1}^{2} \sin(\frac{k\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) + \underset{=0}{\sin(\pi)} = \sum_{k=1}^{1} \sin(\frac{k\pi}{2})$

(f) $\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n$ (sommatie over één getal)

Vb: $\sum_{k=7}^{7} 2^k = 2^7$

(g) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$ (veranderen van indexnaam)

Vb: $\sum_{k=1}^{2} 2^k = \sum_{j=1}^{2} 2^j = 2^1 + 2^2$

(h) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$ (veranderen van grenzen)

Vb: $\sum_{k=1}^{2} 2^k = \sum_{k=5}^{7} 2^{k-4} = 2^1 + 2^2$

Opmerking 5.1.1.

- De sommatie-index bestaat alleen maar *in* de sommatie. In de uitgeschreven of uitgerekende som komt de sommatie-index niet meer voor.
- De sommatie-index mag geen andere betekenis hebben in de context.

  Als $k \in \mathbb{R}$, dan is

  $$\sum_{i=1}^{4} k^i = \sum_{j=1}^{4} k^j = k + k^2 + k^3 + k^4$$

  maar

  $$\sum_{k=1}^{4} k^k = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 \neq \sum_{i=1}^{4} k^i.$$

  Je mag voor $k + k^2 + k^3 + k^4$ dus *niet* de letter k kiezen als sommatie-index.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Het sommatieteken $\sum$

- We maken de volgende afspraken over haakjes:

$$\sum_{i=5}^{7} a_i + 4 \overset{\text{afspraak}}{=} \left(\sum_{i=5}^{7} a_i\right) + 4 = a_5 + a_6 + a_7 + 4$$

en

$$\sum_{i=5}^{7} (a_i + 4) = (a_5 + 4) + (a_6 + 4) + (a_7 + 4) = a_5 + a_6 + a_7 + 12.$$

Algemeen geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + b = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + b$$

Bij de sommatie van een *product* is het niet nodig (maar ook niet fout) om haakjes te zetten:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k b_k).$$

Oefening 5.1.2. Bereken de som:

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \left(\frac{2^i}{3} + 5\right) = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{3} + 5 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Het sommatieteken $\sum$

Voorbeeld 5.1.4.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-2}^{1}(-1)^i i^3 &= (-1)^{-2}\cdot(-2)^3+(-1)^{-1}\cdot(-1)^3+(-1)^0\cdot 0^3+(-1)^1\cdot 1^3 \\
&= (1)\cdot(-8)+(-1)\cdot(-1)+0+(-1)\cdot(1) \\
&= -8+1+0-1=-8 \\
\sum_{i=1}^{99} i &= 1+2+\cdots+99=\sum_{k=1}^{99} k && \text{(hernoem de index)} \\
\sum_{i=1}^{99} 2i &= 2+4+\cdots+198 \\
&= 2(1+2+\cdots+99) \\
&= 2\cdot\sum_{i=1}^{99} i && \text{(factor buitenbrengen)} \\
\sum_{i=1}^{99} 1 &= 1+1+\cdots+1=99 && \text{(constante)} \\
\sum_{j=1}^{4}(a+x_j) &= (a+x_1)+(a+x_2)+(a+x_3)+(a+x_4) \\
&= 4a+\sum_{i=1}^{4} x_i && \text{(herschrijf de sommand)} \\
\sum_{i=1}^{3} i^2 &= 1+2^2+3^2=\sum_{i=0}^{2}(i+1)^2 && \text{(herindexeer)} \\
\sum_{i=0}^{2} a_i x^i &= a_0+a_1x+a_2x^2=a_2x^2+a_1x+a_0 && \text{(veelterm tweede graad)} \\
\sum_{i=0}^{n} a_i x^i &= a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 && \text{(veelterm n-de graad)}
\end{aligned}$$

Nu we enigszins vertrouwd zijn met het uitwerken van de sommatie, proberen we ook het omgekeerde: een som schrijven met behulp van de sommatie $\sum$. Daarvoor moeten we in de eerste plaats op zoek gaan naar de gemeenschappelijke vorm van de termen. Dat moet leiden tot een formule voor een algemene term, zeg a_k, die bijna altijd afhangt van een zelfgekozen sommatie-index (hier dus k). Vervolgens zoeken we de onder- en bovengrenzen, dit zijn respectievelijk de eerste en de laatste waarde die k moet aannemen opdat a_k precies alle termen van de som doorloopt.

Voorbeeld 5.1.5. Schrijf met een sommatieteken:

1. $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4=\sum_{i=1}^{4} a_ib_i$
2. $a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4+a_4b_5=\sum_{i=1}^{4} a_ib_{i+1}=\sum_{i=2}^{5} a_{i-1}b_i$
3. $a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1=\sum_{i=1}^{4} a_ib_{5-i}$
4. $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5=\sum_{i=1}^{4} a_ib_i+a_5$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Het sommatieteken $\sum$

Oefening 5.1.3. Schrijf volgende uitdrukkingen met een sommatieteken:

1. $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x^3+x^4+\frac{\sqrt{5}}{2}x^5+\frac{\sqrt{6}}{2}x^6+\frac{\sqrt{7}}{2}x^7+\sqrt{2}x^8+\frac{3}{2}x^9+\frac{\sqrt{10}}{2}x^{10}+\frac{\sqrt{11}}{2}x^{11}+\sqrt{3}x^{12}$.

2. $\sin x+\cos 2x+\sin 3x+\cos 4x+\sin 5x+\cos 6x+\sin 7x+\cos 8x+\sin 9x+\cos 10x$.

3. $u_0-2u_1+3u_2-4u_3+5u_4-6u_5+7u_6-8u_7+\cdots+129u_{128}-130u_{129}$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

We bundelen hier enkele rekenregels in verband met het sommatieteken zoals het afzonderen van de eerste of de laatste term en verandering van sommatie-index. Eerst een voorbeeld:

Voorbeeld 5.2.1.

Beschouw de som

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14. \tag{4}$$

Zonderen we hierin de eerste term af, dan bekomen we

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2 + \sum_{k=2}^{3} 2^k,$$

de laatste term afzonderen geeft

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{k=1}^{2} 2^k + 8.$$

We kunnen ook een substitutie uitvoeren van de sommatie-index. Stellen we bijvoorbeeld $p = k + 6$. Hoe schrijven we deze som als een som over de index p i.p.v. over de index k?

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{p=\dots}^{\dots} 2^{\cdots}$$

- Als $p = k + 6$, dan is $k = p - 6$.
- Als $k = 1$, dan is $p = 7$.
- Als $k = 3$, dan is $p = 9$.

Zo bekomen we

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{p=7}^{9} 2^{p-6} = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14.$$

Wanneer de sommatie over k-waarden van 1 t.e.m. 3 vervangen wordt door een sommatie met ondergrens 0 en bovengrens 2, wordt hetzelfde resultaat bekomen, mits de juiste aanpassing in de algemene term:

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k \overset{l \overset{\text{def}}{=} k-1}{=} \sum_{l=0}^{2} 2^{l+1} = \sum_{k=0}^{2} 2^{k+1} = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14.$$

Eigenschap 5.2.1 (Eigenschappen sommatie)**.** Voor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m \leq n$ geldt:

(a) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n-m+1 \text{ keer}} = (n - m + 1)\alpha$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7 = 7 + 7 + 7 = 21$

(b) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7^k = 7^2 + 7^3 + 7^4 = 7^2 + \sum_{k=3}^{4} 7^k$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

(c) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7^k = 7^2 + 7^3 + 7^4 = \sum_{k=2}^{3} 7^k + 7^4$

(d) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+r}^{n+r} a_{j-r}$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} 2^k = \sum_{j=5}^{7} 2^{j-4} = 2^1 + 2^2$

(e) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \left(\alpha a_k + \beta b_k\right) = \alpha \sum_{k=m}^{n} a_k + \beta \sum_{k=m}^{n} b_k$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \left(5 \cdot 2^k + 7 \cdot 3^k\right) = 5 \cdot \sum_{k=1}^{3} 2^k + 7 \cdot \sum_{k=1}^{3} 3^k$

Regel (d) betekent dat we de grenzen van de sommatie kunnen verschuiven, als we overgaan op een nieuwe sommatie-index. Deze formule is een veralgemening van $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$. Je kan later deze rekenregel zelfs proberen vergelijken met de substitutieregel in de integraalrekening: als men in een bepaalde integraal een substitutie van de integratieveranderlijke doorvoert, moeten ook de integratiegrenzen van de integraal correct worden aangepast.

Regel (e) lezen we als: een sommatie van een lineaire combinatie is de lineaire combinatie van de sommaties. Merk op dat de haakjes in het linkerlid *niet* mogen worden weggelaten.

Eigenschap 5.2.2 (Gevolgen)**.**

(a) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \left(a_k + b_k\right) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=m}^{n} a_k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \left(\alpha a_k + \beta\right) = \alpha \sum_{k=m}^{n} a_k + (n-m+1)\beta$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{n+p} a_{k-p}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$

(g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k} + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k$

Voorbeeld 5.2.2. Reken onderstaande sommen uit als je weet dat $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} x_m = 10, \sum_{m=4}^{8} y_m = 15$ en

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

$x_3 = 2$.

1. $\sum_{m=4}^{8} (y_m + 3) = 30$

Uitwerking: $\sum_{m=4}^{8} (y_m + 3) = \sum_{m=4}^{8} y_m + \sum_{m=4}^{8} 3 = \sum_{m=4}^{8} y_m + 5 \cdot 3 = 15 + 15 = 30$

2. $\sum_{m=4}^{8} (8x_m + 2) = 90$

Uitwerking: $\sum_{m=4}^{8} (8x_m + 2) = 8 \sum_{m=4}^{8} x_m + 5 \cdot 2 = 8 \cdot 10 + 10 = 90$

3. $\sum_{m=3}^{8} \frac{x_m}{4} = 3$

Uitwerking: $\sum_{m=3}^{8} \frac{x_m}{4} = \frac{x_3}{4} + \sum_{m=4}^{8} \frac{x_m}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{m=4}^{8} x_m = \frac{1}{2} + \frac{10}{4} = 3$

4. $\sum_{k=1}^{6} x_{k+2} = 12$

Uitwerking: $\sum_{k=1}^{6} x_{k+2} \overset{\text{def } m = k+2}{=} \sum_{m=3}^{8} x_m = x_3 + \sum_{m=4}^{8} x_k = 2 + 10 = 12$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2.A Oefeningen somteken



Oefening 5.2.1. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{k=2}^{5} k = \ldots\ldots$
2. $\sum_{k=1}^{3} 10 = \ldots\ldots$
3. $\sum_{i=2}^{5} (2i+1)^2 = \ldots\ldots$
4. $\sum_{l=3}^{6} 4 = \ldots\ldots$
5. $\sum_{m=2}^{4} \frac{20}{m} = \ldots\ldots$

Oefening 5.2.2. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{k=1}^{3} k^3 = \ldots\ldots$
2. $\sum_{k=-3}^{3} k^3 = \ldots\ldots$
3. $\sum_{k=-30}^{30} k^3 = \ldots\ldots$
4. $\sum_{n=-k}^{k} n^3 = \ldots\ldots \quad (k \in \mathbb{N})$

Oefening 5.2.3. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = \ldots\ldots$
2. $\sum_{k=2}^{4} 2^k = \ldots\ldots$
3. $\sum_{k=1}^{3} 3 = \ldots\ldots$
4. $\sum_{a=0}^{5} (2a+1) = \ldots\ldots$
5. $\sum_{l=1}^{4} (5l-1) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2.A Oefeningen somteken

6. $\sum_{i=1}^{6} \frac{60}{i} = \ldots\ldots$

Oefening 5.2.4. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{i=m}^{m+5} k = \ldots\ldots \quad (m \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{R})$

2. $\sum_{k=0}^{3} \sin^2\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \ldots\ldots$

3. $\sum_{k=1}^{5} (n-k) - 7 = \ldots\ldots \quad (n \in \mathbb{R})$

4. $\sum_{p=0}^{8} 10^{5-p} = \ldots\ldots$

5. $\sum_{n=2}^{5} \left(\sum_{k=1}^{n} n\right) = \ldots\ldots$

6. $3\sum_{j=0}^{3} k + j = \ldots\ldots \quad (j,k \in \mathbb{R})$

Oefening 5.2.5. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{j=0}^{5} 2^k = \ldots\ldots \quad$ met $k \in \mathbb{R}$

2. $\sum_{k=17}^{21} 5 + \sqrt[k]{1+k} = \ldots\ldots \quad$ met $k \in \mathbb{R}_0$

Oefening 5.2.6. Schrijf met een sommatieteken:

1. $2 + 5 + 10 + 17 + 26 = \sum_{k=1}^{5} \ldots\ldots$

2. $2 + 6 + 12 + 20 + 30 = \sum_{k=2}^{6} \ldots\ldots$

3. $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 = \sum_{k=1}^{7} \ldots\ldots$

Oefening 5.2.7. Vul aan.

1. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{k=1}^{2} k^2 + \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2.A Oefeningen somteken

2. $\sum_{m=2}^{5} 4m = \ldots\ldots + \sum_{m=3}^{5} 4m$

3. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{k=3}^{\ldots\ldots} \ldots\ldots$

4. $\sum_{m=2}^{5} 2^m = \sum_{p=5}^{\ldots\ldots} 2^{\cdots\cdots}$

Oefening 5.2.8. Vul aan:

1. $\sum_{i=1}^{4} 3i^2 = \sum_{j=5}^{\ldots\ldots} \ldots\ldots$

2. $\sum_{i=3}^{5} \left(2i^2+3\right) = \sum_{i=3}^{4} \left(2i^2+3\right) + \ldots\ldots$

3. $\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 + \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 De faculteit $n!$

Een macht a^n is een korte notatie voor het product van n keer hetzelfde getal a, namelijk $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n$. De faculteit $n!$ is een kort notatie voor het product van de getallen van 1 tot een bepaald getal n, namelijk $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n!$. We lezen $n!$ als n-faculteit of de faculteit van n.

De faculteit komt voor bij de binomiaalgetallen (en dus bij het binomium van Newton), bij telproblemen, kansberekeningen en statistiek, maar ook in de analyse, bv bij taylorreeksen.

Definitie 5.3.1 (Faculteit)**.** De **faculteit** van een natuurlijk getal $n!$ (lees: n-faculteit) is

$n! \stackrel{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ als $n \in \mathbb{N}_0$ Vb: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$

We kunnen natuurlijk de volgorde van de factoren omkeren, en ook schrijven:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Voorbeeld 5.3.1.

1. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

2. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4! = 120$

3. $100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 100!$

Uitwerking: Het is redelijkerwijze niet mogelijk om $100!$ volledig in te tikken: het heeft 158 digits. Voor wie het toch heeft uitgerekend: het antwoord is 93 326 215 443 944 152 681 699 238 856 266 700 490 715 968 264 381 621 468 592 963 895 217 599 993 229 915 608 941 463 976 156 518 286 253 697 920 827 223 758 251 185 210 916 864 000 000 000 000 000 000 000 000. Dit getal is tamelijk groot, en zeker erg veel groter dan het geschatte aantal atomen in het universum, dat slechts hoogstens 10^{82} zou bedragen.

4. $\dfrac{100!}{98!} = 100 \cdot 99 = 9900$

Uitwerking: $\dfrac{100!}{98!} = \dfrac{100 \cdot 99 \cdot \cancel{98} \cdot \cancel{97} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{98} \cdot \cancel{97} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}$

5. $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = \dfrac{50!}{46!}$

De voorbeelden illustreren volgende rekenregels voor de faculteitsoperatie:

Eigenschap 5.3.1.

$n! = n(n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}_0$ Vb: $7! = 7 \cdot 6!$

$(n+1)! = (n+1)n!, \quad n \in \mathbb{N}$ Vb: $7! = 7 \cdot 6!$

$\dfrac{n!}{p!} = n(n-1)\ldots(p+1), \ p < n$ Vb: $\dfrac{7!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$

want $\dfrac{n!}{p!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(p+1)\cancel{p \cdot (p-1)} \ldots \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{p \cdot (p-1)} \ldots \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = n(n-1)\ldots(p+1)$

Merk op dat de eerste twee regels precies hetzelfde zeggen namelijk dat de faculteit van een natuurlijk getal gelijk is aan het product van dat getal met de faculteit van het vorige natuurlijke getal.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3.A Oefeningen faculteit

Oefening 5.3.1. Bereken:

1. $7! = \ldots\ldots$
2. $6 \cdot 5! \cdot 7 = \ldots\ldots$ (korte formule) $= \ldots\ldots$ (getal)
3. $\dfrac{10!}{7!} = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{1984!}{1983!} = \ldots\ldots$

Oefening 5.3.2. Vereenvoudig. $(k, n \in \mathbb{N}$ en $k + n \geqslant 2)$

1. $\dfrac{(k+1)!}{k!} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{(k+3)!}{k!} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{(k+n)!}{k+n-1} = \ldots\ldots$

Oefening 5.3.3. Vereenvoudig. $(m, n \in \mathbb{N}$ met $m \neq 0$ en $n < m - 1)$

1. $\dfrac{m!}{(m-1)!} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{(m+4)!}{m!} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{(m-n)!}{(m-n-1)(m-n)} = \ldots\ldots$

Oefening 5.3.4. Vul aan. $(k, l, m \in \mathbb{N}$ en $l \geqslant 3)$

1. $(k+1)! + k! = (\ldots\ldots)k!$
2. $3(l-2)! + 2(l-3)! = (\ldots\ldots)(l-3)!$

Oefening 5.3.5. Juist of fout? ($n, k, l \in \mathbb{N}_0$ en $l < k$)

1. $(n+4)!(n+3) \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Juist | Fout
2. $(n+4)(n+3)! \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Juist | Fout
3. $(n+4)(n+3)! \stackrel{?}{=} (n+4)!$ Juist | Fout
4. $\dfrac{(n+4)!}{(n+3)} \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Juist | Fout
5. $\dfrac{(n+4)!}{(n+4)} \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Juist | Fout
6. $\dfrac{(n+4)!}{(n+3)!} \stackrel{?}{=} (n+4)!$ Juist | Fout

CC BY-NC-SA 4.0

5.3.A Oefeningen faculteit

7. $\dfrac{(n+4)!}{(n+3)!} \stackrel{?}{=} (n+4)$ Juist | Fout

8. $\dfrac{(n+4)!}{4!} \stackrel{?}{=} n!$ Juist | Fout

9. $\dfrac{(4n)!}{4} \stackrel{?}{=} n!$ Juist | Fout

10. $\dfrac{n!4!}{5!} \stackrel{?}{=} \dfrac{n!}{5}$ Juist | Fout

11. $\dfrac{n!6!}{(n-1)!5!} \stackrel{?}{=} 6n$ Juist | Fout

12. $\dfrac{k!}{(k+2)!(k-l-1)!} \stackrel{?}{=} \dfrac{k!(k-l)}{(k+2)!(k-l)!}.$ Juist | Fout

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Binomiaalgetallen

We definiëren een handige notatie voor getallen die in allerlei contexten opduiken:

Definitie 5.4.1 (Binomiaalgetallen)**.**

Het **binomiaalgetal** n **over** p, genoteerd $\binom{n}{p}$, van twee natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ is

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Vb: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$

Opmerking 5.4.1.

(a) Men leest $\binom{n}{p}$ als 'n over p' of als 'n kies p'.
Maar, let hiermee op want ook de breuk $\frac{n}{p}$ wordt soms gelezen als n over p.

(b) Deze getallen komen voor in het Binomium van Newton, en dat verklaart de naam *binomiaal*getallen.

(c) Deze getallen komen ook voor bij de studie van telproblemen: $\binom{n}{p}$ is precies gelijk aan het aantal *deelverzamelingen* van p elementen uit een verzameling van n elementen. Dat aantal wordt ook genoteerd als C_n^p. Er geldt dus dat (let op de omwisseling van de sub- en superscripts!):

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Voorbeeld 5.4.1 (Basisvoorbeeld)**.**

(a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1})(2 \cdot 1)} = 10 \quad (= C_5^3)$

(b) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \binom{5}{3} = 10$ (zie hierboven)

(c) $\binom{2}{2} = \frac{\cancel{2!}}{\cancel{2!}0!} = 1 \quad (= C_2^2)$ (want $0! = 1$)

(d) $\binom{4}{0} = \frac{\cancel{4!}}{0!\cancel{4!}} = 1 \quad (= C_4^0)$

(e) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4 \quad (= C_4^1)$ (want $4! = 4 \cdot 3!$).

Volgende rekenregels kunnen eenvoudig worden afgeleid uit de definitie (behalve de laatste: daar is zelf het bewijs vinden wat uitdagender, maar niet onmogelijk).

Eigenschap 5.4.1 (Rekenregels binomiaalgetallen)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Binomiaalgetallen

Voor natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ geldt:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} &= \binom{n}{n-p} \\
\binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 \\
\binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n \qquad n \geq 1 \\
\binom{n+1}{p} &= \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \qquad p \geq 1
\end{aligned}$$

Volgende eigenschap is een veralgemening van merkwaardige producten als:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

Bijvoorbeeld de laaste vergelijking kunnen we ook schrijven als

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

Deze eigenschap levert ook de verklaring voor het woord *binomiaal*, want een '*bi*noom' is een '*twee*term' (net zoal een *mo*noom een *één*term is, en een *poly*noom een *veel*term). De binomiaalgetallen $\binom{n}{p}$ zijn dus precies die coëfficiënten die opduiken bij de p-de term als je een binoom verheft tot de n-de macht. We gebruiken het sommatieteken $\sum$:

Eigenschap 5.4.2 (Binomium van Newton)**.**

Voor reële getallen a en b en een natuurlijk getal n geldt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

Omdat $(a+b)^n = (b+a)^n$ (of omwille van de eerste rekenregel voor binomiaalgetallen) geldt ook dat

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p}.$$

Oefening 5.4.1. Bereken volgende uitdrukkingen.

1. $\binom{5}{1} = \ldots\ldots$
2. $\binom{20}{19} = \ldots\ldots$
3. $\binom{2019}{1302} + \binom{2019}{1301} = \binom{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$
4. $\binom{42}{20} - \binom{42}{22} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.4.A Herhaling somteken, faculteit en binomiaalgetallen

Oefening 5.4.2. Vul aan: ($m \in \mathbb{N}$)

1. $\dfrac{4}{(m+1)!} - \dfrac{1}{m!} = \dfrac{\dots\dots}{(m+1)!}$
2. $\displaystyle\sum_{k=5}^{14} k^2 = \sum_{l=1}^{10} \dots\dots$
3. $(m+2)! + (m+3)! = (m+2)!(\dots\dots)$

Oefening 5.4.3. Schrijf volgende sommaties voluit.

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} 2ju_{2j}^2 = \dots\dots$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \dots\dots$

Oefening 5.4.4. Juist of fout? ($n, k, l \in \mathbb{N}_0$ en $a, b \in \mathbb{R}$ en $p \in \mathbb{N}$ met $n > p$ en $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2+k) \stackrel{?}{=} 2n + \sum_{k=1}^{n} k.$ Juist | Fout
2. $\binom{5}{1} \stackrel{?}{=} \binom{5}{4}$ Juist | Fout
3. $\binom{2}{0} \stackrel{?}{=} \binom{2}{2}$ Juist | Fout
4. $\binom{n}{p} \stackrel{?}{=} \binom{n}{n-p}$ Juist | Fout
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(ak^2+b\right) \stackrel{?}{=} a\sum_{k=1}^{n} k^2 + b$ Juist | Fout
6. $\displaystyle\sum_{l=1}^{n+1}(l+1)^2 \stackrel{?}{=} \sum_{l=1}^{n}(l+1)^2 + (n+1)^2$ Juist | Fout
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \stackrel{?}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ Juist | Fout

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 6
Veeltermen

(Versie 2026/08/25H.51)

6.1 Intro veeltermen

Een interessante eerste stap in de verkenning van de Wondere Wereld van de Wiskunde is een kennismaking met zogenaamde *veeltermen*. Veeltermen zijn ideaal om te leren *rekenen met letters*. Om historische redenen spreken we meestal over 'veeltermen in x', dat zijn combinaties van machten van de letter x. Voorbeelden zijn

$$2x+3$$
$$x^2+6x+9$$
$$1492x^{42}+1302x^2+1830$$

Veeltermen worden gebruikt bij

- *functies*: $x \mapsto 2x+6$ is een *eerstegraadsfunctie*, $x \mapsto x^2-4$ is een *kwadratische functie*
- *oplossen van vergelijkingen*: $2x+6=0$ enkel als $x=-3$, en $x^2-4=0$ enkel als $x=\pm 2$
- *meetkunde*: $y=2x+6$ is de vergelijking van een *rechte* en $y=x^2-4$ is de vergelijking van een *parabool*
- *rekenen*: $(x-2)(x+2)=x^2-4$. We zeggen dat de veelterm x^2-4 een *veelvoud* is van de veelterm $x-2$, en dat de veelterm $x-2$ dus een deler is van x^2-4. De veelterm $x+2$ is het quotiënt van x^2-4 en $x-2$. We schrijven voor veeltermen dat $x+2=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, net zoals we voor getallen schrijven dat $6=\dfrac{12}{2}$.

Bij elk van bovenstaande topics vormen de veeltermen een eenvoudig en typisch onderdeel van een veel ruimer studiegebied. We zullen verder inderdaad veel algemenere functies, vergelijkingen en meetkundige objecten bestuderen. De veeltermen – in het bijzonder de veeltermen van de eerste en de tweede graad – vormen telkens een interessante eerste kennismaking.

In wat volgt hebben we de leerstof over veeltermen als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding

(2) Eigenschappen van veeltermen van de eerste graad

(3) Eigenschappen van veeltermen van de tweede graad

(4) Een algemene definitie van veeltermen

(5) Eigenschappen van de deling van veeltermen

(6) Het algoritme voor de Euclidische deling van veeltermen

(7) Een belangrijk speciaal geval van deling door lineaire factoren

(8) Het algoritme van Horner voor veeltermen

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Eerstegraadsveeltermen

De meest eenvoudige veeltermen zijn die van de *eerste graad*. We bespreken hier enkele eigenschappen, en leggen het verband tussen de verwante begrippen *veelterm*, *functie* en *vergelijking*.

Definitie 6.2.1. Voor reële getallen a en b met $a \neq 0$ geldt:

- Een **eerstegraads*veelterm* in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
  $ax + b$ Vb: $2x - 3$
- Aan dergelijke veelterm is volgende **eerstegraads*functie*** geassocieerd:
  $x \mapsto ax + b$ Vb: $x \mapsto 2x - 3$
- Een **eerstegraads*vergelijking*** (of ook ***lineaire* vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
  $ax + b = 0$ Vb: $2x - 3 = 0$

Opmerking 6.2.1.

- Het woord *lineair* betekent in eerste instantie 'zoals een *lijn*', dus 'zoals een rechte'. Omdat een rechte een vergelijking heeft van de eerste graad, is het gebruik van het woord *lineair* uitgebreid naar 'van de eerste graad'. Voor vergelijkingen zijn 'lineair' en 'van de eerste graad' dus synoniemen. Maar voor functies heeft het begrip lineair in de wiskunde een beperktere en meer technische betekenis. Een functie is *lineair* als voor alle getallen a en b geldt dat $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$. In die betekenis is de functie $x \mapsto 2x$ wel degelijk lineair, maar de functie $x \mapsto 2x + 1$ is *niet* lineair. Daarom vermijden we het gebruik van het woord *lineair* voor functies en spreken we steeds over *eerstegraadsfuncties*. In sommige handboeken worden echter andere afspraken gemaakt.
- In de uitdrukking $ax + b$ heeft de letter x de rol van *variabele* of *onbekende*, terwijl de letters a en b *parameters* of *constanten* zijn en dus *willekeurige getallen* voorstellen. In plaats van x worden soms ook y, z of t gebruikt, en voor a en b komen ook $k, l, p, q, m, \alpha, \beta, \ldots$ dikwijls voor.

  Bij functies moet je dus steeds duidelijk aangeven *welke letter* de rol van variabele of onbekende heeft, en welke letters als parameters worden gebruikt. De notatie $x \mapsto ax + b$ zegt precies dat x de variabele is, terwijl z de variabele is in $z \mapsto pz + q$, en a de variabele is in $a \mapsto 2a + 3$.

Eigenschap 6.2.1. Voor een eerstegraadsfunctie $x \mapsto ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, geldt:

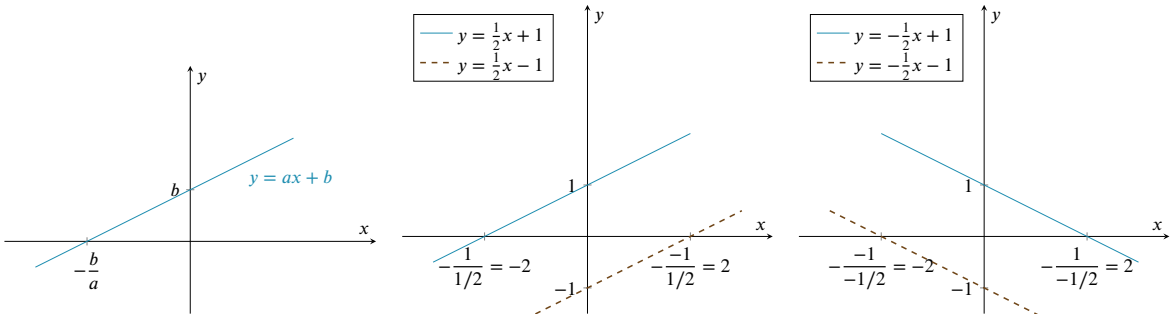
- de grafiek van de functie is een *rechte* met vergelijking $y = ax + b$ en **richtingscoëfficiënt** a.
- als a positief is, is de functie strikt *stijgend* en als a negatief is de functie strikt *dalend*.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de y-as is het punt $(0, b)$.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de x-as is het punt $(-\frac{b}{a}, 0)$. Het getal $-\frac{b}{a}$ is ook het (enige) *nulpunt* van de functie, en de (enige) oplossing van de vergelijking $ax + b = 0$.

Dit leidt tot volgend **tekenverloop** (ook *tekentabel*) voor de functie $x \mapsto ax + b$:

x		$-b/a$	
$ax + b$ met $a > 0$	$-$	0	$+$
$ax + b$ met $a < 0$	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Eerstegraadsveeltermen



Opmerking 6.2.2.

- We spreken meestal van *nulpunten* van een functie, *oplossingen* van een vergelijking en *wortels* van veeltermen, maar deze begrippen betekenen hetzelfde.
- als $a = 0$ reduceert de functie zich tot $x \mapsto 0x + b = b$, en dat is geen eerstegraadsfunctie maar een *constante* functie. De grafiek is dan de *horizontale* rechte met vergelijking $y = b$. Deze functie heeft *geen nulpunten* (en de grafiek dus geen snijpunten met de x-as), tenzij ook $b = 0$. In dat laatste geval zijn er *oneindig veel nulpunten* (en dus snijpunten), want dan is de functie de nulfunctie $x \mapsto 0$.

Voorbeeld 6.2.1.

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $8 - 4x < 0$.

Uitwerking: Je kan het tekenverloop maken van de functie $x \mapsto ax + b = -4x + 8$.
Het nulpunt is $-b/a = 8/4 = 2$, en de coëfficiënt $a = -4$ is negatief, dus is de tekentabel

x	$\|\|$		2	
$8 - 4x$	$\|\|$	$+$	0	$-$

De oplossingsverzameling is dus $V =]2, +\infty[$.

In dit geval kan je natuurlijk veel beter de ongelijkheid oplossen via

$$\begin{aligned} 8 - 4x < 0 &\iff 8 < 4x \\ &\iff 2 < x \end{aligned}$$

De tekentabel wordt pas nuttig in meer ingewikkelde gevallen om eenvoudig een boekhouding bij te houden van de verschillende nulpunten en tekens.

Definitie 6.2.2. Een **eerstegraadsvergelijking** (of **lineaire vergelijking**) **in twee onbekenden** x, y is een uitdrukking van de vorm

$ax + by + c = 0$ Vb: $2x + 3y - 4 = 0$

met $a, b, c \in \mathbb{R}$ waarbij a en b niet beide nul zijn.

Eigenschap 6.2.2.

De verzameling van alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan de vergelijking $ax + by + c = 0$ vormen een rechte:

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Eerstegraadsveeltermen

- Als $b \neq 0$ is kan je beide leden delen door b :

$$y = -\frac{1}{b}(ax + c) \quad \text{of} \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

dit is de grafiek van de reële functie $x \mapsto mx + q$ met $m = -\frac{a}{b}$ en $q = -\frac{c}{b}$.

Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan de vergelijking $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ vormen dus een rechte met richtingscoëfficiënt $-\frac{a}{b}$ en snijpunt met de y-as $-\frac{c}{b}$.

- Als $b = 0$ is de vergelijking $ax + c = 0$, of dus $x = -\frac{c}{a}$. Merk op dat er geen voorwaarde is op y, en y kan dus alle mogelijke waarden aannemen. Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan $x = -\frac{c}{a}$ vormen bijgevolg de verticale rechte $x = -\frac{c}{a}$.

Opmerking 6.2.3. We bespreken hier telkens *één* lineaire vergelijking. Meerdere vergelijkingen *tegelijk* oplossen (met mogelijk ook meer dan twee onbekenden) noemen we *stelsels van lineaire vergelijkingen* oplossen en behoort tot de zogenaamde *lineaire algebra*.

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Tweedegraadsveeltermen

Vergelijkingen van de eerste graad in één onbekende hebben steeds één oplossing. Voor vergelijkingen van de tweede graad is de situatie iets ingewikkelder.

Definitie 6.3.1. Voor reële getallen a, b, c met $a \neq 0$ geldt:

- Een **tweedegraadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

  $ax^2 + bx + c$ Vb: $2x^2 - 3x + 4$

- Aan dergelijke veelterm is volgende **(kwadratische) functie** geassocieerd:

  $x \mapsto ax^2 + bx + c$ Vb: $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$

- Een **tweedegraadsvergelijking** (ook **vierkantsvergelijking** of **kwadratische vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

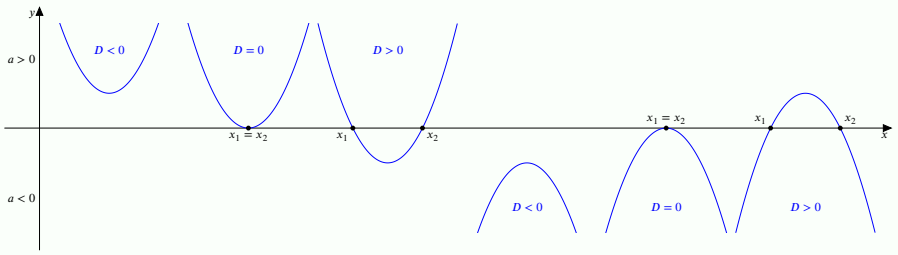
  $ax^2 + bx + c = 0$ Vb: $2x^2 - 3x + 4 = 0$

Eigenschap 6.3.1. Voor de functie $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ geldt:

- de grafiek van f is een **parabool** met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$.
- als a negatief is, is dat een **bergparabool**, als a positief is, is dat een **dalparabool**.
- de nulpunten van f zijn de oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, en die vinden we met behulp van de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ waarbij geldt dat
  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende reële** nulpunten.
  - Als $D = 0$ zijn er **twee gelijke reële** nulpunten.
  - Als $D < 0$ zijn er **geen reële** nulpunten.
- als $D \geq 0$ worden de nulpunten (of wortels) gegeven door

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(wortelformule)}$$

  Deze nulpunten zijn de snijpunten van de grafiek van $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ met de x-as. Als $D = 0$ is $x_1 = x_2$ en hebben we slechts 1 snijpunt met de x-as.
- de functie f heeft volgend **tekenverloop** (of **tekentabel**):



  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende nulpunten** $x_1 < x_2$, en volgend tekenverloop:

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Tweedegraadsveeltermen

– Als $D = 0$ zijn er **twee samenvallende nulpunten** $x_1 = x_2$, en volgend tekenverloop:

x		$x_1 = x_2$	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$-$

– Als $D < 0$ zijn er **geen nulpunten**, en volgend tekenverloop:

x	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$

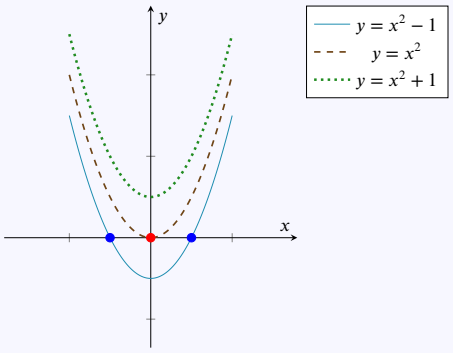
- de **top** van de parabool heeft als coördinaten $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- bij een bergparabool is $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ het **maximum** van f, bij een dalparabool het **minimum**.
- de **symmetrie-as** is de verticale rechte door de top, dus met vergelijking $x = -\frac{b}{2a}$.
- het bereik van een kwadratische functie gaat van min oneindig tot het maximum voor een bergparabool en van het minimum tot plus oneindig voor een dalparabool.
- de parabool snijdt de y-as in het punt $(0, c)$. (Vul $x = 0$ in in de vergelijking $ax^2 + bx + c$.)
- de parabool snijdt de x-as in de nulpunten van f. (Per definitie van het begrip nulpunt.)

Voorbeeld 6.3.1.

1. Bereken de nulpunten van de functies $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 - 1$ en $x \mapsto x^2 + 1$, en maak een tekening.

Uitwerking: De nulpunten van $x \mapsto x^2$ zijn 0 (twee keer, maar aan elkaar gelijk), die van $x \mapsto x^2 - 1$ zijn ± 1, en $x \mapsto x^2 + 1$ heeft geen reële nulpunten.

De grafieken van de overeenkomstige functies – waarop het aantal nulpunten direct afleesbaar is – zijn:



2. Geef de oplossingen van de vergelijking $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Uitwerking: De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -2$ en $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -3$.

3. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Tweedegraadsveeltermen

Uitwerking: We vinden dat $D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$. Dus $x_1 = x_2 = \frac{-6}{2 \cdot 9} = \frac{-1}{3}$.

4. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$.

Uitwerking: De nulpunten zijn -2 en -3. De coëfficiënt $a = 1$ is positief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = -3$		$x_2 = -2$	
$x^2 + 5x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$.

Eigenschap 6.3.2.

Als x_1 en x_2 de wortels zijn van $ax^2 + bx + c$, dan kunnen we deze veelterm **ontbinden in factoren**:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ Vb: $2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2)$

Voorbeeld 6.3.2. Ontbind $2x^2 + 5x + 3$ in factoren.

Uitwerking:

De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \frac{-5+1}{4} = -1$ en $x_2 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2}$, en dus

$$2x^2 + 5x + 3 = 2\,(x - (-1))\left(x - (-\tfrac{3}{2})\right) = 2\,(x+1)\left(x + \tfrac{3}{2}\right) = (x+1)\,(2x+3)$$

Opmerking 6.3.1. Een veelgemaakte fout bij het ontbinden van factoren is het vergeten van de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm. Herneem vorig voorbeeld: Zowel $(x+1)(x+\frac{3}{2})$ als $2(x+1)(x+\frac{3}{2})$ hebben nulpunten -1 en $-\frac{3}{2}$, maar enkel $2(x+1)(x+\frac{3}{2}) = 2x^2 + 5x + 3$.
Je kan narekenen dat $(x+1)(x+\frac{3}{2}) = x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \neq 2x^2 + 5x + 3$.

Opmerking 6.3.2. Omdat $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2$ vind je door gelijkstelling van de gelijknamige coëfficiënten van x ook dat

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{(product van de wortels)}$$

Het is dus niet nodig om de wortels zelf te berekenen als je enkel geïnteresseerd zou zijn in de som of het product van de wortels: die kan je immers beide direct afleiden uit de vergelijking.

Als $a = 1$ (en daar kan je altijd voor zorgen door te delen door a) is de vergelijking van de vorm $x^2 + bx + c = 0$ en worden de formules eenvoudiger:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad \text{(wortels)}$$

$$x_1 + x_2 = -b \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = c \qquad \text{(product van de wortels)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3.A Oefeningen eerste- en tweedegraadsveeltermen

Oefening 6.3.1. Los de volgende veeltermvergelijkingen op naar x.

1. $3x - 5 = x + 9$ $x = \ldots\ldots$

2. $5x^2 + 2x - 5 = 3x^2 + 4x + 7$ $\ldots\ldots$

3. $x^2 - x + 1 = -5 + x$ $\ldots\ldots$

4. $x + 10 = -2x + \frac{1}{2}$ $x = \ldots\ldots$

5. $2x + 1 = 2x^2 - 3$ $\ldots\ldots$

Oefening 6.3.2. Geef het tekenverloop van de functie f met het gegeven functievoorschrift. (Bepaal het nulpunt/ de nulpunten van de functie en vul de correcte tekens aan in de tabel.)

1. $f(x) = -x + 8$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

2. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$

x	
$f(x)$	$\ldots\ldots$

3. $f(x) = x^2 + 5x - 6$

x		$\ldots\ldots$		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

4. $f(x) = x^2 - 6x + 9$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

5. $f(x) = -(x-2)(x+2)$

x		$\ldots\ldots$		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

6. $f(x) = 3x + 2$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

Oefening 6.3.3. Ontbind in factoren

1. $x^2 + x - 6 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3.A Oefeningen eerste- en tweedegraadsveeltermen

2. $3x^2 + 12x - 15 = \ldots\ldots$

Oefening 6.3.4. Geef de oplossingen van volgende kwadratische vergelijkingen in onbekende x.

1. $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3}(1-p) = 0$. Hierin is $p > 0$ een zekere constante.

2. $yx^2 + x - y = 0$. Hierin is $y \neq 0$ een zekere constante.

Oefening 6.3.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $e^{2x} + e^x - 6 = 0 \qquad x = \ldots\ldots$

2. $e^x - 4e^{-x} = 3 \qquad x = \ldots\ldots$

Oefening 6.3.6. Los volgende ongelijkheden op:

1. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $x^2 > 1$. Maak ook een tekening. Antwoord: $\ldots\ldots$

2. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $x^2 - 3 > 2x$. Maak een tekening. Antwoord: $\ldots\ldots$

3. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $x^2 > 2x$. Maak een tekening. Antwoord: $\ldots\ldots$

4. Bereken welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $-2x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$. Antwoord: $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Veeltermen

Een veelterm in x is een som van veelvouden van machten van x zoals $x^{1302} + 11x^7 + 1830$:

Definitie 6.4.1 (Veelterm)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \dots a_n \in \mathbb{R}$ met $a_n \neq 0$.

- Een n-**de graadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  De $a_i x^i$ zijn **termen** van de veelterm, de a_i zijn **coëfficiënten**, en n is de **graad**.
  Men noteert de graad van $p(x)$ soms met $\text{gr}(p(x)) \overset{\text{def}}{=} n$.

- Met deze veelterm $p(x)$ kunnen we een **veeltermfunctie** p associëren:

$$p : x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Een n-**de graadsvergelijking in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

- De **getalwaarde** van $p(x)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ is het getal $p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$.

Voorbeeld 6.4.1.

De veelterm $p(x) = x^{1302} + 11x^7 + 1830$ heeft drie termen, met coëfficiënten $1, 11$ en 1830. Hij heeft graad 1302, en zijn getalwaarde in 1 is $p(1) = 1^{1302} + 11x^7 + 1830 = 1 + 11 + 1830 = 1842$. Zijn functiewaarde $p(2) = 2^{1302} + 11 \cdot 2^7 + 1830$ is een tamelijk groot natuurlijk getal, maar de getalwaarde in 0 daarentegen is eenvoudig $p(0) = 0 + 0 + 1830 = 1830$.

Voorbeeld 6.4.2.

- $2x + 3$ is een eerstegraadsveelterm.
- $5x^2 + 7x + 1$ is een tweedegraadsveelterm.
- $x^{2022} - 1$ is een veelterm van graad 2022.
- 7 is een veelterm van graad 0.
- $ax + b$ is een veelterm met 'parameters' of 'constanten' a en b in plaats van concrete getallen. Als $a \neq 0$ is het een eerstegraadsveelterm.
- $\sqrt{\pi}x^5 - e^y + \alpha^2$ is een veelterm in x van de vijfde graad, met parameters y en α.
- $x^2 - e^x$ is *geen* veelterm in x wegens de exponentiële functie.

Je kan ook veeltermen in andere letters tegenkomen: $5t^2 + 3t$ en $t + \cos\alpha$ zijn veeltermen in t, en $e^{2x}u^2 - 1$ is een veelterm in u (maar niet in x).

Opmerking 6.4.1.

- De nulveelterm 0 is de enige veelterm waarvoor de graad *niet bepaald* is.

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Veeltermen

- Volgens deze definitie is een veelterm dus een formele *uitdrukking* (of een *formule*: een reeks letters, cijfers en enkele symbolen zoals + en −). We *rekenen* met dergelijke uitdrukkingen volgens voor de hand liggende rekenregels zoals:

$$2x + 3x = 5x$$

$$2 \cdot (5x) = 10x$$

$$(2x) \cdot (5x) = 10x^2$$

- Veeltermen zijn de functies die met enkel de elementaire bewerkingen optellen en vermenigvuldigen kunnen worden berekend. In meer gevorderde cursussen wiskunde wordt aangetoond dat erg veel functies goed kunnen worden *benaderd* door veeltermen.
- Een veelterm met één term noemen we een *term*, *éénterm* of *monoom*. Een veelterm met twee termen is een *tweeterm* of *binoom*. En één met *veel termen* is dus een *veel*term of *polynoom*.
- De getalwaarde van een veelterm in 0 is precies de constante term a_0 van de veelterm:

$$p(0) = a_n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + \ldots + a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0$$

- Met het sommatieteken kunnen we een veelterm ook schrijven als

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Zoals voor meer algemene functies definiëren we ook voor veeltermen *nulpunten* en *factoren*:

Definitie 6.4.2 (Nulpunten van veeltermen)**.**

Een **nulpunt** (ook **nulwaarde** of **wortel**) van een veelterm $p(x)$ is een reëel getal a waarvoor $p(a) = 0$.

Het zoeken van nulpunten is precies hetzelfde als het oplossen van vergelijkingen:

Eigenschap 6.4.1 (Verband tussen nulpunten en oplossingen van vergelijkingen)**.**

De *nulpunten* van een veelterm zijn de *oplossingen* van de *vergelijking* $p(x) = 0$.

Voorbeeld 6.4.3 (Nulpunten van eenvoudige veeltermen)**.**

1. Het getal 3 is een nulpunt van $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ omdat $p(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$
2. Veelterm $x - 5$ heeft 5 als nulpunt(en).
3. Veelterm $x^2 - 4$ heeft -2 en 2 als nulpunt(en).
4. Veelterm $x^2 + 4$ heeft geen enkel reëel getal als nulpunt(en).

Er zijn relatief eenvoudige procedures om nulpunten te vinden van eerstegraadsveeltermen en tweedegraadsveeltermen. Er bestaan ook (ingewikkeldere) algoritmes voor veeltermen van de derde en vierde graad. Evariste Galois heeft in het begin van de negentiende eeuw aangetoond dat er voor vijfdegraadsveeltermen *geen* algemene procedure *kan* bestaan die alleen gebruik maakt van zogenaamde algebraïsche bewerkingen: optellen/aftrekken, vermenigvuldigen/delen en machtsverheffen/worteltrekken.

Een veelterm $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is per definitie een *som* van termen (vandaar de naam *veel-term*). Het is dikwijls handig om dergelijke som van termen ook te kunnen schrijven als een *product* van factoren. De

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Veeltermen

uitdrukking 'ontbinden in factoren' betekent precies het schrijven van dergelijke som als een product:

Definitie 6.4.3 (Factoren van veeltermen)**.**

Een veelterm $d(x)$ is een **factor** van een veelterm $p(x)$ als we $p(x)$ kunnen schrijven als een product van $d(x)$ met een andere veelterm.

Dus: $d(x)$ is een *factor* van $p(x)$ als $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$.

Een factor van de nulde graad (dus een getal) is een **triviale factor**. We beschouwen die meestal niet als 'echte' factor.

Een veelterm $p(x)$ **ontbinden in factoren** betekent hem schrijven als een product van zo veel mogelijk niet-triviale factoren.

Voorbeeld 6.4.4 (Factoren van veeltermen)**.**

1. $x+1$ is een factor van x^2-1 want $x^2-1 = (x+1)(x-1)$.
2. $x+2$ is geen factor van x^2-1 want voor elke getal $a \in \mathbb{R}$ is $x^2-1 \neq (x+2)(x+a)$.
3. De veelterm $x^2-1 = (x+1)(x-1)$ is ontbonden in factoren.

Men kan volgende eigenschap bewijzen:

Eigenschap 6.4.2 (Verband tussen factoren en nulpunten voor veeltermen)**.**

Een getal a is nulpunt van een veelterm $p(x)$ als en slechts als $x-a$ een factor is van $p(x)$.

In formules: $p(a) = 0 \iff p(x) = (x-a)q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$

Deze eigenschap leert dus dat het zoeken van *nulpunten* hetzelfde is als het zoeken van *lineaire factoren*. En het zoeken van lineaire factoren heeft natuurlijk te maken met ontbinden in factoren.

Opmerking 6.4.2.

Men kan bewijzen dat over de complexe getallen elke veelterm kan ontbonden worden in lineaire factoren. Dat is de zogenaamde Hoofdstelling van de Algebra.

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Deling van veeltermen

Als we veeltermen met elkaar kunnen vermenigvuldigen, zal het waarschijnlijk ook mogelijk zijn ze door elkaar te *delen*.

Voorbeeld 6.5.1 (Delen-met-rest voor natuurlijke getallen.)**.** Zeggen dat de deling van 13 door 4 gelijk is aan 3 met rest 1, betekent dat

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

omdat 4 hoogstens 3 keer in 13 kan, en er blijft dan nog 1 over.

Op dezelfde manier betekent 20 delen door 3 dat

$$20 = 6 \cdot 3 + 2$$

of met symbolen: als we *deeltal* D delen door *deler* d, krijgen we *quotiënt* q en *rest* r als volgende formule geldt:

$$D = q \cdot d + r \text{ met } r < d.$$

Daarbij is het erg belangrijk dat $r < d$: als dat niet het geval is, heb je nog niet ver genoeg gedeeld, want je kan dan de rest r nog verder delen door d.

Als de rest gelijk is aan 0, dan zeggen we dat d een *deler* is van D, en we noteren $d|D$. Merk op dat in dat geval ook het quotiënt q een deler is van D (dus ook $q|D$), en dat we D dus kunnen schrijven als een product

$$D = q \cdot d$$

Dus, 5 en 7 zijn allebei delers van 35 want $35 = 5 \cdot 7$.

Men kan voor veeltermen volgende eigenschap bewijzen:

Eigenschap 6.5.1 (Euclidische deling)**.**

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn,

dan bestaan er unieke veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ zodat volgende gelijkheid geldt

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x) \quad \text{met } \mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$$

Voorbeeld 6.5.2 (Voorbeelden deling van veeltermen)**.**

$p(x) = x^2 + 2x$	en	$d(x) = x + 2$,	dan is $q(x) = x$ en $r(x) = 0$
$p(x) = x^2 + x$	en	$d(x) = x^2$,	dan is $q(x) = 1$ en $r(x) = x$
$p(x) = x + 1$	en	$d(x) = x$,	dan is $q(x) = 1$ en $r(x) = 1$
$p(x) = x$	en	$d(x) = x^2$,	dan is $q(x) = 0$ en $r(x) = x$

Definitie 6.5.1 (Euclidische deling van veeltermen)**.**

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn, en $q(x)$ en $r(x)$ zijn de bijhorende unieke veeltermen zodat $p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$, waarbij $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$,

dan noemen we $p(x)$ het **deeltal**, $d(x)$ de **deler**, $q(x)$ het **quotiënt** en $r(x)$ de **rest**.

Als $r(x)$ de nulveelterm is zegt men: $p(x)$ **is deelbaar door** $d(x)$ en $d(x)$ **is een deler van** $p(x)$.

We noteren dat als

$$d(x) \mid p(x) \iff \text{er bestaat een veelterm } q(x) \text{ zodat } p(x) = q(x)d(x)$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Deling van veeltermen

Opmerking 6.5.1.

(a) Let op de strikte ongelijkheid $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x))$. Dus $\text{gr}(r(x))$ mag niet gelijk zijn aan $\text{gr}(d(x))$.

(b) Het is natuurlijk mogelijk dat $q(x)$ en/of $r(x)$ nul zijn of van de nulde graad (en dus getallen).

(c) We hebben het woord **deler** hier in 2 betekenissen gebruikt:

(i) bij de Euclidische deling: we delen het deeltal $p(x)$ door de deler $d(x)$. In deze context is $d(x)$ niet noodzakelijk een deler van $p(x)$

(ii) wanneer $p(x)$ deelbaar is door $d(x)$ is $d(x)$ een deler van $p(x)$ en noteren we $d(x) \mid p(x)$.

(d) Als $d(x)$ een deler is van $p(x)$ en dus $p(x) = q(x) \cdot d(x)$, dan is automatisch ook het quotiënt $q(x)$ een deler van $p(x)$. We noemen $p(x)$ ook een **veelvoud** van $d(x)$ (en van $q(x)$).

(e) Er bestaat een algoritme, de zogenaamde Euclidische deling, om voor een willekeurige veelterm en deler het quotiënt en de rest te berekenen. De methode is volledig analoog aan de gekende staartdeling voor gewone getallen.

CC BY-NC-SA 4.0

6.6 Algoritme voor Euclidische deling

Het **algoritme van Euclides** berekent voor veeltermen $p(x)$ en $d(x)$ het quotiënt $q(x)$ en de rest $r(x)$ zodat

$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$, met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x))$ Vb: $x^2 - 4x + 3 = (x+2)(x-6) + 15$, met $\text{gr}(15) < 1$

net zoals de staartdeling voor getallen D en d twee nieuwe getallen q en r oplevert zodat

$D = q \cdot d + r$ met $r < d$ Vb: $17 = 5 \cdot 3 + 2$ met $2 < 5$

Met de staartdeling 17 delen door 5 geeft $12 = 5 \cdot 3 + 2$, dus quotiënt 3 en rest 2.
Met de Euclidische deling $x^2 - 4x + 3$ delen door $x + 2$ levert $x^2 - 4x + 3 = (x+2) \cdot (x-6) + 15$, met quotiënt $x - 6$ en rest 15.

We geven eerst twee voorbeelden die in detail worden uitgewerkt, het eerste per video, het tweede per tekst. Daarna volgt de algemene procedure.

Voorbeeld 6.6.1 (Euclidische deling per video uitgelegd)**.**

Bereken quotiënt en rest van de deling van veelterm $10x^3 + 21x^2 - 11x - 7$ door veelterm $5x + 3$.

Uitwerking: We zoeken dus veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x)) = 1$ zodat

$$10x^3 + 21x^2 - 11x - 7 = q(x) \cdot (5x+3) + r(x).$$

De procedure wordt in detail en in minder dan 8 minuten uitgelegd in volgende video (met dank aan de ons verder onbekende meneer MDO):

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/vlARWbDqJOA

Het algoritme voor de Euclidische deling leidt dus tot volgende schema:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
10x^3 & + & 21x^2 & - & 11x & - & 7 & 5x+3 \\
\cline{8-8}
-\,10x^3 & + & 6x^2 & & & & & 2x^2+3x-4 \\
\cline{1-3}
 & & 15x^2 & - & 11x & - & 7 & \\
 & & -\,15x^2 & + & 9x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & - & 20x & - & 7 & \\
 & & & - & 20x & - & 12 & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 5 &
\end{array}$$

Eindresultaat: $10x^3 + 21x^2 - 11x - 7 = (2x^2 + 3x - 4)(5x + 3) + 5$

Voorbeeld 6.6.2 (Euclidische deling stap per stap uitgelegd)**.**

Bereken quotiënt en rest van de deling van veelterm $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ door veelterm $x - 3$.

Uitwerking: We zoeken dus veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x)) = 1$ zodat

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = q(x) \cdot (x-3) + r(x).$$

We gebruiken een aangepaste vorm van de staartdeling van natuurlijke getallen. Bestudeer het schema samen met de uitleg.

CC BY-NC-SA 4.0

6.6 Algoritme voor Euclidische deling

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & 2x^3 & + & x^2 & - & 5x & + & 2 & \mid\ x-3 \\
(b)\ - & 2x^3 & - & 6x^2 & & & & & \hline \\
 & & & 7x^2 & - & 5x & + & 2 & \mid\ 2x^2+7x+16 \\
(d)\ - & & & 7x^2 & - & 21x & & & \hline \\
 & & & & & 16x & + & 2 & \mid\ (a)\quad (c)\quad (e) \\
(f)\ - & & & & & 16x & - & 48 & \hline \\
 & & & & & & & 50 & \mid \\
 & & & & & & & (g) &
\end{array}
$$

(a) Deel de hoogstegraadsterm van $p(x)$ door de hoogstegraadsterm van $d(x)$. Dus deel $2x^3$ door x. Schrijf dit 'voorlopig quotiënt' $2x^3/x = 2x^2$ in de rechterkolom.

(b) Vermenigvuldig de deler $x-3$ met het 'voorlopig quotiënt' $2x^2$ en schrijf dit product $(x-3)\cdot 2x^2 = 2x^3-6x^2$ onder het deeltal. Trek dit product $2x^3-6x^2$ af van het deeltal $2x^3+x^2-5x+2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen tegen elkaar weg. De 'voorlopige rest' is $2x^3+x^2-5x+2-(2x^3-6x^2) = 7x^2-5x+2$. Die 'voorlopige rest' is nog te groot, want de graad 2 van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad 1 van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(c) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de 'voorlopige rest' (dus $7x^2$) door de hoogstegraadsterm van de deler $x-3$, dus door x. Voeg deze component $7x^2/x = 7x$ toe aan het 'voorlopig quotiënt' in de rechterkolom.

(d) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met deze nieuwe component $7x$ en schrijf het product $7x\cdot(x-3)$ onder de 'voorlopige rest' $7x^2-5x+2$. Trek het product $7x^2-21x$ af van de 'voorlopige rest' $7x^2-5x+2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen weer tegen elkaar weg. De nieuwe 'voorlopige rest' is $7x^2-5x+2-(7x^2-21x) = 16x+2$. Deze 'voorlopige rest' $16x+2$ is nog te groot, want de graad van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(e) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de nieuwe 'voorlopige rest' $(16x)$ door x. Voeg 16 toe als nieuwe component van het 'voorlopig quotiënt'.

(f) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met die nieuwe component 16 en trek het product $16(x-3)$ af van de huidige 'voorlopige rest' $16x+2$. Dit geeft de nieuwe 'voorlopige rest' 50.

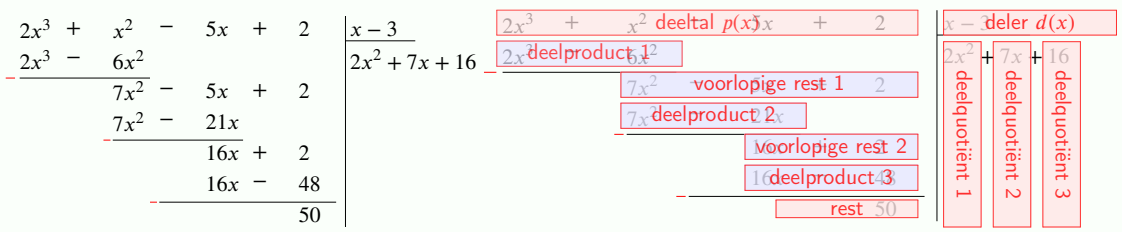
(g) Omdat de graad van deze 'voorlopige rest' strikt kleiner is dan de graad van de deler, is het onmogelijk dat we de rest nog kunnen schrijven als een product van de deler met nog iets. Dit beëindigt dus de procedure. 50 is de uiteindelijke rest, en $2x^2+7x+16$ is het uiteindelijke quotiënt.

Eindresultaat: $2x^3+x^2-5x+2 = (2x^2+7x+16)(x-3)+50$

De algemene procedure een een veelterm $p(x)$ te delen door een veelterm $d(x)$ is als volgt:

Algoritme 6.6.2 (Algoritme Euclidische deling)**.**

Bereken $q(x)$ en $r(x)$ zodat $p(x) = q(x)\cdot d(x)+r(x)$ (met $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$).



(a) Plaats deeltal $p(x)$ en deler $d(x)$ in een *deelschema* volgens dalende machten van x. Gebruik voor eventuele ontbrekende machten in $p(x)$ nullen of open plaatsen.

CC BY-NC-SA 4.0

6.6 Algoritme voor Euclidische deling

(b) Deel de hoogstegraadsterm van het deeltal door hoogstegraadsterm van de deler.
In het voorbeeld: $2x^3$ gedeeld door x is $2x^2$.

(c) Schrijf dit eerste *deelquotiënt* op de quotientplaats.
In het voorbeeld: $2x^2$.

(d) Schrijf het product van dit deelquotiënt met de deler $d(x)$ onder het deeltal $p(x)$.
In het voorbeeld: $2x^2 \cdot (x-2) = 2x^3 - 6x^2$.

(e) Schrijf het *verschil* van deeltal en dit product als *voorlopige rest*.
In het voorbeeld: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 - (2x^3 - 6x^2) = 7x^2 - 5x + 2$.

(f) Deel de hoogstegraadsterm van de voorlopige rest door hoogstegraadsterm van de deler, en voeg het resultaat als deelquotiënt toe aan het (voorlopige) quotiënt.
In het voorbeeld: $7x^2$ gedeeld door x is $7x$.

(g) Schrijf het product van dit extra deelquotiënt met de deler onder de recentste voorlopige rest.
In het voorbeeld: $7x \cdot (x-2) = 7x^2 - 21x$.

(h) Schrijf het verschil van vorige voorlopige rest en dit deelproduct als nieuwe voorlopige rest.
In het voorbeeld: $7x^2 - 5x + 2 - (7x^2 - 21x) = 16x + 2$.

(i) Herhaal de vorige drie stappen tot de graad van de voorlopige rest strikt kleiner is dan de graad van de deler.
In het voorbeeld: na één keer herhalen is de rest een constante, dus met graad kleiner dan 1.

Voorbeeld 6.6.3. Deel $2x^3 - 8$ door $x + 2$.

Uitwerking:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
2x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 8 & x+2 \\
\cline{8-8}
2x^3 & + & 4x^2 & & & & & 2x^2 - 4x + 8 \\
\cline{1-3}
 & - & 4x^2 & + & 0x & - & 8 & \\
 & - & 4x^2 & - & 8x & & & \\
\cline{2-4}
 & & & & 8x & - & 8 & \\
 & & & & 8x & + & 16 & \\
\cline{4-6}
 & & & & & - & 24 &
\end{array}$$

Besluit: $2x^3 - 8 = (2x^2 - 4x + 8)(x + 2) - 24$

Oefening 6.6.1. Deel $-x^3 + 9x + 2$ door $x + 4$.

Uitwerking:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
- & x^3 & + & 0x^2 & + & 9x & + 2 & x+4 \\
\cline{8-8}
- & x^3 & - & 4x^2 & & & & -x^2 + 4x - 7 \\
\cline{1-3}
 & & & 4x^2 & + & 9x & + 2 & \\
 & & & 4x^2 & + & 16x & & \\
\cline{3-5}
 & & & & - & 7x & + 2 & \\
 & & & & - & 7x & - 28 & \\
\cline{4-6}
 & & & & & & 30 &
\end{array}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.6 Algoritme voor Euclidische deling

Besluit: $-x^3+9x+2=(-x^2+4x-7)(x+4)+30$

Oefening 6.6.2. Deel $4x^4+x^3+2x+1$ door $2x^2+1$.

Uitwerking:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
4x^4 & + & x^3 & + & 0x^2 & + & 2x & + & 1 & 2x^2+1 \\
\cline{10-10}
-\,4x^4 & & & + & 2x^2 & & & & & 2x^2+\tfrac{1}{2}x-1 \\
\cline{1-9}
 & & x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & + & 1 & \\
 & & -\,x^3 & & & + & \tfrac{1}{2}x & & & \\
\cline{3-9}
 & & & - & 2x^2 & + & \tfrac{3}{2}x & + & 1 & \\
 & & & - & 2x^2 & & & - & 1 & \\
\cline{4-9}
 & & & & & & \tfrac{3}{2}x & + & 2 &
\end{array}$$

Besluit: $4x^4+x^3+2x+1=\left(2x^2+\frac{1}{2}x-1\right)(2x^2+1)+\left(\frac{3}{2}x+2\right)$

CC BY-NC-SA 4.0

6.6.A Oefeningen Euclidische deling

Oefening 6.6.3. Zoek het quotiënt en de rest van volgende delingen met behulp van een Euclidische deling.

1. Deel $2x^4 - 1$ door $x - 1$.

2. Deel $4x^3 + 4x^2 - 5x - 3$ door $2x^2 - x - 1$.

3. Deel $5x^3 + 125$ door $x + 5$.

4. Deel $3x^3 + 8x^2 - x + 1$ door $3x + 2$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.7 Deling door $x-a$

De meest eenvoudige delers van een veelterm, en dikwijls ook de meest interessante, zijn de delers van de *eerste graad*, dus die van de vorm $x-a$, met $a \in \mathbb{R}$.

Voor dergelijke delers van de eerste graad zijn er enkele specifieke eigenschappen en rekenregels. We onderzoeken eerst voor welke a de veelterm $x-a$ mogelijk een deler kan zijn van een veelterm $p(x)$.

Eigenschap 6.7.1 (Rest bij deling door $x-a$)**.**

Bij deling van een veelterm $p(x)$ door $x-a$ is de rest gelijk aan de getalwaarde $p(a)$ van $p(x)$ in a.

Bewijs Uit de formule van de Euclidische deling volgt dat $p(x) = (x-a)q(x)+r(x)$ met $q(x)$ het quotiënt en $r(x)$ de rest met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(x-a) = 1$. De rest $r(x)$ is dus een veelterm van graad nul, een getal. Noteer de rest dus als $r \in \mathbb{R}$, en bereken de getalwaarde van $p(x)$ in a: $p(a) = (a-a)q(a)+r = 0+r = r$, en dus $p(a) = r$. De rest is dus inderdaad gelijk aan de getalwaarde van $p(x)$ in a. ■

Eigenschap 6.7.2 (Deelbaarheidscriterium)**.**

Een veelterm is deelbaar door $x-a$ als en slechts als zijn getalwaarde in a gelijk is aan nul.

In formules:

$$x-a \mid p(x) \quad \Leftrightarrow \quad p(a) = 0.$$

Bewijs Uit vorige eigenschap volgt dat de rest van de deling van een veelterm $p(x)$ door $x-a$ gelijk is aan $p(a)$. Dus de rest is nul als en slechts als $p(a) = 0$, en dat is precies het te bewijzen. ■

Opmerking 6.7.1. We kunnen deze eigenschap ook anders formuleren:

$x-a$ is een factor is van de veelterm $p(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van $p(x)$.

In formules: $p(x) = (x-a)q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad p(a) = 0$

Het komt regelmatig voor dat we één, enkele of alle delers willen vinden van een bepaalde veelterm. In het algemeen is dat een erg moeilijk probleem. Voor het tamelijk speciale maar toch veel voorkomend geval van veeltermen met *gehele* coefficiënten bestaat er wel een procedure voor de delers van de vorm $x-a$ met *gehele* a:

Eigenschap 6.7.3.

Als $x-a$ met a een *geheel getal* een deler is van een veelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ *met gehele coëfficiënten* a_i,

dan is a *een gehele deler van de constante term* a_0 van deze veelterm $p(x)$.

Bewijs Uit vorige eigenschap volgt dat voor een deler $x-a$ geldt dat $p(a) = 0$. Welnu, a invullen in $p(x)$ en de constante term naar het rechterlid brengen levert dan

$$a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots a_1 a = -a_0$$

waarbij in het linkerlid een factor a kan worden afgezonderd. Dat betekent precies dat a een deler is van $-a_0$, en dus ook van a_0. ■

Dit betekent dus dat *alle mogelijke delers* $x-a$ *met* a *geheel* te vinden zijn in de (eindige) verzameling van delers van de constante term a_0.

CC BY-NC-SA 4.0

6.7 Deling door $x-a$

Voorbeeld 6.7.1. Bepaal voor x^4-10x^2+9 alle delers van de vorm $x-a$ met gehele a.

Uit vorige eigenschap volgt dat enkel delers van de constante term in aanmerking komen, dus $\pm1, \pm3, \pm9$:

$$\begin{array}{lll} (x-1) \mid p(x) & \text{omdat} & p(\ 1) = 0 \\ (x+1) \mid p(x) & \text{omdat} & p(-1) = 0 \\ (x-3) \mid p(x) & \text{omdat} & p(\ 3) = 0 \\ (x+3) \mid p(x) & \text{omdat} & p(-3) = 0 \\ (x-9) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(\ 9) \neq 0 \\ (x+9) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(-9) \neq 0. \end{array}$$

We vinden hier 4 delers van de vorm $x-a$. Een 4de-graadsveelterm kan maximaal 4 delers van de vorm $x-a$ hebben. $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3) = x^4-10x^2+9$, dus we hebben de veelterm x^4-10x^2+9 volledig ontbonden in factoren.

Voorbeeld 6.7.2. Bepaal voor x^3-2x^2+x-2 alle delers van de vorm $x-a$ met gehele a.

Uit vorige eigenschap volgt dat enkel delers van de constante term in aanmerking komen, dus ±1 en ±2:

$$\begin{array}{lll} (x-1) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(\ 1) \neq 0 \\ (x+1) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(-1) \neq 0 \\ (x-2) \mid p(x) & \text{omdat} & p(\ 2) = 0 \\ (x+2) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(-2) \neq 0. \end{array}$$

We vinden hier slechts 1 deler van de vorm $x-a$, namelijk $x-2$. Het quotiënt van de deling van x^3-2x^2+x-2 door $x-2$ kunnen we bepalen met het algoritme van de Euclidische deling, maar in dit speciale geval van een deler van de eerste graad is het rekenschema van Horner een alternatieve en meestal snellere manier om het quotiënt te bepalen.

Algoritme 6.7.3 (Delen door $x-a$ met a een geheel getal)**.**

Voor veeltermen met *gehele* coëfficiënten kan je de delers van de vorm $x-a$ (met $a \in \mathbb{Z}$) en hun bijhorende quotiënten als volgt bepalen:

(a) Bepaal *de delers van de constante term* van de veelterm.

(b) Bepaal *de getalwaarde van de veelterm* voor deze delers.

(c) Als voor een deler a deze getalwaarde 0 is, dan is $x-a$ een deler van de veelterm.

(d) Bepaal het quotiënt via de Euclidische deling of via het rekenschema van Horner.

Merk op: deze eigenschap geldt ENKEL voor *gehele* getallen a en veeltermen met *gehele* coëfficiënten.

Zodra je één deler van de vorm $x-a$ kan vinden, kan je een derdegraadsveelterm ontbinden in factoren:

Voorbeeld 6.7.3. Ontbind de veelterm x^3-7x-6 in factoren.

Uitwerking: We proberen een lineaire factor $x-a$ te vinden van $p(x) = x^3-7x-6$. Hiervoor moet a een deler zijn van de constante term. De mogelijkheden zijn dus $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

We berekenen $p(1) = 1-7-6 \neq 0, p(2) = 8-14-6 \neq 0$, maar $p(3) = 27-21-6 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3-7x-6 = (x-3)q(x)$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.7 Deling door $x - a$

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 1x^3 & + & 0x^2 & - & 7x & - & 6 & \multicolumn{1}{|l}{x-3} \\
\cline{9-9}
- & 1x^3 & - & 3x^2 & & & & & \multicolumn{1}{|l}{x^2+3x+2} \\
\cline{2-5}
 & & & 3x^2 & - & 7x & - & 6 & \\
 & & - & 3x^2 & - & 9x & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 2x & - & 6 & \\
 & & & & - & 2x & - & 6 & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Hieruit volgt dat $x^3-7x-6=(x-3)(x^2+3x+2)$. Nu moet de factor x^2+3x+2 nog verder worden ontbonden. Dat kan via een berekening van de nulpunten met de discriminant: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = -2, -1$.

We vinden de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x+1)(x+2)$.

Merk op: in dit geval had je ook voor de overige delers van de constante term 6 de getalwaarde van $p(x)$ kunnen berekenen, en vinden dat $p(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$ en ook $p(-2) = -8 + 14 - 6 = 0$. De drie nulpunten van $p(x)$ zijn dus $3, -1$ en -2, en daaruit volgt ook dadelijk de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x+1)(x+2)$. Dat werkt hier omdat *alle* nulpunten geheel zijn, de methode met de discriminant werkt ook voor niet-gehele nulpunten (maar wel enkel als de overblijvende factor van de tweede graad is).

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.A Oefeningen ontbinden in factoren

Oefening 6.7.1. Ontbind de volgende veeltermen in factoren van zo laag mogelijke graad:

1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = \ldots\ldots$
2. $x^3 - x^2 - 5x + 5 = \ldots\ldots$
3. $2x^3 + x^2 - 8x + 5 = \ldots\ldots$
4. $x(x+1)(2x+1) + 6(x+1)^2 = \ldots\ldots$
5. $2x^4 - 1 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.8 Het schema van Horner

In principe is het eenvoudig om de getalwaarde $p(7)$ van de veelterm $p(x) = x^9 + x^5 + 1$ te berekenen door $p(7) = 7^9 + 7^5 + 1$ uit te rekenen. Je moet daarvoor wel hoge machten berekenen.

Er bestaat een algoritme dat de berekening van $p(a)$ voor willekeurige veeltermen $p(x)$ en getallen a reduceert tot eenvoudigere vermenigvuldigingen en optellingen. Het algoritme heeft bovendien het bijzondere neveneffect dat het ook het quotiënt van de deling van $p(x)$ door $(x-a)$ oplevert. Dat algoritme is gekend onder de naam **Rekenschema van Horner**. We leggen het hier uit aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 6.8.1. Deel $2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ door $x - 2$.

Noem de veelterm $p(x)$. We gebruiken het schema van Horner om de waarde van $p(x)$ in het punt $x = 2$ te berekenen, en we krijgen het quotiënt er dan gratis bij. Je kan natuurlijk $p(2)$ ook met je rekenmachine berekenen, maar dan moet je toch Horner of Euclidische Deling toepassen als je het quotiënt nodig hebt.

Het startschema ziet eruit als volgt

	2	−4	5	−7
2				

waarbij de coëfficiënten van $p(x)$ in de bovenste rij staan. We laten nu de eerste coëfficiënt (dus 2) zakken, vermenigvuldigen die met de 2 links, en schrijven het resultaat op de tweede rij, onder de tweede coëfficiënt (dus onder -4):

	2	−4	5	−7
2		4		
	2			

We tellen de -4 en 4 bij elkaar op, schrijven het resultaat $-4 + 4 = 0$ onderaan en vermenigvuldigen 0 met de linkse 2 en schrijven het resultaat 0 weer op de tweede rij, onder de 5, en tellen dan 0 op bij die 5:

	2	−4	5	−7
2		4	0	
	2	0	5	

We vermenigvuldigen opnieuw de onderste 5 met de linkse 2, schrijven het product 10 onder de -7, tellen op en krijgen rechts onderaan het getal 3:

	2	−4	5	−7
2		4	0	10
	2	0	5	3

Het schema is nu volledig, en men kan bewijzen dat het meest rechtse getal onderaan altijd de getalwaarde van de veelterm is in het punt 2, en dat de overige getallen in de onderste rij steeds de coëfficiënten zijn van het quotiënt van $p(x)$ gedeeld door $x - 2$.

Het quotiënt is dus $2x^2 + 0x + 5$ en de rest is 3, of

$$2x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = (x-2)(2x^2 + 5) + 3$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.8 Het schema van Horner

Voorbeeld 6.8.2. Als voorbeeld op de Euclidische deling hebben we $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ gedeeld door $x - 3$. We kunnen deze deling ook uitvoeren met het rekenschema van Horner:

	2	1	−5	2
3		6	21	48
	2	7	16	50

Dus: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (2x^2 + 7x + 16)(x - 3) + 50$.

Merk op dat de rest 50 dus ook de getalwaarde van het deeltal voorstelt voor $x = 3$, want

$$p(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 5 \cdot 3 + 2 = 50$$

Voorbeeld 6.8.3. Vind alle delers van $p(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$.

Merk al direct op dat dit dezelfde opgave is als 'ontbind deze veelterm in factoren'.

Voor kandidaat-delers van $p(x)$ van de vorm $x - a$, met a een geheel getal, moet a een deler zijn van 24. Een mogelijke manier om deze oefening op te lossen is om van alle gehele delers van 24 na te gaan of de getalwaarde nul is. Wie bij de kleinste begint, heeft al direct geluk, want $p(1) = 1 - 15 - 10 + 24 = 0$, en dus is $x - 1$ een deler van $p(x)$. We kunnen nu verder de getalwaarde zoeken van delers $-1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12, 24$ en -24, maar eenvoudiger is om met Horner te berekenen dat

	1	0	−15	−10	24
1		1	1	−14	−24
	1	1	−14	−24	0

en dus $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x - 1)(x^3 + x^2 - 14x - 24)$. We herhalen de vraag voor de veelterm $x^3 + x^2 - 14x - 24$. Het eindresultaat wordt $p(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x - 4)$. Dit wordt erg duidelijk en volledig uitgelegd in volgende video, waar in het begin ook de regel van Horner zelf nog eens wordt uitgelegd.

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/P88ZvVsuLIA

Voorbeeld 6.8.4. In het stukje over lineaire delers hebben we $x^4 - 10x^2 + 9$ ontbonden in factoren.

Omdat $p(-3) = 0$ is $x - (-3) = x + 3$ een deler van $x^4 - 10x^2 + 9$.

We berekenen het quotiënt met het rekenschema van Horner.

	1	0	−10	0	9
−3		−3	9	3	−9
	1	−3	−1	3	0

Het quotiënt is dus $x^3 - 3x^2 - x + 3$ en de rest is 0.

We zoeken nu verder naar nulpunten van $x^3 - 3x^2 - x + 3$, en vinden (na nog wat rekenwerk) dat $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.

Merk op: in dit geval kan de veelterm (veel) eenvoudiger worden ontbonden door alle nulpunten te zoeken.

CC BY-NC-SA 4.0

6.8.A Oefeningen Horner

Oefening 6.8.1. Bepaal voor onderstaande veeltermen telkens een *geheel* nulpunt a. Schrijf vervolgens de veelterm in de vorm $(x-a)q(x)$.

1. x^4-2x^3+1 heeft geheel nulpunt $\ldots\ldots$ en kan dus geschreven worden als $(x-\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

2. x^3-x^2-5x+6 heeft geheel nulpunt $\ldots\ldots$ en kan dus geschreven worden als $(x-\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

Oefening 6.8.2. Ontbind de volgende veeltermen in factoren.

1. $x^4-2x^3+x^2-2x=\ldots\ldots$

2. $x^3+4x^2-3x-18=\ldots\ldots$

3. $3x^3-5x^2-10x-6=\ldots\ldots$

4. $x^4-2x^3+2x-1=\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 7
Veeltermen: extra

(Versie 2026/08/25H.51)

7.1 Ontbinden in factoren

Een veelterm $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is per definitie een *som* van termen (vandaar de naam *veel-term*). Het is dikwijls handig om dergelijke som van termen ook te kunnen schrijven als een *product* van factoren. De uitdrukking 'ontbinden in factoren' betekent precies het schrijven van dergelijke som als een product:

Definitie 7.1.1 (Veeltermen ontbinden in factoren)**.**

Als we een veelterm $p(x)$ kunnen schrijven als een product van veeltermen $p_1(x)$ en $p_2(x)$ dan noemen we die veeltermen $p_1(x)$ en $p_2(x)$ **factoren** (of ook **delers**) van een veelterm $p(x)$:

$$p_1(x) \text{ is een factor van } p(x) \iff \text{er bestaat een veelterm } p_2(x) \text{ zodat } p(x) = p_1(x)p_2(x)$$

Een factor van de eerste graad is een **lineaire factor**. Een factor van de nulde graad (dus een getal) is een **triviale factor**, en die beschouwen we niet als 'echte' factor.

Een veelterm **ontbinden in factoren** is de veelterm schrijven als een *product* van zo veel mogelijk niet-triviale factoren. Als dezelfde factor meerdere keren voorkomt, schrijven we die als een macht.

Voorbeeld 7.1.1.

Veelterm $x^2 - 1$ kan ontbonden worden in de factoren $x - 1$ en $x + 1$ omdat $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Wegens volgende eigenschap is ontbinden in *lineaire* factoren eigenlijk hetzelfde als het vinden van de nulpunten:

Eigenschap 7.1.1. $x - a$ is een factor van een veelterm als en slechts als zijn getalwaarde in a gelijk is aan nul.

In formules: $p(x) = (x - a)q(x) \quad \Leftrightarrow \quad p(a) = 0.$

Om *gehele* nulpunten te vinden is volgende eigenschap dikwijls nuttig:

Eigenschap 7.1.2. Als $x - a$ met a *een geheel getal* een factor is van een veelterm *met gehele coëfficienten*,

dan is a *een gehele deler van de constante term* van deze veelterm.

Er bestaat *geen algemeen algoritme* om willekeurige veeltermen te ontbinden in factoren, maar vorige eigenschap en de Euclidische Deling (of het schema van Horner) laten soms wel toe om factoren te vinden.

Voorbeeld 7.1.2. Ontbind de veelterm $x^3 - 7x - 6$ in factoren.

Uitwerking: We proberen een lineaire factor $x - a$ te vinden van $p(x) = x^3 - 7x - 6$. Wegens eigenschap 7.1.2 moet a een deler zijn van de constante term, dus $a|6$. De mogelijkheden zijn dus $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

Wegens eigenschap 7.1.1 moet de getalwaarde $p(a)$ gelijk zijn aan nul. We berekenen $p(1) = 1 - 7 - 6 \neq 0, p(2) = 8 - 14 - 6 \neq 0$, maar $p(3) = 27 - 21 - 6 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)q(x)$.

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
1x^3 & + & 0x^2 & - & 7x & - & 6 & & x-3 \\
\cline{9-9}
-\,1x^3 & - & 3x^2 & & & & & & x^2+3x+2 \\
\cline{1-3}
 & & 3x^2 & - & 7x & - & 6 & & \\
 & - & 3x^2 & - & 9x & & & & \\
\cline{2-5}
 & & & & 2x & - & 6 & & \\
 & & & - & 2x & - & 6 & & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

7.1 Ontbinden in factoren

Hieruit volgt dat $x^3-7x-6=(x-3)(x^2+3x+2)$. Nu moet de factor x^2+3x+2 nog verder worden ontbonden. Dat kan via een berekening van de nulpunten met de discriminant: $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=-2,-1$, of door 'met de hand' nulpunten te zoeken door delers te proberen van de constante term 2.

We vinden telkens de ontbinding $x^3-7x-6=(x-3)(x+1)(x+2)$.

Merk op: in dit geval had je ook voor de overige delers van de constante term 6 de getalwaarde van $p(x)$ kunnen berekenen, en vinden dat $p(-1)=-1+7-6=0$ en ook $p(-2)=-8+14-6=0$. De drie nulpunten van $p(x)$ zijn dus $3,-1$ en -2, en daaruit volgt ook dadelijk de ontbinding $x^3-7x-6=(x-3)(x+1)(x+2)$. Dat werkt hier omdat *alle* nulpunten geheel zijn, de methode met de discriminant werkt ook voor niet-gehele nulpunten (maar wel enkel als de overblijvende factor van de tweede graad is).

Oefening 7.1.1. Ontbind de volgende veeltermen in factoren:

1. $x^2-4=\ldots\ldots$

2. $4x^2-4=\ldots\ldots$

3. $x^2-2=\ldots\ldots$

4. $x^2-2x+1=\ldots\ldots$

5. $x^3-6x^2+11x-6=\ldots\ldots$

6. $x^3-x^2-5x+5=\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Vergelijkingen

Het *oplossen van vergelijkingen* is een steeds weerkerend thema in de wiskunde. We bespreken hier kort de terminologie en enkele algemene principes die daarmee samenhangen.

Definitie 7.2.1.

- Een **gelijkheid** is een uitdrukking die precies één gelijkheidsteken = bevat. Het **linkerlid** van de gelijkheid is het deel van de uitdrukking vòòr het gelijkheidsteken, het **rechterlid** is het deel erachter.
- Een gelijkheid die enkel getallen en gekende functies bevat kan **waar** zijn (ook **juist**, bijvoorbeeld $1+1=2$ of $\sqrt{4}=2$) of **vals** (ook **fout**, bijvoorbeeld $1+1=3$ of $\sqrt{4}=-2$) of **zonder betekenis** (bijvoorbeeld $1+=3$ of $\sqrt{-4}=2$).
- Een gelijkheid die ook *letters* bevat, kan erg uiteenlopende betekenissen hebben:
  - als $a=1$ dan is de gelijkheid $2a+4=6$ waar. We noemen in deze context a een **constante**.
  - als x en y variabelen zijn, dan is de gelijkheid $y=2x+4$ de **vergelijking van een rechte** in het vlak: de *voorwaarde* waaraan getallen x en y moeten voldoen opdat het punt (x,y) op die rechte zou liggen.
  - als x een **onbekende** is, dan is $2x+4=0$ (ook) een **vergelijking** waarvan we oplossingen kunnen zoeken: de gelijkheid $2x+4=0$ is *waar* als en slechts als $x=-2$.
  - als a een reëel getal is en x een onbekende, dan is $y=ax+4$ de vergelijking van een rechte waarbij a een **parameter** is: voor elke waarde van a krijgen we een *andere* rechte.
  - als x en y een **variabelen** zijn, dan is $y=2x+4$ een formule voor de **functie** $f: x \mapsto 2x+4$ waarbij x de *onafhankelijke* variabele is en y de *afhankelijke* variabele. We kunnen dan ook schrijven dat $y=f(x)$ of $f(x)=2x+4$. De gelijkheid $y=2x+4$ is dan ook de vergelijking van de *grafiek* van de functie f in het vlak.

  Het onderscheid tussen 'variabelen' en 'onbekenden', en tussen 'constanten' en 'parameters' is niet altijd strikt, en de begrippen worden soms door elkaar gebruikt.
- Als de uitdrukking dus *letters* bevat, noemen we die letters **variabelen, onbekenden, parameters of constanten** naargelang de context of de rol die de letters vervullen. Voor variabelen en onbekenden worden dikwijls de letters x en y gebruikt, maar ook andere letters komen voor (bijvoorbeeld t als de onbekende of variabele de tijd is, n als het een natuurlijk getal is, of z als het een complex getal is). Voor parameters en constanten kiezen we dikwijls $a,b,c\ldots$ of $k,l,m,\ldots$ of griekse letters $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$. Als er letters te kort zijn, gebruiken we indices (of subscripts) $x_0,x_1,x_i,x_n,\alpha_1,\ldots$.
- Een **vergelijking** is dus een *gelijkheid met onbekenden of variabelen*. **Een oplossing** (soms ook wortel (Engels: 'root', Frans: 'racine') van de vergelijking is een waarde van de onbekende(n) waarvoor de vergelijking een gelijkheid wordt. De **oplossingsverzameling** van de vergelijking is de verzameling van *alle* oplossingen.
- We noemen twee vergelijkingen **equivalent** als ze dezelfde oplossingsverzameling hebben. Beide vergelijkingen moeten dan zeker evenveel onbekenden hebben.

Voorbeeld 7.2.1.

- In de gelijkheid
$$2x+6=10$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Vergelijkingen

wordt het linkerlid $2x+6$, met daarin de onbekende x, gelijkgesteld wordt aan het rechterlid 10. De gelijkheid bevat één onbekende, namelijk x, en is dus een vergelijking. Enkel $x=2$ is een oplossing van die vergelijking.

- In de gelijkheid
$$2x+6=3y+x$$
wordt het linkerlid $2x+6$, met daarin de onbekende x, gelijkgesteld wordt aan het rechterlid $3y+x$ met onbekenden x en y. Er zijn oneindig veel oplossingen, bijvoorbeeld $x=0$ en $y=2$, of ook $x=6$ en $y=4$. Bij elke y hoort precies één x zodat die x en y een oplossing vormen, namelijk $x=3y-6$. Je kan ook beweren dat bij elke x precies één y hoort, namelijk $y=x/3+2$.

- bij een vergelijking met één onbekende kunnen we soms tamelijk expliciet alle oplossingen opschrijven. Dat heet het 'oplossen van de vergelijking'. De oplossingen zijn dus de waarde of waarden voor de onbekende waarvoor het linkerlid en het rechterlid van de vergelijking aan elkaar gelijk zijn. Bijvoorbeeld:
$$x^2-1=0 \iff x\in\{-1,1\}$$
De oplossingsverzameling kunnen we dus schrijven als
$$\begin{aligned}\{x \mid x^2=1\} &= \{x \mid x=-1 \text{ of } x=1\}\\ &= \{-1,1\}\end{aligned}$$

- bij vergelijking met meerdere onbekenden wordt het geven van 'alle oplossingen' subtieler. Dikwijls zijn het er oneindig veel, en is de oplossingsverzameling bijvoorbeeld een kromme of een andere (meerdimensionale) meetkundige figuur:
$$x^2+y^2=1 \iff (x,y) \text{ liggen op de cirkel met oorsprong } (0,0) \text{ en straal } 1$$
De oplossingsverzameling kunnen we dus schrijven als
$$\begin{aligned}\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} &= \{(x,y) \mid y=\pm\sqrt{1-x^2}\}\\ &= \{(\cos t,\sin t) \mid t\in[0,2\pi]\}\\ &= \{(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}) \mid t\in\mathbb{R}\}\cup\{(-1,0)\}\end{aligned}$$

- soms is de vergelijking waar voor *alle* waarden van de onbekenden. Dan noemen we de vergelijking een **identiteit**. Dat geldt bijvoorbeeld voor de uitdrukking
$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
De oplossingsverzameling is hier meestal niet erg nuttig, want *alle* waarden zijn oplossingen:
$$\begin{aligned}\{(x,y) \mid (x+y)^2=x^2+2xy+y^2\} &= \{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}\\ &= \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Bij het oplossen van vergelijkingen is het dikwijls handig om dingen van het éne lid naar het andere te brengen. Dat kan op twee manieren, maar in concrete gevallen is meestal maar één van beide nuttig:

Eigenschap 7.2.1 (Eigenschappen van vergelijkingen)**.**

(a) De vergelijking $A=B$ is equivalent met de vergelijking $A-B=0$
('een term naar het linkerlid brengen')

CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Vergelijkingen

(b) Als $B \neq 0$, dan is de vergelijking $A = B$ equivalent met de vergelijking $\frac{A}{B} = 1$
('delen door een niet-nul factor')

Hierbij is (a) de wiskundige vertaling van de evidente waarheid dat 'twee dingen aan elkaar gelijk zijn' als 'er geen verschil is'. En (b) is de vertaling van het feit dat 'twee dingen aan elkaar gelijk zijn' als 'hun verhoudig één is'. Daarbij moet worden opgelet dat een 'verhouding tot niets' (dus $\frac{A}{0}$) geen betekenis heeft, en je moet dus erg opletten niet met 'verhoudingen' te werken als er nullen in het spel kunnen zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 8
Ongelijkheden en absolute waarde

(Versie 2026/08/25H.51)

8.1 Intro ongelijkheden en absolute waarde

Iedereen kent allicht de begrippen 'absolute waarde' ($|-2| = 2$) en ongelijkheden ($2 \leq 3$). Maar beide begrippen zijn subtieler en gevaarlijker dan op het eerste zicht blijkt. Bij het bepalen van oplossingsverzamelingen van ongelijkheden worden regelmatig foutieve rekenregels gebruikt. Dat leidt tot negatieve afstanden, ontploffende chemische reacties, failliete bedrijven, en soms zelfs tot herexamens. Besteed er dus voldoende aandacht aan.

In wat volgt hebben we de leerstof over ongelijkheden als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding

(2) Aandachtspunten over gelijkheden, met o.a. kwadrateringsvoorwaarden

(3) Eigenschappen van ongelijkheden

(4) Het tekenverloop van rationale functies

(5) Eigenschappen van absolute waarde

(6) Een overzicht van zogenaamde driehoeksongelijkheden

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Tekenverloop van rationale functies

Rationale functies zijn functies waarvan je het functievoorschrift kan schrijven als een *breuk van veeltermen*. Van rationale functies kan je het tekenverloop bepalen door eerst teller en noemer te ontbinden in eerste- en tweedegraadsveeltermen, en daarna de tekenverlopen van die factoren te combineren. We illustreren de werkwijze met een voorbeeld.

Voorbeeld 8.2.1 (Tekenverloop van een rationale functie)**.**

Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4} \leqslant 0$.

Uitwerking: We maken voor elk van de factoren van teller en noemer een apart tekenverloop en brengen dit alles samen in één tabel.

- $(4-x^2)$ heeft twee nulpunten: 2 en -2.
- $(3x^2-9x+6)$ heeft twee nulpunten: 1 en 2.
- $(2x+4)$ heeft één nulpunt: -2.

Dit geeft volgende samenvattende tabel (met de nulpunten steeds geordend van klein naar groot):

x		-2		1		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3x^2-9x+6$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4}$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$-$

De vertikale streep bij het nulpunt van de noemer duidt aan dat de breuk er niet gedefinieerd is.
We bekomen de onderste rij dus door de tekens van de eerste- en tweedegraadsfactoren te vermenigvuldigen. Zo bepalen we het teken van de getallen in de kolom die staat voor $x \in]-\infty, 2[$ als volgt: twee mintekens (dus negatieve factoren) vermenigvuldigen geeft iets positief, en dat dan vermenigvuldigen met de derde positieve factor geeft dan iets positief, wat ons het plusteken in de onderste rij geeft. Als we een nul tegenkomen moeten we opletten:

- Zijn er enkel factoren in de teller die nul worden, dan wordt de rationale functie ook nul.
- Is er een factor in de noemer nul, dan is de rationale functie niet gedefinieerd in dat punt, en zetten we een $\vert$.

De oplossingsverzameling van de ongelijkheid is dus $V = [1, +\infty[$.

Oefening 8.2.1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ volgende ongelijkheden gelden.

1. $\dfrac{(2x-3)(x^2-5x+4)}{x^2(-x^2+2x-1)} \leqslant 0$ ……

CC BY-NC-SA 4.0

8.2.A Oefeningen tekenverloop van rationale functies

Oefening 8.2.2. Onderzoek achtereenvolgens voor welke $x \in \mathbb{R}$ volgende ongelijkheden gelden.

1. $x^2 - 4 < 0 \iff \ldots\ldots$
2. $\dfrac{1}{x^2-4} < 0 \iff \ldots\ldots$
3. $\dfrac{1}{4-x^2} > 0 \iff \ldots\ldots$
4. $100 - x < 0 \iff \ldots\ldots$
5. $\dfrac{100-x}{x^2-4} < 0 \iff \ldots\ldots$
6. $\dfrac{100+x}{x^2-4} < 0 \iff \ldots\ldots$
7. $-x < 0 \iff \ldots\ldots$
8. $\dfrac{-x}{x^2-4} < 0 \iff \ldots\ldots$

Oefening 8.2.3. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ volgende ongelijkheden gelden.

1. $\dfrac{-3x+6}{x^2-2} < 0 \iff \ldots\ldots$
2. $\dfrac{x^2+5x+6}{8-4x} < 0 \iff \ldots\ldots$
3. $\dfrac{2-x^2}{5(x^2+3)} > 0 \iff \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Gelijkheden

Als voorbereiding op het bestuderen van ongelijkheden verdiepen we ons eerst even in het eenvoudigere geval van vergelijkingen. We onderzoeken meer bepaald een specifiek type probleem dat kan optreden bij het oplossen van sommige vergelijkingen en ongelijkheden: het introduceren van 'valse oplossingen'.

Voorbeeld 8.3.1. Beschouw de vergelijking

$$\sqrt{x+2} = x.$$

Het is niet onmiddellijk duidelijk hoe we deze vergelijking met een vierkantswortel kunnen oplossen. Een mogelijkheid is om *de vergelijking te kwadrateren*: als we beide leden van de vergelijking kwadrateren dan verdwijnt de vierkantswortel:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= x^2 \\ \Leftrightarrow\ x+2 &= x^2,\end{aligned}$$

en dit is een tweedegraadsvergelijking $x^2 - x - 2 = 0$, waarvan je kan berekenen dat de oplossingen -1 en 2 zijn. Mooi, daarmee hebben we de vergelijking opgelost. Of toch niet ?

Als we $x = 2$ invullen in $\sqrt{x+2} = x$ vinden we $\sqrt{4} = 2$, wat uiteraard klopt. Maar als we $x = -1$ invullen vinden we $\sqrt{1} = -1$. Maar $\sqrt{1}$ is helemaal niet gelijk aan -1, en $x = -1$ is dus *geen* oplossing van $\sqrt{x+2} = x$, ook al was het wel een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking.

Hoe kunnen we dit soort problemen voorkomen? Een vergelijking met een vierkantswortel zouden we graag oplossen zoals hierboven, namelijk door de vergelijking te kwadrateren. Dat process introduceert echter mogelijk valse oplossingen, die we met behulp van zogenaamde *bestaansvoorwaarden* en *kwadrateringsvoorwaarden* kunnen uitsluiten. Bij het oplossen van een vergelijking met een vierkantswortel in, moeten we rekening houden met volgende voorwaarden:

- **Bestaansvoorwaarde**: wat onder de vierkantswortel staat moet positief zijn.
- **Kwadrateringsvoorwaarde**: wat gelijk is aan een vierkantswortel moet positief zijn.

Deze voorwaarden zorgen er voor dat je geen valse oplossingen krijgt.

Van waar komt die kwadrateringsvoorwaarde precies? We weten dat als $a = b$, dat dan zeker ook $a^2 = b^2$ (want de kwadraten van twee gelijke getallen zijn natuurlijk ook gelijk aan elkaar). Maar, als $a^2 = b^2$, dan volgt niet noodzakelijk dat $a = b$, want $a^2 = b^2$ geldt ook als $a = -b$. De kwadrateringsvoorwaarde sluit de extra 'valse' oplossing $a = -b$ uit.

Voorbeeld 8.3.2. Herneem vorig voorbeeld:

$$\sqrt{x+2} = x.$$

De **bestaansvoorwaarde** zegt dat wat onder de vierkantswortel staat positief moet zijn, oftewel dat $x + 2 \geq 0$. Dit kunnen we herschrijven als $x \geq -2$. Beide oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking (-1 en 2) voldoen aan deze voorwaarde.
De **kwadrateringsvoorwaarde** zegt dat wat gelijk is aan een vierkantswortel positief moet zijn. In dit geval is de vierkanstwortel gelijk aan x, en dus moet $x \geq 0$. Het getal 2 is groter dan nul, en is dan ook een oplossing van de vergelijking $\sqrt{x+2} = x$: het voldoet immers aan beide voorwaarden en is een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking. Het getal -1 is echter niet groter dan 0, de kwadrateringsvoorwaarde is niet voldaan, en -1 is inderdaad geen oplossing van $\sqrt{x+2} = x$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Gelijkheden

We hebben de situatie nu bekeken voor een specifiek geval. De kwadrateringsvoorwaarde is in het leven geroepen voor het oplossen van vergelijkingen met vierkantswortels, maar bestaansvoorwaarden komen in nog veel andere situaties voor, zoals bijvoorbeeld delen door iets dat nul kan worden.

CC BY-NC-SA 4.0

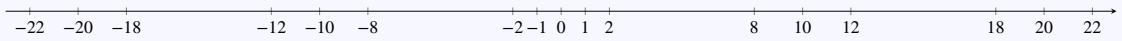
8.4 Ongelijkheden

Een belangrijke eigenschap van reële getallen is dat we ze kunnen *ordenen*: voor twee getallen $x, y \in \mathbb{R}$ geldt altijd $x \leq y$ of $y \leq x$. We kunnen dus niet alleen ver*gelijk*ingen bestuderen en oplossen (bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 1 = 0$), maar ook zogenaamde on*gelijk*heden. Daarbij zoeken we niet naar de waarden van een onbekende die een *gelijkheid* oplost, maar naar de waarden van een onbekende die een *ongelijkheid* oplost (bijvoorbeeld $x^2 > 2x - 1$ of $\sin(x) \geq 0.5$). Dat is in het algemeen *moeilijker* dan het oplossen van vergelijkingen, onder meer omwille van de extra complicatie dat twee leden van een ongelijkheid vermenigvuldigen met een *negatief* getal de ongelijkheid *omdraait*:

Eigenschap 8.4.1 (Basiseigenschappen ongelijkheden)**.** Voor elke $x, y, r \in \mathbb{R}$ geldt

	$x < y$	$\iff$	$x + r < y + r$		(plus getal)
als $0 < r$,	$x < y$	$\implies$	$r \cdot x < r \cdot y$		(maal positief getal)
als $r < 0$,	$x < y$	$\implies$	$r \cdot x > r \cdot y$	(of $r \cdot y < r \cdot x$)	(maal negatief getal)

Voorbeeld 8.4.1. We hebben $10 < 20$, en dus ook $10+2 < 20+2$, $10-2 < 20-2$ en $2 \cdot 10 < 2 \cdot 20$, maar $(-2) \cdot 10 > (-2) \cdot 20$. Ook is $1 < 2$, maar $-1 > -2$. Deze ongelijkheden zie je ook op de getallenrechte:



Opmerking 8.4.1.

- Ongelijkheden kunnen aan elkaar worden gekoppeld:

  $$a < b < c \iff a < b \text{ en } b < c.$$

  Merk op dat uit beide uitdrukkingen telkens ook volgt dat $a < c$.

- Uitdrukkingen van de vorm $a < b > c$ worden *nooit* gebruikt: je schrijft bv. $a < b$ en $c < b$, of korter $a, c < b$.

- Uit $x < y \iff x + r < y + r$ voor alle x, y, r volgt onmiddellijk dat

  $$a + c < b \iff a < b - c.$$

  Dit is een term naar het andere lid brengen (kies $x = a + c, y = b$ en $r = -c$). Ook volgt dat

  $$a < b \iff a - b < 0.$$

  Inderdaad: kies $x = a, y = b, r = -y$.

- Uit $x < y \implies r \cdot x < r \cdot y$ voor strikt positieve r volgt op gelijkaardige manier:

  $$a < b \cdot c \implies \frac{a}{b} < c \quad \text{als } b > 0$$

  en

  $$a < b \implies \frac{a}{b} < 1 \quad \text{als } b > 0.$$

  Het is dus belangrijk dat de factor die je van lid verandert *positief* is. Als dat niet het geval is, draait de ongelijkheid om.

Met deze notatie en de basiseigenschappen van de ongelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van ongelijkheden, namelijk de verzameling alle getallen die voldoen aan de ongelijkheid.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Ongelijkheden

Voorbeeld 8.4.2 (Oplossen van ongelijkheden)**.**

1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $2x + 3 < 5$.

$$\begin{array}{rcll} 2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen }) \\ 2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\text{ delen door } 2\ ) \\ x & < & 1 & (\ x \text{ is kleiner dan } 1\ ) \end{array}$$

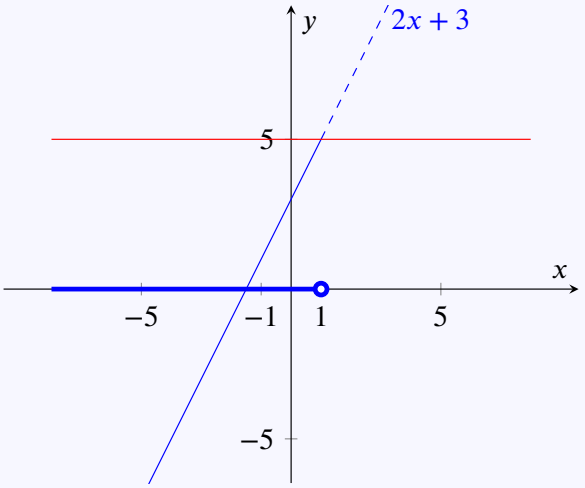
Dus is de oplossingsverzameling $V =]-\infty, 1\,[$.

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

$$2x - 2 < 0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto 2x - 2$ te gebruiken:

x	$\|\|$		1	
$2x-2$	$\|\|$	$-$	0	$+$



2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $-2x + 3 < 5$.

$$\begin{array}{rcll} -2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen }) \\ -2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\text{ delen door } -2\text{, ongelijkheid omkeren }) \\ x & > & -1 & (\ x \text{ is groter dan } -1\ ) \end{array}$$

Dus is de oplossingsverzameling $V =]-1, +\infty[$.

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

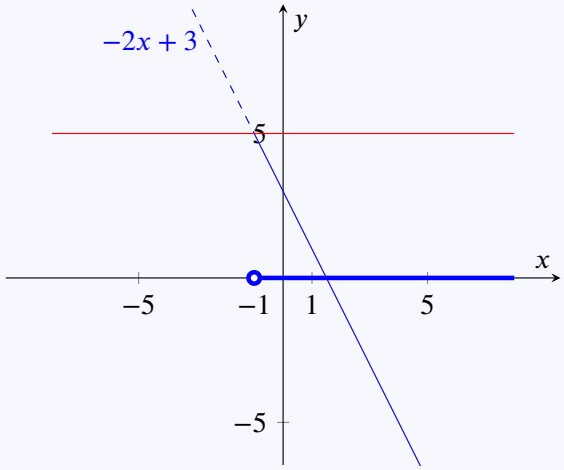
$$-2x - 2 < 0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto -2x - 2$ te gebruiken:

x	$\|\|$		-1	
$-2x-2$	$\|\|$	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Ongelijkheden



Voorbeeld 8.4.3 (Oplossen van ongelijkheden)**.** Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$.

We mogen *niet* zomaar linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $x-3$, want we kennen het teken niet van $x-3$. We maken dus een *gevalsonderscheid*:

- Merk alvast op dat de uitdrukking niet gedefinieerd is voor $x = 3$: we zouden immers delen door nul. 3 behoort dus al zeker *niet* tot de oplossingsverzameling.
- $x-3 > 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid blijft behouden omdat $x-3$ positief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & < & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen }) \\ 4 & < & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen }) \\ 10 & < & x & (\ x \text{ is groter dan } 10\ ) \end{array}$$

- $x-3 < 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid keert om omdat $x-3$ negatief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & > & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen }) \\ 4 & > & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen }) \\ 10 & > & x & (\ x \text{ is kleiner dan } 10\ ) \end{array}$$

Dus

- in het geval dat $x-3 > 0$ (of $x > 3$), dan wordt de ongelijkheid $x > 10$.
- in het geval dat $x-3 < 0$ (of $x < 3$), dan wordt de ongelijkheid $x < 10$. Dat is natuurlijk automatisch het geval: Als $x < 3$ dan is ook $x < 10$. Dus, als $x < 3$ dan is automatisch $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$

Samengevat: $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$ als $x < 3$ of $x > 10$.

Dus is de oplossingsverzameling is $V =]-\infty, 3[\cup]10, +\infty[$.

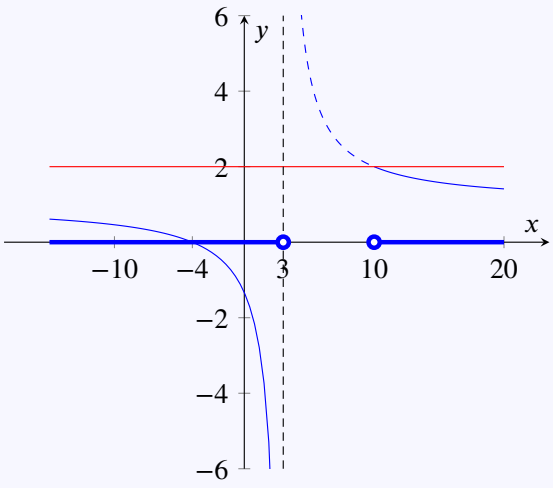
CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Ongelijkheden

Herinner je de notatie '$\cup$' om aan te duiden dat V de unie is van de twee halfrechten.

We kunnen dus ook zeggen: $\frac{x+4}{x-3} < 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[\cup]10, +\infty[$.

Dit kunnen we ook zien op de grafiek van $\frac{x+4}{x-3}$:



Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden, mits herschrijven van de opgave, door het tekenverloop van een rationale functie te onderzoeken.

Bron: Schaum's outline series, Beginning Calculus, Second Edition, p.4

Opmerking 8.4.2 (Bestaansvoorwaarden)**.**

Bij het oplossen van ongelijkheden komen regelmatig situaties voor als in vorig voorbeeld: een breuk $\frac{x+4}{x-3}$ is niet gedefinieerd voor $x = 3$, omdat we dan zouden delen door nul. De ongelijkheid kan dus zelfs niet worden opgeschreven voor deze waarde van x, want de uitdrukking $\frac{x+4}{x-3}$ *heeft geen zin* voor $x = 3$. Voor we de ongelijkheid oplossen moeten we dus als zogenaamde bestaansvoorwaarde stellen dat $x \neq 3$. Dit leidt meestal tot gevalsonderscheid. Niet alleen bij nulpunten van een noemer, ook bij het nemen van wortels kunnen bestaansvoorwaarden nodig zijn: een uitdrukking als $\sqrt{x+3} > 7$ heeft geen betekenis als $x + 3 < 0$.

Zij $x, y \in \mathbb{R}$ en f een reële functie. We kunnen ons het volgende afvragen:

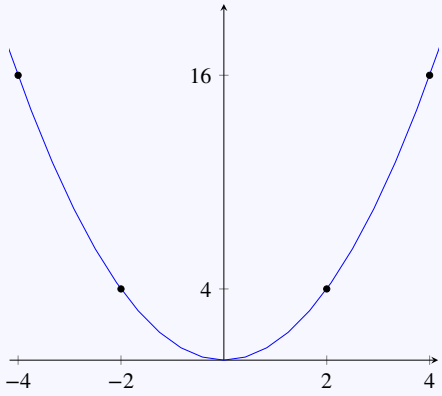
als $x < y$, kunnen we dan iets zinnigs zeggen over $f(x)$ en $f(y)$?

In De Ideale Wereld zouden we kunnen hopen dat $x < y$ impliceert dat ook $f(x) < f(y)$, maar de Wereld is niet Ideaal.

Voorbeeld 8.4.4. We onderzoeken bij wijze van voorbeeld het verband voor de functie $f(x) = x^2$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Ongelijkheden



Er geldt dan:

$$\begin{array}{rcl} 2 < 4 & \text{en} & 2^2 < 4^2 \\ -4 < -2 & \text{en} & (-4)^2 > (-2)^2 \\ -2 < 4 & \text{en} & (-2)^2 < 4^2 \\ -4 < 2 & \text{en} & (-4)^2 > 2^2 \\ -2 < 2 & \text{en} & (-2)^2 = 2^2 \end{array}$$

Als x en y beide positief zijn, wordt de orde behouden. Als x en y beide negatief zijn, draait de orde om. Als x en y een verschillend teken hebben, kunnen we niets zeggen over de relatie tussen x^2 en y^2: zowel $x^2 < y^2$, $x^2 > y^2$ als $x^2 = y^2$ zijn mogelijk. In dit geval mogen we dus niet kwadrateren.

We kunnen de verschillende gevallen samenvatten als:

Als $x, y \geq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Als $x, y \leq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2$.

Als $x < 0 < y$ zijn zowel $x^2 \leq y^2$ als $x^2 \geq y^2$ mogelijk.

Dit voorbeeld toont aan dat je erg moet opletten bij het al dan niet behouden blijven van ongelijkheden.

Definitie 8.4.1. Zij f een reële functie op een interval $I \subset \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ is strikt stijgend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) < f(y)) \\ f \text{ is strikt dalend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) > f(y)) \end{array}$$

Dus, als je *weet* dat een bepaalde functie stijgt (omdat je de grafiek kent), dan weet je ook dat $f(x) < f(y)$ van zodra $x < y$.

Voorbeeld 8.4.5.

1. De functie $f : x \mapsto 2x + 3$ is stijgend, en dus is $f(2) < f(4)$.
2. De functie $f : x \mapsto -2x + 3$ is dalend, en dus is $f(2) > f(4)$.
3. De functie $f : x \mapsto x^2$ is stijgend op het interval $[0, 10]$, en dus is $f(2) < f(4)$.
4. De functie $f : x \mapsto x^2$ is dalend op het interval $[-10, 0]$, en dus is $f(-4) > f(-2)$.
5. De functie $f : x \mapsto \sqrt{x}$ is stijgend op het interval $[0, +\infty[$ en dus is $f(2) < f(4)$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Ongelijkheden

Oefening 8.4.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid

1. $2 < \sqrt{x} \iff x \in$ $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen

2. $-2 < \sqrt{x} \iff x \in$ $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen

3. $2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen

4. $-2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen

Voorbeeld 8.4.6. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x-1} > 3$.

De uitdrukking onder het wortelteken moet positief zijn, anders heeft de opgave geen betekenis. Dit is de bestaansvoorwaarde:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1\,.$$

We mogen kwadrateren omdat beide leden van de ongelijkheid positief zijn en de orde blijft bewaard. We krijgen dan $x - 1 > 9$.

Omdat $x - 1 > 9$ overeenstemt met $x > 10$, is aan de bestaansvoorwaarde $(x \geq 1)$ zeker voldaan.

De oplossingsverzameling is dus $V =]10,+\infty[$.

In volgende voorbeelden geven we enkel de methode, niet de gehele uitwerking.

Voorbeeld 8.4.7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \leq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, geen oplossing

Voorbeeld 8.4.8. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \geq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, ongelijkheid steeds voldaan

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.A Oefeningen ongelijkheden

Oefening 8.4.2. Los volgende ongelijkheden op:

1. Geef alle gehele getallen x die voldoen aan $4 \leq x < 7$. Antwoord: ... ...

2. Welke reële getallen x voldoen aan $x + 5 < 7$.

Meerkeuze:

(a) $[0, 2[$

(b) $]-\infty, 2[$

(c) $]-\infty, 2]$

(d) $]-2, 7[$

3. Welke reële getallen x voldoen aan $2x + 5 \geq 4x + 3$. Antwoord: ... ...

4. Welke reële getallen x voldoen aan $-2x \leq -4$. Antwoord: ... ...

Oefening 8.4.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid.

1. $2(x^2 + 1) \leqslant 5x \iff$ ... ...

2. $x^2(x^2 + 3) < (x + 6)(x^2 + 3) \iff$ ... ...

3. $\dfrac{1}{x} < 3 \iff$ ... ...

4. $\dfrac{x}{x+1} \geq -2 \iff$ ... ...

5. $\dfrac{(x-5)^2}{x-4} < \dfrac{x-5}{x-4} \iff$ ... ...

6. $\dfrac{2x}{x-1} \leqslant \dfrac{x}{x-2} \iff$ ... ...

Oefening 8.4.4.

1. $\sqrt[3]{4x} \leq x \iff$ ... ...

2. $(x + 1)^3 < 27 \iff$ ... ...

3. $\sqrt{x+3} < x - 2 \iff$ ... ...

4. $\dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}} < 2 \iff$ ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.B Extra oefeningen ongelijkheden

Oefening 8.4.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid. Vergeet ook niet na te gaan voor welke $x \in \mathbb{R}$ beide leden gedefinieerd zijn.

1. $(x^2+x)^2 > (x^2+5)^2 \iff \ldots\ldots$
2. $\sqrt{(x-1)^2} < x^2+4x-5 \iff \ldots\ldots$
3. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+27x-1}}{x} > 3 \iff \ldots\ldots$
4. $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} > x-2 \iff \ldots\ldots$

Oefening 8.4.6. Onderzoek telkens welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid.

1. $\dfrac{x^2+25}{6x^2-17x+12} \leqslant \dfrac{3x-4}{2x-3} + \dfrac{2x-3}{3x-4} \iff \ldots\ldots$
2. $\dfrac{3(x+2)^3}{x^2+7x+10} \geqslant \dfrac{x(x+2)^3}{x^2+7x+10} \iff \ldots\ldots$

Oefening 8.4.7.

1. Bepaal alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $\dfrac{2-x}{x-3}$ de sinus is van een hoek. $\ldots\ldots$
2. Onderzoek welke $x \in [-1,1]$ met $x \neq 0$ voldoen aan $\dfrac{\tan x^2}{\sin x} \leqslant \dfrac{1}{\cos x}$. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

8.5 Absolute waarde

Definitie 8.5.1 (Absolute waarde)**.**

Voor een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ definiëren we de *absolute waarde* van a, genoteerd $|a|$, als

$$|a| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{als} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{als} \quad a < 0. \end{cases}$$

Als a positief is, dan is $|a|$ gewoon a, maar als a negatief is, dan is $|a|$ het overeenkomende *positieve* getal $-a$. Dus, $|a|$ is altijd positief.

Voorbeeld 8.5.1 (Eenvoudige voorbeelden van absolute waarden)**.**

(a) $|5| = 5$ en $|-5| = 5$

(b) $|2+1| = |2| + |1| \quad (= 3)$

(c) $|2+(-1)| \neq |2| + |-1|$ (want $1 \neq 3$)

(d) $|(-3)^2| = |3^2| = 9 \quad (= |-3^2| = |-9|)$

(e) $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

(f) $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$

(g) $|2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}$

(h) $|\sqrt{2}-2| = 2-\sqrt{2}$

Voorbeeld 8.5.2. De vergelijking $|x-5| = 9$ heeft 2 oplossingen want ofwel is $x-5 = 9$ ofwel is $-(x-5) = 9$. De oplossingen zijn dan $x = 14$ of $x = -4$.

Volgende eigenschappen volgen eenvoudig uit de definitie:

Eigenschap 8.5.1. Als $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan is

(a) $|x| \geq 0$

(b) $|x| = 0 \iff x = 0$

(c) $|x| = |y| \iff x = \pm y$

(d) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(e) $|-x| = |x|$

(f) $|x-y| = |y-x|$

(g) $|x|^2 = x^2 = |x^2|$ $\qquad (= |-x^2| = |(-x)^2|)$

(h) $\sqrt{x^2} = |x|$

(i) $(\sqrt{x})^2 = x$ (als $x \geq 0$ want anders bestaat de wortel niet)

(j) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (absolute waarde van product is product van absolute waarden)

(k) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ met $y \neq 0$ (absolute waarde van quotiënt is quotiënt van absolute waarden)

Opmerking 8.5.1 (Eigenschappen van de absolute waarde (met $a \in \mathbb{R}$))**.**

(a) Pas op: $|-a| = |a|$, maar zeer zeker niet ~~$|-a| = a$~~
$|-a| = a$ is fout als $a < 0$: als $a = -7$, dan is $|-a| = |-(-7)| \neq -7 = a$

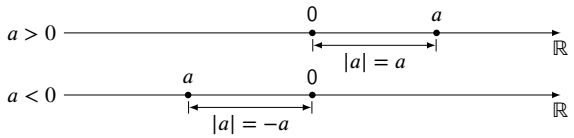
8.5 Absolute waarde

(b) $|a^2+1| = a^2+1$, want a^2+1 is altijd positief.

(c) $|a^2-1| = \ldots$. (er is GEEN eenvoudige algemene formule zonder $|\cdot|$)

(d) De absolute waarde van een som is niet de som van de absolute waardes ~~$|x+y| = |x|+|y|$~~, want bijvoorbeeld $|2+(-3)| = |-1| = 1$ terwijl $|2|+|-3| = 2+3 = 5$

Bij de voorstelling van a op de reële rechte $\mathbb{R}$ is $|a|$ gelijk aan de afstand van het punt a tot de oorsprong:

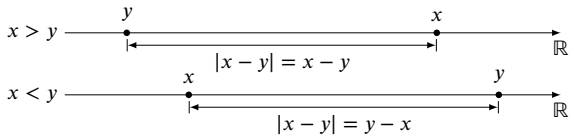


Deze eenvoudige opmerking leidt onmiddellijk tot volgend belangrijk inzicht:

Eigenschap 8.5.2. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt (op de reële rechte $\mathbb{R}$)

$|x-y|$ is de afstand tussen x en y.

In het bijzonder is $|x|$ de afstand van x tot de oorsprong.



Opmerking 8.5.2.

- Om in $|x-y|$ het absolute waardeteken te kunnen verwijderen, is het dus *niet* van belang het teken te kennen van x en y, maar wel te weten of x al dan niet groter is dan y. Al naargelang het geval, geldt $|x-y| = x-y$ ofwel $|x-y| = y-x$. In de tekening hierboven is het dus *niet* belangrijk waar de oorsprong ligt, enkel de volgorde van x en y telt.
- Merk op dat je elke som gemakkelijk kan schrijven als een verschil, en dat dus ook geldt dat $|x+y| = |x-(-y)|$ gelijk is aan de afstand tussen x en $-y$.

Gecombineerd met ongelijkheden worden volgende eigenschappen afgelezen op de reële rechte:

Eigenschap 8.5.3 (Basiseigenschappen absolute waarde)**.** Als $x, a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}_0^+$, dan is

1) $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \Leftrightarrow x \in]-r, r[$
   $\Leftrightarrow$ x ligt dichter dan r bij 0

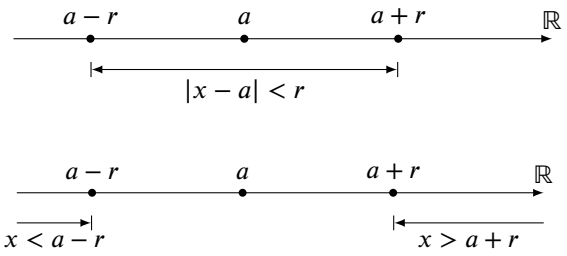
2) $|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ **of** $r < x \Leftrightarrow x \notin [-r, r]$
   $\Leftrightarrow$ x ligt verder dan r van 0

3) $|x-a| < r \Leftrightarrow -r < x-a < r \Leftrightarrow x \in]a-r, a+r[$
   $\Leftrightarrow a-r < x < a+r \Leftrightarrow$ x ligt dichter dan r bij a

4) $|x-a| > r \Leftrightarrow x-a < -r$ **of** $r < x-a \Leftrightarrow x \notin [a-r, a+r]$
   $\Leftrightarrow x < a-r$ **of** $a+r < x \Leftrightarrow$ x ligt verder dan r van a

CC BY-NC-SA 4.0

8.5 Absolute waarde



Opmerking 8.5.3.

- Met deze eigenschappen kan je dus één ongelijkheid *met* een absolute waarde omzetten in een *dubbele* ongelijkheid *zonder* absolute waarde.
- Deze eigenschappen kunnen ook met $\leq$ geformuleerd worden, bijvoorbeeld

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$$

Voorbeeld 8.5.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\left|\frac{2x}{3}\right| < 1$.

Oplossingsverzameling: $V = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$

Uitwerking:

$$\begin{array}{rcll} \left|\frac{2x}{3}\right| & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & \textit{(absolute waarde doorschuiven)} \\ \frac{|2||x|}{|3|} & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & (|2| = 2, |3| = 3) \\ \frac{2|x|}{3} & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & \textit{maal } \frac{3}{2} > 0 \\ |x| & < & \frac{3}{2} & \\ & \Updownarrow & & \\ -\frac{3}{2} < & x & < \frac{3}{2} & \end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

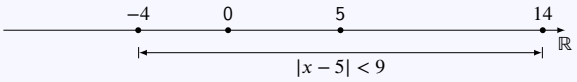
Voorbeeld 8.5.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x - 5| < 9$.

$$\begin{array}{rcll} |x-5| & < & 9 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en 5 is kleiner dan 9)} \\ & \Updownarrow & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\ -9 < & x-5 & < 9 & (x - 5 \text{ ligt tussen } -9 \text{ en } 9) \\ & \Updownarrow & & (+5 \text{ optellen}) \\ -4 < & x & < 14 & (x \text{ ligt tussen } -4 \text{ en } 14) \end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-4, 14[$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.5 Absolute waarde



Oefening 8.5.1.

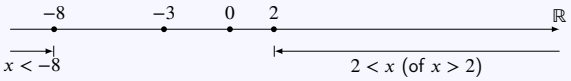
1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|2x - 5| < 9$. Oplossingsverzameling: ... ...

2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|3 - 2x| < 1$. Oplossingsverzameling: ... ...

Voorbeeld 8.5.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x + 3| > 5$

$$
\begin{array}{rcll}
|x+3| & > & 5 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en } -3 \text{ is groter dan 5)} \\
\Updownarrow & & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\
x+3 < -5 & \text{of} & 5 < x+3 & \\
\Updownarrow & & & (\ -3 \text{ optellen}) \\
x < -8 & \text{of} & 2 < x &
\end{array}
$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -8[\ \cup \ ]2, +\infty[$.



Voorbeeld 8.5.6. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x^2 - 3| < 9$.

Oplossingsverzameling: $V = \left]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right[$

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rcll}
|x^2-3| & < & 9 & \text{de afstand tussen } x^2 \text{ en 3 is kleiner dan 9} \\
\Updownarrow & & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\
-9 < x^2-3 & & < 9 & \\
\Updownarrow & & & (\ +3 \text{ optellen}) \\
-6 < x^2 & & < 12 & \\
\Updownarrow & & & -6 < x^2 \text{ is automatisch voldaan en is dus geen voorwaarde} \\
x^2 & < & 12 & \\
\Updownarrow & & & \text{beide leden pos., worteltrekken mag} \\
\sqrt{x^2} & < & \sqrt{12} & (\sqrt{12} = 2\sqrt{3}) \\
\Updownarrow & & & (\sqrt{x^2} = |x|) \\
|x| & < & 2\sqrt{3} & \\
\Updownarrow & & & (|x| < r \iff -r < x < r) \\
-2\sqrt{3} < x & & < 2\sqrt{3}. &
\end{array}
$$

De oplossingsverzameling is dus $V = \left]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right[$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.5.A Oefeningen absolute waarde

Oefening 8.5.2. Bereken (zonder rekenmachine) volgende absolute waarden.

1. $|2-9| = \ldots\ldots$
2. $|-2-(-6)| = \ldots\ldots$
3. $\left|\frac{11}{10} - \frac{51}{10}\right| = \ldots\ldots$
4. $|\pi - 3\pi| = \ldots\ldots$

Oefening 8.5.3. Los volgende vergelijkingen op.

1. $|x| = 5$ $\ldots\ldots$
2. $|2x+5| = 4$ $\ldots\ldots$
3. $|x-3| = 7$ $\ldots\ldots$
4. $\left|\frac{x}{2} - 1\right| = 1$ $\ldots\ldots$

Oefening 8.5.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|x-4| < 2$. $\ldots\ldots$
2. $|4-x| \leq 2$. $\ldots\ldots$
3. $|3x| < 6$. $\ldots\ldots$
4. $|3x-4| < 5$. $\ldots\ldots$
5. $|3(x-1)| < 2$. $\ldots\ldots$
6. $\left|\frac{1}{3}(1-x)\right| < 1$. $\ldots\ldots$

Oefening 8.5.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|\sqrt{x}+3| < 9$. $\ldots\ldots$
2. $|3-\sqrt{x}| < 1$. $\ldots\ldots$
3. $\left|\frac{1-\sqrt{4x+1}}{4}\right| < 1$. $\ldots\ldots$
4. $\left|\frac{3+\sqrt{1-x}}{2}\right| < 1$ $\ldots\ldots$

Oefening 8.5.6. Onderzoek welke $p > 0$ voldoen aan $\left|\frac{1}{12}\left(7-\sqrt{1+48p}\right)\right| < 1$. $\ldots\ldots$

Oefening 8.5.7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan *(Uitdagers)*

1. $\left|5 - \frac{2}{x}\right| \leq 1$. $\ldots\ldots$
2. $\left|\frac{2}{\sqrt{x}-2}\right| < 2$? $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

8.5.A Oefeningen absolute waarde

Oefening 8.5.8. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|x^2 - 2| < 1$. ……

2. $|x^2 - 3| < 2x$. ……

Oefening 8.5.9. Precies één van de volgende uitspraken is waar. Welke?
Een vergelijking in x van de vorm $a|x| = bx + c$ met a, b, c reële parameters

Meerkeuze:

(a) heeft voor alle waarden voor a, b en c precies één reële oplossing.

(b) heeft voor alle waarden voor a, b en c precies twee reële oplossingen.

(c) heeft voor alle waarden voor a, b en c één of twee reële oplossingen.

(d) heeft niet voor alle waarden voor a, b en c een reële oplossing.

(e) heeft voor geen enkele waarde voor a, b en c precies één reële oplossing.

(Bron: ijkingstoets juli 2015)

CC BY-NC-SA 4.0

8.6 Driehoeksongelijkheden

De **driehoeksongelijkheid** is een erg belangrijke eigenschap van de absolute waarde, en meer algemeen van het begrip *afstand*.

De driehoeksongelijkheid zegt dat voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$$

Vb: $\begin{cases} 3 = |5-2| \leq |5-3|+|3-2| = 2+1 = 3 \\ 3 = |5-2| \leq |5-1|+|1-2| = 4+1 = 5 \end{cases}$

en drukt uit dat de *absolute waarde* $|x-y|$ *van een verschil* de *(kortste) afstand* is tussen x en y. Inderdaad, de ongelijkheid zegt dat $|x-y|$ steeds korter (i.e. kleiner) is dan de langs een willekeurig getal z te passeren, dus via $|x-z|+|y-z|$.

Je kan de driehoeksvergelijking wat manipuleren als volgt:

- door in het rechterlid $x-z=a$ en $z-y=b$ te schrijven, verkrijg je $a+b=x-y$, en dus $|a+b| \leq |a|+|b|$.

- door nu $a=x-y$ en $b=y$ te nemen, krijg je $|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y|$, en dus $|x|-|y| \leq |x-y|$. En met $a=x$ en $b=y-x$ krijg je $|y| = |x-(y-x)| \leq |x|+|y-x|$, en dus $|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$. Als zowel $|x|-|y|$ als $|y|-|x|$ kleiner zijn dan $|x-y|$ geldt natuurlijk ook $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$.

Eigenschap 8.6.1. Voor $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt de (eerste) driehoeksongelijkheid

$$|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$$

Vb: $\begin{cases} 3 = |5-2| \leq |5-3|+|3-2| = 2+1 = 3 \\ 3 = |5-2| \leq |5-1|+|1-2| = 4+1 = 5 \end{cases}$

of equivalent (kies $x \rightsquigarrow x-z$ en $y \rightsquigarrow z-y$)

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

Vb: $\begin{cases} 7 = |5+2| \leq |5|+|2| = 5+2 = 7 \\ 3 = |5+(-2)| \leq |5|+|-2| = 5+2 = 7 \end{cases}$

Hieruit volgt de tweede driehoeksongelijkheid

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$$

Vb: $\begin{cases} 3 = \big||5|-|2|\big| \leq |5-2| = 3 \\ 3 = \big||5|-|-2|\big| \leq |5-(-2)| = 7 \end{cases}$

Opmerking 8.6.1.

Uit $|x+y| \leq |x|+|y|$ volgt ook onmiddellijk dat $|x-y| \leq |x|+|y|$ (want $x-y = x+(-y)$ en $|y| = |-y|$). Maar natuurlijk geldt NIET ALTIJD dat $|x-y| \not\leq |x|-|y|$. De tweede driehoeksongelijkheid geeft een soort omgekeerde: $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$.

De driehoeksongelijkheid geeft dus slechts *de helft* van de niet bestaande gelijkheid $|x+y| \not= |x|+|y|$ die sommigen wel eens op roekeloze wijze durven toepassen.

Oefening 8.6.1. Toon aan dat $|y|-7 < |x| < |y|+7$ zodra $|x-y| < 7$.

Oefening 8.6.2. Toon aan dat $|6x-2| < 16$ zodra $|x+2| < 1/3$.

Oefening 8.6.3. Als $|x+5| \leqslant 2$ en $|y+5| \leqslant 6$, dan kan $|x-y|$ maximaal gelijk zijn aan ... ...?
Geef een concreet voorbeeld waarvoor die maximale waarde van $|x-y|$ bereikt wordt.

CC BY-NC-SA 4.0

8.6 Driehoeksongelijkheden

Oefening 8.6.4. Bestaan er $x, y, z, \in \mathbb{R}$ waarvoor $|x+1| \leqslant 2, |y+1| \leqslant 3$, $|y-z| \leqslant 1$ en $|x-z| \geqslant 7$? Argumenteer!

Oefening 8.6.5 (Uitdaging: extra oefening over driehoeksongelijkheden)**.**

Vind voor elke $a \in \mathbb{R}$ een $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ zodat dan voor alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $|a-x| < \varepsilon$ geldt dat $\frac{|a|}{2} < |x|$?

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 9
Ongelijkheden: extra

(Versie 2026/08/25H.51)

9.1 Zelftest ongelijkheden

Oefening 9.1.1. Los volgende ongelijkheden op:

1. Geef alle gehele getallen x die voldoen aan $4 \leq x < 7$. Antwoord: ... ...

2. Welke reële getallen x voldoen aan $x + 5 < 7$.

Meerkeuze:

(a) $[0, 2[$

(b) $]-\infty, 2[$

(c) $]-\infty, 2]$

(d) $]-2, 7[$

3. Welke reële getallen x voldoen aan $2x + 5 \geq 4x + 3$. Antwoord: ... ...

4. Welke reële getallen x voldoen aan $-2x \leq -4$. Antwoord: ... ...

5. Welke reële getallen x voldoen aan $x^2 > 1$. Maak een tekening. Antwoord: ... ...

6. Welke reële getallen x voldoen aan $x^2 - 3 > 2x$. Maak een tekening. Antwoord: ... ...

7. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$.
(Uitdaging) Probeer daarna eventueel ook een tekening te maken. Antwoord: ... ...

Oefening 9.1.2. (Uitdaging) Los volgende ongelijkheden op:

Voor deze oefening moet je ook tweedegraads vergelijkingen kunnen oplossen.

1. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $x^2 > 2x$.
Maak daarna een tekening. Antwoord: ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Orderelatie ⩽

Het is een belangrijke eigenschap van reële getallen dat we ze kunnen *ordenen*. We herhalen volgende notaties en afspraken:

Definitie 9.2.1 (Orderelatie op $\mathbb{R}$)**.** Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$x \leqslant y$	$\iff$	$y \geqslant x$	x is kleiner of gelijk aan y
$x \geqslant y$	$\iff$	$y \leqslant x$	x is groter of gelijk aan y
$x < y$	$\iff$	$x \leqslant y$ en $x \neq y$	x is strikt kleiner dan y
$x > y$	$\iff$	$x \geqslant y$ en $x \neq y$	x is strikt groter dan y
$x \geqslant 0$			x is positief
$x > 0$			x is strikt positief
$x \leqslant 0$			x is negatief
$x < 0$			x is strikt negatief

De relatie $\leqslant$ voldoet aan volgende voor de hand liggende eigenschappen:

Eigenschap 9.2.1 (Orderelatie op $\mathbb{R}$)**.** Zij $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$x \leqslant x$	($\leqslant$ is reflexief)
$(x \leqslant y$ en $y \leqslant x) \Rightarrow x = y$	($\leqslant$ is antisymmetrisch)
$(x \leqslant y$ en $y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$	($\leqslant$ is transitief)
$x \leqslant y$ of $y \leqslant x$	($\leqslant$ is totaal)

Hierbij betekent reflexief dus dat elke getal groter-of-gelijk is aan zichzelf. Antisymmetrisch betekent dat twee verschillende getallen nooit zowel groter-of-gelijk én kleiner-of-gelijk kunnen zijn. Transitief betekent dat alles wat kleiner is dan een bepaald getal, ook kleiner is dan elk groter getal. Deze drie eigenschappen samen definiëren een zogenaamde 'orderelatie'. Als ook alle getallen met elkaar kunnen worden vergeleken, noemt men de orderelatie 'totaal'.

Opmerking 9.2.1.

- Het getal 0 is zowel positief als negatief, maar niet strikt positief, noch strikt negatief
- Het getal 0 is het enige getal dat zowel positief als negatief is.
- Als $x < y$, dan geldt ook dat $x \leqslant y$, maar niet omgekeerd.
- De relatie $<$ is niet reflexief, maar wel antisymmetrisch en transitief. Ze is niet totaal (want $x \not< x$)

Eigenschap 9.2.2 (Eigenschappen ongelijkheden)**.** Zij $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

	$x < y$	$\iff$	$x + z < y + z$	(term optellen (of aftrekken))
	$x + z < y$	$\iff$	$x < y - z$	(term van lid veranderen)
Als $z > 0$	$x < y$	$\iff$	$xz < yz$	(vermenigvuldigen met strikt positieve factor)
Als $z > 0$	$zx < y$	$\iff$	$x < \frac{y}{z}$	(strikt positieve factor van lid veranderen)
Als $z < 0$	$x < y$	$\iff$	$xz > yz$	(vermenigvuldigen met strikt negatieve factor)
Als $z < 0$	$zx < y$	$\iff$	$x > \frac{y}{z}$	(strikt negatieve factor van lid veranderen)
	$x < y$ en $z < t$	$\iff$	$x + z < y + t$	(klein+klein < groot+groot)

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Orderelatie $\leqslant$

Opmerking 9.2.2. Vermenigvuldigen met een *negatief* getal *keert de ongelijkheid om*.

Vergeet dit niet als je rekent met *letters* die zowel positieve als negatieve getallen kunnen voorstellen.

Voorbeeld 9.2.1 (Basisvoorbeelden ongelijkheden).

1. $1 < 2$
2. $-1 < 2$
3. $1 > -2$
4. $-1 > -2$
5. $-2 < -1$
6. $7 > -8$

Voorbeeld 9.2.2 (Basisvoorbeelden ongelijkheden). Zij $a, b \in \mathbb{R}$, met $a \leqslant b$. Dan geldt (met $\lesseqgtr$ betekent: zowel $a \leqslant b$ als $b \leqslant a$ zijn mogelijk)

1. $b \geqslant a$
2. $-a \lesseqgtr b$
3. $a \lesseqgtr -b$
4. $a + 2 \leqslant b + 2$
5. $a + 2 \leqslant b + 3$
6. $a + 3 \lesseqgtr b + 2$
7. $ab = ba$
8. $2a \leqslant 2b$
9. $2a \lesseqgtr 3b$
10. $3a \lesseqgtr 2b$

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Intervallen

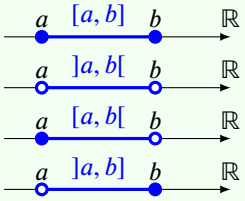
Een *interval* bestaat uit alle getallen die tussen twee gegeven getallen liggen:

Definitie 9.3.1 (Intervallen)**.** Voor $a, b \in \mathbb{R}$, met $a < b$, geldt:

- $[a, b]$, het **gesloten interval** van a tot b, bevat de getallen tussen a en b, met a en b inbegrepen.
- $]a, b[$, het **open interval** van a tot b, bevat de getallen tussen a en b, met a en b *niet* inbegrepen.
- $[a, b[$ en $]a, b]$ zijn op gelijkaardige manier telkens een **half-open interval**.

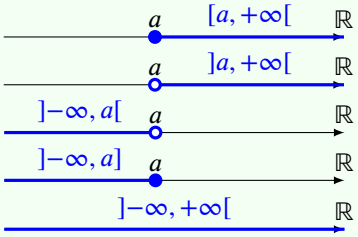
In formules:

$$
\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} & \text{het gesloten interval } [a,b] \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & \text{het open interval }]a,b[\\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} & \text{het half-open interval } [a,b[\\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} & \text{het half-open interval }]a,b]
\end{array}
$$



De notatie wordt als volgt uitgebreid voor halfrechten of 'oneindige intervallen':

$$
\begin{array}{rcl}
[a, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\} \\
]a, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
]-\infty, a[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \\
]-\infty, a] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\} \\
]-\infty, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}
\end{array}
$$

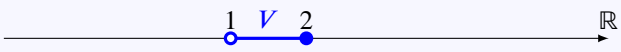


Merk op dat $\pm\infty$ zelf nooit tot het interval behoort, want $\pm\infty$ is geen reëel getal.

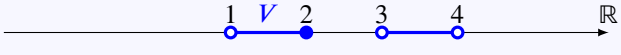
Met $\cap$ en $\cup$ kunnen we ook de unie en doorsnede van intervallen aanduiden:

$$
\begin{array}{rcl}
[a,b] \cup [c,d] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b] \text{ of } x \in [c,d]\}, \\
[a,b] \cap [c,d] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b] \text{ en } x \in [c,d]\}.
\end{array}
$$

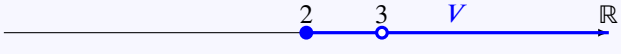
Voorbeeld 9.3.1. Volgende verzamelingen zijn telkens een (unie van) interval(len):

1.


$V =]1, 2]$

2.


$V =]1, 2] \cup]3, 4[$

3.


$V = [2, 3[\cup]3, +\infty[$

Let op: in het Engels gebruikt men ook de notatie $(a, b), [a, b)$ en $(a, b]$ voor (half-)open intervallen.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3.A Basisoefeningen ongelijkheden

Oefening 9.3.1. Toon aan dat voor elke $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ geldt dat $\frac{1}{\cos^2 x} + \sin^2 x \leqslant \frac{5}{2}$.

Oefening 9.3.2. Toon aan dat voor elke $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ waarbij $x < y$ geldt dat

$$\frac{1+2x-x^3}{x} > \frac{1+2y-y^3}{y}.$$

Oefening 9.3.3. Zij $\varepsilon > 0$ een strikt positief reëel getal en $n \in \mathbb{N}$ een natuurlijk getal dat voldoet aan $n > \left(\frac{7}{\varepsilon}\right)^2$.

Toon aan dat $\frac{7}{\sqrt{n}+3} < \varepsilon$.

Oefening 9.3.4. Stel $R \in \mathbb{R}$ een willekeurig reëel getal en $n \in \mathbb{N}$ een natuurlijk getal dat voldoet aan $n \geqslant 3$ en $n > \frac{R+1}{2}$.

Toon aan dat $\frac{2n^2-3}{n} > R$.

Oefening 9.3.5. Zij $\varepsilon > 0$ een vast strikt positief reëel getal.
Zoek welke voorwaarden (in functie van ε) aan een natuurlijk getal $K \in \mathbb{N}$ moeten opgelegd worden opdat voor alle natuurlijke getallen $n \geqslant K$ zou gelden

1. $\frac{7}{n^2-2} < \varepsilon$;
2. $\frac{7}{n^2+2} < \varepsilon$.

Oefening 9.3.6. Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Oefening 9.3.7. Een rij reële getallen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ waarvoor een index $K \in \mathbb{N}$ bestaat zodat

(a) voor elk natuurlijk getal $n \geqslant K$ geldt dat $u_n \leqslant u_{n+1}$ heet *stijgend vanaf de index K*.

(b) voor elk natuurlijk getal $n \geqslant K$ geldt dat $u_n \geqslant u_{n+1}$ heet *dalend vanaf de index K*.

Onderzoek of volgende rijen stijgend of dalend zijn vanaf een bepaalde index.

1. $u_n = \frac{2n-1}{3n+4}$: ……
2. $u_n = \frac{n}{n^2+4}$: ……
3. $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ met $n \in \mathbb{N}_0$: ……
4. $u_n = \tan\frac{\pi}{4n}$ met $n \in \mathbb{N}_0$: ……
5. $u_n = \frac{10^n}{n!}$: ……

CC BY-NC-SA 4.0

9.3.A Basisoefeningen ongelijkheden

Oefening 9.3.8. Bepaal de parameter $r \in \mathbb{R}$ opdat volgende vierkantsvergelijking twee verschillende reële oplossingen zou hebben die beide groter zijn dan -1.

$$x^2 + rx - 1/2 = 0$$

Oefening 9.3.9. Zoek grafisch welke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ voldoen aan volgend stelsel.

1.
$$\begin{cases} x & < & y \\ x-1 & > & 0 \\ x+y & < & 3 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x-y+3 & \geqslant & 0 \\ 3x+y & < & 0 \\ x+2y+3 & > & 0 \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

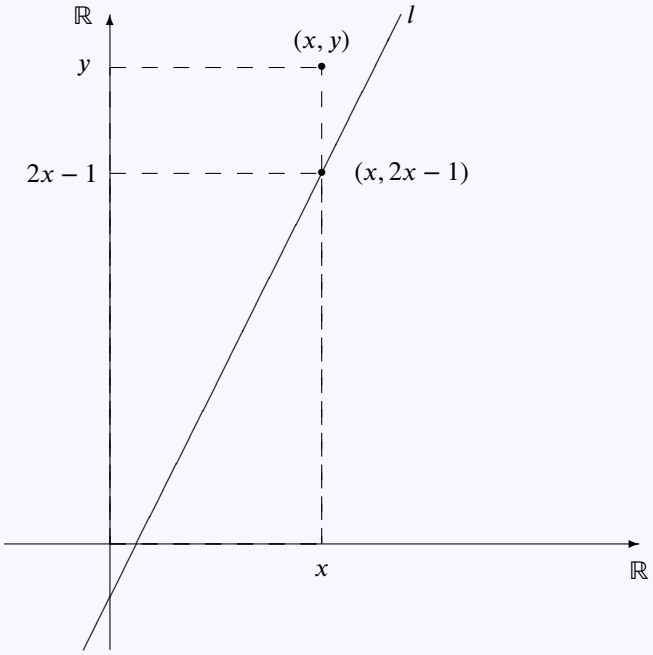
9.4 Lineaire ongelijkheden grafisch oplossen

Een algemene lineaire vergelijking met twee onbekenden is van de vorm $ax+by+c=0$. Men kan zich niet alleen afvragen waar $ax+by+c=0$, maar ook waar $ax+by+c=>0$ en waar $ax+by+x<0$.

We maken onmiddellijk volgende bedenkingen

- $ax+by+c=0$ is de vergelijking van een rechte. Het lijkt aannemelijk dat alle punten waar $ax+by+c>0$ aan één kant van die rechte zullen liggen (en steeds verder van die rechte naarmate $ax+by+c$ groter wordt) en aan de andere kant als $ax+by+c<0$. We zullen verder zien dat dat inderdaad zo is.
- Er geldt duidelijk dat $ax+by+c<0$ als en slechts als $-ax-by-c>0$. Het volstaat dus ongelijkheden van het type $ax+by+c<0$ te bestuderen (want de andere ongelijkheden kunnen we tot dit geval herleiden door met -1 te vermenigvuldigen).
- als $b=0, a\neq 0$ wordt de ongelijkheid $ax+c<0$, wat te herleiden is tot $x<-c/a$ of $x>-c/a$, afhankelijk van het teken van a

Voorbeeld 9.4.1. Bekijken we de functie f met functievoorschrift $f(x)=2x-1$, dan is $y=2x-1$ de vergelijking van de grafiek van deze functie f. De grafische voorstelling hiervan in het vlak $\mathbb{R}^2$ is een rechte l.



Bekijken we nu alle punten op een vertikale rechte met eenzelfde vaste x-coördinaat. Alle punten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ **strikt boven** de rechte l hebben een y-coördinaat die strikt groter is dan de y-coördinaat van het punt op de rechte l en voldoen dus aan de ongelijkheid $y>2x-1$, terwijl de punten **strikt onder** de rechte l voldoen aan de ongelijkheid $y<2x-1$.

Dit kunnen we doen voor elke vertikale rechte. We kunnen dus besluiten dat alle punten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ van het halfvlak **strikt boven** de rechte l voldoen aan de ongelijkheid $y>2x-1$ en alle punten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ van het halfvlak **strikt onder** de rechte l voldoen aan de ongelijkheid $y<2x-1$
Uiteraard bepaalt de ongelijkheid $y\geqslant 2x-1$ het bovenste halfvlak **met** de punten op de rechte l, en $y\leqslant 2x-1$ het onderste halfvlak **met** de punten op de rechte l.

Algemeen geldt volgende eigenschap

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Lineaire ongelijkheden grafisch oplossen

Eigenschap 9.4.1.

Als $y = ax + b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ de vergelijking is van een niet-vertikale rechte l in het (x, y)−vlak, dan bepaalt

(a) $y > ax + b$ het halfvlak **boven** de rechte l **zonder** de punten op de rechte l,

(b) $y < ax + b$ het halfvlak **onder** de rechte l **zonder** de punten op de rechte l,

(c) $y \geqslant ax + b$ het halfvlak **boven** de rechte l **met** de punten op de rechte l,

(d) $y \leqslant ax + b$ het halfvlak **onder** de rechte l **met** de punten op de rechte l.

Als $x = b$ met $b \in \mathbb{R}$ de vergelijking is van een vertikale rechte l in het (x, y)−vlak, dan bepaalt

(e) $x > b$ het halfvlak **rechts** van de rechte l **zonder** de punten op de rechte l,

(f) $x < b$ het halfvlak **links** van de rechte l **zonder** de punten op de rechte l,

(g) $x \geqslant b$ het halfvlak **rechts** de rechte l **met** de punten op de rechte l,

(h) $x \leqslant b$ het halfvlak **links** van de rechte l **met** de punten op de rechte l.

Om een *stelsel* ongelijkheden van bovenstaande vormen grafisch op te lossen, lossen we *elke ongelijkheid afzonderlijk* op en bepalen dan het *gemeenschappelijke deel (de doorsnede)* van de verkregen oplossingsverzamelingen.

Voorbeeld 9.4.2.

1. Zoek alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die voldoen aan $2x - y + 4 > 0$.

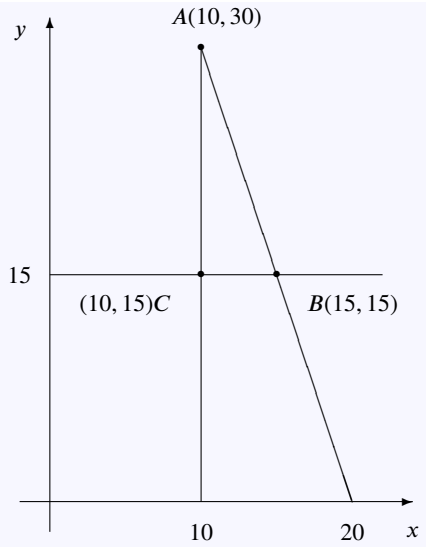
Uitwerking: De gegeven ongelijkheid is gelijkwaardig met $y < 2x + 4$.
We tekenen de rechte l met vergelijking $y = 2x + 4$. De oplossingsverzameling is dus het halfvlak onder de rechte l zonder de punten op de rechte (eig. 9.4.1((b))).

2. Zoek alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die voldoen aan $\begin{cases} x & \geqslant & 10 \\ y & \geqslant & 15 \\ 3x + y & \leqslant & 60 \end{cases}$

Uitwerking: We tekenen de rechten met vergelijkingen $x = 10$, $y = 15$ en $y = -3x + 60$.
Voor elk van de ongelijkheden bepalen we de oplossingsverzameling.
Voor $x \geqslant 10$ is dit het halfvlak rechts van de vertikale rechte $x = 10$ met de punten op de rechte zelf (eig. 9.4.1((g))).
Voor $y \geqslant 15$ is dit het halfvlak boven de horizontale rechte $y = 15$ met de punten op de rechte zelf (eig. 9.4.1((c))).
Voor $y \leqslant -3x + 60$ is dit het halfvlak onder de rechte met de punten op de rechte zelf (eig. 9.4.1((d))).
De oplossingsverzameling van het stelsel bestaat dus uit de punten binnen de driehoek ABC en op de randen ervan.

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Lineaire ongelijkheden grafisch oplossen



CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

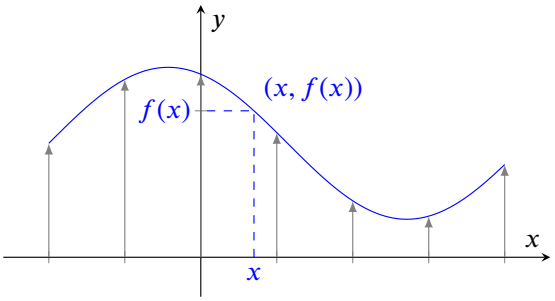
Voorkennis Wiskunde

Module 10
Functies en hun grafieken

(Versie 2026/08/25H.51)

10.1 Intro functies en hun grafieken

Het begrip *functie* is erg belangrijk in de wiskunde. Met een functie beschrijven we op een wiskundige manier het *verband* tussen verschillende dingen. Bij een vierkant is er een duidelijk *verband* tussen de lengte van een zijde en de oppervlakte. Als de zijde lengte ℓ heeft, dan ligt de oppervlakte onherroepelijk vast: die is dan ℓ^2. Als één knikker a gram weegt, dan ligt het gewicht van een doos met x knikkers onherroepelijk vast: dat is dan $a \cdot x + b$ gram (waarbij b het gewicht is van de doos, en x niet groter dan de hoeveelheid knikkers die in de doos past).



We bespreken enkele basiseigenschappen van reële functies: *rekenen met functies* en *functies tekenen*. We kunnen ze zelfs samenstellen. Met functies en hun basiseigenschappen kunnen erg veel wetenschappelijke problemen correct worden geformuleerd, bestudeerd, en in gunstige gevallen ook worden opgelost. De basiseigenschappen worden later uitgebreid met meer geavanceerde technieken zoals afgeleiden en integralen.

In wat volgt hebben we de leerstof over functies als volgt opgebouwd:

(1) Een inleiding over en definitie van functies.

(2) Een overzicht van een aantal manieren om functies voor te stellen: tabel, pijlenvoorstelling, grafieken of functievoorschriften (i.e. formules).

(3) Een kort maar belangrijk stukje over grafieken van reële functies.

(4) Twee deeltjes over de som en verschil van functies, en over hun product en quotiënt.

(5) Een belangrijke inleiding tot het samenstellen van functies.

(6) Het effect van sommige functies kan worden 'ongedaan gemaakt' door hun inverse functie.

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Intro via machines

Wiskundige functies kunnen beschouwd worden als *machines* die een *input* transformeren in een *output*. We onderzoeken hier hoe we door te vertrekken van erg elementaire basismachines op een nauwkeurige manier meer ingewikkelde functies kunnen construeren en begrijpen.

Dat geeft dan een degelijke basis voor het verder begrijpen van het functiebegrip. Maar bij een eerste lectuur kan het ongetwijfeld wat overweldigend overkomen.

Dit is een *inleidende* uitweiding
en een ongeduldige lezer kan overwegen om
onmiddellijk de definitie te raadplegen.

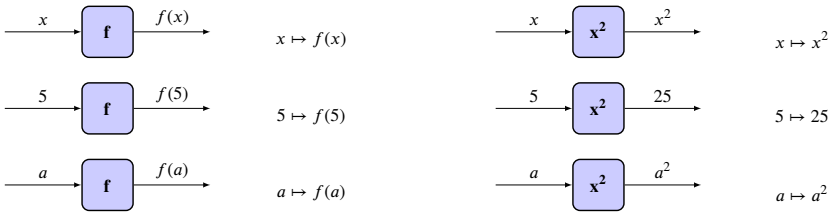
We geven een functie een naam (typisch gebruiken we de letter f), en die functie f verandert een willekeurig ding x van het type A in een ding van het type B dat we $f(x)$ noteren. We stellen dat grafisch als volgt voor:



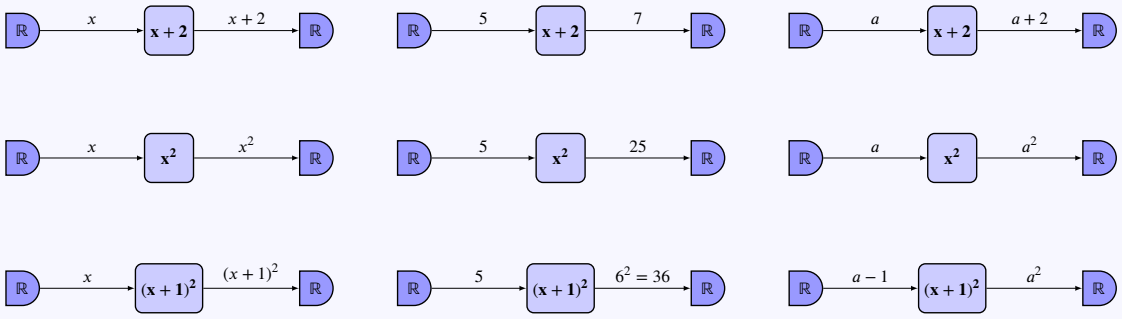
en we schrijven wiskundig:

$$f : A \to B : x \mapsto f(x)$$

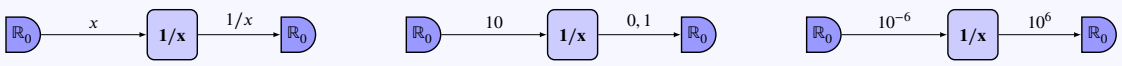
We noemen A het *domein* en B het *codomein*. Als de A en B duidelijk zijn uit de context, schrijven we dikwijls ook korter $f : x \mapsto f(x)$ of zelfs $x \mapsto f(x)$. Ook in de grafische voorstelling laten we dan de A en B weg.



Voorbeeld 10.2.1 (Eenvoudige voorbeelden van functies)**.**

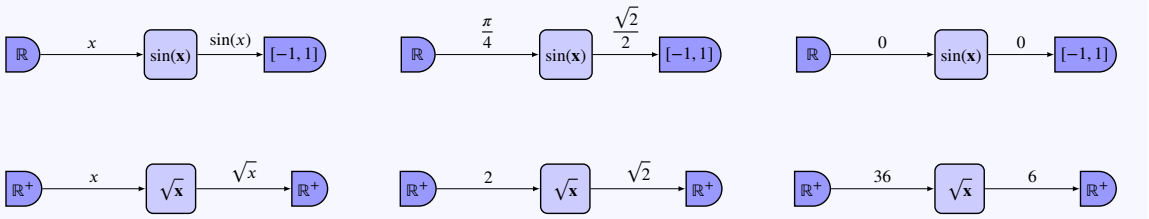


Voorbeeld 10.2.2 (Iets minder eenvoudige voorbeelden van functies)**.**



CC BY-NC-SA 4.0

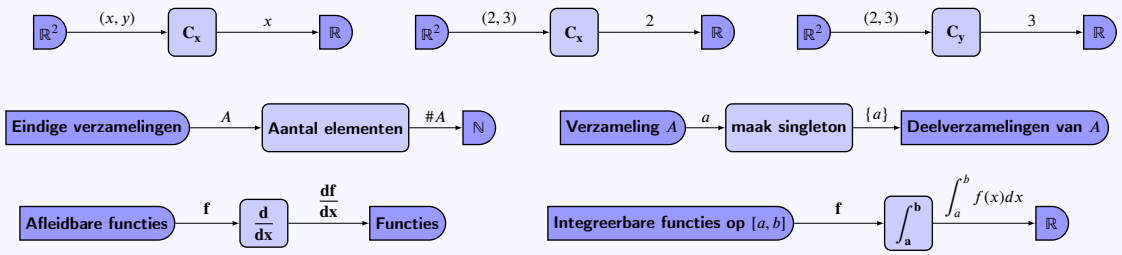
10.2 Intro via machines



Voorbeeld 10.2.3 (Iets minder wiskundige voorbeelden van functies)**.**



Voorbeeld 10.2.4 ((Uitbreiding) Veel minder eenvoudige voorbeelden van functies)**.**

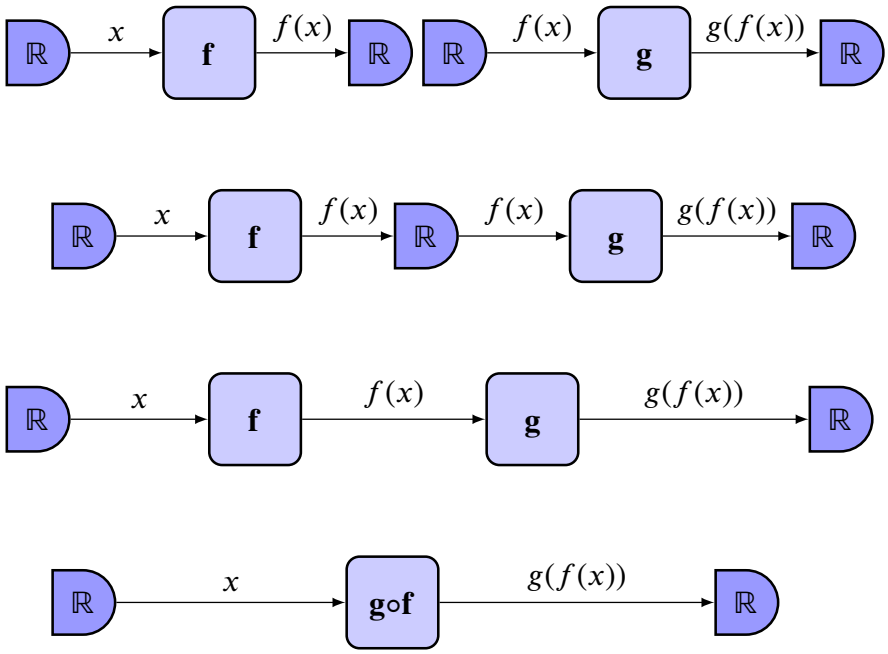


Terwijl dergelijke functie-machines dus allerlei bewerkingen uitvoeren met *elementen* van verzamelingen, willen we onmiddellijk ook al een stap verder gaan: we willen ook met *de functie-machines zelf eenvoudige bewerkingen kunnen uitvoeren*. In de machine-voorstelling is de meest eenvoudige constructie het achter elkaar plaatsen van twee machines. Wiskundig heet dat het *samenstellen* van functies. Dat kan natuurlijk alleen maar als de output van de eerste machine kan dienen als input voor de tweede machine. Met wiskundige terminologie zeggen we dat het codomein van de eerste functie een deelverzameling moet zijn van het domein van de tweede functie.

Grafisch wordt dit weergegeven door het domein van de tweede functie *over* het codomein van de eerste te schuiven, zoals hieronder weergegeven. De samengestelde functie levert dus een nieuwe machine op.

CC BY-NC-SA 4.0

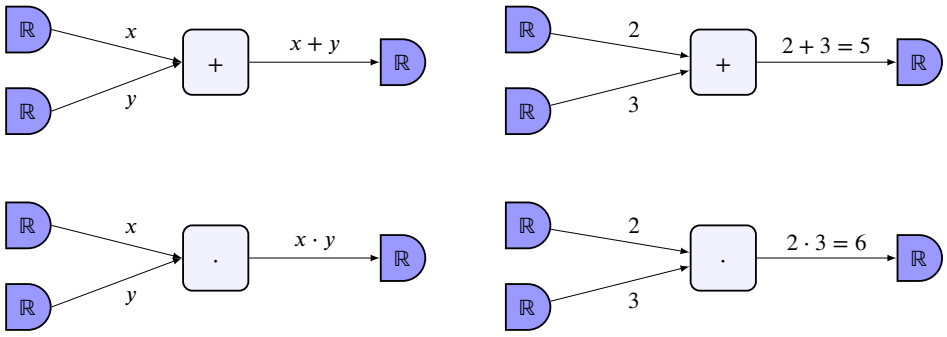
10.2 Intro via machines



Het samenstellen van functies betekent dus het vervangen door één nieuwe machine, namelijk de (nieuwe) 'samengestelde functie', van twee na elkaar geplaatste bestaande machines, namelijk de (oude) 'samenstellende functies'. De nieuwe machine doet gewoon het werk van de twee oude in één keer.

We kunnen ook machines proberen maken voor het optellen en vermenigvuldigen van getallen, maar dat is wat complexer. Dergelijkes machines hebben inderdaad *twee* inputs nodig, namelijk de twee termen of de twee factoren van de optelling of de vermenigvuldiging.

Grafisch wordt dit



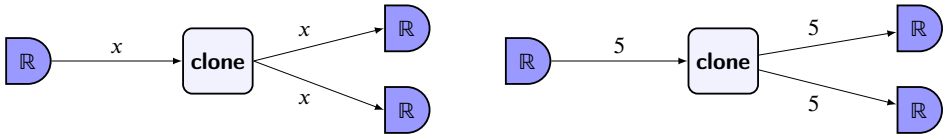
en wiskundig schrijven we dat met koppels (dit is voorlopig niet zo belangrijk, en kan worden overgeslagen):

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$$

en

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \cdot y$$

Om technische redenen voeren we ook een 'clone-machine' in, waarmee we een input kunnen clonen. In dergelijke machine stoppen we dus één x, en er komen -op twee verschillende plaatsen- telkens een kopie van die x uit.



CC BY-NC-SA 4.0

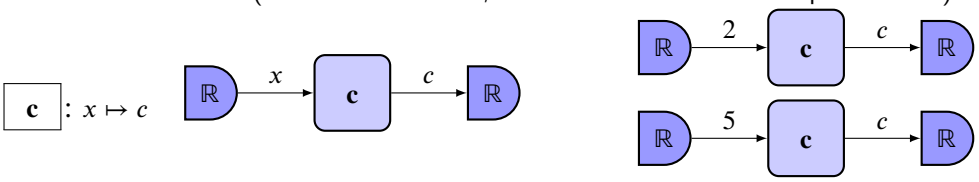
10.2 Intro via machines

Veel van de functies die in de praktijk voorkomen zijn opgebouwd uit eenvoudige basisfuncties.

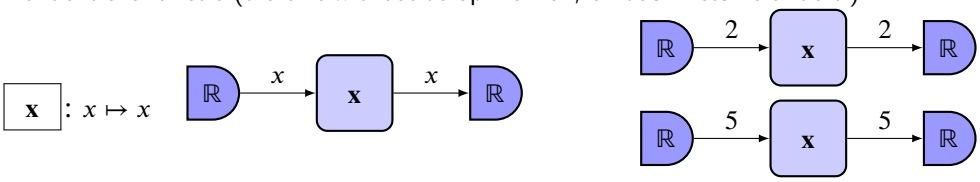
In deze module leren we 'bouwen met functies', net zoals je kan bouwen met Lego of Playmobil. Om zo duidelijk mogelijk onderscheid te maken tussen een functie en de waarde van een functie, zullen we in dit deel een functie steeds noteren als $\boxed{\mathbf{f}}$. De 'actie' van de functie op een input x_0 wordt dan $\boxed{\mathbf{f}}(x_0)$ en de 'output', dus het resultaat, van de functie wordt $f(x_0) = f|_{x=x_0}$. Er geldt dus dat $\boxed{\mathbf{f}}(x_0) = f(x_0)$, maar het linkerlid legt de nadruk op de actie van de functie, en het rechterlid op het resultaat.

We vertrekken met slechts twee types basisfuncties:

(a) De constante functies (één voor elke $c \in \mathbb{R}$, die telkens elke x afbeeldt op dezelfde c):



(b) De identieke functie (die elke x afbeeldt op zichzelf, en dus 'niets verandert'):



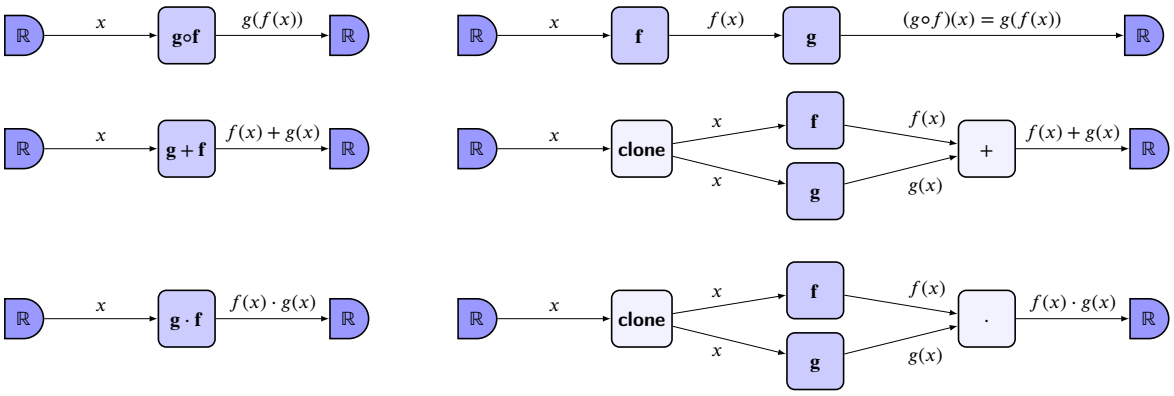
en drie manieren waarop we twee gegeven functies $\boxed{\mathbf{f}}$ en $\boxed{\mathbf{g}}$ kunnen combineren:

(a) $\boxed{\mathbf{g+f}} : x \mapsto g(x) + f(x)$ (optelling, we lezen g *plus* f)

(b) $\boxed{\mathbf{g \cdot f}} : x \mapsto g(x) \cdot f(x)$ (vermenigvuldiging, we lezen g *maal* f)

(c) $\boxed{\mathbf{g \circ f}} : x \mapsto g(f(x))$ (samenstelling, we lezen g *na* f)

Grafisch betekent dit dat we met twee gegeven machines er drie nieuwe kunnen bouwen:



Opmerking 10.2.1.

- Er is een inherente complicatie in verband met de *volgorde* in de samenstelling van functies: als we *eerst* f nemen, en daarna g, dan is het resultaat dus $g(f(x))$ waarbij nu jammer genoeg

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Intro via machines

de g *eerst* staat. Dus: bij het samenstellen van functies is er altijd een mogelijke verwarring met de volgorde.

Het probleem zou niet bestaan als we functiewaarden zouden noteren met zogenaamde postfix notatie: het resultaat van de functie f op het element x wordt dan genoteerd als $(x)f$, en het resultaat van g wordt dan $((x)f)g$. Dat zou in deze context veel handiger zijn, maar de westerse cultuur heeft doorheen de geschiedenis voor de andere conventie gekozen...

- Bij de optelling en de vermenigvuldiging van reële functies is de volgorde niet belangrijk:

$$\boxed{\mathbf{f+g}} = \boxed{\mathbf{g+f}} \quad \text{en} \quad \boxed{\mathbf{f\cdot g}} = \boxed{\mathbf{g\cdot f}},$$

maar bij de samenstelling in het algemeen wel, want meestal is

$$\boxed{\mathbf{f\circ g}} \neq \boxed{\mathbf{g\circ f}}.$$

We zeggen dat de optelling en de vermenigvuldiging *commutatief* zijn, maar de samenstelling niet.

Met deze eerder elementaire ingrediënten kunnen we nu verrassend complexe en intrigerende constructies opzetten.

We beginnen echter met een valse start: wat als we enkel de functies $\boxed{\mathbf{c}}$ met verschillende c's met elkaar combineren? Dat is erg *on*interessant, want we kunnen absoluut niets nieuws bouwen. Inderdaad, optellen, vermenigvuldigen en samenstellen van *constante* functies levert steeds enkel *constante* functies op:

(a) $\boxed{\mathbf{2}} + \boxed{\mathbf{5}} : x \mapsto 2+5=7$, dus $\boxed{\mathbf{2}} + \boxed{\mathbf{5}} = \boxed{\mathbf{7}}$

(b) $\boxed{\mathbf{2}} \cdot \boxed{\mathbf{5}} : x \mapsto 2\cdot 5=10$, dus $\boxed{\mathbf{2}} \cdot \boxed{\mathbf{5}} = \boxed{\mathbf{10}}$

(c) $\boxed{\mathbf{2}} \circ \boxed{\mathbf{5}} : x \mapsto \boxed{\mathbf{2}}(5)=2$, dus $\boxed{\mathbf{2}} \circ \boxed{\mathbf{5}} = \boxed{\mathbf{2}}$

Maar als we hetzelfde proberen met de identieke functie $\boxed{\mathbf{x}}$, wordt het wel interessanter:

(a) $\boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{x}} : x \mapsto x+x=2x$, dus $\boxed{\mathbf{2x}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{x}}$

(b) $\boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{x}} : x \mapsto x\cdot x=x^2$, dus $\boxed{\mathbf{x^2}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{x}}$

(c) $\boxed{\mathbf{x}} \circ \boxed{\mathbf{x}} : x \mapsto \boxed{\mathbf{x}}(x)=x$, dus $\boxed{\mathbf{x}} \circ \boxed{\mathbf{x}} = \boxed{\mathbf{x}}$

Dus: *optellen* en *vermenigvuldigen* van de identieke functie levert nieuwe functies op (namelijk $x \mapsto 2x$ en $x \mapsto x^2$), maar het *samenstellen* van identieke functies levert opnieuw de identieke functie $x \mapsto x$ op.

Nog meer onderling combineren van constante en identieke functies levert ook het volgende op:

(a) $\boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{5}} : x \mapsto x+5$, dus $\boxed{\mathbf{x+5}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{5}}$

(b) $\boxed{\mathbf{5}} \cdot \boxed{\mathbf{x}} : x \mapsto 5\cdot x$, dus $\boxed{\mathbf{5x}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{5}} \cdot \boxed{\mathbf{x}}$

(c) $\boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{5}} : x \mapsto x\cdot 5=5\cdot x$, dus $\boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{5}} = \boxed{\mathbf{5x}}$

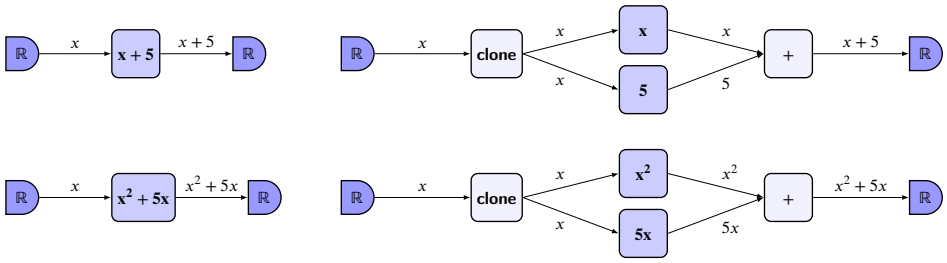
CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Intro via machines

(d) $\boxed{\mathbf{x^2}} \circ \boxed{\mathbf{x+2}}$: $x \mapsto \boxed{\mathbf{x^2}}(x+2) = (x+2)^2 = x^2+4x+4$, dus $\boxed{\mathbf{(x+2)^2}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{x^2}} \circ \boxed{\mathbf{x+2}}$

(e) $\boxed{\mathbf{-1}} \cdot \boxed{\mathbf{x}}$: $x \mapsto -1 \cdot x = -x$, dus $\boxed{\mathbf{-x}} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\mathbf{-1}} \cdot \boxed{\mathbf{x}}$

Grafisch komt dat neer op volgende schema's om meer ingewikkelde functies te bouwen:



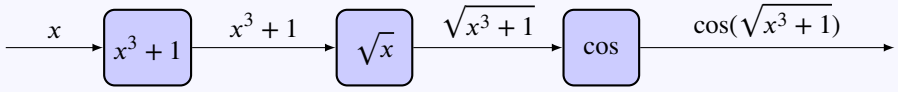
Voorbeeld 10.2.5. We kunnen ingewikkelde functies schrijven als combinaties van basisfuncties:

- $\boxed{\mathbf{3x+2}} = \boxed{\mathbf{3}} \cdot \boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{2}}$
- $\boxed{\mathbf{x^2+2}} = \boxed{\mathbf{x^2}} + \boxed{\mathbf{2}} = \boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{2}}$
- $\boxed{\mathbf{(x-1)^2+3}} = \boxed{\mathbf{(x-1)^2}} + \boxed{\mathbf{3}} = (\boxed{\mathbf{x^2}} \circ \boxed{\mathbf{x-1}}) + \boxed{\mathbf{3}}$
  $= (\boxed{\mathbf{x}} \cdot \boxed{\mathbf{x}}) \circ (\boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{-1}}) + \boxed{\mathbf{3}}$

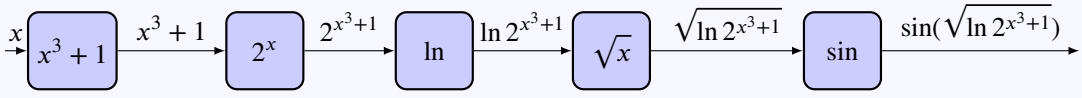
Wat is het punt van deze hele uitleg? Mogelijk helpt het om schrik te overwinnen voor sommigen van ingewikkelde uitdrukkingen, die we 'van binnen naar buiten' kunnen lezen (van links naar rechts in deze machine-voorstelling), of 'van buiten naar binnen' (van rechts naar links in deze machine-voorstelling).

Voorbeeld 10.2.6.

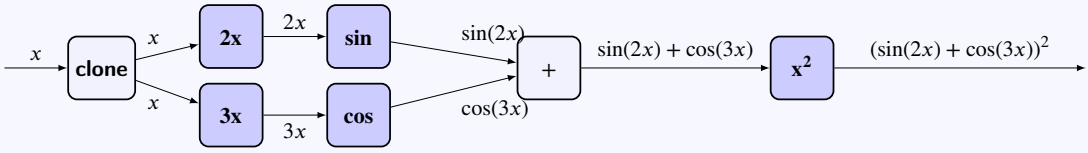
1. $\cos(\sqrt{x^3+1})$



2. $\sin(\sqrt{\ln 2^{x^3+1}})$



3. $(\sin(2x)+\cos(3x))^2$



CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Intuïtieve definitie van het begrip functie

Functies zijn erg fundamentele objecten in de wiskunde. Ze verschijnen in velerlei contexten, onder verschillende gedaanten, en hebben verschillende definities en voorstellingen:

Definitie 10.3.1 (Pseudo-definities van het begrip functie)**.**

Een **functie** is iets dat voldoet aan volgende (allemaal min of meer equivalente) karakteriseringen:

- een *machine* of *black box* die voor elke toegelaten *input* telkens exact één *output* genereert.
- een bepaald soort *verband* tussen een *onafhankelijke variabele* en een *afhankelijke variabele*.
- een soort *formule*, die *iets* verandert in *iets anders* of *iets anders* produceert op basis van *iets*.
- een *wiskundig object* dat een *('functioneel') verband* legt tussen andere *wiskundige objecten*.

Deze pseudo-definitie is bewust erg vaag, maar volgende voorbeelden, definities en eigenschappen geven het concept 'functie' ongetwijfeld een steeds duidelijkere en concretere invulling. Een typisch eerste voorbeeld om in gedachten te houden is de functie 'kwadrateer', die met elk getal zijn kwadraat associeert.

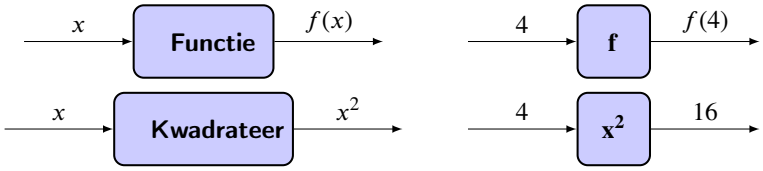
Een nuttige initiële voorstellingswijze van een functie bestaat uit een (in dit geval blauwe!) *black box*, die voor een bepaalde input I een bepaalde output O genereert:



Een **functie** is dus een ding dat een *input* omzet in een *output*. Ongeveer alles kan dienen als input en output van wiskundige functies, maar in wat volgt zullen we ons dikwijls concentreren op zogenaamde *reële functies*: dat zijn die functies waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn. Voor dergelijke reële functies zijn er allerlei interessante begrippen en eigenschappen die niet zomaar van toepassing zijn op meer algemene functies, zoals nulpunten, minima en maxima, grafieken, afgeleiden, integralen,....

Een functie heeft meestal een **naam**. Dikwijls gebruiken we gewoon f van $f$unctie, maar ook h, g, f_1, f_2 komen dikwijls voor. Sommige functies hebben vaste standaardnamen of 'eigennamen', zoals de vierkantswortel, sinus, logaritme, ...

De **input**, of de *ietsen* noemen we dikwijls x. Soms gebruiken we ook andere letters zoals t, n, x_1,x_2 of zelfs ook y en y_1 voor de input.



De **output** of het resultaat van de functie noteren we dan naargelang de keuzes voor de input en de functie met $f(x)$ of bijvoorbeeld $h(t)$. Uitzonderlijk laten we de haakjes weg en schrijven ook fx. Bij de sinusfunctie $\sin x$ is dat bijvoorbeeld de gewoonte. Soms geven we ook een generieke naam aan de output. De letter y is daarvoor een erg populaire keuze. We schrijven dan typisch $y = f(x)$. We bedoelen daarmee dat f een functie is waar je x kan instoppen en wat er dan uitkomt noemen we y, of $f(x)$.

In de formule $y = f(x)$ staat x dus voor de input, f voor de functie (de *black-box*) en y de output. Pas op: die generieke naam y voor de output veroorzaakt dikwijls verwarring, want de letter y wordt bijvoorbeeld ook gebruikt voor de tweede coördinaat van een punt in het vlak en dat heeft weinig te maken met functiewaarden. Daarom vermijden we in deze cursus waar mogelijk om de output een naam te geven,

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Intuïtieve definitie van het begrip functie

en we noteren de functie die x afbeeldt op $f(x)$ liefst als

$$f : x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad x \mapsto f(x),$$

maar niet als $x \to f(x)$: let op het verschillende pijltje '$\mapsto$' versus '$\to$'.

We *lezen* de uitdrukking $f(x)$ als
$$\begin{cases} f \text{ van } x \\ \text{de functiewaarde van } f \text{ in } x \\ \text{het beeld van } f \text{ in } x \\ \text{het beeld van } x \text{ onder } f \text{ (of door } f\text{)} \end{cases}$$

Men zegt ook dat f de waarde x '*afbeeldt*' op $f(x)$, of dat 'f *toepassen* op x' waarde $f(x)$ geeft.

Voorbeeld 10.3.1. Als we de 'kwadrateer'-functie k noemen schrijven we dus:

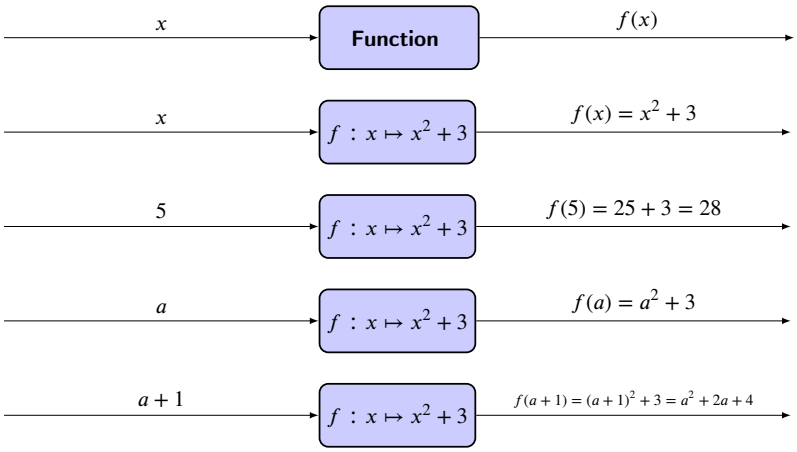
$$k : x \mapsto x^2 \quad \text{of} \quad k : x \mapsto k(x) = x^2$$

en dus geldt voor deze functie k dat $k(2) = 2^2 = 4$ en $k(4) = 4^2 = 16$.
We *moeten* de functie geen naam geven, en kunnen ook gewoon schrijven $x \mapsto x^2$.

De functie $f : x \mapsto x^2 + 3$ heeft bijvoorbeeld volgende *functiewaarden*:

$$f(0) = 0^2 + 3 = 3$$
$$f(5) = 5^2 + 3 = 28$$
$$f(-5) = (-5)^2 + 3 = 28 = f(5)$$

Functiewaarden worden ook weergegeven op de *black-box* diagrammen van hierboven. We kunnen bovendien ook *letters* gebruiken om de input van een functie voor te stellen, zoals hieronder weergegeven met de letter a. Dikwijls stellen deze letters dan een specifiek getal, een *vaste* waarde, voor. De letter x wordt meestal gebruikt om *eender welk* getal aan te tonen: we zeggen dat waarde van x *varieert*, of dat x een *variabele* is. Ook combinaties van letters en getallen zoals sommen, producten,... kunnen een input zijn van een functie.



Opmerking 10.3.1.

Het is belangrijk dat bij elke inputwaarde precies één vaste outputwaarde hoort. Volgende constructies zijn dus *geen* functies:

- $f : x \mapsto$(de som van het aantal ogen van x worpen met een dobbelsteen): de outputwaarden

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Intuïtieve definitie van het begrip functie

liggen niet vast.

- $f : x \mapsto$(een getal a zodat $a^2 = x$): de outputwaarde ligt niet vast, want 4 heeft zowel 2 als -2 als mogelijke outputwaarde.

Merk op dat een functie dus *niet* zomaar hetzelfde is als 'een formule' of 'een grafiek'. We komen daar verder op terug.

Voorbeeld 10.3.2 (*Reële* functies)**.**

De functie 'plus 5':	$f(x) = x + 5$
De functie 'maal 6':	$f(x) = 6x$
De functie '7':	$f(x) = 7$ (een *constante* functie)
De functie '0', of de *nulfunctie*:	$f(x) = 0$ (ook een *constante* functie)
De functie 'doe niets':	$f(x) = x$ (de *identieke* functie, is ook 'maal 1' en 'plus 0')
De functie 'kwadrateer':	$f(x) = x^2$
De functie 'tegengestelde':	$f(x) = -x$
De functie 'n-de macht':	$f(x) = x^n$ met $n \geq 1$ een bepaald natuurlijk getal
Eerstegraadsfuncties:	$f(x) = ax + b$ met zekere $a, b \in \mathbb{R}$
Goniometrische functies:	$f(x) = \sin(x)$
	$f(x) = \cos(ax + b)$ met $a, b \in \mathbb{R}$

Voorbeeld 10.3.3 (Andere eerder wiskundige functies)**.**

De functie die aan elke rechthoek met zijden a en b zijn oppervlakte associeert:

$$O_{pp}(\text{rechthoek met zijden } a \text{ en } b) = a \cdot b$$

De functie die met elk punt van het vlak zijn x-coördinaat associeert:

$$C_x(\text{ het punt } P(x, y) \text{ in het vlak}) = x$$

Een andere mogelijke naam voor de coördinaatfunctie C_x is eigenlijk gewoon x. We krijgen dan $x(P) = x$. Hierbij is de eerste x de naam van de functie en de tweede x de x-coördinaat van het punt P.

De functie die met elke eindige verzameling haar aantal elementen associeert:

$$\#(\text{verzameling } A \text{ met } n \text{ elementen}) = n$$

De haakjes om aan te geven dat het een functie is worden in dit geval ook weggelaten. We krijgen dan $\#A$ voor het aantal elementen van een verzameling, dus met het voorbeeld van hierboven noteren we $\#A = n$.

Voorbeeld 10.3.4 (Iets minder direct wiskundige functies)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Intuïtieve definitie van het begrip functie

Snelheidsfunctie v:	$v(t)$ = de snelheid van een bepaald voorwerp op tijdstip t, in km/u.
Puntenfunctie P:	$P(\textit{leerling})$ = punten van bepaalde *leerling* (op een bepaalde toets).
Leerlinggemiddeldefunctie μ_L:	$\mu_L(\textit{leerling})$ = gemiddelde (over alle toetsen) van een bepaalde *leerling*.
Toetsgemiddeldefunctie μ_T	$\mu_T(\textit{toets})$ = gemiddelde (over alle leerlingen) op een bepaalde *toets*.
Grappigheidsfunctie G_o	$G_o(\textit{grap})$ = het aantal seconden dat bij een vast proefpubliek werd gelachen na het horen van een *grap*.
Verkiezingsfuncties T	$T(\textit{kandidaat})$ = het aantal stemmen dat een *kandidaat* behaalde bij een bepaalde verkiezing.

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Domein, codomein en beeld van een functie

Functies veranderen *inputs* in *outputs*, en om te bepalen welk type inputs en outputs kunnen of mogen voorkomen gebruiken we drie begrippen: het *domein* van een functie is de verzameling van alle toegelaten inputs, en haar *codomein* is de verzameling waartoe alle outputs moeten behoren, en haar *beeld* is de verzameling van de effectief voorkomende outputs:

Definitie 10.4.1 (Domein, codomein en beeld van een functie)**.**

Het **domein** $\operatorname{dom} f$ van een functie f is de verzameling van alle *toegelaten inputs* van de functie.

Het **codomein** $\operatorname{codom} f$ van een functie f is de verzameling waarin alle *mogelijke outputs* liggen.

Het **beeld** $\operatorname{bld} f$ van een functie f is de verzameling van alle *effectieve outputs* van de functie.

Een functie f van een domein A naar een codomein B noteren we als

$$f : A \to B : x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad \begin{array}{rl} f : A & \to B \\ x & \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{of} \quad \begin{array}{rl} f : \operatorname{dom} f & \to \operatorname{codom} f \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$$

en we lezen: f is een functie van A naar B die (een willekeurige) x afbeeldt op $f(x)$.

Men gebruikt soms ook **doel** van een functie voor het *codomein* en **bereik** voor het *beeld*.

We gebruiken het woord **beeld** zowel voor het *beeld van een functie*, dus voor de *verzameling* $\operatorname{bld} f$, als voor het *beeld van een getal* x onder de functie f, dus voor het *getal* $f(x)$.

Voorbeeld 10.4.1 (Domein en codomein van functies)**.**

Functie	domein	codomein	beeld
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x+5$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓
$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x+5$	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}$✓	$[5,+\infty[$✓
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^+$✓
$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}^+$✓
$f_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto -\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^-$✓

Bij de notatie $f : A \to B$ kan je domein en codomein aflezen, maar het beeld moet je berekenen.

Opmerking 10.4.1.

- Niet elk element van het *codomein* moet ook effectief worden *bereikt* door de functie f. De elementen die effectief worden bereikt, vormen precies het *beeld* of *bereik* van f. Het bereik van f is dus een *deelverzameling* van het codomein van f, en het beeld of bereik kan eventueel *kleiner* zijn dan het codomein maar nooit groter. De functie

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$$

  heeft als *codomein* $\mathbb{R}$, maar het *beeld* is $\mathbb{R}^+$ omdat het kwadraat van een reëel getal altijd positief is, en elke positief getal ook een kwadraat is.

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Domein, codomein en beeld van een functie

- *Elk* element van het *domein* moet een (uniek) beeld hebben. Volgende uitdrukking is dus *fout*:

$$\cancel{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}},$$

omdat de vierkanstwortel niet gedefinieerd is voor *negatieve* getallen.

We kunnen de vierkantswortelfunctie wel schrijven als

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}.$$

Let op: het domein *moet niet* de grootst mogelijke verzameling zijn waarop de functie gedefinieerd kan worden. Ook volgende uitdrukking definieert een functie:

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$$

Per afspraak zijn twee functies aan elkaar gelijk als ze hetzelfde domein hebben, hetzelfde codomein, en allebei een element van hun domein afbeelden op dezelfde waarde van het codomein. Bovenstaande functies f en g zijn dus strikt genomen *verschillende functies*, en we zullen verder zien dat dat belangrijk kan zijn bij het bestuderen van grafieken en vooral inverse functies.

- Als voor reële functies geen expliciet domein is opgeven, nemen we per conventie als domein de grootst mogelijke deelverzameling van $\mathbb{R}$ waarop de functie kan gedefinieerd worden. Als codomein nemen we meestal $\mathbb{R}$ als het niet expliciet is opgegeven.
Dus, met $f : x \mapsto 1/x$ bedoelen we $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$.

- Let op het verschil in het gebruik van de pijlen: we gebruiken $\to$ tussen het domein en het codomein, maar we gebruiken steeds $\mapsto$ om aan te geven waarop een element wordt afgebeeld. De pijl $\to$ duidt dus aan tussen welke verzamelingen de functie gedefinieerd is, en de pijl $\mapsto$ duidt aan waarop een element wordt afgebeeld.

Voorbeeld 10.4.2 (Varianten van functies door aanpassen van domein of codomein)**.**

$$\begin{array}{rccccc} f_1: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}, & x \mapsto & x-5 \\ f_2: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z}, & x \mapsto & x-5 \\ f_3: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, & x \mapsto & x-5 \end{array}$$

zijn varianten van 'verminder met vijf', en volgende functies zijn varianten van de sinusfunctie:

$$\begin{array}{rccccc} g_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, & x \mapsto & \sin(x) \\ g_2: & \mathbb{R} & \to & [-1,1], & x \mapsto & \sin(x) \\ g_3: & [0,2\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto & \sin(x) \\ g_4: & [-\pi,\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

Een functie wordt dus niet alleen bepaald door wat ze doet, maar ook door haar mogelijke (of 'toegelaten') input en output. Zo is de functie 'kwadrateer-natuurlijke-getallen'

$$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$$

strikt gesproken een *andere* functie dan de functie 'kwadrateer-gehele-getallen'

$$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$$

of de functie 'kwadrateer-reële-getallen'

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2.$$

Dus, twee functies zijn gelijk aan elkaar als en slechts als ze dezelfde inputverzameling en outputverzameling hebben en als ze aan elke inputwaarde dezelfde outputwaarde toekennen.

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Domein, codomein en beeld van een functie

Zelfs als elke functie $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ en $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telkens elke x afbeeldt op x^2, dan zijn het strikt genomen toch nog steeds *verschillende* functies. In vele gevallen zullen we in de praktijk echter toch gewoon spreken over de functie 'kwadrateer' en het onderscheid in domein en codomein negeren. We noteren dan $f : x \mapsto x^2$.

Bij de bespreking van inverse functies zal dit onderscheid belangrijk worden.

Voorbeeld 10.4.3 (Slecht gedefinieerde functies)**.**

- De uitdrukking ~~$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x - 5$~~ is *ongeldig* omdat voor $x < 5$ geldt dat $f(x) < 0$ en dus niet behoort tot het aangegeven codomein $\mathbb{R}^+$.

  $f : \mathbb{R}^+ \to [-5, \infty[: x \mapsto x - 5$ is wel een correct gedefinieerde functie, net zoals

  $f : [5, \infty[\to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x - 5.$

  (Merk op: $[-5, \infty[$ is het interval van de reële getallen groter dan of gelijk aan -5.)

- De uitdrukking ~~$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$~~ is *ongeldig* omdat f niet gedefinieerd is voor $x = 0$, en 0 kan dus niet behoren tot het domein.

  $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ is wel een correct gedefinieerde functie, net zoals

  $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

  Merk op: $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ is de verzameling van de reële getallen *zonder* de getallen 0 en 2.
  Het symbool $\mathbb{R}_0$ betekent $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dus de reële getallen zonder nul.

- De uitdrukking ~~$f : \mathbb{R} \to [0, 1] : x \mapsto \sin x$~~ is *ongeldig* omdat $\sin x$ ook negatief kan zijn.

  $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin x$ is wel een correct gedefinieerde functie.

CC BY-NC-SA 4.0

10.4.A Oefeningen domein functie

Oefening 10.4.1. Geef telkens het grootst mogelijke domein voor de functie met volgend functievoorschrift:

1. $f(x) = \sqrt{x}$. Antwoord: dom $f =$ .....

2. $f(x) = \sqrt{1+x}$. Antwoord: dom $f =$ .....

3. $f(x) = \sqrt{1-x}$. Antwoord: dom $f =$ .....

4. $f(x) = |x|$. Antwoord: dom $f =$ .....

5. $f(x) = 1 - |x|$. Antwoord: dom $f =$ .....

6. $f(x) = \sqrt{1-|x|}$. Antwoord: dom $f =$ .....

7. $f(x) = \sqrt{-|x|}$. Antwoord: dom $f =$ .....

8. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Antwoord: dom $f =$ .....

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Antwoord: dom $f =$ .....

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Antwoord: dom $f =$ .....

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Antwoord: dom $f =$ .....

12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Antwoord: dom $f =$ .....

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$. Antwoord: dom $f =$ .....

CC BY-NC-SA 4.0

10.4.B Oefeningen beeld functie

Oefening 10.4.2. Geef telkens het *beeld* van volgende functies.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Antwoord: bld $f =$ .....

2. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Antwoord: bld $f =$ .....

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$ .....

4. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$ .....

5. $f : [-1, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$ .....

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$. Antwoord: bld $f =$ .....

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cx^2 + a$, $a \in \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}_0^+$. Antwoord: bld $f =$ .....

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -cx^2 - a$, $a \in \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}_0^+$. Antwoord: bld $f =$ .....

CC BY-NC-SA 4.0

10.5 Voorstellingswijzen van functies

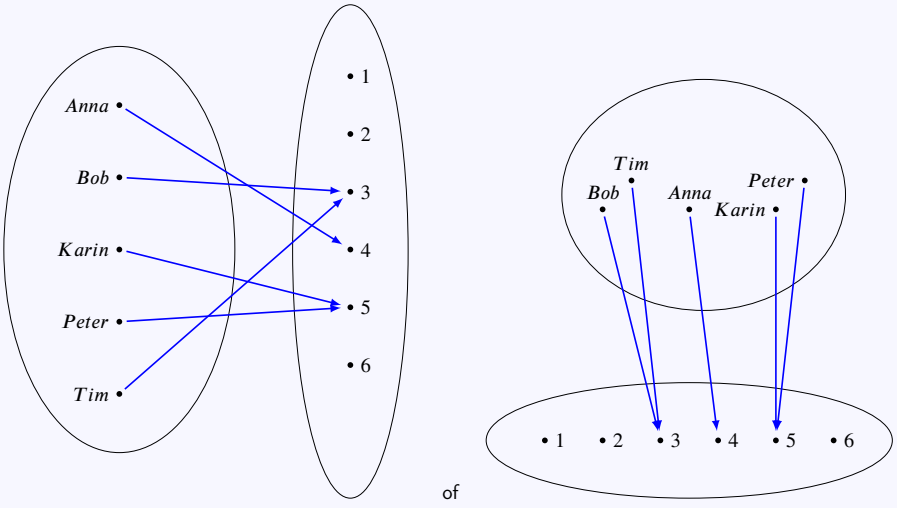
We bespreken enkele manieren om functies te definiëren, voor te stellen of te beschrijven. Als het domein eindig is, kunnen we een functie voorstellen met een *tabel*. Voor *reële* functies (dat zijn functies met zowel het domein als het codomein de reële getallen), zijn *grafieken* en *formules* gebruikelijke voorstellingen.

Voor (kleine) **eindige** verzamelingen beschikken we over enkele erg concrete manieren om functies te definiëren of voor te stellen. We bespreken ze aan de hand van de functie die aan elke voornaam het aantal letters associeert waaruit die voornaam bestaat. We definiëren de functie op het groepje vrienden $A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\}$. Als codomein nemen we de verzameling $B = \{1,2,3,4,5,6\}$. De functie f beeldt dus elke naam af op het aantal letters van die naam.

Voorbeeld 10.5.1 (Pijlenvoorstelling of verzamelingvoorstelling)**.** We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \to B = \{1,2,3,4,5,6\} : x \mapsto \text{het aantal letters in } x$$

voorstellen met volgende zogenaamde **pijlenvoorstelling**:



De linkse voorstelling is de meest traditionele 'pijlenvoorstelling'. In de rechtse voorstelling is de functie 'van boven naar beneden' voorgesteld in plaats van 'van links naar rechts'. Een ander verschil is dat in de rechtse voorstelling de functie zelf wordt voorgesteld als een zo eenvoudig mogelijke 'projectie', die de bovenste verzameling 'projecteert' op de onderste. Daarbij komen elementen met dezelfde functiewaarde ongeveer boven elkaar te liggen.

Voorbeeld 10.5.2 (Opsomming)**.** We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \to B = \{1,2,3,4,5,6\} : x \mapsto \text{het aantal letters in } x$$

ook opschrijven met een **opsomming** van al de functiewaarden:

$$\begin{array}{lcl} f(Anna) & = & 4 \\ f(Bob) & = & 3 \\ f(Karin) & = & 5 \\ f(Peter) & = & 5 \\ f(Tim) & = & 3 \end{array} \quad \text{of} \quad f(x) = \begin{cases} 4 & \text{als } x = Anna \\ 3 & \text{als } x = Bob \\ 5 & \text{als } x = Karin \\ 5 & \text{als } x = Peter \\ 3 & \text{als } x = Tim \end{cases} \quad \text{of} \quad f(x) = \begin{cases} 3 & \text{als } x = Bob \text{ of } Tim \\ 4 & \text{als } x = Anna \\ 5 & \text{anders} \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.5 Voorstellingswijzen van functies

Voorbeeld 10.5.3 (Koppels). We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \rightarrow B = \{1,2,3,4,5,6\} : x \mapsto \text{ het aantal letters in } x$$

ook opschrijven als de verzameling van de **koppels** $(x, f(x))$:

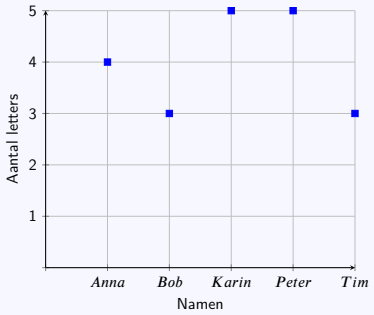
$$\Big\{(Anna,4),(Bob,3),(Karin,5),(Peter,5),(Tim,3)\Big\}$$

Voorbeeld 10.5.4 (Tabel of grafiek). We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \rightarrow B = \{1,2,3,4,5,6\} : x \mapsto \text{ het aantal letters in } x$$

ook voorstellen met een **tabel** of een **grafiek**:

x	$f(x)$
$Anna$	4
Bob	3
$Karin$	5
$Peter$	5
Tim	3

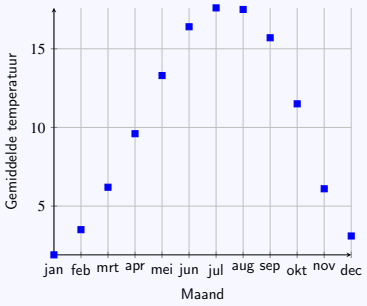


Voorbeeld 10.5.5 (Extra voorbeeld: gemiddelde temperaturen).

De voorstelling als grafiek wordt nuttiger naarmate er meer elementen zijn, met een zekere regelmaat in de functiewaarden.

Beschouw de functie T_{gem} : {jan, feb, mrt, apr, mei, jun, jul, aug,sep, okt, nov, dec} $\rightarrow \mathbb{R}$ die voor elke maand de gemiddelde temperatuur geeft in Ukkel:

x	$T_{gem}(x)$
Jan	1.9
Feb	3.5
Maa	6.2
Apr	9.6
Mei	13.3
Jun	16.4
Jul	17.6
Aug	17.5
Sep	15.7
Okt	11.5
Nov	6.1
Dec	3.1



Functies $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn, noemen we **reële functies**, en dergelijke functies kunnen bepaald worden met *formules* en/of *grafieken*.

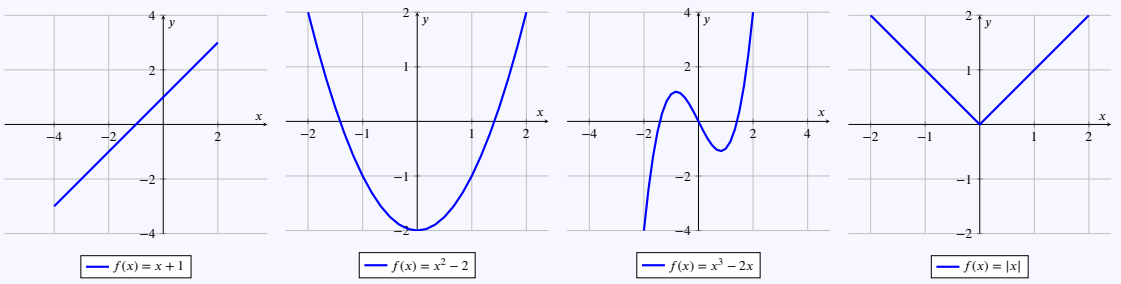
Voorbeeld 10.5.6 (Grafieken).

De **grafiek** van een functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bekomen we door in een vlak met x, y-coördinaten alle punten $(x, f(x))$ te tekenen. Voor de meeste reële functies die we in de praktijk tegenkomen

CC BY-NC-SA 4.0

10.5 Voorstellingswijzen van functies

bekomen we dan een mooie kromme, die eventueel wel gaten kan hebben en sprongen kan maken. De kromme voldoet altijd aan de **'verticale-snijlijn-test'**: elke verticale lijn snijdt de grafiek van een functie ten hoogste één keer, namelijk in het punt $(x, f(x))$ voor de verticale door $(x, 0)$. Dit volgt uit de voorwaarde dat bij elke x uit het domein van de functie f slechts één functiewaarde $f(x)$ hoort. Voor x *buiten* het domein van de functie f snijdt de verticale door x de grafiek van f *niet*.



Functies worden dikwijls gedefinieerd met *formules*, en soms wordt zelfs geen onderscheid meer gemaakt tussen 'een formule voor een bepaalde functie' en 'een functie gedefinieerd door een bepaalde formule'.

Een *formule* is een reeks symbolen die aan bepaalde regels voldoet: $x^2 + a^2x + 7$ is een goede formule, maar $x - +8(a7)$ is dat niet. Een *functie* is een soort machine die een invoer omzet in een uitvoer. Het is wel zo dat veel formules kunnen worden gebruikt om er een functie mee te maken, en dat nogal wat functies door een formule worden berekend.

Voorbeeld 10.5.7. Veel functies worden voorgesteld door *formules* die de functiewaarde $f(x)$ *berekenen*:

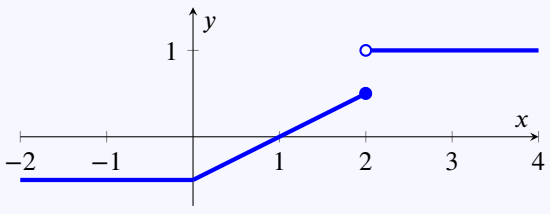
Functie	Formule	Functie	Formule
'plus 5'	$f(x) = x + 5$	'min 5'	$f(x) = x - 5$
'kwadrateer'	$f(x) = x^2$	'sinus van de dubbele hoek'	$f(x) = \sin(2x)$
'vierkantswortel'	$f(x) = \sqrt{x}$	'vierkantswortel plus acht'	$f(x) = \sqrt{x} + 8$

Pas op: verschillende formules kunnen toch dezelfde functie bepalen. Zo zijn de functies $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2}$ en $f_2 : x \mapsto |x|$ aan elkaar gelijk. En voor sommige functies bestaat er geen (eenvoudige) formule, bijvoorbeeld de functie die elk natuurlijk getal n afbeeldt op het n-de priemgetal.

Voorbeeld 10.5.8 (Meervoudig functievoorschrift)**.**

Soms bestaat er geen eenvoudige formule die geldt voor alle x, maar kunnen we het domein opsplitsen over deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ waar er wel eenvoudige formules bestaan:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x < 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$



CC BY-NC-SA 4.0

10.6 Extra voorstellingswijzen van functies

Merk op: deze uitbreiding is geen leerstof. Maar ze is desalniettemin (of net daarom) ook interessant...

De grafiek van een functie is in een aantal gevallen een bijzonder handig middel om de functie beter te begrijpen. Maar, in sommige gevallen zijn andere grafische voorstellingswijzen veel handiger. En voor niet-reële functies werkt een klassieke grafiek meestal niet.

In een aantal gevallen is het verhelderend om een zich een reële functie voor te stellen als een *transformatie* van één rechte: elke x wordt door een functie f verplaatst naar $f(x)$, en daardoor wordt de reële rechte uitgerokken, samengedrukt, verschoven of op nog ingewikkeldere manieren vervormd. Vooral voor transformaties van reële functies en voor het begrijpen van afgeleiden is deze voorstellingswijze soms bijzonder interessant en verhelderend.

We kunnen volgende grafieken als volgt bekijken:

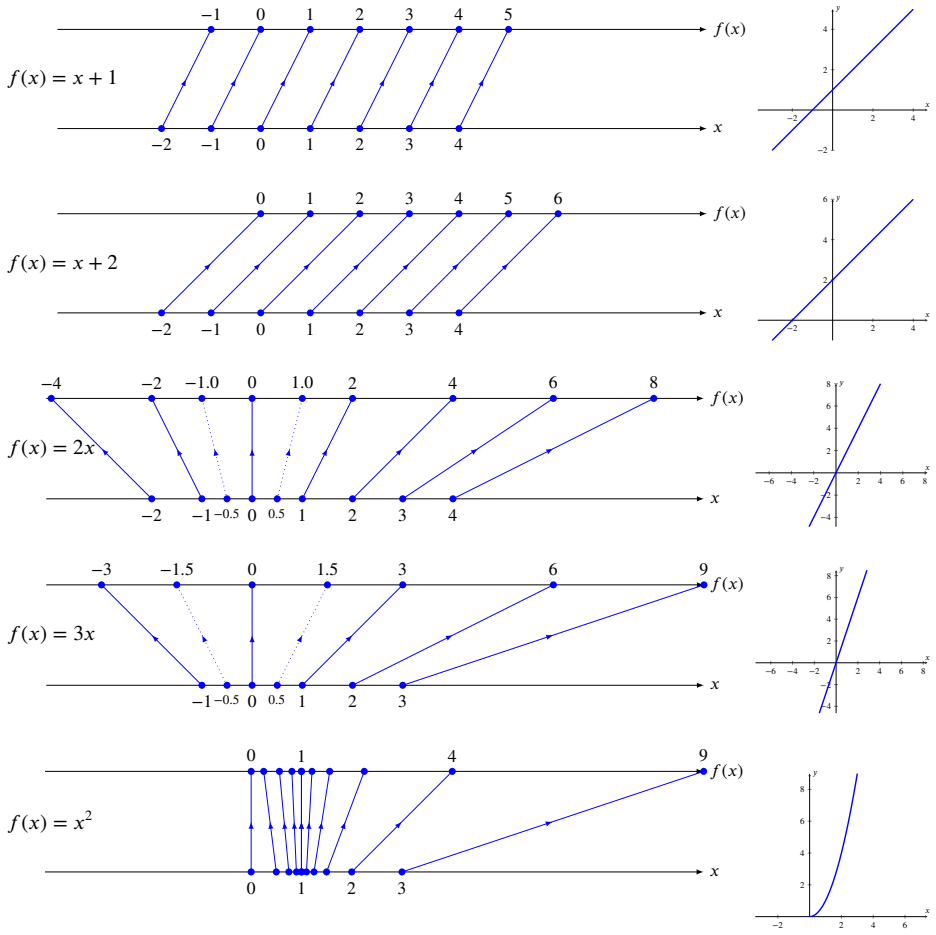
(a) $f(x) = x + 1$: verschuiven met $+1$

(b) $f(x) = 2x$: herschalen met een factor 2

(c) $f(x) = x^2$: alles groter dan 1 wordt steeds groter, alles kleiner dan 1 wordt steeds kleiner. Voor negatieve getallen gebeurt hetzelfde, maar die worden bovendien ook nog 'omgeklapt' naar de positieve halfrechte.

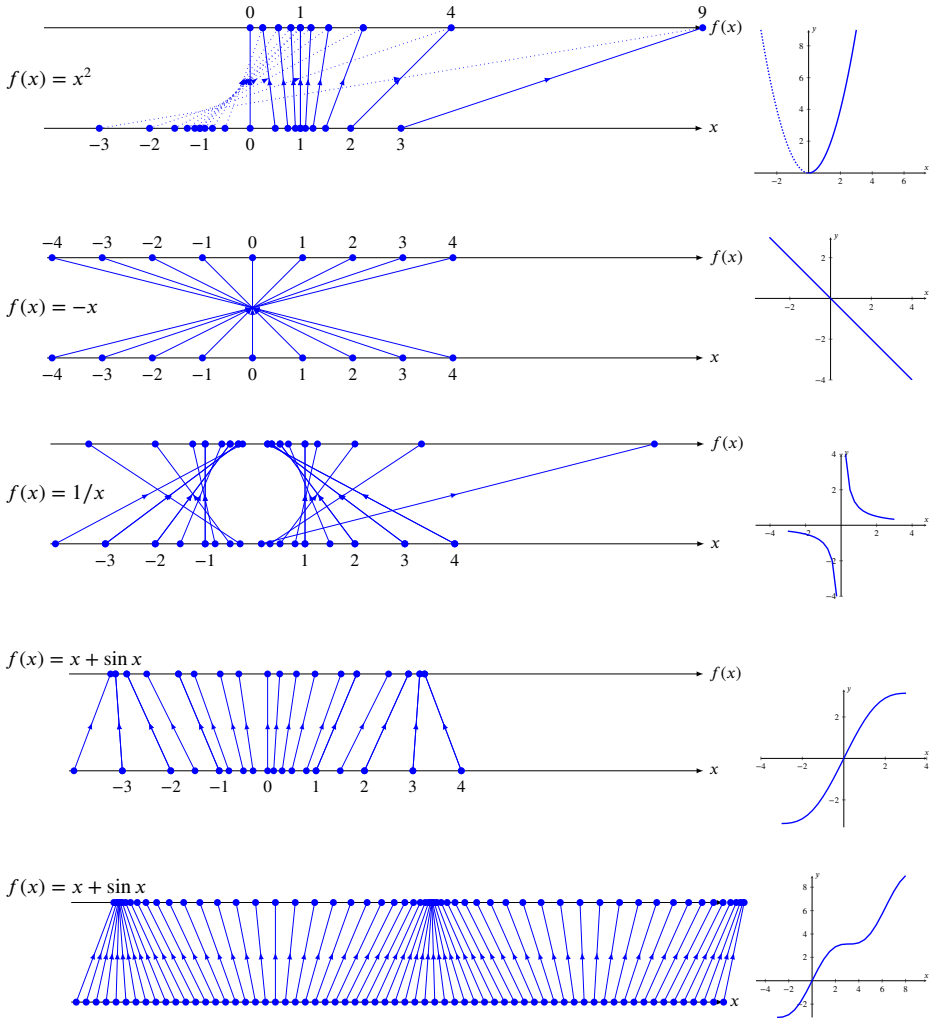
(d) $f(x) = -x$: alles spiegelen rond $x = 0$

(e) $f(x) = 1/x$: als volgt 'omklappen' rond $x = 1$: wat dicht bij 1 klapt rond 1, wat wat verder ligt klapt zodanig omdat wat erg groot is, dicht bij nul komt, en omgekeerd. Deze functie is niet gedefinieerd in $x = 0$: 0 moet naar 'oneindig' worden gestuurd.



CC BY-NC-SA 4.0

10.6 Extra voorstellingswijzen van functies

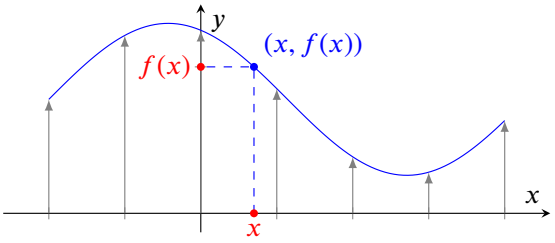


CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

10.7 Grafieken van functies

Een reële functie kan worden voorgesteld door een *grafiek*, waarop een aantal belangrijke eigenschappen direct kunnen worden afgelezen. In de praktijk worden functies dikwijls geïdentificeerd met hun grafiek.

Definitie 10.7.1. De **grafiek van een reële functie** f is de kromme in het xy-vlak die bestaat uit de punten $(x, f(x))$.



De grafiek van de functie f geeft dus voor elk getal x in het domein op de x-as aan op welk getal $f(x)$ op de y-as het wordt afgebeeld. Als je de grafiek kent, vind je $f(x)$ dus als de *hoogte* van de grafiek in x. Als je de grafiek moet tekenen, wordt de hoogte boven x bepaald door $f(x)$.

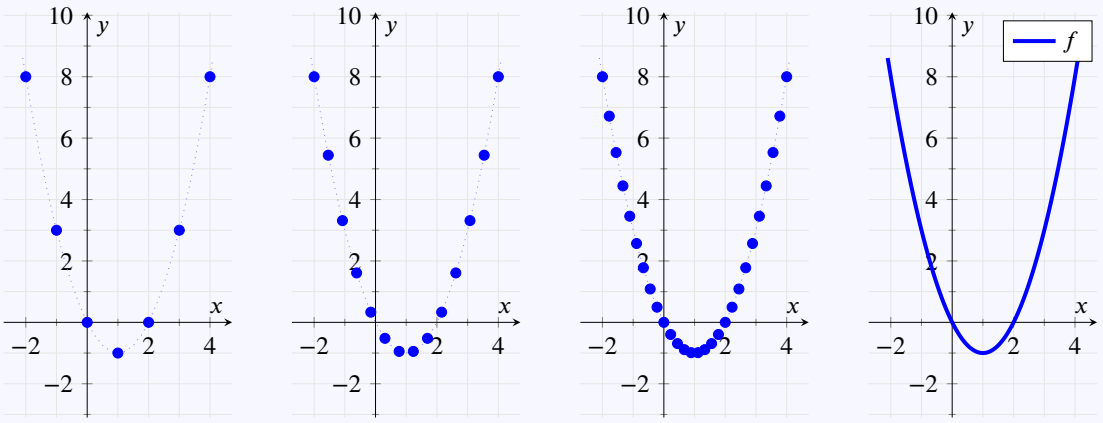
Voorbeeld 10.7.1.

We onderzoeken de functie $f : x \mapsto x^2 - 2x$.

Als er geen expliciet domein is gegeven is, beschouwen we per afspraak het grootst mogelijke domein, in dit geval dus $\mathbb{R}$. We kunnen niet voor *alle* $x \in \mathbb{R}$ de bijhorende punten $(x, f(x))$ tekenen want dan krijgen we een oneindig grote figuur. We kiezen dus een relevant deel van het domein, hier bijvoorbeeld x tussen -2 en 4, zodat we een correct beeld krijgen van de functie.

Links zijn boven de punten $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ de functiewaarden $f(x) = 8, 3, 0, -1, 0, 3, 8$ aangeduid. Op de tekeningen rechts daarvan zijn telkens meer functiewaarden aangeduid. Voldoende punten verbonden door een vloeiende kromme geven een goede benadering van de grafiek.

We **lezen** die grafiek van links naar rechts, zoals een tekstregel. We zeggen dus dat de functie f (of de grafiek van de functie f) *daalt* tot aan $x = 1$ en vanaf daar verder *stijgt*. De functie (of de grafiek) heeft *nulpunten* in $x = 0$ en $x = 2$, en bereikt haar *minimum* $y = -1$ in het punt $x = 1$. De functie is *negatief* tussen de nulpunten, dus op het interval $]0, 2[$ en *positief* daarbuiten.

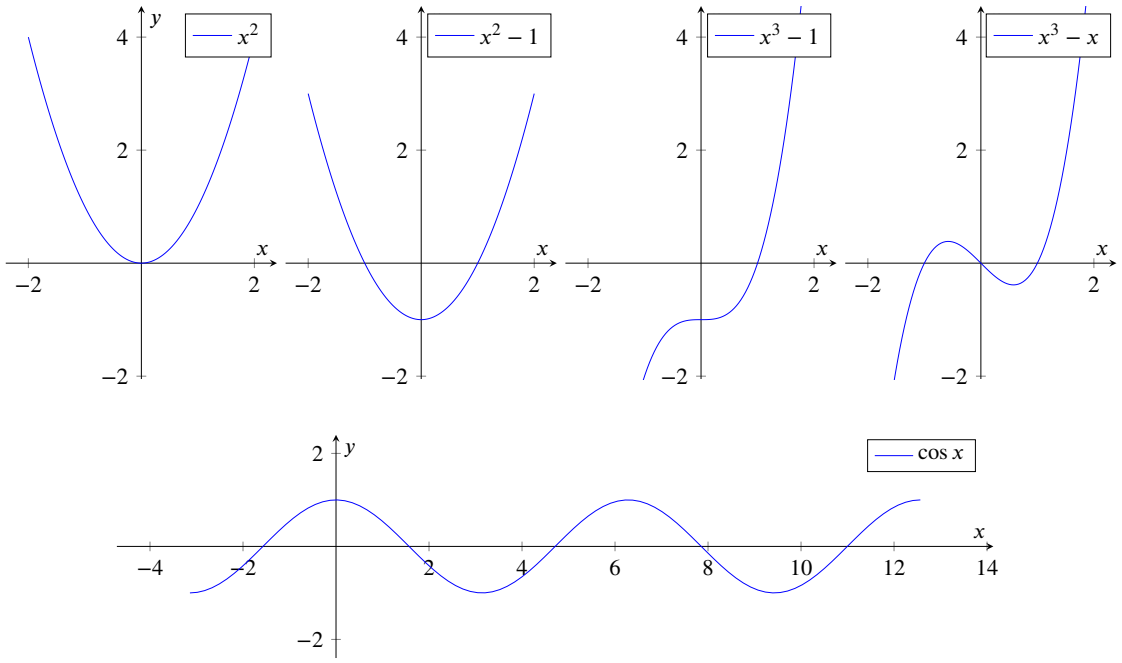


CC BY-NC-SA 4.0

10.7 Grafieken van functies

Oefening 10.7.1 (Enkele grafieken van reële functies)**.** Lees volgende eigenschappen af van de grafieken. Het is niet nodig berekeningen te maken om de exacte waarde te bekomen.

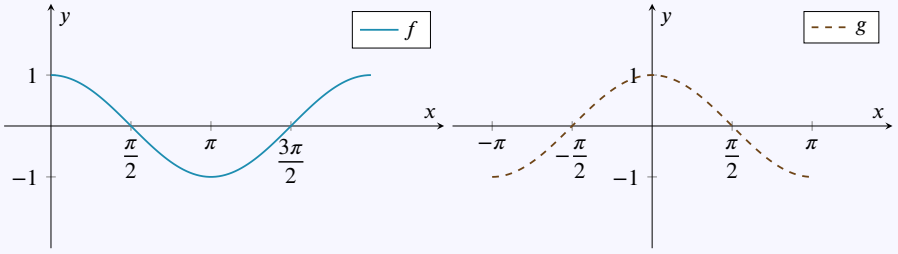
- waar stijgt de functie?
- waar daalt de functie?
- waar is de functie positief?
- waar is de functie negatief?
- waar is de functie nul?
- waar zijn de nulpunten van de functie?
- waar zijn de functiewaarden gelijk aan 1?
- waar heeft de functie een minimum?
- waar heeft de functie een maximum?



Voorbeeld 10.7.2. De grafiek hangt af van het *domein* van de functie:

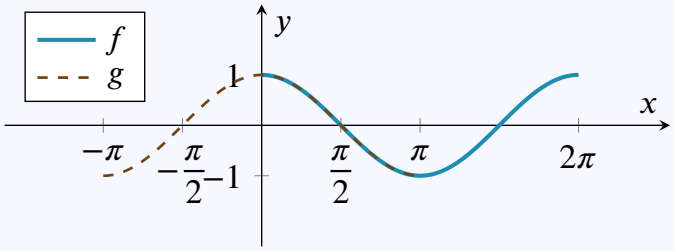
- De cosinusfunctie beperkt tot verschillende intervallen heeft verschillende grafieken:

$$\begin{array}{rrcll} f: & [0,2\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto \cos(x) \\ g: & [-\pi,\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto \cos(x) \end{array}$$

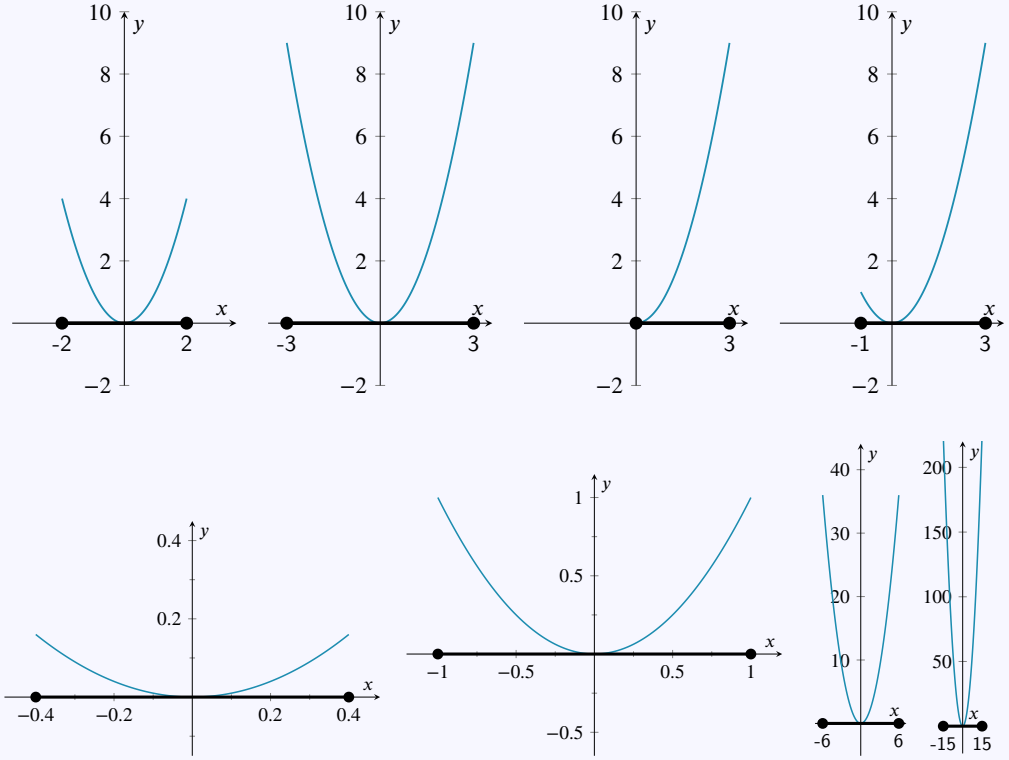


CC BY-NC-SA 4.0

10.7 Grafieken van functies



- Soms kiezen we andere schalen op de x-as en de y-as. Samen met verschillende domeinen, leidt dat tot erg uiteenlopende grafieken voor 'dezelfde' functie. Dit zijn allemaal grafieken van functies $x \mapsto x^2$ op verschillende intervallen:



CC BY-NC-SA 4.0

10.7.A Oefeningen grafieken van functies

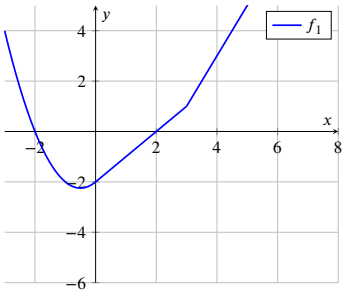
Oefening 10.7.2. Teken (zonder een grafisch rekenmachine te gebruiken) de grafiek van de functies met volgende voorschriften.

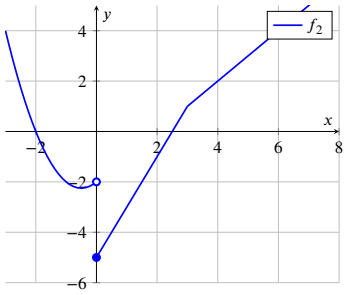
1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{x-|x|}{2}$
5. $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$

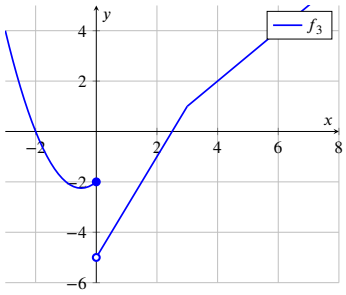
Oefening 10.7.3. Schets de grafieken van volgende functies met *meervoudige functievoorschriften*:

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \leq 1 \\ x-1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$

Oefening 10.7.4. Welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek ?







1. $\boxed{f_1}\boxed{f_2}\boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x \leq 0 \\ 2x-5 & \text{als } 0 < x < 3 \\ x-2 & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$
2. $\boxed{f_1}\boxed{f_2}\boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x < 0 \\ x-2 & \text{als } 0 \leq x < 3 \\ 2x-5 & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.7.A Oefeningen grafieken van functies

3. $\boxed{f_1}\boxed{f_2}\boxed{f_3} = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{als } x < 0 \\ 2x - 5 & \text{als } 0 \leq x < 3 \\ x - 2 & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.8 Som en verschil van functies

Bij 'rekenen' denken we in eerste instantie aan 'rekenen met getallen', maar je kan ook 'rekenen met functies'. We beschouwen hier eerst de som en het verschil van *functies*, later volgen product en quotiënt. Er bestaan ook complexe operaties die geen veralgemeningen meer zijn voor operaties op getallen, zoals functies samenstellen, inverteren, afleiden en integreren.

We bestuderen de som en het verschil van *reële* functies $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We gebruiken meestal de korte schrijfwijze, dus $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ voor de functie met het grootst mogelijke domein $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Definitie 10.8.1 (Som, verschil en tegengestelde van reële functies)**.** Voor reële functies f en g geldt:

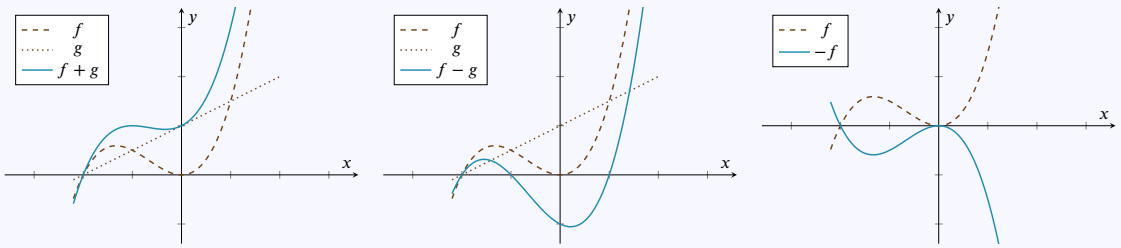
$$\begin{array}{rcccc} f+g & : & x \mapsto & (f+g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)+g(x) \\ f-g & : & x \mapsto & (f-g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)-g(x) \\ -f & : & x \mapsto & (-f)(x) & \overset{\text{def}}{=} & -f(x) \end{array}$$

Som en verschil van functies zijn gedefinieerd waar *beide functies* gedefinieerd zijn, en er geldt:

De	**som**	$f+g$	beeldt x af op de	som	$f(x)+g(x)$.
Het	**verschil**	$f-g$	beeldt x af op het	verschil	$f(x)-g(x)$.
De	**tegengestelde**	$-f$	beeldt x af op het	tegengestelde	$-f(x)$.

Voorbeeld 10.8.1. Voor de functies $f : x \mapsto x^3 + 2x^2$ en $g : x \mapsto x + 2$ is

$$\begin{array}{rrl} \text{de som} & f+g: & x \mapsto x^3+2x^2+x+2 \\ \text{het verschil} & f-g: & x \mapsto x^3+2x^2-x-2 \\ \text{de tegengestelde} & -f: & x \mapsto -x^3-2x^2 \end{array}$$



Opmerking 10.8.1. Deze definitie bevat niets spectaculairs: de som van functies is wat iedereen verwacht wat een som van functies moet zijn. Merk wel op:

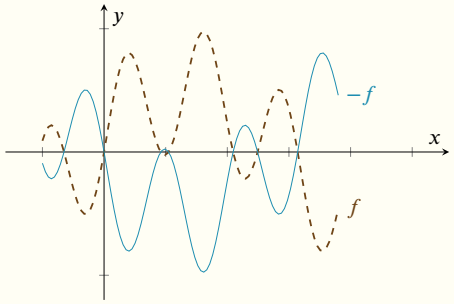
(a) De functies $f+g$ en $f-g$ zijn enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Je kan dit ook formuleren als: het domein van de som en van het verschil is gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) De som van twee functies f en g wordt 'puntsgewijs' gedefinieerd. Dat betekent dat de functiewaarde van $f+g$ in een punt enkel afhangt van de functiewaarden van f en g in dat punt. Voor andere operaties op functies zal dat niet steeds het geval zijn. Zo hangt de afgeleide van een functie in een bepaald punt af van de functiewaarden van de functie in de omgeving van dat punt, en de waarde van een primitieve functie hangt af van de waarden over een interval.

(c) De grafiek van $-f$ is de spiegeling van de grafiek van f over de x-as.

CC BY-NC-SA 4.0

10.8 Som en verschil van functies



(d) De tegengestelde functie is een speciaal geval van het verschil: $-f = 0 - f$. (Merk op dat de 0 hier staat voor de nul*functie*: de functie die elke getal afbeeldt op het getal 0).

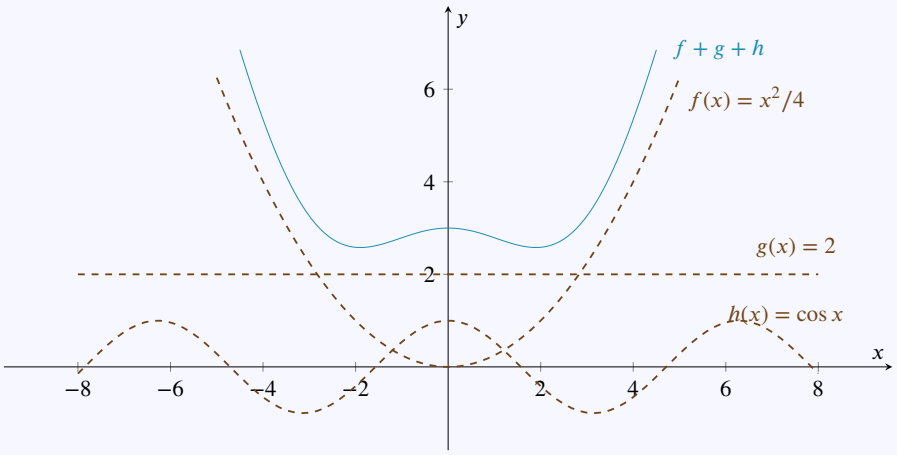
(e) Het verschil van functies is een speciaal geval van de som: $f - g = f + (-g)$.
Elk verschil is dus ook een som, namelijk de som met het tegengestelde.

(f) Waar de functiewaarde van g strikt negatief is, ligt de grafiek van $f - g$ boven de grafiek van f.

(g) De *nulpunten* van $f - g$ zijn precies de snijpunten van de grafieken van f en g.

Voorbeeld 10.8.2 (Som van drie functies)**.**

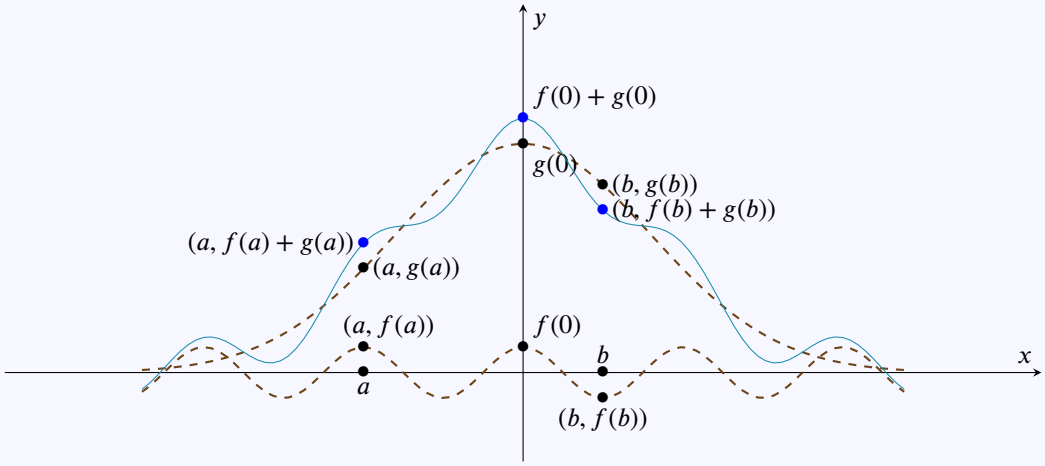
$$f : x \mapsto x^2/4, \quad g : x \mapsto 2, \quad h : x \mapsto \cos(x)$$
$$f + g + h : x \mapsto x^2 + 2 + \cos(x).$$



Voorbeeld 10.8.3 (Grafiek van een som, geen functievoorschrift gegeven)**.** De volgende figuur toont de grafiek van twee functies f en g (in het rood) en hun som (in het blauw). Voor elke waarde van x vinden we de functiewaarden $f(x)$ en $g(x)$ terug op de grafieken van f en g en de som van deze functiewaarden $f(x) + g(x)$ op de grafiek van $f + g$.

CC BY-NC-SA 4.0

10.8 Som en verschil van functies

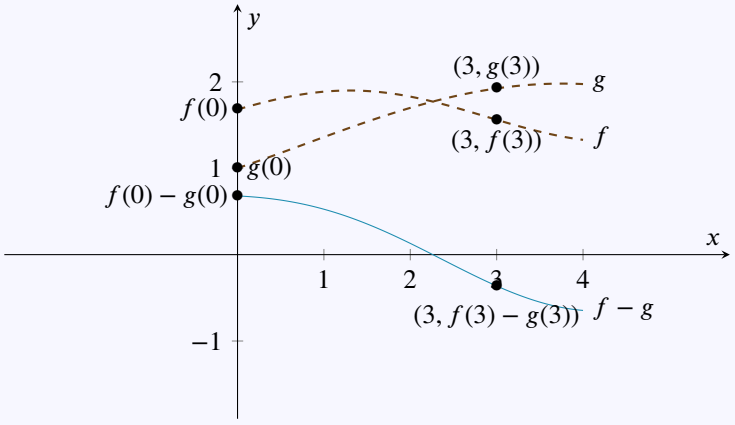


Hier zijn de grafieken van beide functies f en g symmetrisch ten opzichte van de y-as en $f+g$ is ook symmetrisch ten opzichte van de y-as.

Voor willekeurige optelbare functies geldt dat

- Als de grafieken van f en g symmetrisch zijn ten opzichte van de y-as, dan is de grafiek van $f+g$ altijd symmetrisch ten opzichte van de y-as.
- Als de grafiek van $f+g$ symmetrisch is ten opzichte van de y-as, dan is de grafiek van f en die van g soms symmetrisch ten opzichte van de y-as.
- Als de grafieken van f en $f+g$ symmetrisch zijn ten opzichte van de y-as, dan is de grafiek van g altijd symmetrisch te opzichte van de y-as.

Voorbeeld 10.8.4 (Grafiek van een verschil)**.** De volgende figuur toont de grafiek van twee functies f en g en hun verschil. Voor elke waarde van x vinden we de functiewaarden $f(x)$ en $g(x)$ terug op de grafieken van f en g en het verschil van deze functiewaarden $f(x)-g(x)$ op de grafiek van $f-g$.

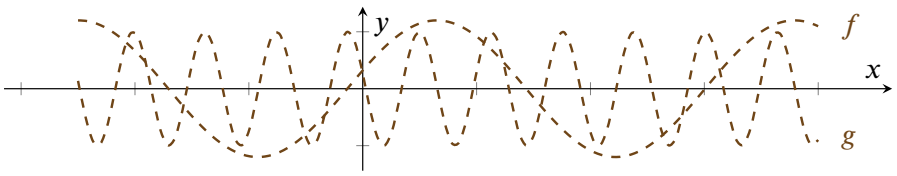


Merk op dat de grafieken van f en g elkaar snijden boven de punten waar de grafiek van $f-g$ de x-as snijdt: in die punten is inderdaad $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

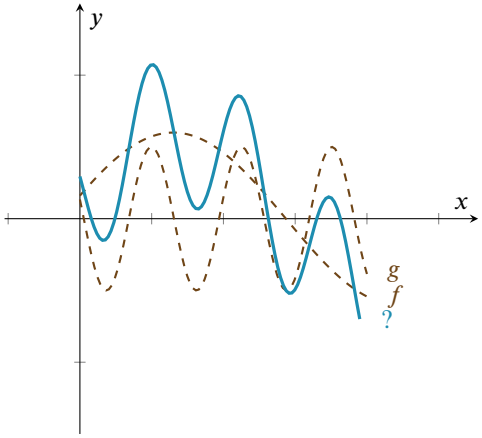
10.8.A Oefeningen som van functies

Oefening 10.8.1. De volgende figuur toont de grafiek van twee functies f en g. Bepaal op elk van onderstaande figuren welke grafiek wordt getoond.



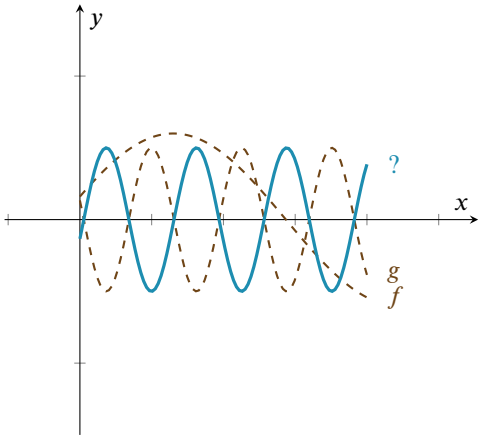
1.

$f+g$	$f-g$	$g-f$	$-g$	$f+2$



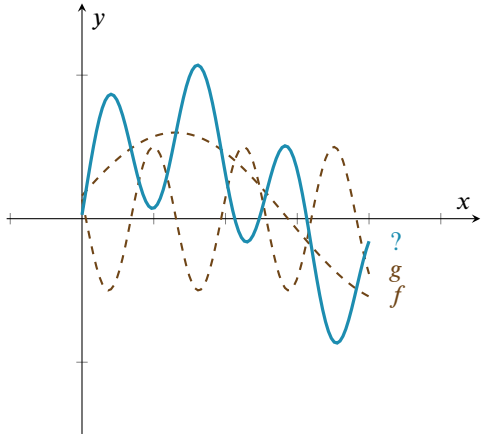
2.

$f+g$	$f-g$	$g-f$	$-g$	$f+2$



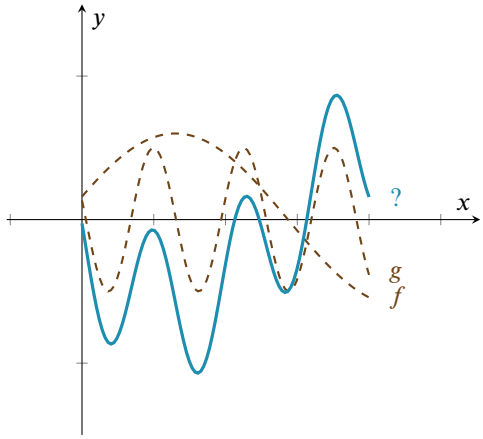
3.

$f+g$	$f-g$	$g-f$	$-g$	$f+2$



4.

$f+g$	$f-g$	$g-f$	$-g$	$f+2$



CC BY-NC-SA 4.0

10.9 Product en quotiënt van functies

Definitie 10.9.1 (Product, quotiënt en omgekeerde van reële functies)**.**

Voor reële functies f en g geldt:

$$\begin{array}{rcccc} f\cdot g & : & x\mapsto & (f\cdot g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)\cdot g(x) \\ \dfrac{f}{g} & : & x\mapsto & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) & \overset{\text{def}}{=} & \dfrac{f(x)}{g(x)} \\ \dfrac{1}{f} & : & x\mapsto & \dfrac{1}{f}(x) & \overset{\text{def}}{=} & \dfrac{1}{f(x)}. \end{array}$$

Merk op dat $\frac{f}{g}$ en $\frac{1}{f}$ niet gedefinieerd zijn in de punten waar de noemer nul wordt, en er geldt:

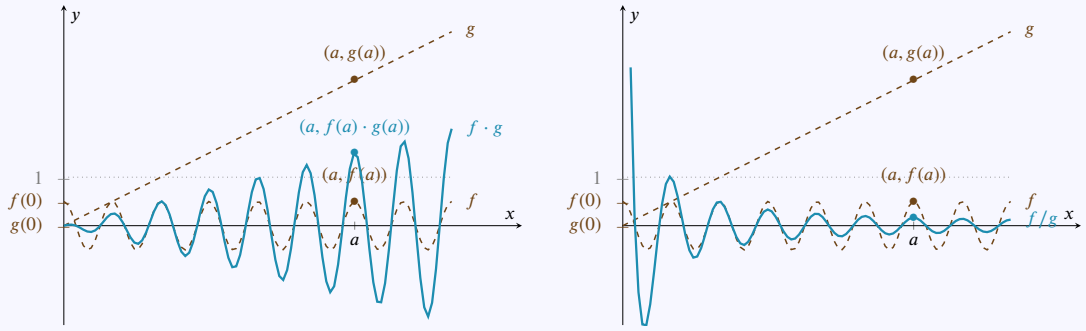
Het **product** $f\cdot g$ beeldt x af op het product $f(x)\cdot g(x)$.

Het **quotiënt** $\frac{f}{g}$ beeldt x af op het quotiënt $\frac{f(x)}{g(x)}$.

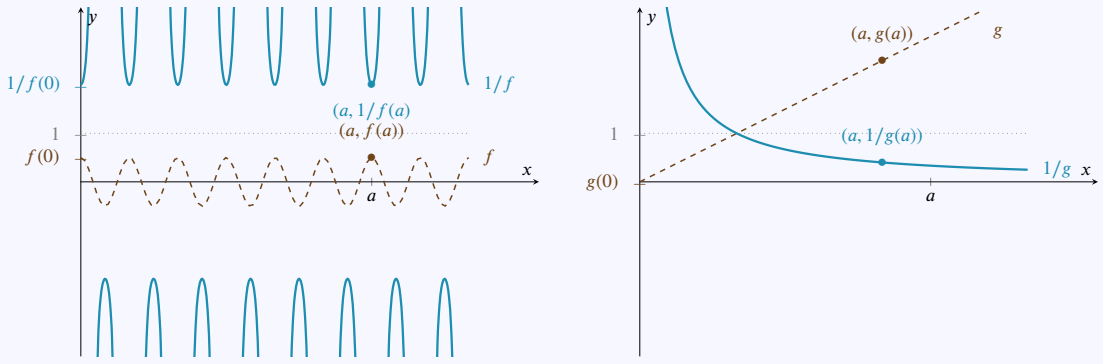
Het **omgekeerde** $\frac{1}{f}$ beeldt x af op het omgekeerde $\frac{1}{f(x)}$.

Voorbeeld 10.9.1.

1. De grafiek van twee functies f en g en hun product $f\cdot g$ en quotiënt $\frac{f}{g}$:



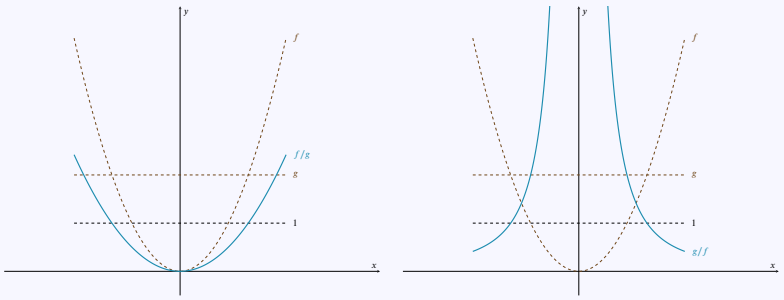
2. De grafiek van twee functies f en g en hun omgekeerden $\frac{1}{f}$ en $\frac{1}{g}$:



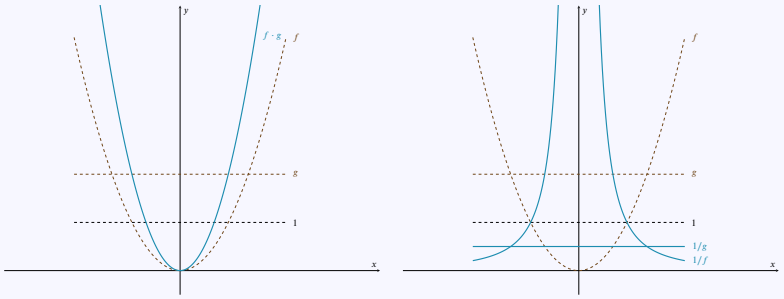
10.9 Product en quotiënt van functies

Voorbeeld 10.9.2. Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto 2$.

1. De grafieken f en g en de quotiënten $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ en $\frac{g}{f} : x \mapsto \frac{2}{x^2}$:



2. De grafieken f en g, hun product $f \cdot g : x \mapsto 2x^2$ en hun omgekeerden $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $\frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{2}$:



Opmerking 10.9.1.

(a) Net als bij de functies $f + g$ en $f - g$ is de functie $f \cdot g$ enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Het domein is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) Het quotiënt $\frac{f}{g}$ is enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd zijn en $g(x) \neq 0$. Het domein van het quotiënt is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g zonder de x-waarden waarbij $g(x) = 0$.

(c) De omgekeerde functie bekomt men door de functie te 'kantelen' over de rechte $y = 1$, waarbij alles tussen $y = 0$ en $y = 1$ wordt uitgesmeerd over het gebied tussen $y = 1$ en $y = +\infty$, en alles tussen $y = 1$ en $= +\infty$ wordt samengedrukt in het gebied tussen $y = 0$ en $y = 1$.

(d) De omgekeerde functie is een speciaal geval van het quotiënt: $\frac{1}{f}$ is het quotiënt van de constante functie 1 en de functie f.

(e) Het quotiënt van functies is een speciaal geval van het product: : $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Dus, elk quotiënt is ook een product, namelijk het product met het omgekeerde.

(f) PAS OP: we gebruiken NIET de notatie f^{-1} voor de omgekeerde functie, want die notatie is voorbehouden voor de *inverse* functie die we verder zullen bespreken. De *omgekeerde* functie en de *inverse* functie zijn twee *verschillende* begrippen!

(g) Op haar domein wordt de functie $f \cdot g$ nul in de nulpunten van f *en* in de nulpunten van g. Inderdaad, $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ en dit product is enkel nul als $f(x) = 0$ of $g(x) = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

10.9 Product en quotiënt van functies

(h) De nulpunten van de functie $\frac{f}{g}$ zijn iets lastiger. Voor een nulpunt van f waar de functie g niet nul is, is er geen probleem: dat nulpunt van f is ook een nulpunt van $\frac{f}{g}$. Neem bijvoorbeeld $f : x \mapsto x-1$ en $g : x \mapsto 2x$, dan hebben zowel f als $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x-1}{2x}$ een nulpunt in $x = 1$.
Maar voor $f : x \mapsto x-1$ en $g : x \mapsto (x-1)^2$ is $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{1}{x-1}$, en deze functie is niet gedefinieerd in $x = 1$, en $x = 1$ is dus zeker geen nulpunt.
Ook de functies $f : x \mapsto x^2 - 1$ en $g : x \mapsto x - 1$ zijn beiden nul in het punt $x = 1$, maar hun quotiënt $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ heeft waarde 2 voor $x = 1$, en $x = 1$ is dus *geen nulpunt* van $\frac{f}{g}$.

CC BY-NC-SA 4.0

10.10 Samenstellen van functies

Bewerkingen zoals $a+b$, $a-b$ en $a\cdot b$ met twee reële getallen a en b kan je makkelijk uitbreiden tot bewerkingen met reële functies f en g, en dat levert dan de *functies* $f+g$, $f-g$ en $f\cdot g$ op. Je kan deze operaties voor functies dus beschouwen als veralgemeningen van die voor getallen. Er is echter ook een fundamenteel andere manier om een nieuwe functie te maken van twee bestaande functies, die geen analoog heeft voor reële getallen. Je kan sommige functies namelijk eenvoudig *samenstellen*, dat betekent ze *na elkaar* toe te passen: *eerst* neem je $g(x)$, en dan pas je f toe *op het resultaat* $g(x)$ van g. Dat geeft als eindresultaat $f(g(x))$.

Definitie 10.10.1 (Samenstelling van twee functies)**.**

De **samengestelde functie** van twee reële functies f en g, genoteerd met $f\circ g$ en gelezen als 'f *na* g' (of soms ook 'f van g'), is per definitie de functie die *eerst* g toepast, en dan f, dus

$$f\circ g : x \mapsto (f\circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)).$$

Merk op dat $f\circ g$ enkel gedefinieerd is waar de uitdrukking $f(g(x))$ betekenis heeft. Dat is voor de x waarvoor $g(x)$ bestaat en bovendien ook $f(g(x))$ bestaat.

Voorbeeld 10.10.1.

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto x+2$. Dan is

1. $f(g(3)) = 25$
2. $g(f(3)) = 11$
3. $f(f(3)) = 81$
4. $g(g(3)) = 7$
5. $g(g(g(3))) = 9$
6. $f(g(3)-5) = 0$
7. $f(g(3))-5 = 20$
8. $f(g(3)+g(2)) = 81$
9. $f(g(3+2)) = 49$

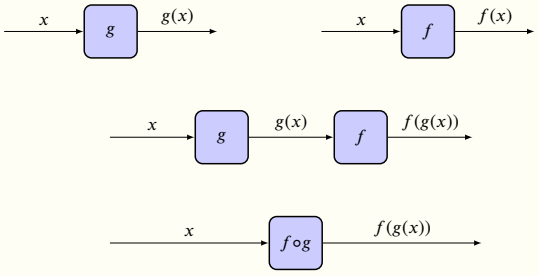
Oefening 10.10.1.

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto x+2$. Dan is

1. $f\circ g : x \mapsto$ | x^2+2 | $(x+2)^2$ | x^2+2^2 | $2x^2$ |
2. $g\circ f : x \mapsto$ | x^2+2 | $(x+2)^2$ | x^2+2^2 | $2x^2$ |
3. $g\circ g : x \mapsto$ | x^2+2 | $2(x+2)$ | $x+4$ | 4 |
4. $f\circ f : x \mapsto$ | x^2 | x^4 | $4x$ | $2x^2$ |

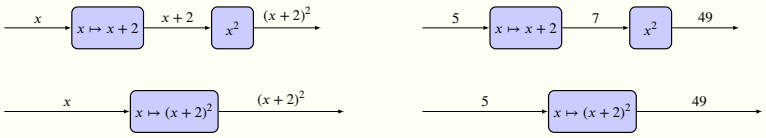
Opmerking 10.10.1.

- In de machine-voorstelling van functies is *samenstellen* de machines *achter elkaar plaatsen*:



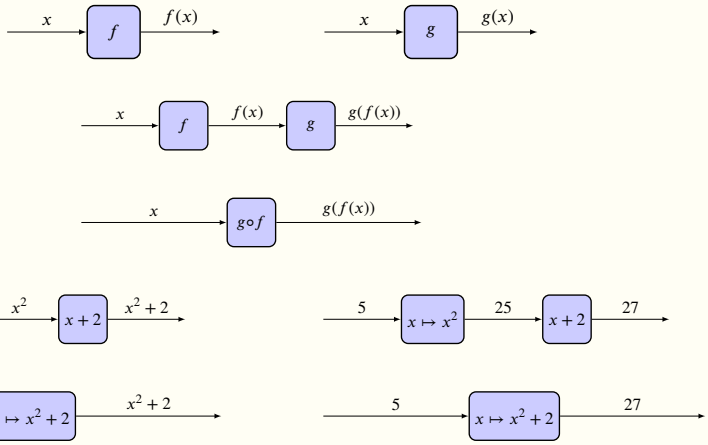
CC BY-NC-SA 4.0

10.10 Samenstellen van functies



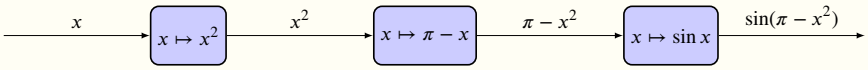
Let op de volgorde van de functies in de samenstelling. Om $(f \circ g)(x)$ (f *na* g van x) te vinden, moeten we *eerst* g toepassen op x en *daarna* f toepassen op het resultaat $g(x)$. Maar in de machinevoorstelling betekent dit dat de functie g links staat en f rechts: g is immers de functie die we eerst gebruiken en daarna de functie f.

- We kunnen ook $g \circ f$ bekijken, dus de functie $g \circ f : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Uit het voorbeeld blijkt al dat $f \circ g$ en $g \circ f$ verschillende functies zijn. De uitdrukking 'de samenstelling van f en g' kan dus dubbelzinnig zijn: wordt $f \circ g$ bedoeld, of $g \circ f$?

- De samengestelde functie $f \circ g$ is enkel gedefinieerd in x als x tot het domein van g behoort en $g(x)$ tot het domein van f. In de andere volgorde is de samengestelde functie $g \circ f$ enkel gedefinieerd in x als x tot het domein van f behoort en $f(x)$ tot het domein van g.
- Samengestelde functies komen erg veel voor, want heel veel functies kunnen worden gelezen als een samenstelling van eenvoudigere functies. Zo is de functie $x \mapsto \sin(\pi - x^2)$ de samengestelde functie van eerst $x \mapsto x^2$ gevolgd door $x \mapsto \pi - x$ en ten slotte $x \mapsto \sin(x)$.



Voorbeeld 10.10.2. Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies

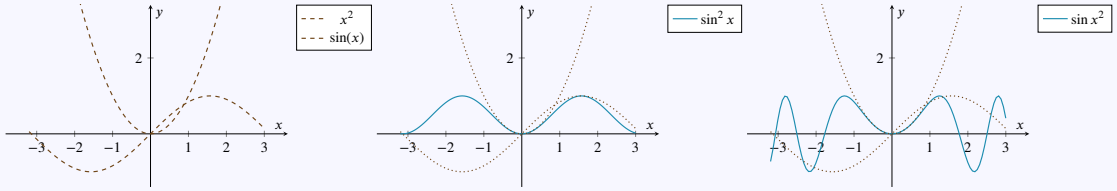
f	g	$f \circ g$	$g \circ f$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x - 3$	$x \mapsto (x-3)^2$	$x \mapsto x^2 - 3$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^4$	$x \mapsto x^4$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2$	$x \mapsto 4$	$x \mapsto 2$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto -x$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto -x^2$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto 2x$	$x \mapsto \sin(2x)$	$x \mapsto 2\sin(x)$

In het algemeen kan het verband tussen f en g enerzijds, en $f \circ g$ anderzijds erg complex zijn. Enkel in eenvoudige gevallen kan je het verband gemakkelijk zien.

CC BY-NC-SA 4.0

10.10 Samenstellen van functies

Voorbeeld 10.10.3 (Voorbeeld grafiek)**.** Er is niet onmiddellijk een duidelijk verband tussen de grafieken van de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto \sin x$ en die van hun samengestelde functies $f \circ g$ en $g \circ f$, zoals onderstaande grafieken aantonen. Let op: voor de goniometrische functies noteren we vaak $(\sin x)^2$ als $\sin^2 x$:



Oefening 10.10.2. Zij f en g twee functies die samenstelbaar zijn. Zijn volgende beweringen waar of fout?

1. Elk nulpunt van f is ook een nulpunt van $g \circ f$ | Waar | Niet waar |.

2. Elk nulpunt van $g \circ f$ is ook een nulpunt van f | Waar | Niet waar |

3. De grafiek van $g \circ f$ ligt altijd boven de grafiek van f | Waar | Niet waar |

10.10.1 Domein van samengestelde functies

In de vorige voorbeelden en oefeningen hadden alle functies $\mathbb{R}$ als domein en als codomein, en was samenstellen nooit een probleem. Als het domein of codomein (of beide) een strikte deelverzameling van de reële getallen is, wordt samenstellen wat subtieler, en in sommige gevallen zelfs onmogelijk .

Stel dat twee functies $g : A \to B$ en $f : C \to D$ gegeven zijn, met A, B, C, D deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Onder welke voorwaarden kunnen we dan f en g samenstellen, en wat is het domein en codomein van $f \circ g$?

Om het beeld $f(g(x))$ van een getal x onder $f \circ g$ te bepalen, moeten we eerst $g(x)$ bepalen, en dus moet zeker $x \in A$. Vervolgens moet f worden toegepast op $g(x)$, en dat kan alleen als $g(x) \in C$. Het domein van $f \circ g$ is dus de deelverzameling van A die wordt afgebeeld in C:

$$f \circ g : \{x \in A \mid g(x) \in C\} \to D : x \mapsto f(g(x))$$

Als $B \subseteq C$ (en dus in het bijzonder als $B = C$) is de voorwaarde $g(x) \in C$ automatisch voldaan, en geldt de eenvoudigere formule

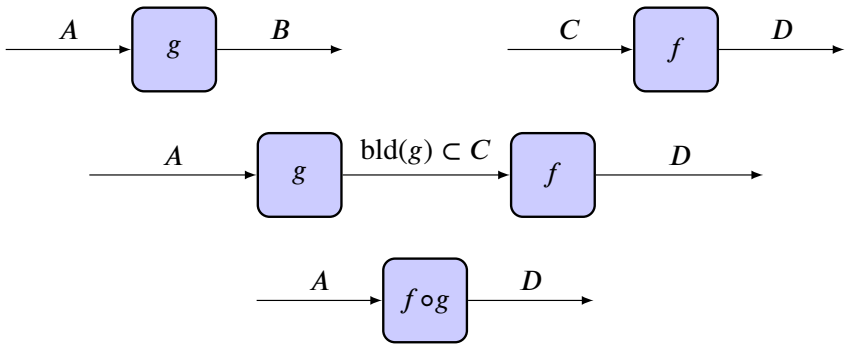
$$f \circ g : A \to D : x \mapsto f(g(x))$$

In het algemeen is het domein van $f \circ g$ (als deze samenstelling bestaat) dus een *deelverzameling* van A, het codomein is *gelijk* aan D en het beeld is een *deelverzameling* van D.

In de machinevoorstelling ziet de samenstelling er **in het geval** $\text{bld}(g) \subset C$ als volgt uit:

CC BY-NC-SA 4.0

10.10 Samenstellen van functies



Een voorbeeld van twee functies waarvoor de samenstelling niet bestaat omdat ze nergens gedefinieerd is:

Voorbeeld 10.10.4. Beschouw

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$

en

$$g : \mathbb{R}^+ \to]-\infty, -1] : x \mapsto -x - 1.$$

Je kan zelf nagaan dat in dit voorbeeld de codomeinen van f en g ook de beelden van f en g zijn. De functie $f \circ g$ is nergens gedefinieerd: voor elke $x \in \mathbb{R}^+$ geldt dat $g(x) \in]-\infty, -1]$, zodat $g(x)$ niet tot het domein van de functie f behoort. Dus kunnen we op geen enkele $g(x)$ uit het beeld van g de functie f toepassen. Inderdaad: voor elke x in het domein van g is $g(x)$ een strikt negatief getal, en hiervan kunnen we onmogelijk de vierkantswortel nemen.

Een voorbeeld van twee functies waarvoor de samenstelling wel bestaat maar niet overal gedefinieerd is:

Voorbeeld 10.10.5. Beschouw

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$

en

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x.$$

Dan is $f \circ g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{-x}$. De samenstelling is niet voor alle x in het domein van de functie g gedefinieerd: voor strikt positieve x is immers $-x$ strikt kleiner dan nul en van dit getal kunnen we geen vierkantswortel nemen. Voor $x \in \mathbb{R}^-$, een deelverzameling van het domein van g, is de samenstelling wel goed gedefinieerd. Ga zelf na dat de beelden van f en g telkens hun codomein zijn, en dat het beeld van de samenstelling $f \circ g$ hier gelijk is aan het beeld van f, namelijk $\mathbb{R}^+$.

CC BY-NC-SA 4.0

10.10.A Basisoefeningen samenstellen van functies

Oefening 10.10.3. Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies.

1. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $f \circ g : x \mapsto \dots\dots$
2. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $g \circ f : x \mapsto \dots\dots$
3. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $f \circ g : x \mapsto \dots\dots$
4. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $g \circ f : x \mapsto \dots\dots$
5. Als $f : x \mapsto \cos(x)$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $f \circ g : x \mapsto \dots\dots$
6. Als $f : x \mapsto \cos(x)$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $g \circ f : x \mapsto \dots\dots$

Oefening 10.10.4.

1. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $h \circ (f \circ g) : x \mapsto \dots\dots$
2. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $(h \circ f) \circ g : x \mapsto \dots\dots$
3. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $(f \circ g) \circ h : x \mapsto \dots\dots$
4. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $f \circ (g \circ h) : x \mapsto \dots\dots$

Oefening 10.10.5.

1. Als $f : x \mapsto \sin(x + 2)$ en $g : x \mapsto x + 1$, dan is $f \circ g : x \mapsto \dots\dots$
2. Als $g : x \mapsto \sin(x + 2)$ en $f : x \mapsto x + 1$, dan is $f \circ g : x \mapsto \dots\dots$
3. Als $f : x \mapsto x + e^x$ en $g : x \mapsto 2x + 1$, dan is $f \circ g : x \mapsto \dots\dots$
4. Als $f : x \mapsto x + e^x$ en $g : x \mapsto 2x + 1$, dan is $g \circ f : x \mapsto \dots\dots$
5. Als $f : x \mapsto x^2 + x$ en $g : x \mapsto e^x + \cos(x^2)$, dan is $f \circ g : x \mapsto \dots\dots$
6. Als $f : x \mapsto x^2 + x$ en $g : x \mapsto e^x + \cos(x^2)$, dan is $g \circ f : x \mapsto \dots\dots$

Oefening 10.10.6 (Samenstellingen van functies herkennen)**.**
Schrijf volgende uitdrukkingen als samenstellingen van twee functies:

1. $\sin x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
2. $\sin^2 x = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
3. $(x+2)^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
4. $x^2 + 2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
5. $x^4 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
6. $2x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
7. $4x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.10.A Basisoefeningen samenstellen van functies

Merk op: volgende functies zijn niet als echte samenstellingen te schrijven (want het zijn telkens sommen of producten):

(a) $\sin x \cos x$
(b) $x^2 \sin x$
(c) $\sin x + \cos x$
(d) $\cos^2 x + \sin^2 x$

Oefening 10.10.7. Bepaal, indien mogelijk, de samengestelde functies $g \circ f$ en $f \circ g$, samen met hun domein. Als codomein nemen we telkens $\mathbb{R}$.

1. Voor de functies $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x-1}$ en $g : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$
is $f \circ g$: ... ...
en $g \circ f$: ... .

2. Voor de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x + 3$
is $f \circ g$: ... ...
en $g \circ f$: ... .

3. Voor de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x$ en $g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{-x}$
is $f \circ g$: ... ...
en $g \circ f$: ... .

Oefening 10.10.8. Gegeven zijn de functies $f : [0, 1] : x \mapsto x^2$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x$.

1. $\operatorname{dom} f \circ g =$ ... .

2. $\operatorname{dom} g \circ f =$ ... .

Oefening 10.10.9. Gegeven zijn de volgende twee functievoorschriften voor f en g:

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sqrt{-x}$$

1. $\operatorname{dom} f =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$ en $\operatorname{dom} g =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$.
$\operatorname{bld} f =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$ en $\operatorname{bld} g =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$.

2. Waar of niet waar: de functie $f \circ g$ bestaat: $\boxed{\text{Juist}}$ $\boxed{\text{Fout}}$. Zo ja, bepaal ook het domein, beeld en functievoorschrift van deze functie.

3. Waar of niet waar: de functie $g \circ f$ bestaat: $\boxed{\text{Juist}}$ $\boxed{\text{Fout}}$. Zo ja, bepaal ook het domein, beeld en functievoorschrift van deze functie.

Oefening 10.10.10. Gegeven zijn de volgende twee functievoorschriften voor f en g:

$$f : x \mapsto \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}$$
$$g : x \mapsto \sqrt{x}$$

1. $\operatorname{dom} f =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$ $\boxed{[0,1]}$ $\boxed{]0,1]}$ $\boxed{[2,+\infty[}$ $\boxed{]2,+\infty[}$.

2. $\operatorname{dom} g =$ $\boxed{\mathbb{R}}$ $\boxed{\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\mathbb{R}^-}$ $\boxed{\mathbb{R}_0}$ $\boxed{[0,1]}$ $\boxed{]0,1]}$ $\boxed{[2,+\infty[}$ $\boxed{]2,+\infty[}$.

CC BY-NC-SA 4.0

10.10.A Basisoefeningen samenstellen van functies

3. Waar of niet waar: de functie $f \circ g$ bestaat: | Juist | Fout |. Zo ja, bepaal ook het domein en functievoorschrift van deze functie.

4. Waar of niet waar: de functie $g \circ f$ bestaat: | Juist | Fout |. Zo ja, bepaal ook het domein en functievoorschrift van deze functie.

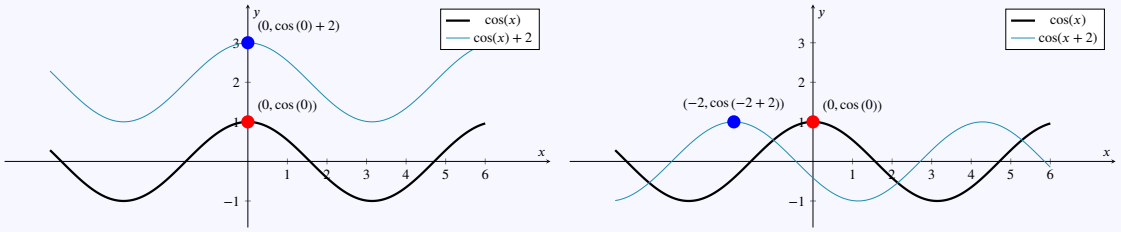
CC BY-NC-SA 4.0

10.11 Transformaties van functies

In het algemeen kan het verband tussen twee functies f en g enerzijds, en de samengestelde functie $f \circ g$ anderzijds erg complex zijn. Maar als één van de functies zelf eenvoudig is, kan het verband wel intuïtief duidelijk zijn, en kunnen we het zelfs aflezen op de grafiek. We spreken in dit speciale geval soms van *transformaties* van functies, of de transformatie van één functie door een andere in plaats van het algemenere *samenstelling* van twee functies. We noteren hier de 'eenvoudige' functie met de letter T (voor Transformatie). Als voorbeelden van zulke 'eenvoudige' functies bekijken we in eerste instantie eerstegraadsfuncties zoals $x \mapsto x+2$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto 2x+2$, ... maar later ook bijvoorbeeld de absolute waarde functie.

Voorbeeld 10.11.1. Verschuivingen: bestudeer voor $f : x \mapsto \cos(x)$ en $T_1 : x \mapsto x+2$ de grafieken van

$$T_1 \circ f : x \mapsto \cos(x)+2 \text{ en } f \circ T_1 : x \mapsto \cos(x+2).$$



- De grafiek van $x \mapsto \cos(x)+2$ is 2 naar *boven* verschoven t.o.v. de grafiek van f.

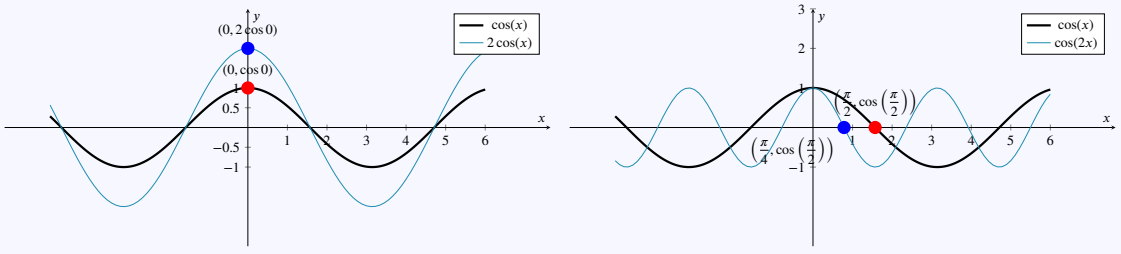
  Dit is eenvoudig te begrijpen want de x die door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, wordt door $T_1 \circ f$ afgebeeld op $\cos(x)+2$, dus 2 eenheden hoger.

- De grafiek van $x \mapsto \cos(x+2)$ is 2 naar *links* verschoven t.o.v. de grafiek van f.

  Dit is wat subtieler: als x door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, dan wordt $x-2$ door $T_1 \circ f$ afgebeeld op dezelfde $\cos((x-2)+2) = \cos(x)$. Dus, je moet 2 eenheden vroeger vertrekken om op dezelfde functiewaarde terecht te komen.

Voorbeeld 10.11.2. Expansies: bestudeer voor $f : x \mapsto \cos(x)$ en $T_2 : x \mapsto 2x$ de grafieken van

$$T_2 \circ f : x \mapsto 2\cos(x) \text{ en } f \circ T_2 : x \mapsto \cos(2x).$$



- De grafiek van $x \mapsto 2\cos(x)$ is een factor 2 'uitgerokken' in de y-richting t.o.v. de grafiek van $\cos x$.

  Dit is eenvoudig te begrijpen want de functiewaarden worden door T_2 met 2 vermenigvuldigd. De x die door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, wordt door $T_2 \circ f$ afgebeeld op $2\cos(x)$, dus 2 keer groter.

CC BY-NC-SA 4.0

10.11 Transformaties van functies

- De grafiek van $x \mapsto \cos(2x)$ is een factor 2 'ingedrukt' in de x-richting t.o.v. de grafiek van $\cos x$.

  Dit is wat subtieler: als x door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, dan wordt $x/2$ door $f \circ T_2$ afgebeeld op dezelfde $\cos(2(x/2)) = \cos(x)$. Dus, je moet met $x/2$ vertrekken om op dezelfde functiewaarde terecht te komen.

Voor sommige eenvoudige functies T is er dus een duidelijk verband tussen de grafieken van f en de samengestelde functies $T \circ f$ en $f \circ T$. We stellen vast dat

Eigenschap 10.11.1 (Transformaties van een functie)**.**

De (transformatie-)functies T hebben volgend effect op (de grafiek van) een willekeurige functie f:

- $f \circ T : x \mapsto f(T(x))$: pas T toe langs de x-as
- $T \circ f : x \mapsto T(f(x))$: pas T toe langs de y-as

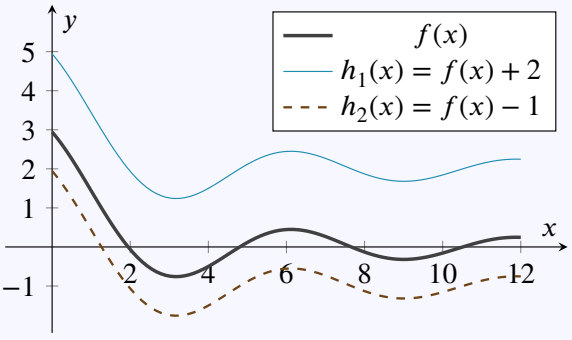
In het bijzonder hebben de transformaties $T_+ : x \mapsto x + a$ ('plus a') en $T_\times : x \mapsto ax$ ('maal a') volgende effecten:

$T \circ f : x \mapsto f(x) + a$	grafiek a naar *boven* verschuiven
$f \circ T : x \mapsto f(x + a)$	grafiek a naar *links* verschuiven
$T \circ f : x \mapsto a \cdot f(x)$	grafiek met factor a *uitrekken* in de y-richting
$f \circ T : x \mapsto f(a \cdot x)$	grafiek met factor a *indrukken* in de x-richting

Opmerking 10.11.1. '-2 naar boven schuiven' betekent natuurlijk hetzelfde als '2 naar beneden schuiven' en 'met factor $\frac{1}{2}$ uitrekken' betekent hetzelfde als 'met factor 2 indrukken'.

Voorbeeld 10.11.3 (Verschuiving langs y-as)**.**

Een functie f kan je langs de y-as verschuiven door (langs *links*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto x + 2$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$. Dit resulteert in onderstaande functies $h_1 : x \mapsto (T_1 \circ f)(x) = f(x) + 2$ en $h_2 : x \mapsto (T_2 \circ f)(x) = f(x) - 1$:



Oefening 10.11.1. Welke transformatie verschuift de grafiek van f met π eenheden naar beneden ?

$f \circ T$ met $T : x \mapsto x + \pi$, dus $x \mapsto f(x + \pi)$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto x + \pi$, dus $x \mapsto f(x) + \pi$

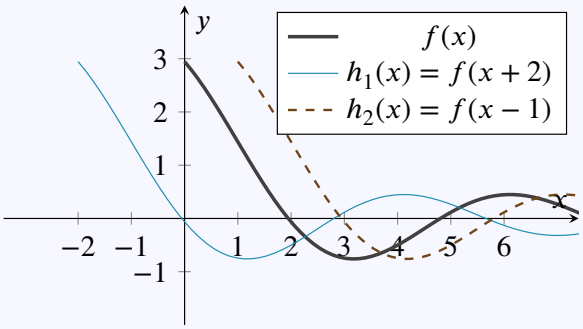
CC BY-NC-SA 4.0

10.11 Transformaties van functies

$f \circ T$ met $T : x \mapsto x - \pi$, dus $x \mapsto f(x - \pi)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x - \pi$, dus $x \mapsto f(x) - \pi$

Voorbeeld 10.11.4 (Verschuiving langs x-as)**.**

Een functie f kan je langs de x-as verschuiven door (langs *rechts*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto x + 2$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (f \circ T_1)(x) = f(x + 2)$ en $h_2 : x \mapsto (f \circ T_2)(x) = f(x - 1)$:



Het domein van $f \circ T_1$ is niet hetzelfde als het domein van f: als $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ dan is $h_1 = f \circ T_1 : [-2, 10] \to \mathbb{R}$, want bijvoorbeeld $h_1(11) = f(13)$ bestaat dan niet.

Oefening 10.11.2.

Welke transformatie verschuift de grafiek van een functie f een halve eenheid naar links ?

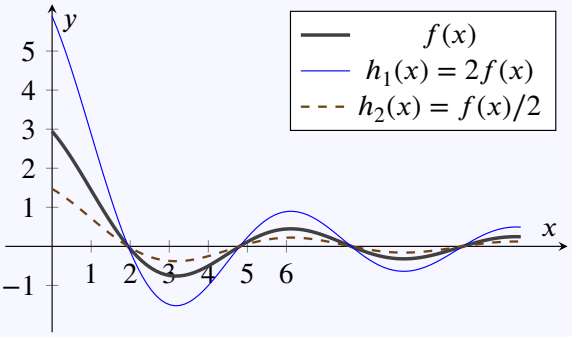
$f \circ T$ met $T : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x - \frac{1}{2})$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}$
$f \circ T$ met $T : x \mapsto x + \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x + \frac{1}{2})$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x + \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x) + \frac{1}{2}$

Voorbeeld 10.11.5 (Schalen langs y-as)**.**

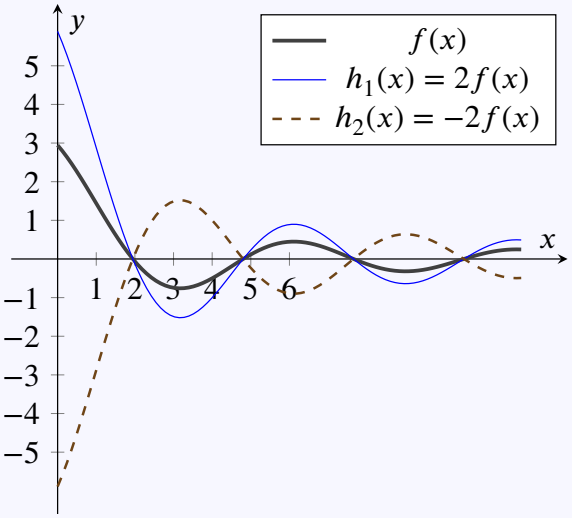
Een functie f kan je langs de y-as herschalen door (langs *links*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto 2x$ en $T_2 : x \mapsto x/2$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (T_1 \circ f)(x) = 2f(x)$ en $h_2 : x \mapsto (T_2 \circ f)(x) = f(x)/2$:

CC BY-NC-SA 4.0

10.11 Transformaties van functies



Merk op dat schalen met een negatieve factor zorgt voor een spiegeling rond de x-as:



Oefening 10.11.3.

Hoe kan je de grafiek van een functie f met een factor $2/3$ samendrukken langs de y-as?

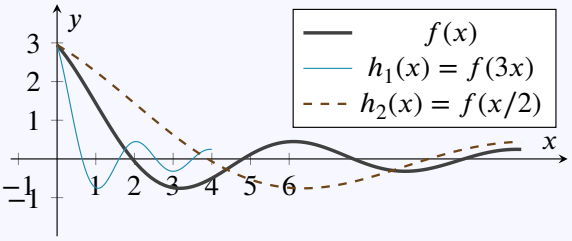
$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{3}{2}x$, dus $x \mapsto f(\frac{3}{2}x)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{3}{2}x$, dus $x \mapsto \frac{3}{2}f(x)$
$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{2}{3}x$, dus $x \mapsto f(\frac{2}{3}x)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{2}{3}x$, dus $x \mapsto \frac{2}{3}f(x)$

Voorbeeld 10.11.6 (Schalen langs de x-as)**.**

Een functie f kan je langs de x-as herschalen door (langs *rechts*) samen te stellen met de functies zoals $T_1 : x \mapsto 3x$ en $T_2 : x \mapsto x/2$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (f \circ T_1)(x) = f(3x)$ en $h_2 : x \mapsto (f \circ T_2)(x) = f(x/2)$:

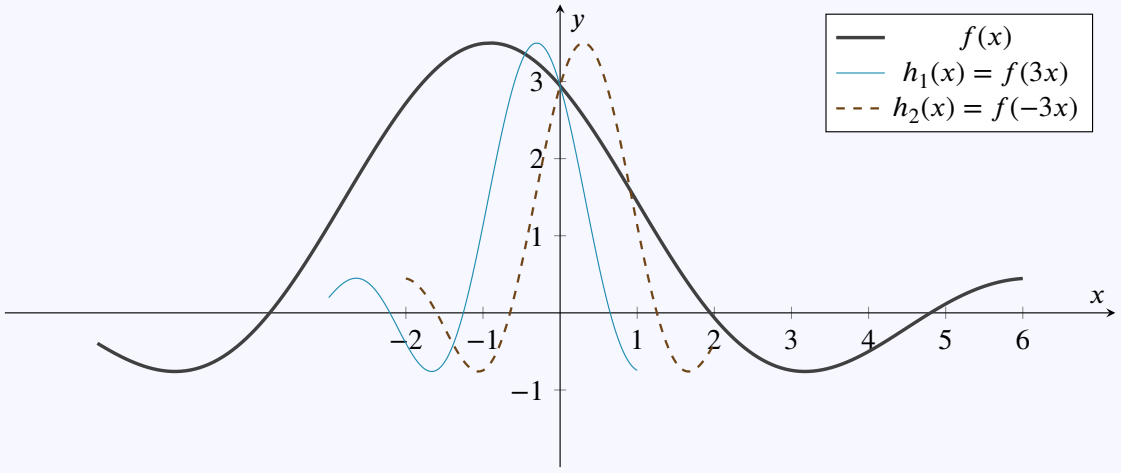
CC BY-NC-SA 4.0

10.11 Transformaties van functies



Het domein van $f \circ T_1$ is niet hetzelfde als het domein van f: als $f : [0,12] \to \mathbb{R}$ dan is $h_1 = f \circ T_1 : [0,4] \to \mathbb{R}$, want bijvoorbeeld $h_1(5) = f(15)$ bestaat dan niet.

Merk op dat schalen met een negatieve factor zorgt voor een spiegeling rond de y-as:



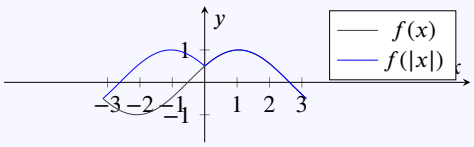
Oefening 10.11.4.

Hoe kan je de grafiek van een functie f uitrekken langs de x-as met een factor 2 ?

$f \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$, dus $x \mapsto f(2x)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto 2x$, dus $x \mapsto 2f(x)$
$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$, dus $x \mapsto f(x/2)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$, dus $x \mapsto f(x)/2$

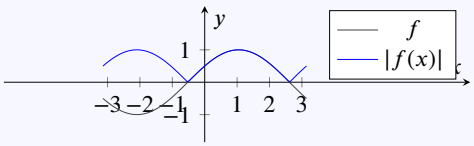
Voorbeeld 10.11.7 (Absolute waarde)**.**

Je kan een functie f ook samenstellen met de transformatie $T : x \mapsto |x|$. Dit resulteert in de functies $x \mapsto f(|x|)$ en $|f(x)|$. Onderstaande figuur toont telkens de grafieken:



CC BY-NC-SA 4.0

10.11 Transformaties van functies



- De grafiek van $x \mapsto f(|x|)$ is gelijk aan de grafiek van $f(x)$ voor positieve x, en je spiegelt het deel voor positieve x over de y-as. Het resultaat is dus symmetrisch ten opzichte van de y-as, en dat is eenvoudig te begrijpen omdat negatieve x-waarden worden omgezet naar hun absolute waarde, voordat ze ingevoerd worden in f.

  In symbolen: $f(|-x|) = f(x) = f(|x|)$ voor $x \geq 0$.
  De eventuele waarden van f voor negatieve x spelen dus geen enkele rol meer in de functie $f(|x|)$.

- De grafiek van $x \mapsto |f(x)|$ komt overeen met de grafiek van f waarbij alle negatieve y-waarden, vervangen worden door hun tegengestelde.
  Dus, je spiegelt de negatieve onderste helft naar de positieve bovenste helft .
  De grafiek van $|f|$ heeft hierdoor meestal hoekpunten op de x-as. Dat zal later nog problemen opleveren bij de studie van afgeleiden

CC BY-NC-SA 4.0

10.11.A Oefeningen transformaties van functies

Oefening 10.11.5.

Gegeven zijn de drie reële functies:
$$\begin{array}{lll} f & : x & \mapsto x^2 \\ g & : x & \mapsto x+2 \\ h & : x & \mapsto 2x \end{array}$$

1. Schets op papier de grafiek van de functie f.

2. Schets op papier de grafiek van de functie $g \circ f$.

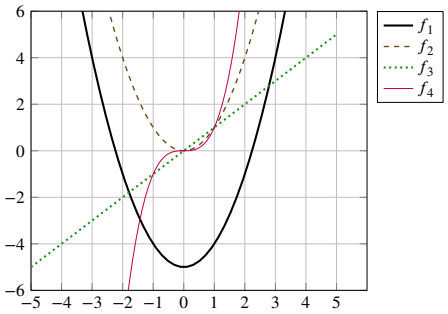
3. Schets op papier de grafiek van de functie $h \circ f$.

4. Schets op papier de grafiek van de functie $f \circ g$.

5. Schets op papier de grafiek van de functie $f \circ h$.

Oefening 10.11.6.

1. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:

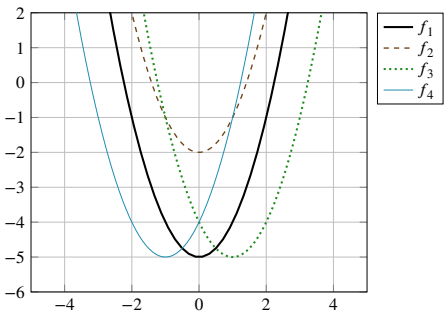


Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $f_1 \circ T_1$ met $T_1 : x \mapsto x$?

Meerkeuze:

(a) f_1
(c) f_3
(b) f_2
(d) f_4

2. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:



Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $f_1 \circ T_1 \circ T_2$ met $T_1 : x \mapsto x$ en $T_2 : x \mapsto x-1$?

CC BY-NC-SA 4.0

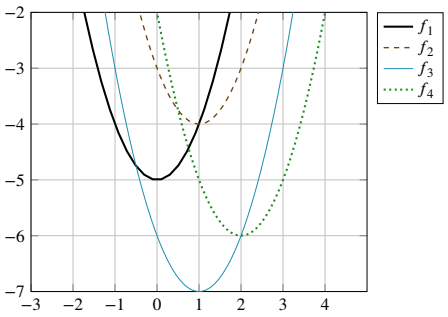
10.11.A Oefeningen transformaties van functies

Meerkeuze:

(a) f_1 (c) f_3

(b) f_2 (d) f_4

3. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:



Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $T_3 \circ f_1 \circ T_1 \circ T_2$ met $T_1 : x \mapsto x-1$, $T_2 : x \mapsto x-1$ en $T_3 : x \mapsto x-1$?

Meerkeuze:

(a) f_1 (c) f_3

(b) f_2 (d) f_4

Oefening 10.11.7. Teken (zonder gebruik van een grafisch rekenmachine) de grafiek van de functies met volgende voorschriften

1. $f(x) = |\sin x|$

2. $f(x) = \sin |x|$

Oefening 10.11.8. Stel f een functie waarvan de grafiek gegeven is. Is het mogelijk om in het algemeen te beschrijven hoe de grafiek van de volgende functies eruit zien? Zo ja, leg uit.

1. $g(x) = |f(x)|$ | Ja | Nee |

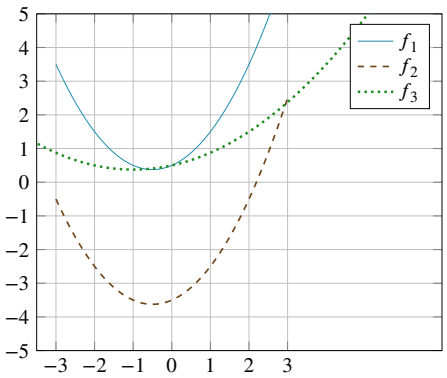
2. $g(x) = f(|x|)$ | Ja | Nee |

Oefening 10.11.9.

1. Bekijk onderstaande grafiek:

CC BY-NC-SA 4.0

10.11.A Oefeningen transformaties van functies



Selecteer alle juiste gelijkheden:

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $f_1 = T \circ f_2$ met $T : x \mapsto x + 4$

(b) $f_1 = f_3 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$

(c) $f_1 = f_2 \circ T$ met $T : x \mapsto x - 4$

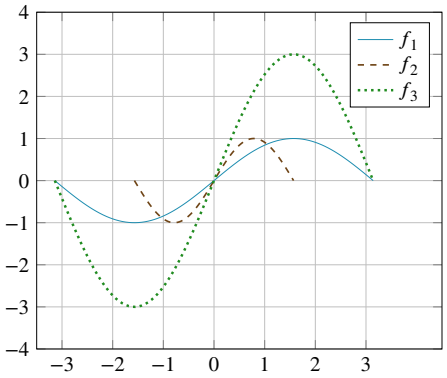
(d) $f_2 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto x - 4$

(e) $f_2 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto x - 4$

(f) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$

(g) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$

2. Bekijk onderstaande grafiek:



Selecteer alle juiste gelijkheden:

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $f_1 = f_3 \circ T$ met $T : x \mapsto 3x$

(b) $f_1 = T \circ f_2$ met $T : x \mapsto x + 4$

(c) $f_1 = T \circ f_3$ met $T : x \mapsto \frac{x}{3}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.11.A Oefeningen transformaties van functies

(d) $f_1 = f_2 \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$

(e) $f_2 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$

(f) $f_2 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$

(g) $f_3 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto 3x$

(h) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 3x$

Oefening 10.11.10. Teken (zonder gebruik van een grafisch rekenmachine) de grafiek van de functies met volgend voorschrift. Vertrek telkens van de grafiek van de absolute waarde functie $|x|$.

1. $f(x) = |x - 3|$

2. $f(x) = |x| - 3$

3. $f(x) = |x + 3|$

4. $f(x) = -|x - 3|$

5. $f(x) = ||x| - 3|$

6. $f(x) = ||x| + 3|$

CC BY-NC-SA 4.0

10.12 Inverse functies

Een functie f is een machine die een invoer x omzet in een uitvoer $f(x)$. Die uitvoer wordt soms ook met de letter y aangeduid en dan schrijven we $y = f(x)$. De machine berekent dus voor elke x een bijhorende y. Men kan zich afvragen of er ook een 'undo-machine' bestaat die de berekening van f ongedaan maakt, en de uitvoer y terug omzet in de invoer x.

We noemen een functie g **een inverse functie** voor f als g uit elke uitkomst y van f terug de input x kan berekenen: $g(y) = x$. Omdat $y = f(x)$, kunnen we $g(y) = x$ ook schrijven als $g(f(x)) = x$. Als een dergelijke functie g bestaat noemen we f *inverteerbaar* en g *de inverse functie* van f (eigenlijk *links*inverteerbaar en *linker*inverse maar dat is voorlopig niet belangrijk).

We bekijken eerst enkele voorbeelden. De voorbeelden tonen ook aan dat het voorschrift van de inverse van een functie f in een aantal gevallen te bepalen is uit het voorschrift van f. Het vinden van de inverse functie komt eigenlijk neer op het *oplossen van een vergelijking*: vind voor een gegeven functie $y = f(x)$ een nieuwe formule g die voor elk getal y de unieke $x = g(y)$ oplevert waarvoor geldt dat $f(x) = f(g(y)) = y$. Die functie levert dus voor elke y de unieke oplossing van de vergelijking $f(x) = y$.

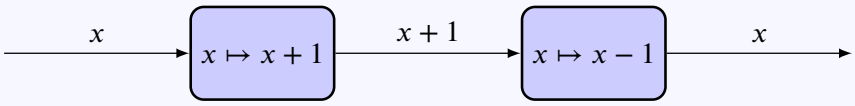
Voorbeeld 10.12.1. Zijn volgende functies inverteerbaar? Welke functie is de inverse?

1. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x + 1$

Uitwerking:

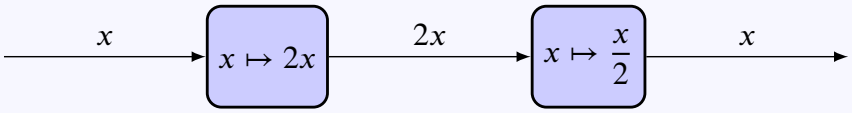
Deze functie f telt bij elk getal één op, dat kan dus ongedaan gemaakt worden door die één er weer af te trekken. De undo-functie van 'plus één' is dan uiteraard 'min één'. In formules: de inverse functie van $x \mapsto x + 1$ is de functie $x \mapsto x - 1$. Of nog, met de notatie $y = f(x)$: voor de functie $f(x) = x + 1$ geldt dan $y = x + 1$. Daaruit kunnen we berekenen dat $x = y - 1$. Als we de inverse functie g noemen, moeten we dus $g(y) = y - 1$ berekenen om de oorspronkelijke x terug te krijgen. Als we die functie g nu toch ook schrijven met als variabele x wordt dat $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = x - 1$. We kunnen dan nagaan dat $g(f(x))$ inderdaad terug x geeft: $g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$.

Merk op dat we uit het verband $f(x) = y$ een voorschrift voor g hebben gevonden door 'op te lossen naar x', en dus een formule kregen van de vorm $x = g(y)$. Daarna hebben we, omdat dat gebruikelijk is, in de definitie van g de variabele toch weer terug x genoemd en niet y.



2. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$

Uitwerking: De undo-functie van 'vermenigvuldigen met twee' is 'delen door twee'. Dus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x/2$ is de inverse functie van f, want $g(f(x)) = g(2x) = (2x)/2 = x$.



3. Fout ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2$

Uitwerking: Alle input wordt naar 2 gestuurd. Dat kan niet ongedaan gemaakt worden, want als je enkel de output 2 kent, kan je natuurlijk niet meer weten wat er precies in de machine werd gestopt: *elke input* geeft output 2.

Iets wiskundiger vinden we dat $f(x) = y = 2$ voor alle x, en dit functievoorschrift kan niet herschreven worden naar een voorschrift van de vorm $x = g(y)$, aangezien deze formule geen x bevat.

CC BY-NC-SA 4.0

10.12 Inverse functies

4. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$

Uitwerking: De inverse is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$, en is dus gelijk aan f. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$ is dus haar eigen inverse.

5. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 3$

Uitwerking: De inverse is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$.

Deze f stuurt x naar $y = 2x + 3$. Uit $y = 2x + 3$ kunnen we echter eenvoudig x berekenen door de 3 naar het ander lid te brengen en te delen door twee: $y = 2x + 3 \iff y - 3 = 2x \iff \dfrac{y-3}{2} = x \iff x = \dfrac{y-3}{2}$.

Dus als we voor g de functie nemen die $y \mapsto g(y) = \dfrac{y-3}{2}$ dan geldt inderdaad dat $g(f(x)) = g(2x+3) = \dfrac{(2x+3)-3}{2} = x$.

De letter die we gebruiken als variabele van de inverse functie is niet belangrijk, we kunnen de inverse functie even goed noteren als $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$

6. Fout ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

Uitwerking: Er bestaat geen inverse, want de input 2 en de input -2 worden beide afgebeeld op $f(2) = f(-2) = 4$. De output 4 hoort dus zowel bij input 2 als bij -2. Er kan geen inverse functie g bestaan, want die moet dan 4 zowel op 2 afbeelden als op -2, en dat is onmogelijk want een functie kan een getal maar afbeelden op één ander getal.

We noemen twee functies *inversen* van elkaar, als ze elkaars actie ongedaan maken. We eisen dus niet alleen dat g de actie van de functie f ongedaan maakt, maar ook dat f op zijn beurt de actie van g ongedaan maakt. Als f en g inverse functies zijn van elkaar dan noteren we g ook als f^{-1}, *de inverse functie* van f. Omdat het precieze domein en codomein bij inverse functies erg belangrijk kunnen zijn, gebruiken we hier steeds de uitgebreide notatie $f : A \to B$ voor functies.

Definitie 10.12.1 (Inverse functie)**.**

Als $A, B \subset \mathbb{R}$, en $f : A \to B$ en $g : B \to A$ reële functies zijn, dan geldt:

- we noemen f en g **inverse functies van elkaar** (en f de **inverse** van g en g de **inverse** van f) als
$$g(f(x)) = x \quad \text{voor alle } x \in A \text{ en}$$
$$f(g(x)) = x \quad \text{voor alle } x \in B$$
- we noemen f **inverteerbaar** als er een inverse functie bestaat.
- we noteren de (unieke) **inverse functie** van een inverteerbare functie $f : A \to B$ als
$$f^{-1} : B \to A : x \mapsto f^{-1}(x).$$
Dan geldt voor alle x in A, en alle y in B:
$$f^{-1}(f(x)) = x$$
$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.12 Inverse functies

Merk op dat spreken over *de* inverse functie alleen zinvol is als een inverse functie uniek is. Dat is echter het geval, zoals blijkt uit volgende eigenschap:

Eigenschap 10.12.1.

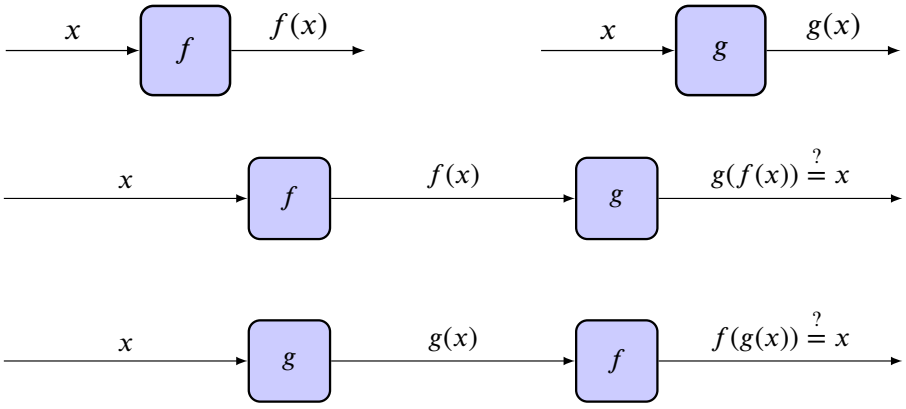
- Als een functie een inverse functie heeft, dan is die inverse uniek.
- Voor een inverteerbare functie $f : A \to B$ geldt voor elke $x \in A$ en $y \in B$ dat

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

Je kan de voorwaarde voor inverse functies ook schrijven als

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{voor alle } x \in A \text{ en}$$
$$(f \circ g)(x) = x \quad \text{voor alle } x \in B$$

Twee functies zijn dus elkaars inverse als hun samenstelling de identieke functie $x \mapsto x$ is, dus iedere x afbeeldt op zichzelf. De grafiek van de identieke functie is de eerste bissectrice in het vlak met vergelijking $y = x$. Schematisch wordt dat:



Opmerking 10.12.1.

- Niet elke functie is inverteerbaar. Voor een gegeven functie f bestaat f^{-1} dus niet altijd. Bijvoorbeeld de functie $x \mapsto 1$ heeft geen inverse.
- Je mag kiezen welke letter je neemt als variable voor de inverse functie. Neem je bijvoorbeeld de variabele y voor f^{-1} dan noteren we

$$f^{-1} : B \to A : y \mapsto f^{-1}(y)$$

en dat betekent precies hetzelfde als

$$f^{-1} : B \to A : x \mapsto f^{-1}(x)$$

Het gebruik van de letter y is afhankelijk van de context eerder nuttig of eerder verwarrend. Het is daarbij belangrijk op te merken dat $x \mapsto x^2, y \mapsto y^2$ en $z \mapsto z^2$ drie keer *precies* dezelfde functie zijn. De *naam van de variable* veranderen, verandert de *functie* niet.

Voorbeeld 10.12.2. De functies $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ en $g : x \mapsto 2x - 2$ zijn elkaars inverse. We

CC BY-NC-SA 4.0

10.12 Inverse functies

kunnen dat *algebraïsch* bekijken door $f(g(x))$ en $g(f(x))$ te berekenen en aan te tonen dat beide uitdrukkingen gelijk zijn aan x:

$$f(g(x)) = f(2x-2) = \frac{1}{2}(2x-2)+1 = x \tag{5}$$

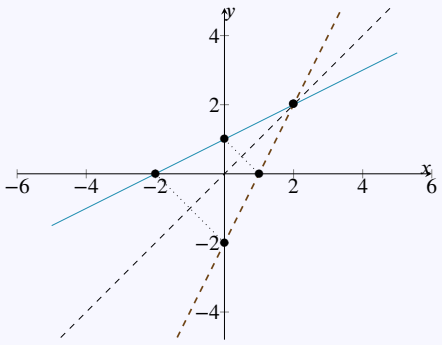
$$g(f(x)) = g(\frac{1}{2}x+1) = 2(\frac{1}{2}x+1)-2 = x \tag{6}$$

We kunnen dus schrijven dat $g = f^{-1}$ en dat $f = g^{-1}$.

We kunnen ook *meetkundig* onderzoeken wat dat betekent voor de grafiek van f en g.

Onderstaande tabel en grafiek van de functies f en g toont dat voor elk paar (x, y) op de grafiek van f, het punt (y, x) op de grafiek van g ligt, en omgekeerd. De grafiek van g krijgen we dus door in de grafiek van f de x en y van plaats te verwisselen. Grafisch komt dat overeen met spiegelen over de eerste bissectrice. De eerste bissectrice is de grafiek van $x \mapsto x$, dus de rechte met vergelijking $y = x$. Spiegelen ten opzichte van die bissectrice komt overeen met x en y omwisselen: het punt $(2, 3)$ wordt gespiegeld naar het punt $(3, 2)$.

$f : x \mapsto x/2+1$	$f^{-1} : x \mapsto 2x-2$
$(-4,-1)$	$(-1,-4)$
$(-2,0)$	$(0,-2)$
$(0,1)$	$(1,0)$
$(2,2)$	$(2,2)$
$(4,3)$	$(3,4)$



Voorbeeld 10.12.3. De functies $f : x \mapsto x+1$ en $g : x \mapsto x-1$ zijn inversen van elkaar.

We kunnen dat *algebraïsch* bekijken door $f(g(x)$ en $g(f(x))$ te berekenen, en aan te tonen dat beide uitdrukkingen gelijk zijn aan x:

$$f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)+1 = x \tag{7}$$

$$g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)-1 = x \tag{8}$$

We kunnen dus schrijven dat $g = f^{-1}$ en dat $f = g^{-1}$.

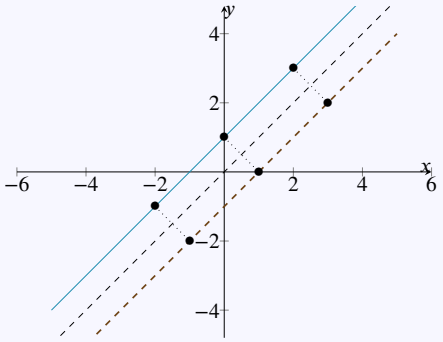
We kunnen ook *meetkundig* onderzoeken wat dat betekent voor de grafiek van f en g.

Onderstaande tabel en grafiek van de functies f en g toont dat voor elk paar (x, y) op de grafiek van f, het punt (y, x) op de grafiek van g ligt, en omgekeerd. De punten (x, y) van de grafiek van f komen dus overeen met de punten (y, x) van de grafiek van g. Meetkundig betekent x en y van plaats verwisselen spiegelen over de eerste bissectrice.

CC BY-NC-SA 4.0

10.12 Inverse functies

$f : x \mapsto x+1$	$f^{-1} : x \mapsto x-1$
$(-4,-3)$	$(-3,-4)$
$(-3,-2)$	$(-2,-3)$
$(-2,-1)$	$(-1,-2)$
$(-1,0)$	$(0,-1)$
$(0,1)$	$(1,0)$
$(1,2)$	$(2,1)$
$(2,3)$	$(3,2)$
$(3,4)$	$(4,3)$
$(4,5)$	$(5,4)$



Opmerking 10.12.2. Als f^{-1} bestaat, dan wordt de grafiek van f^{-1} bekomen door de grafiek van f te spiegelen rond de eerste bissectrice.

Om de inverse functie te vinden kunnen we volgend stappenplan volgen:

Algoritme 10.12.4 (Berekenen de inverse functie)**.**

In sommige gevallen kunnen we een inverse functie expliciet berekenen:

(a) Schrijf de functie $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ in de vorm $y = f(x)$.

(b) Probeer x op te lossen uit $y = f(x)$.
Dit betekent: probeer x te schrijven als functie van y.
Op die manier vind je een functie g zodat $x = g(y)$.

(c) Deze g is de inverse functie: $f^{-1} : B \to A : y \mapsto g(y)$.

(d) Vervang indien gewenst de variabele van de inverse functie door x.

(e) Die nieuwe formule geeft dan $f^{-1} : B \to A : x \mapsto g(x)$.

Voorbeeld 10.12.4. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x+3$.

$$y = 5x+3 \iff y-3 = 5x \iff \frac{y-3}{5} = x$$

De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x+3$ is dus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{y-3}{5}$ of ook $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-3}{5}$.

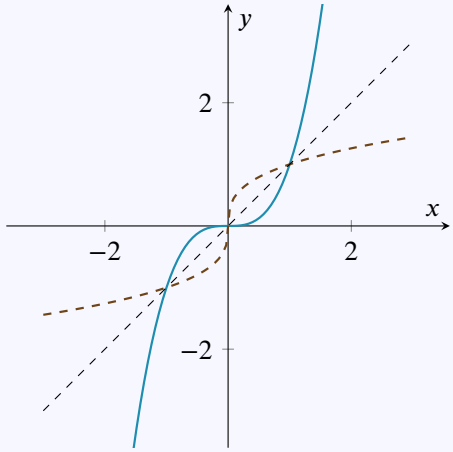
Voorbeeld 10.12.5. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.

$$y = x^3 \iff y^{\frac{1}{3}} = x$$

De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ is dus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{3}}$ of ook $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

10.12 Inverse functies

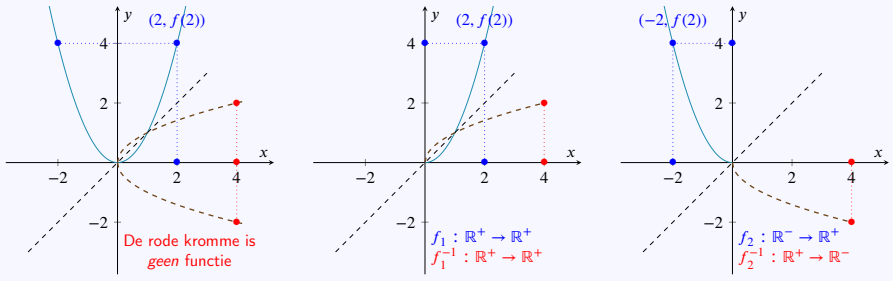


Voorbeeld 10.12.6. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

$$y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}$$

Deze functie is *niet inverteerbaar*:

- Voor $y < 0$ bestaat de vierkantswortel niet. De oplossing voor dit probleem is het codomein beperken tot het beeld $\mathbb{R}^+$. Wanneer we het codomein wijzigen krijgen we een andere functie, dus geven we die een andere naam: $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$
- Voor $y > 0$ zijn er twee oplossingen, $x = \sqrt{y}$ en $x = -\sqrt{y}$. Er zijn 2 mogelijke manieren om toch een inverse functie te definiëren:
  - Als je het domein van $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^+$, dus $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ dan is $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$.
  - Als je het domein van $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^-$, dus $f_2 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ dan is $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$.



Het is dus mogelijk dat een functie f geen inverse heeft, maar dat een beperking van die functie tot een kleiner (co)domein – wat een nieuwe functie oplevert – *wel* een inverse heeft. Typische voorbeelden zijn de inversen van de sinus, cosinus en tangens.

Opmerking 10.12.3 (Grafisch criterium voor inverteerbaarheid)**.**

Uit bovenstaande voorbeelden leiden we volgend verband af tussen de inverteerbaarheid van een functie en haar grafiek:

Een functie f is *inverteerbaar*

CC BY-NC-SA 4.0

10.12 Inverse functies

als en slechts als
elke horizontale rechte $y = c$ met c in het codomein van f snijdt de grafiek van f *in juist één punt*.

Als zo'n horizontale rechte in meer dan één punt snijdt met de grafiek van f dan kan je dikwijls een inverteerbare functie verkrijgen door het *domein* van f te beperken.

Als zo'n horizontale rechte geen snijpunt heeft met de grafiek van f dan kan je dikwijls een inverteerbare functie verkrijgen door het *codomein* van f te beperken.

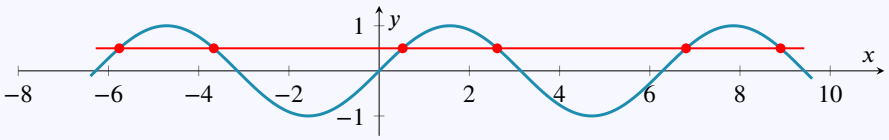
Typische voorbeelden zijn de inverse functies van de goniometrische en exponentiële functies. Als je nog niet vertrouwd bent met goniometrische, exponentiële en logaritmische functies kan je de details van onderstaande voorbeelden overslaan.

Voorbeeld 10.12.7 (Sinusfunctie)**.**

We kunnen ons afvragen of er een inverse functie bestaat voor de sinusfunctie

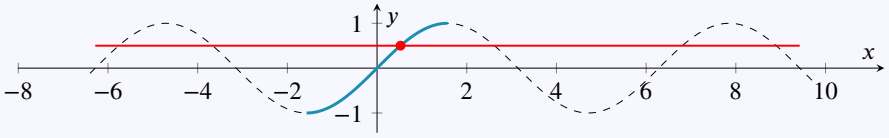
$$\sin : \mathbb{R} \mapsto [-1, 1] : x \mapsto \sin x\,.$$

In tegenstelling tot de meeste voorbeelden die we zijn tegengekomen, is het hier minder makkelijk om uit de formule $y = f(x)$ een verband $x = g(y)$ vinden. We kunnen hier daarentegen aantonen dat er *geen inverse* kan bestaan voor de sinusfunctie. Uit de gekende grafiek van de sinusfunctie



volgt wegens vorige opmerking dat de sinus niet inverteerbaar is: iedere horizontale rechte op een hoogte tussen -1 en 1 snijdt de grafiek van de sinus immers meer dan één keer.

Het probleem kan worden opgelost door het *domein* te beperken tot een goed gekozen interval, bijvoorbeeld $[-\pi/2, \pi/2]$. Op dit interval heeft de sinus wel een inverse.



De verdere studie van dit soort inverse functies leidt tot de zogenaamde cyclometrische functies.

Voorbeeld 10.12.8 (Logaritmische en exponentiële functies zijn elkaars inversen)**.**

Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$.

Deze functie is *niet inverteerbaar* want voor $y \leq 0$ bestaat er geen x zodat $y = 2^x$. We kunnen een inverteerbare functie vinden door het *codomein* te beperken tot het beeld van f, namelijk $\mathbb{R}_0^+$.

Dan bestaat er wel voor elk getal $y \in \mathbb{R}_0^+$ een unieke $x \in \mathbb{R}$ zodat $y = 2^x$. We noemen deze x de *2-logaritme* van y, en noteren dat als $x = \log_2(y)$. Er geldt dus

$$y = 2^x \iff x = \log_2(y)$$

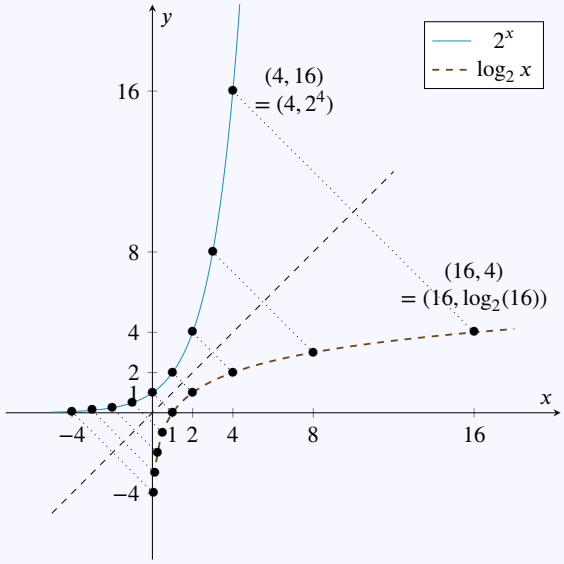
De functies $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto 2^x$ en $\log_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_2(x)$ zijn elkaars inverse.

De grafiek van de inverse functie is de spiegeling rond de eerste bissectrice. Inderdaad, spiegelen over

CC BY-NC-SA 4.0

10.12 Inverse functies

de eerste bissectrice komt overeen met (x, y) vervangen door (y, x):



CC BY-NC-SA 4.0

10.12.A Oefeningen inverse functies

Oefening 10.12.1. Ga na welke van de volgende functies inverteerbaar zijn. Indien een functie niet inverteerbaar is, bepaal dan het grootst mogelijke domein waarop een beperking van de functie wel inverteerbaar is. Bepaal, eventueel na het domein te beperken, de inverse functie en maak telkens een schets van de functie en haar inverse.

1. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

2. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

3. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto |x|$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

4. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

5. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto \dfrac{x+2}{x-3}$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

Oefening 10.12.2. Voor welke $m, c \in \mathbb{R}$ is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto mx + c$ inverteerbaar?

Oefening 10.12.3. Zijn de volgende functies met meervoudig functievoorschrift inverteerbaar? Zo ja, bepaal dan de inverse functie. Maak om te beginnen een grafiek van de gegeven functie.

1. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{als } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{als } x > 0 \end{cases}$ is inverteerbaar | niet inverteerbaar .

2. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{als } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{als } x > 1 \end{cases}$ is inverteerbaar | niet inverteerbaar .

3. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$ is inverteerbaar | niet inverteerbaar

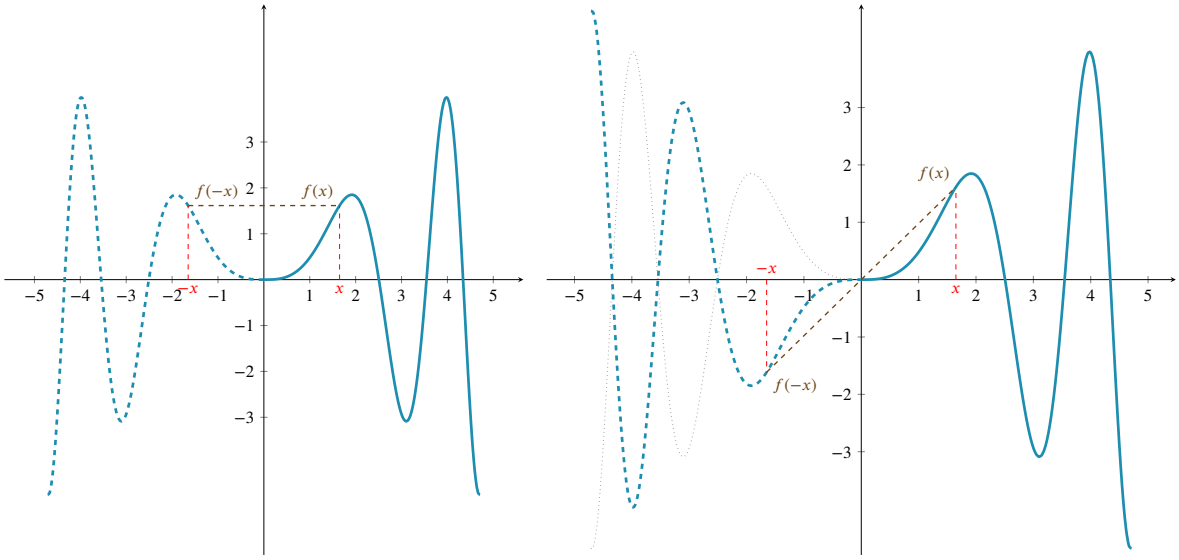
CC BY-NC-SA 4.0

10.13 Even en oneven functies

Definitie 10.13.1 (Even en oneven functies)**.**

Een reële functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is **even** als voor elke getal $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x) = f(-x)$

Een reële functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is **oneven** als voor elke getal $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x) = -f(-x)$



Opmerking 10.13.1.

- De grafiek van een even functie f wordt bij spiegeling over de y-as op zichzelf afgebeeld.
- De grafiek van een oneven functie f wordt bij spiegeling over de y-as en daarna over de x-as op zichzelf afgebeeld. Eerst spiegelen over de y-as en daarna over de x-as komt neer op spiegelen tegenover de oorsprong.
- Een functie hoeft niet even of oneven te zijn.

Oefening 10.13.1. Welke van de volgende functies zijn even/oneven of geen van beide?

1.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x^2$
2.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x^3$
3.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x + 1$
4.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x$
5.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto \sin x$
6.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto \cos x$
7.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto \tan x$

CC BY-NC-SA 4.0

10.13 Even en oneven functies

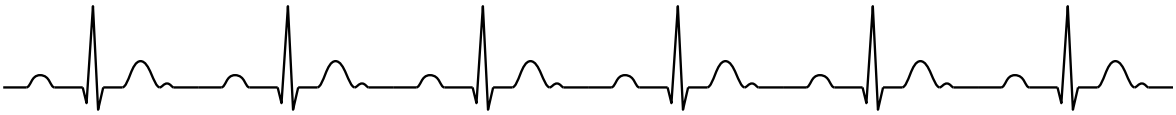
8. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f, g even zijn

9. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f, g oneven zijn

10. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f even en g oneven is

CC BY-NC-SA 4.0

10.14 Periodieke functies



Definitie 10.14.1 (Periodieke functie)**.**

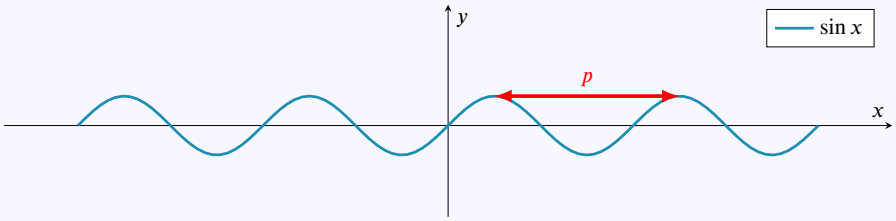
We noemen een reële functie f **periodiek** (soms ook **periodisch**) als er een getal $c > 0$ bestaat zodat

$$\text{voor alle } x \in \mathbb{R} : f(x + c) = f(x)$$

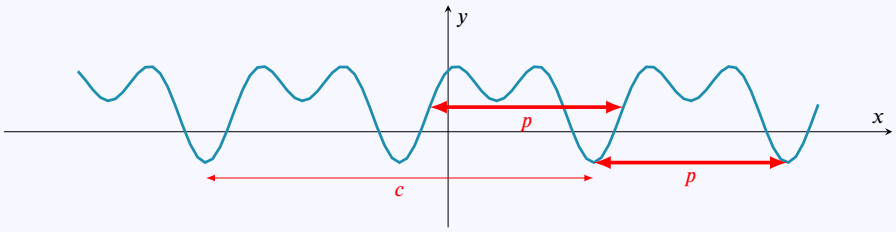
De **periode** p van f is de *kleinste* strikt positieve c waarvoor deze eigenschap geldt.

Voorbeeld 10.14.1 (Basisvoorbeeld)**.**

Wie al vertrouwd is met de goniometrische functies zoals sinus, cosinus,... zal hoogstwaarschijnlijk bij de term periodieke functie in eerste instantie aan deze functies denken. Ze vormen dan ook de standaardvoorbeelden voor periodieke functies, met periode $p = 2\pi$.

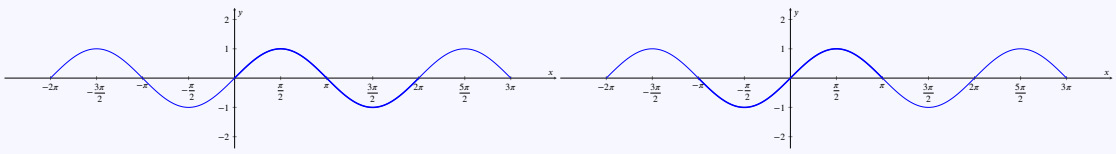


Maar ook sommen van sinussen en cosinussen zijn periodieke functies:



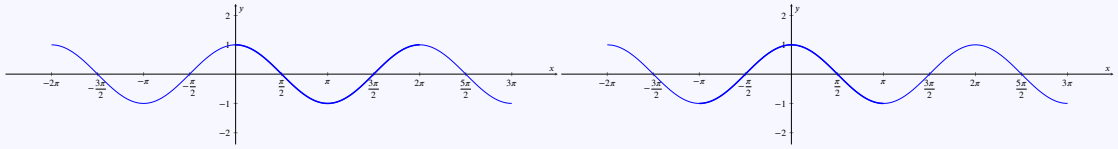
Voorbeeld 10.14.2. De belangrijkste voorbeelden van periodieke functies zijn de goniometrische functies:

1. De functie $\sin(x)$ met periode 2π

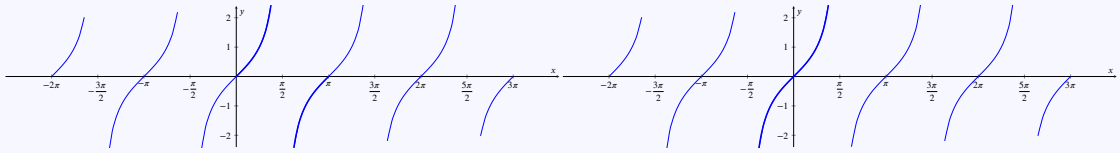


2. De functie $\cos(x)$ met periode 2π

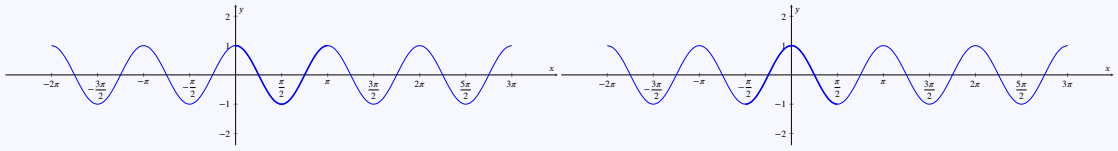
10.14 Periodieke functies



3. De functie $\tan(x)$ met periode π



4. De functie $\cos(2x)$ met periode π



Opmerking 10.14.1.

- De grafiek van een periodieke functie herhaalt zich dus op elk interval van lengte p.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is ook $f(x-c) = f(x)$ omdat $f(x-c) = f((x-c)+c) = f(x)$.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is ook $f(x+2c) = f((x+c)+c) = f(x+c) = f(x)$.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is dus ook $f(x+kc) = f(x)$ voor elke geheel getal k.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *sommige* x, dan zegt dat niets over het al dan niet periodiek zijn van f.
- Soms spreekt men ook af om elke c waarvoor altijd geldt dat $f(x+c) = f(x)$ een *periode* te noemen van f. Met die afspraak is *de* periode van een periodieke functie dus niet uniek bepaald.

Omdat voor een periodieke functie f met periode p voor alle x geldt dat $f(x+p) = f(x)$, volstaat het f te kennen op een interval van de vorm $[a, a+p[$, met a eender welk getal. In de praktijk blijkt het handig om te werken met intervallen van de vorm $[0, p[$, of $[-p/2, p/2[$.

Eigenschap 10.14.1.

- Als je een periodieke functie f met periode p kent op een halfopen interval van lengte p, dan ken je ze overal.
- Elke functie op een halfopen interval van lengte p kan op unieke wijze worden uitgebreid tot een periodieke functie op $\mathbb{R}$.

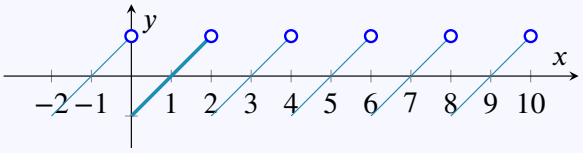
We kunnen een functie f die enkel gedefinieerd is op een interval $[a, a+p[$ uitbreiden tot $\mathbb{R}$ als volgt. Een willekeurig reëel getal x schrijven we als $x = x_0 + kp$, met $x_0 \in [a, a+p[$ en $k \in \mathbb{Z}$. Dan definiëren we:

$$f(x) = f(x_0 + kp) \overset{\text{def}}{=} f(x_0)$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.14 Periodieke functies

Voorbeeld 10.14.3 (Basisvoorbeeld uitbreiden van functies)**.** Beschouw de functie $f : [0,2[\to \mathbb{R} : x \mapsto x-1$. We kunnen die functie op unieke wijze uitbreiden tot een periodieke functie op $\mathbb{R}$ door te definiëren dat $f(x+2k) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$ voor alle $x \in [0,2[$ en $k \in \mathbb{Z}_0$.



Merk op dat de periodieke uitbreiding van f sprongen vertoont. De periodieke uitbreiding van f is *niet continu*.

CC BY-NC-SA 4.0

10.14.A Oefeningen periodieke functies

Oefening 10.14.1. Welke functies zijn periodisch?

1. periodisch | niet periodisch $x \mapsto 2\cos(x)$

2. periodisch | niet periodisch $x \mapsto x^2$

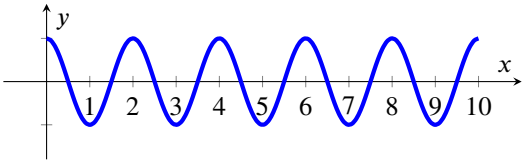
3. periodisch | niet periodisch $x \mapsto \cos(2x)$

4. periodisch | niet periodisch $x \mapsto \sin(4x)$

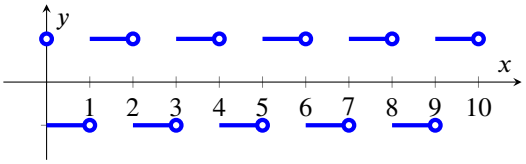
5. periodisch | niet periodisch $x \mapsto 4$

Oefening 10.14.2. Voor welk van de volgende functies geldt dat $f(x+2) = f(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}$? We veronderstellen hierbij dat de functies gedefinieerd zijn op heel $\mathbb{R}$.

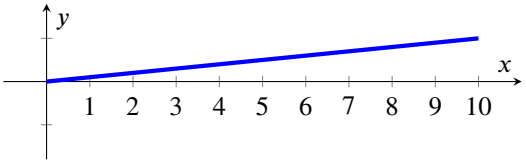
1. Juist | Fout



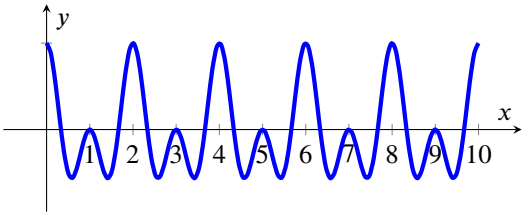
2. Juist | Fout



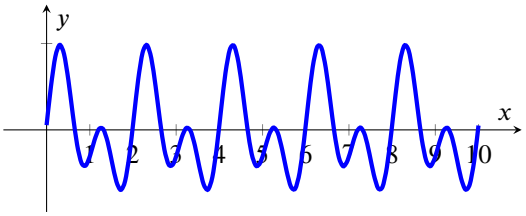
3. Juist | Fout



4. Juist | Fout



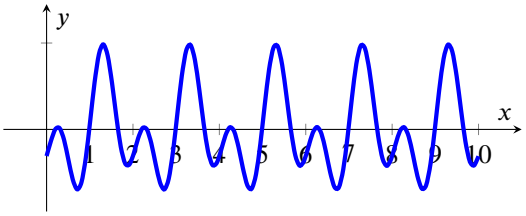
5. Juist | Fout



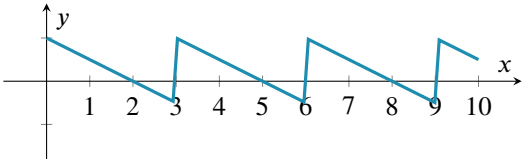
CC BY-NC-SA 4.0

10.14.A Oefeningen periodieke functies

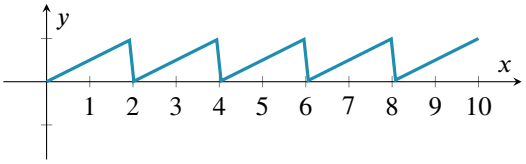
6. Juist | Fout



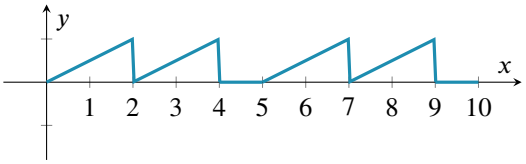
7. Juist | Fout



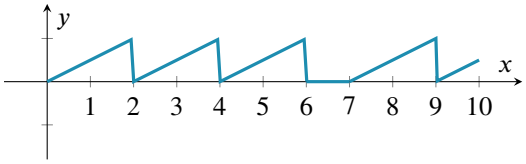
8. Juist | Fout



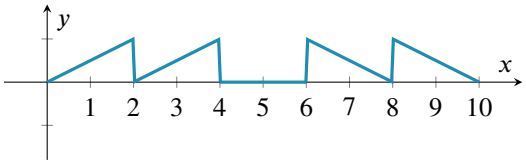
9. Juist | Fout



10. Juist | Fout



11. Juist | Fout



Oefening 10.14.3. Beschouw de functie $f : [-2,2[\to \mathbb{R} : x \mapsto 4 - x^2$. Teken de grafiek van de periodiek uitgebreide functie van deze f tot $\mathbb{R}$, en bereken volgende functiewaarden:

1. $f(0) = \ldots\ldots$

2. $f(2) = \ldots\ldots$

3. $f(6) = \ldots\ldots$

4. $f(10) = \ldots\ldots$

5. $f(12) = \ldots\ldots$

6. $f(120) = \ldots\ldots$

7. $f(2^{2020}) = \ldots\ldots$

8. $f(2^{2021}) = \ldots\ldots$

9. $f(2+2^{2020}) = \ldots\ldots$

10. $f(2\cdot(1+2^{1302})) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

10.15 Vectoren

partLineaire algebra

10.15 Vectoren

We gebruiken het begrip *vector* hier als een andere naam voor een *n-tal van reële getallen*. Dergelijke vectoren veralgemenen de koppels (x, y), en dus punten of vectoren in het vlak, en de drietallen (x, y, z) en dus punten of vectoren in de driedimensionale ruimte.

Definitie 10.15.1 (Vector als n-tal)**.**

Een **vector** $\mathbf{a}$ is een geordend n-tal reële getallen:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Men noemt n de **dimensie** van de vector $\mathbf{a}$.

De getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ zijn de **componenten** (of ook **coördinaten**) van de vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Voorbeeld 10.15.1.

$(1, 2)$	heeft 2 componenten	$(\sqrt{2}, 0, -1, \pi)$	heeft 4 componenten
$(1, -2, \frac{1}{2})$	heeft 3 componenten	$(1, 2, \dots, n)$	heeft n componenten

Opmerking 10.15.1.

- In andere contexten worden andere definities gegeven van vectoren: vectoren komen onder verschillende gedaantes voor in de meetkunde, in de fysica en in de lineaire algebra.
- Men noteert een vector $\mathbf{a}$ soms ook met een pijltje als $\vec{a}$ of gewoon als a. Uiteraard kunnen er ook andere letters gebruikt worden zoals $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ of $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.
- Vectoren zijn *gelijk* als ze *dezelfde componenten* hebben *in dezelfde volgorde*: $(0.5, 1) = (\frac{1}{2}, 1)$ en $(1, 2) \neq (2, 1)$.

De belangrijkste bewerkingen op vectoren zijn de *som* en het *scalair veelvoud*.

Definitie 10.15.2 (Rekenen met vectoren)**.**

Voor twee vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ en een getal $r \in \mathbb{R}$ definiëren we:

som	$\mathbf{a} + \mathbf{b}$	$=$	$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
scalair veelvoud	$r\mathbf{a}$	$=$	$r \cdot \mathbf{a} = r(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$
tegengestelde	$-\mathbf{a}$	$=$	$-(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$
verschil	$\mathbf{a} - \mathbf{b}$	$\overset{\text{def}}{=}$	$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$	$=$	$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$

Voorbeeld 10.15.2.

$$(1, 2) + (3, 4) = (1 + 3, 2 + 4) = (4, 6) \qquad (4, 3) - (2, 1) = (4 - 2, 3 - 1) = (2, 2) = 2 \cdot (1, 1)$$
$$-(1, 2, 3) = (-1, -2, -3) \qquad (1, -1.5, 3) + (2.2, -1, 0) = (3.2, -2.5, 3)$$
$$3 \cdot (1, 2) = (3, 6) \qquad 3 \cdot (1, -1, 0.5) = (3, -3, 1.5)$$

Oefening 10.15.1. Bereken

1. $(2, 1) + (1, -1) = \dots\dots$

CC BY-NC-SA 4.0

10.15 Vectoren

2. $2 \cdot (2,1) = \ldots\ldots$

3. $-(1,-1) = \ldots\ldots$

Opmerking 10.15.2.

- De som en het verschil van vectoren worden 'component per component' berekend. Bijgevolg zijn som en verschil enkel gedefinieerd voor vectoren *van hetzelfde formaat*: de som ~~$(1,2) + (3,4,5,6)$~~ is *niet gedefinieerd*.
- Net zoals voor de vermenigvuldiging van getallen schrijft men het punt voor de scalaire vermenigvuldiging soms wel en soms niet: $r \cdot \mathbf{a} = r\mathbf{a}$.

Vectoren komen in de praktijk erg dikwijls voor in zogenaamde *lineaire combinaties*:

Definitie 10.15.3 (Lineaire combinatie)**.**

Een **lineaire combinatie** van vectoren is *een som van (scalaire) veelvouden* van die vectoren.

Als $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ vectoren zijn van dezelfde dimensie en $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, dan is de vector

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \ldots + a_m\mathbf{v_m}$$

een *lineaire combinatie* van de vectoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$.
De getallen a_i heten de **coëfficiënten** of **gewichten** van de lineaire combinatie.

Voorbeeld 10.15.3 (Lineaire combinaties)**.**

1. $2(1,2) + 3(4,5)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

2. $(5,7)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

3. $(1,2)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

4. $(2,4)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

5. $(2,4,0)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$

6. $(2,4,1)$ is geen lineaire combinatie van de vectoren $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$

7. $3(1,2.5,-1,1) - 2(2,0,1,-1) + 2(1,-1,0.5,0) = (1,5.5,-4,5)$ is een lineaire combinatie van $(1,2.5,-1,1)$, $(2,0,1,-1)$ en $(1,-1,0.5,0)$

Definitie 10.15.4.

Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ is het reëel getal

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 10.15.4.

$$(1,2) \cdot (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11 \quad \text{en} \quad (3,-2,1) \cdot (2,2,-2) = 6 - 4 - 2 = 0.$$

We gebruiken de notatie $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ om aan te duiden dat de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ loodrecht staan op elkaar. In 2

CC BY-NC-SA 4.0

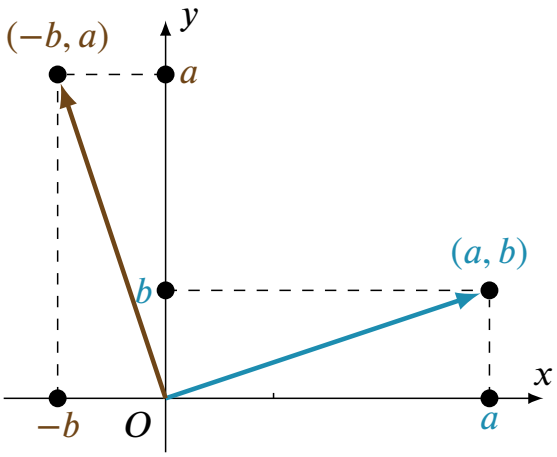
10.15 Vectoren

dimensies kan je gemakkelijk inzien dat

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b},$$

want een kwartdraai van het vlak in tegenwijzerzin brengt de positieve x-as naar de positieve y-as en de positieve y-as naar de negatieve x-as. Een punt (a, b) komt bij een kwartdraai dus terecht op het punt $(-b, a)$, en na een kwartdraai staat de vector $(-b, a)$ dus loodrecht op de oorspronkelijke vector (a, b):

$(a, b) \perp (-b, a)$ en $(a, b) \cdot (-b, a) = a(-b) + ba = 0.$



Ook in 3 dimensies kan men aantonen dat

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

Oefening 10.15.2.

1. $(2, 1) \cdot (1, -1) = \ldots\ldots$

2. $(1, 2, 3) \cdot (-2, 1, 0) = \ldots\ldots$

3. | Juist | Fout | $(1, 2, 3) \perp (-2, 1, 0)$?

CC BY-NC-SA 4.0

10.16 Matrices

Net zoals een vector een manier is om veel *getallen* bij te houden, is een *matrix* een manier om veel *vectoren* (van dezelfde dimensie) bij te houden. Een matrix is *een rechthoek van getallen*, met m rijen van telkens n getallen. Matrices zijn erg nuttig bij de studie van stelsels van lineaire vergelijkingen maar komen ook voor in andere contexten.

Voorbeeld 10.16.1. Examenresultaten voor verschillende vakken kan je bijhouden in een tabel:

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

Je kan dezelfde gegevens ook in volgende (punten)matrix $\mathbf{A}$ opschrijven

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}.$$

In deze voorstelling bevat elke rij de punten van een bepaalde leerling, en elke kolom de punten van een bepaald vak. We noemen deze matrix $\mathbf{A}$ een 5×4-matrix met 5 *rijen* en 4 *kolommen*. Het getal op rij 3 en kolom 2 zijn de punten van Chris voor Nederlands.

Definitie 10.16.1 (Matrix)**.**

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

- De **matrixelementen** (of soms ook *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{11}, \ldots a_{ij}, \ldots, a_{mn}$.
- Men noteert ook $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (dus met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij .
- De **diagonaal** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ bestaat uit de elementen a_{ii} die we de **diagonaalelementen** van de matrix noemen. Voor een vierkante matrix vormen ze inderdaad de diagonaal van de matrix. In volgende voorbeelden zijn de diagonaalelementen blauw gekleurd:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.16 Matrices

Voorbeeld 10.16.2.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is een 2×2 matrix met $a_{11} = 1, a_{21} = 3, a_{12} = 2$ en $a_{22} = 4$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 2×3 matrix en $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 3×2 matrix.
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ is een rijmatrix, en $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ is een kolommatrix.

Opmerking 10.16.1.

- In deze notatie $m \times n$ mag het 'product' $m \times n$ *niet* worden uitgerekend: een 2×3 matrix is niet hetzelfde als een 3×2 matrix of een 6×1 matrix.
- De eerste index i geeft het nummer van de *rij* aan, de tweede index j die van de *kolom*.
- In sommige cursussen gebruikt men ronde haakjes in plaats van rechte haakjes: $\mathbf{A} = (a_{ij})$.
- In het geval $n = m = 1$ wordt er bijna nooit onderscheid gemaakt tussen een 1×1 matrix $[a]$, een vector met 1 component (a) en een getal a.
- Strikt wiskundig zijn kolommatrices, rijmatrices en vectoren *verschillend*, dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \neq (1, 3, -2),$$

  maar als de betekenis voldoende duidelijk is uit de context worden ze toch door elkaar gebruikt.

Volgens bovenstaande definitie is een matrix een rechthoekig rooster van getallen, maar je kan dergelijk rooster ook bekijken als een aantal onder elkaar geplaatste rijen of als een aantal naast elkaar geplaatste kolommen:

Eigenschap 10.16.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n} \\ \hline a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n} \\ \hline \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ \hline a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn} \end{array}\right]$$

De lijnen hebben in deze schrijfwijze geen betekenis, ze dienen enkel om de kolommen of rijen aan te duiden.

Voorbeeld 10.16.3.

We kunnen de matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ beschouwen als

twee naast elkaar geplaatste kolomvectoren $\mathbf{k_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{k_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{k_1} & \mathbf{k_2} \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.16 Matrices

of als twee onder elkaar geplaatste rijvectoren $\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \end{bmatrix}$.

Enkele speciale types van vierkante matrices krijgen een eigen naam:

Definitie 10.16.2 (Speciale matrices)**.**

De **nulmatrix** $\mathbf{O}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen 0 zijn.
De **eenheidsmatrix** $\mathbf{I}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan de diagonaalelementen gelijk zijn aan 1 en alle andere elementen gelijk zijn aan 0.
Een **diagonaalmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen buiten de diagonaal 0 zijn.
Een **bovendriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *onder* de diagonaal 0 zijn.
Een **onderdriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *boven* de diagonaal 0 zijn.

Voorbeeld 10.16.4. Een eenheidsmatrix, een diagonaalmatrix en een bovendriehoeksmatrix:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.17 Rekenen met Matrices

We definiëren de optelling en de scalaire vermenigvuldiging van matrices op dezelfde manier als voor vectoren: element-per-element. Voor de optelling is het dus belangrijk dat beide matrices dezelfde afmetingen hebben: allebei evenveel rijen en evenveel kolommen.

Definitie 10.17.1 (Optelling en scalair veelvoud van reële matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$r\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{bmatrix}$$

met $r \in \mathbb{R}$.

Het verschil van matrices en de tegengestelde matrix worden gedefinieerd net zoals voor vectoren.

Voorbeeld 10.17.1 (Som, verschil, tegengestelde en scalair veelvoud van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 36 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 44 \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

maar de sommen $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 40 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 10 & 200 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ bestaan niet.

Het product van een matrix met een kolomvector:

Definitie 10.17.2 (Matrix-vector-product)**.**

Het product van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de $m \times 1$ kolomvector $\mathbf{Ab}$ gegeven door

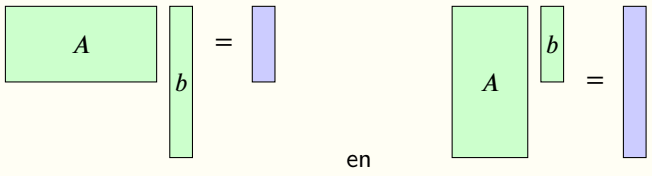
$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_k \end{bmatrix}.$$

Opmerking 10.17.1.

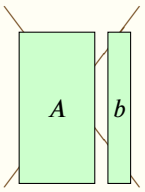
(a) Het product $\mathbf{Ab}$ is enkel gedefinieerd als het aantal *kolommen* van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal *rijen* van $\mathbf{b}$. Het resultaat is een *kolomvector* met evenveel rijen als $\mathbf{A}$. Visueel betekent dit:

CC BY-NC-SA 4.0

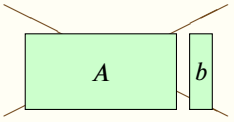
10.17 Rekenen met Matrices



maar volgende producten zijn onmogelijk:

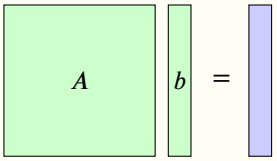


en



.

Enkel voor *vierkante* matrices heeft **Ab** dezelfde vorm als **b**:



(b) Zoals gebruikelijk bij producten schrijft men soms ook een punt: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{Ab}$. Bij matrices wordt de punt echter meestal weggelaten.

(c) Als $\mathbf{A}$ een rijvector is schrijven we dergelijke matrix soms ook met een kleine letter $\mathbf{a}$, dan is het product $\mathbf{ab}$ het reële getal gegeven door

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \quad \in \mathbb{R}.$$

en dit komt neer op het *scalair product* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

Voorbeeld 10.17.2.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 7 = 19$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\cdot 5 + 4\cdot 7 = 43.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 1\cdot 6 + 2\cdot 8 = 22$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 3\cdot 6 + 4\cdot 8 = 50.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}.$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix}.$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 6 + 3 + 8 \\ 6 + 12 + 5 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 35 \end{bmatrix}.$

CC BY-NC-SA 4.0

10.17 Rekenen met Matrices

Het product van twee matrices:

Definitie 10.17.3 (Matrix-matrix-product)**.**

Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]$ waarbij het element c_{ij} op de i-de rij en de j-de kolom gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Voorbeeld 10.17.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 4 & 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & 2\cdot 5 + 3\cdot 7 & 2\cdot 6 + 3\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 22 \\ 18 & 31 & 36 \end{bmatrix}.$$

Met sommatietekens kan je dit als volgt schrijven:

Eigenschap 10.17.1.

Het product van een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is een $m \times n$ matrix:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times n \text{ matrix)}$$

In het bijzonder is het product van een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met een $p \times 1$ kolommatrix $\mathbf{b}$ een $m \times 1$ kolommatrix:

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times 1 \text{ kolomvector)}$$

en het product van een $1 \times p$ rijmatrix $\mathbf{a}$ met een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ een $1 \times n$ rijmatrix:

$$\mathbf{aB} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{kn} \end{bmatrix} \quad \text{(een } 1 \times n \text{ rijvector)}$$

Voorbeeld 10.17.4.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} =$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.17 Rekenen met Matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{41} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42} \end{bmatrix}.$$

Opmerking 10.17.2.

- Optellen van twee matrices werkt enkel als ze dezelfde vorm hebben: evenveel rijen en evenveel kolommen. De vermenigvuldiging daarentegen werkt enkel voor $m \times p$ met $p \times n$ matrices, dus als het aantal *kolommen* van de eerste matrix gelijk is aan het aantal *rijen* van de tweede. Het product van een 5×3 matrix $\mathbf{A}$ en een 3×2 matrix $\mathbf{B}$ is de 5×2 matrix $\mathbf{AB}$. Maar een matrix $\mathbf{BA}$ *bestaat dan niet*. Het product $\mathbf{BA}$ is in dit geval *niet gedefinieerd*!
- Een 1×100 matrix maal een 100×1 matrix is een getal, maar een 100×1 matrix maal een 1×100 matrix is een 100×100 matrix.
- Net zoals bij reële getallen wordt $\mathbf{AA}$ genoteerd als $\mathbf{A}^2$. Merk op dat deze vermenigvuldiging enkel zin heeft als A een vierkante matrix is.

Voorbeeld 10.17.5. Berekening van een 1×2 matrix maal een 2×1 matrix en van een 2×1 matrix maal een 1×2 matrix.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$

Oefening 10.17.1.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

4. $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

Het optellen en vermenigvuldigen van matrices voldoet aan een aantal verwachte eigenschappen die het optellen en vermenigvuldigen van reële getallen veralgemenen:

Eigenschap 10.17.2 (Eigenschappen matrixbewerkingen)**.**

Zij a,b en c reële getallen, en $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ reële matrices. Dan gelden volgende eigenschappen zodra ze betekenis hebben (dat betekent: zodra de matrices het correcte formaat hebben om de optellingen en vermenigvuldigingen te kunnen uitvoeren):

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.17 Rekenen met Matrices

(b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

(c) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$

(d) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$

(e) $a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$

(f) $(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$

(g) $a(b\mathbf{A})=(ab)\mathbf{A}$

(h) $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$

(i) $0\mathbf{A}=\mathbf{O}$

(j) $\mathbf{O}\mathbf{A}=\mathbf{O}$

(k) $a\mathbf{O}=\mathbf{O}$

(l) $(-1)\mathbf{A}=-\mathbf{A}$

(m) $\mathbf{I}\mathbf{A}=\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}\mathbf{I}=\mathbf{A}$

(n) $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})=(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$

(o) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C}$

(p) $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{A}+\mathbf{C}\mathbf{A}$

Let wel op dat met matrices niet *alles* mag wat voor getallen geldt:

Voorbeeld 10.17.6. De volgorde van de vermenigvuldiging van matrices mag niet omgewisseld worden:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

maar

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 6\end{bmatrix}.$$

In het algemeen geldt dus dat **AB niet** gelijk is aan **BA**.

Voorbeeld 10.17.7. Voor sommige matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ geldt toch $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 10.17.8. Een product kan nul zijn zonder dat één van de factoren nul is:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\text{ en ook }\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Analoog aan het inverse of omgekeerde van getallen (a^{-1} is het unieke getal b zodat $ab=1$) definiëren we voor matrices:

CC BY-NC-SA 4.0

10.17 Rekenen met Matrices

Definitie 10.17.4 (Inverse matrix)**.** Twee matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn elkaars **inverse** als

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

Als voor een gegeven $\mathbf{A}$ dergelijke $\mathbf{B}$ bestaat dan is die uniek, en we noteren die als $\mathbf{A}^{-1}$. Er geldt dus

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Een belangrijk verschil met reële getallen is dat niet elke matrix een inverse heeft. We gaan hier niet in op het berekenen van een inverse matrix.

Definitie 10.17.5. We definiëren de macht $\mathbf{A}^k$ van een vierante matrix $\mathbf{A}$ als het matrixproduct $\underbrace{\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k}$.

Opmerking 10.17.3. Voorzichtigheid betreffende de rekenregels van matrices geldt ook voor machten.

- Zo is in de meeste gevallen:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$$

- Het is ook mogelijk dat $\mathbf{A}^k = 0$ voor een bepaalde k, maar $\mathbf{A}^i \neq 0$ voor alle $i < k$. Beschouw het voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \mathbf{0} \qquad \text{maar} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \neq \mathbf{0}$$

- Een ander merkwaardig voorbeeld is:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

  Bovenstaande berekening stelt dat $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Men mag hier echter niet gewoon 'een $\mathbf{A}$ schrappen' wat zou impliceren dat $\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Schrappen van factoren is wiskundig gezien eigenlijk vermenigvuldigen met het inverse element. Omdat de matrix $\mathbf{A}$ geen inverse heeft, kunnen we dus niet 'schrappen'.

- Een ander speciaal voorbeeld is:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{I}$$

  Het nemen van een kwadraat van reële getallen levert nooit een negatief getal op. Bij matrices is iets dergelijks dus wel mogelijk. Het kan opgemerkt worden dat bovenstaande matrix eigenlijk een representatie is van het complexe getal i.

CC BY-NC-SA 4.0

10.17.A Oefeningen matrices

Oefening 10.17.2. Voer de bewerkingen uit indien ze gedefinieerd zijn. Bepaal de afmetingen van alle matrices.

1. Bereken $A+B$ en $5A$ voor de matrices $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&5\\-2&3\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\2&1\end{bmatrix}$.

2. Bereken AB en BA voor de matrices $A=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}5&-1&2\\15&4&8\end{bmatrix}$.

3. Bereken AB en BA voor de matrices $A=\begin{bmatrix}-1&0\\-2&3\\5&4\\0&1\end{bmatrix}$ end $B=\begin{bmatrix}0&6&1&1\\3&8&-2&-2\end{bmatrix}$.

4. Bereken AB en BA voor de matrices $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}-1&5&2\\2&3&4\\9&-1&3\end{bmatrix}$.

5. Bereken $A(BC)$ en $(AB)C$ en bepaal de afmetingen van BC, AB, $A(BC)$ en $(AB)C$ voor de matrices

$$A=\begin{bmatrix}2&1&5\\1&3&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3&4\\-1&2\\2&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&3\\-1&1\end{bmatrix}$$

Oefening 10.17.3. Welke gelijkheden gelden voor alle 2×2-matrices A, B en C?

1. | Juist | Fout | $A+B=B+A$

2. | Juist | Fout | $(A+B)^2=A^2+2A\cdot B+B^2$

3. | Juist | Fout | $A(BC)=(AB)C$

4. | Juist | Fout | $I_2A=A$, met $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

Oefening 10.17.4. Als van de matrices $A=\begin{bmatrix}1&b\\1+a&1\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}1&b\\a&-1\end{bmatrix}$ geweten is dat $AB=BA$, wat kan dan je besluiten over de reële getallen a en b?

niets	$a=-1$ en $b=0$	a is willekeurig en $b=0$	$a=-1$ en b is willekeurig

CC BY-NC-SA 4.0

10.18 Stelsels: definitie

We bespreken hier het oplossen van *stelsels van lineaire vergelijkingen*. Dergelijke lineaire stelsels komen erg vaak voor bij allerlei problemen in de wiskunde, fysica, scheikunde, economie, ... Lineair betekent daarbij dat de onbekenden voorkomen *zonder machten* of meer ingewikkelde uitdrukkingen als wortels of sinussen. En stel of stelsel betekent dat de onbekenden aan *meerdere vergelijkingen tegelijk* moeten voldoen.

Voorbeeld 10.18.1.

1. Zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan in dit geval de gezochte getallen snel vinden door te *proberen*: de som moet 5 zijn, dus als we ons beperken tot natuurlijke getallen zijn de mogelijkheden $0+5$, $1+4$ of $2+3$. Enkel voor $2+3$ is het verschil 1, dus de oplossing is 2 en 3.
  In dit eenvoudige geval is het niet echt nuttig om onbekenden en stelsels op te schrijven. Maar zodra de voorwaarden wat ingewikkelder zijn, wordt *proberen* snel moeilijk en is *uitrekenen* meestal sneller.
- Als je toch een stelsel opschrijft, kan je in dit eenvoudige geval dat stelsel ook makkelijk oplossen. Als $x+y=5$ en $x-y=1$ dan is ook hun som gelijk: $(x+y)+(x-y)=5+1$. Deze laatste vergelijking reduceert zich echter tot $2x=6$ en dus $x=3$. Invullen dat $x=3$ in de eerste vergelijking $x+y=5$ levert $3+y=5$ of $y=2$.
  De methode voor het oplossen van stelsels is eigenlijk een veralgemening van dit eenvoudig trucje.
- Je kan dit stelsel ook opschrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\cdot x+1\cdot y=5 \\ 1\cdot x+(-1)\cdot y=1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Zoek twee getallen waarvan de som 3.1415 is en het verschil 1.2345.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=3.1415$ en het verschil $x-y=1.2345$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel.

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan de getallen x en y nu veel minder makkelijk vinden door *proberen*.
- Je kan in dit eenvoudige geval het stelsel toch makkelijk oplossen met dezelfde methode als hiervoor: als $x+y=3.1415$ en $x-y=1.2345$ dan moet natuurlijk ook $(x+y)+(x-y)=3.1415+1.2345=4.3760$. Deze vergelijking reduceert zich tot $2x=4.376$ en dus $x=2.188$. Invullen van $x=2.188$ in de eerste vergelijking geeft $2.188+y=3.1415$ of $y=3.1415-2.188=1.9535$.

- Je kan ook dit stelsel schrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1415 \\ 1.2345 \end{bmatrix}$$

3. Zoek drie getallen waarvan het grootste dubbel zo groot is als het kleinste, het middelste de helft is van de som van de twee anderen, en het gemiddelde 42 is.

CC BY-NC-SA 4.0

10.18 Stelsels: definitie

Uitwerking: Noem de gezochte getallen, geordend van groot naar klein, x, y en z. Dan weten we dat $x = 2z$, $y = \frac{x+z}{2}$ en $\frac{x+y+z}{3} = 42$, en zoeken we dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases}$$

We bestuderen verder een oplossingsmethode voor een stelsel als dit. We schrijven het alvast met matrices:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 126 \end{bmatrix}$$

Niet alle problemen leiden tot lineaire stelsels:

Voorbeeld 10.18.2 (Niet lineaire stelsels)**.**

1. Zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het *product* 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x + y = 5$ en het product $x \cdot y = 1$, en we zoeken getallen x en y die voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$$

Merk op dat dit *wel een stelsel* is, maar *geen lineair stelsel*, want er komt een *product* van de onbekenden in voor. De tweede vergelijking is *geen lineaire vergelijking*. Dat soort stelsels is in het algemeen *veel moeilijker* om op te lossen. Merk ook op dat je dit stelsel niet op dezelfde manier als hierboven kan schrijven met matrices.

Definitie 10.18.1 (Lineair stelsel)**.**

Een **lineair stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden** is een stel van m lineaire vergelijkingen met in totaal n onbekenden. Dergelijk lineair stelsel noteren we als

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

met S de naam van het stelsel, a_{ij} de **coëfficiënten**, $x_1, \ldots, x_n$ de **onbekenden** en b_i de **rechterleden** of **constante termen**.

De **coëfficiëntenmatrix** van het stelsel is de $m \times n$ matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De **uitgebreide matrix** van het stelsel is de $m \times (n+1)$ matrix met de constante termen toegevoegd:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.18 Stelsels: definitie

Een lineair stelsel is **homogeen** als alle constante termen nul zijn, dus alle $b_i = 0$.

De belangrijkste uitdaging bij dergelijke stelsels is om de letters x_i te vervangen door geschikte reële getallen zodat alle gelijkheden opgaan. We noemen dat het *oplossen van het stelsel* en de gevonden reële getallen zijn dan *oplossingen van het stelsel*.

Opmerking 10.18.1.

- De term *rechterlid* is gebruikelijk in de wiskunde, maar is eigenlijk verwarrend of zelfs misleidend: een vergelijking $x+y=2$ kan natuurlijk ook geschreven worden als $x+y-2=0$, maar $x+y-2=0$ is *geen* homogene vergelijking, en volgens bovenstaande definitie is het 'rechterlid' gelijk aan 2. Het begrip 'rechterlid' slaat dus op vergelijkingen in standaardvorm: alle onbekenden in het linkerlid en de constante term rechts.
- Om verwarring te voorkomen is het belangrijk steeds de verticale lijn van de uitgebreide matrix te noteren.

Voorbeeld 10.18.3. Het stelsel

$$S_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{cases}$$

is een lineair stelsel met twee vergelijkingen in drie onbekenden x_1, x_2, x_3.
Het stelsel

$$S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

is een homogeen lineair stelsel met twee vergelijkingen in drie onbekenden x_1, x_2, x_3.

Eigenschap 10.18.1 (Matrixvorm van een lineair stelsel)**.**

Elk lineair stelsel

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kan in **matrixvorm** worden geschreven als $\mathbf{Ax = b}$

$$S : \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

waarbij

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 10.18.4. Het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.18 Stelsels: definitie

heeft als coëfficiëntenmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

en als uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

We kunnen het stelsel dus schrijven als

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 10.18.5. Bepaal alle reële getallen s, t, u, v, w waarvoor

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$$

Dit is een *lineair stelsel van drie vergelijkingen in vijf onbekenden*.

- Dit is de wiskundige weergave van een probleem waarbij we weten dat er tussen de vijf onbekende grootheden s, t, u, v, w drie lineaire verbanden bestaan. De uitdaging is *alle waarden* te vinden voor de onbekende grootheden die aan *alle* (lineaire) verbanden voldoen.
- Met matrices en vectoren kunnen we het stelsel eenvoudiger schrijven: de vijf onbekenden (s, t, u, v, w) worden een 5×1 kolomvector $\mathbf{x}$, de coëfficiënten van de vergelijkingen vormen de 3×5 *coëfficiëntenmatrix* $\mathbf{A}$ en de rechterleden zetten we in een 3×1 kolomvector $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel kan nu geschreven worden als $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ of

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De uitgebreide matrix, die dus alle gegevens van het stelsel bevat, is

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

Oefening 10.18.1. Welke van de volgende stelsels zijn lineair in de onbekenden u en v? Schrijf de lineaire stelsels ook in matrixvorm.

1. | Lineair | Niet lineair | $\begin{cases} 2u + v & = 5 \\ 4u + 2v & = 1 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.18 Stelsels: definitie

2. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} 2u + v &= 5 \\ 4u + 2v &= u \end{cases}$$

3. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} 2u &= 5 \\ 2v &= 1 \end{cases}$$

4. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} (u+2)u - u^2 &= 5 \\ 4u + 2v &= 1 \end{cases}$$

5. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} \sin(u) + \cos(v) &= 1 \\ \sin(u) - 2\cos(v) &= 1/2 \end{cases}$$

6. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} u^2 + v &= 1 \\ -u^2 - 2v &= 2 \end{cases}$$

7. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} au + 2v &= 5 \\ 4u + bv &= 1 \end{cases} \quad (\text{met } a, b \in \mathbb{R})$$

8. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} x^3 u + \cos(y)v &= 5 \\ 4u + x^3 v &= 1 \end{cases} \quad (\text{met } x, y \in \mathbb{R})$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.19 Stelsels: oplossingen

Een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *oplossen* betekent *alle* n-tallen reële getallen $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ vinden die we voor de letters $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ kunnen invullen zodat $\mathbf{Ap} = \mathbf{b}$. Formeel wordt dit:

Definitie 10.19.1 (Oplossingen van stelsels en gelijkwaardige stelsels)**.**

Een **oplossing** van een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden $S : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ is een vector $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ die voldoet aan alle vergelijkingen, dus zodat

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{b} \quad \text{of} \quad \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n & = b_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \cdots + a_{mn}p_n & = b_m \end{cases}$$

De **oplossingsverzameling** $\mathrm{Opl}(S)$ van een lineair stelsel S is de verzameling van *alle oplossingen*.

Twee stelsels S_1 en S_2 zijn **gelijkwaardig** als ze *dezelfde* oplossingsverzameling hebben, dus als

$$\mathrm{Opl}(S_1) = \mathrm{Opl}(S_2)$$

Een stelsel dat *geen* oplossingen heeft, dus met $\mathrm{Opl}(S) = \emptyset$, noemen we **strijdig** of **ontaard**.

Opmerking 10.19.1. Ook een *vergelijking* die geen oplossingen heeft noemen we **strijdig** of **ontaard**. Een typische *ontaarde vergelijking* is $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$ of dus $0 = 1$.

We geven eerst enkele eenvoudige voorbeelden van het oplossen van stelsels:

Voorbeeld 10.19.1. Los volgende stelsels op:

1. $S_1 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Door de twee vergelijkingen bij elkaar op te tellen, vinden we dat $(x + y) + (x - y) = 5 + 1$ moet zijn, en dus $2x = 6$, of $x = 3$. Door $x = 3$ in te vullen in één van de twee oorspronkelijke vergelijkingen vinden we dan dat $3 + y = 5$, en dus $y = 2$.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_1) = \{(3, 2)\}$, of $x = 3$ en $y = 2$ is de enige oplossing van het stelsel S_1

2. $S_2 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x + y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Het is onmiddellijk duidelijk dat het onmogelijk is dat $x + y$ zowel gelijk is aan 1 als aan 5. Er zijn dus *geen oplossingen*.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_2) = \emptyset$

3. $S_3 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 12 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet ook aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$), en is dus een oplossing van het hele stelsel.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_3) = \{(3, 2)\}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.19 Stelsels: oplossingen

4. $S_4 = \begin{cases} x+y & = 5 \\ x-y & = 1 \\ 2x+3y & = 13 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x,y) = (3,2)$. En $(3,2)$ voldoet niet aan de derde vergelijking (want $2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 12 \neq 13$), en er kan dus geen oplossing bestaan voor het hele stelsel.

Resultaat: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$

5. $S_5 = \begin{cases} x+y & = 5 \\ 2x+2y & = 10 \end{cases}$

Uitwerking: De tweede vergelijking is eigenlijk dezelfde als de eerste, want als $x+y=5$, dan is automatisch ook $2x+2y = 2(x+y) = 2\cdot 5 = 10$. Dus zodra $y = 5-x$ (of ook: zodra $x = 5-y$), hebben we een oplossing. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 5-x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(5-y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn natuurlijk twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels. Voorbeelden van oplossingen zijn dus de koppels $(0,5), (1,4), (2,3), (5,0), (\pi, 5-\pi), (\pi+5, -\pi), (5-\pi, \pi), \ldots$

Resultaat: $\text{Opl}(S_5) = \{(t, 5-t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(5-s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -x+5$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel S_5 is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -x+5$.

6. $S_6 = \{\ 2x+y = 6$ (een 'stelsel' met één vergelijking)

Uitwerking: Er is maar één vergelijking, en die zegt dat $x = 3 - \frac{1}{2}y$, of ook dat $y = 6-2x$. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 6-2x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(3-\frac{1}{2}y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels.

Resultaat: $\text{Opl}(S_6) = \{(t, 6-2t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(3-\frac{1}{2}s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -2x+6$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel $\{2x+y=6$ is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -2x+6$.

Een algemene strategie om lineaire stelsels op te lossen is:

Bereken een *gelijkwaardig* stelsel waarvoor de oplossingsverzameling direct af te lezen is.

Bij stelsels waarvan de coëfficiëntenmatrix een diagonaalmatrix is kunnen we de oplossingen gewoon aflezen:

Voorbeeld 10.19.2.

Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in matrixvorm:

1. $S_1 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_1) = \{\ (2,4,6)\ \}$ via gewoon aflezen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.19 Stelsels: oplossingen

2. $S_2 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_2) = \{\ (2,2,1)\ \}$ via aflezen met een kleine berekening: $4/2 = 2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $S_3 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_3) = \{\ (2,2,0)\ \}$ via gewoon aflezen, waarbij we $z = 0$ krijgen, maar dat is niets speciaal.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $S_4 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$ via gewoon aflezen, want de laatste vergelijking is duidelijk strijdig: voor geen enkel getal z kan $0z = 1$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $S_5 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_5) = \{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$, waarbij de laatste vergelijking $0z = 0$ voor alle getallen z voldaan is . Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die we naar keuze kunnen schrijven als $\{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,z) \mid z \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\ \} = \ldots$

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_5) = \{\ (2,4,0) + t(0,0,1) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$, want $(2,4,0) + t(0,0,1) = (2,4,t)$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. $S_6 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\ \}$. Enkel de eerste vergelijking is een echte vergelijking. Als $x = 2$, mogen y en z willekeurig zijn. Er zijn dus 'twee keer oneindig' veel oplossingen omdat er twee parameters nodig zijn om *alle* oplossingen te bekomen.

CC BY-NC-SA 4.0

10.19 Stelsels: oplossingen

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,0,0) + s(0,1,0) + t(0,0,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \}$

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$

7. $S_7 = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,t,3) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,0,3) + t(0,1,0) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\6\end{bmatrix}$

Stelsels waarvan de coëfficiëntenmatrix een bovendriehoeksmatrix is kunnen we oplossen met achterwaartse substitutie:

Voorbeeld 10.19.3 (Achterwaartse substitutie)**.** Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in matrixvorm:

1. $S_{21} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y+ & 1z & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{21}) = \{\ (2,-2,6)\ \}$

We beginnen met de laatste vergelijking: $z = 6$. We vullen die waarde voor z in in de tweede vergelijking, en bekomen $y+6 = 4$, dus $y = -2$. De eerste vergelijking zegt dat $x = 2$. Dus, de oplossing is $(x,y,z) = (2,-2,6)$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$

2. $S_{22} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 2 \\ & +y & +z & = & 4 \\ & & +z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{22}) = \{\ (-2,-2,6)\ \}$

Opnieuw van beneden naar boven invullen (achterwaarts, vandaar *achterwaartse substitutie*). $z = 6$, dus $y+6 = 4$ en dus $y = -2$. Tenslotte is $x + (-2) + 6 = 2$, of $x = -2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$

3. $S_{23} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & +5y & +3z & = & 4 \\ & & +2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{23}) = \{\ (1/6,-1,3)\ \}$

Opnieuw aan de hand van achterwaartse substitutie eerst z, vervolgens y en dan x berekenen.

CC BY-NC-SA 4.0

10.19 Stelsels: oplossingen

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.20 Stelsels: oplossen via echelonvorm

De *eliminatiemethode van Gauss* is een algemene methode om *elk lineair stelsel* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ op te lossen. Het toepassen van geschikte zogenaamde *elementaire rijoperaties* op de vergelijkingen van het stelsel (in de praktijk op de uitgebreide matrix van het stelsel) leidt tot een gelijkwaardig maar eenvoudiger stelsel in trapvorm (de zogenaamde *echelonvorm*). Een andere naam voor de methode is 'rijherleiden', en een variant is gekend onder de naam 'spilmethode'.

10.20.1 Elementaire rijoperaties

Volgende drie operaties op vergelijkingen van stelsels *veranderen de oplossingsverzameling van het stelsel niet*:

(a) ***Herschaling* van een vergelijking:** een vergelijking vermenigvuldigen met een reëel getal verschillend van nul.
Een voorbeeld maakt meteen duidelijk waarom dit de oplossingsverzameling niet verandert: de vergelijking $x-2y=5$ heeft immers precies dezelfde oplossingen (x,y) als de vergelijkingen $3x-6y=15$ en $-2x+4y=-10$. Pas wel op: vermenigvuldigen *met nul* mag natuurlijk niet, want dat zou de vergelijking doen verdwijnen en de oplossingsverzameling dus erg vergroten.

(b) **Twee vergelijkingen van plaats *verwisselen*:**
Het is duidelijk dat de volgorde van de vergelijkingen geen invloed heeft op de oplossingen.

(c) **Bij een vergelijking een veelvoud van een andere vergelijking *optellen*:**

We tonen eerst aan waarom een veelvoud van een andere vergelijking optellen geen oplossingen kan doen verdwijnen. Daarna tonen we aan dat er dan ook geen oplossingen kunnen bijkomen.

(i) Als (x_0, y_0) een oplossing is van $\begin{cases} x-2y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$
en we tellen bij de eerste vergelijking bijvoorbeeld twee keer de tweede op:

$$(x-2y)+2(x+y)=5+2\cdot 1 \text{ of dus } 3x+0y=7$$

dan is (x_0, y_0) ook een oplossing van $\begin{cases} 3x+0y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$
Dus elke oplossing van het oorspronkelijke stelsel is ook oplossing van het nieuwe stelsel.

(ii) Maar is ook elke oplossing van het nieuwe stelsel een oplossing van het oorspronkelijke stelsel?
Ja, want de weg terug heeft volledig dezelfde structuur: als we van de nieuwe eerste rij de tweede rij (die ongewijzigd gebleven is) twee keer aftrekken bekomen we terug het oorspronkelijke stelsel.
De redenering van hierboven toont dus dat alle oplossingen behouden blijven.

Deze *operaties op vergelijkingen* van een stelsel komen overeen met zogenaamde *elementaire rijoperaties op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix* van het stelsel:

Definitie 10.20.1. Volgende operaties op de rijen van matrices noemen we **elementaire rijoperaties**:

Herschaling	Vermenigvuldigen een rij met een getal verschillend van nul	$R_i \to aR_i, a \neq 0$
Verwisseling	Verwissel twee rijen van plaats	$R_i \leftrightarrow R_j$
Combinatie	Tel bij een rij een veelvoud van een andere rij op	$R_i \to R_i + aR_j$

Uit bovenstaande uitleg blijkt dus volgende eigenschap:

CC BY-NC-SA 4.0

10.20 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Eigenschap 10.20.1. Het toepassen van elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix van een stelsel verandert de oplossingsverzameling van het stelsel niet.

Enkele voorbeelden van het toepassen van elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix van een stelsel. Let hierbij op de gebruike notatie: teken een pijl naar rechts naar de nieuwe matrix, en schrijf boven die pijl de rijoperatie die je toepast:

Voorbeeld 10.20.1 (Herschaling)**.**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1/2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Voorbeeld 10.20.2 (Verwisseling)**.**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Voorbeeld 10.20.3 (Combinatie)**.**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

Opmerking 10.20.1.

- Om een nul in te voeren in onderstaande matrix in de derde kolom op de derde rij kan je volgende elementaire rijoperaties uitvoeren:

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 5R_3} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 65 & 130 & -130 & 65 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 13R_2} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Je kan deze twee operaties ook in één stap doen, om schrijfwerk te besparen:

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 5R_3 - 13R_2} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Algemeen: Door een herschaling en een combinatie na elkaar uit te voeren kan je een rij ook vervangen door een niet-nul veelvoud van die rij waarbij een veelvoud van een andere rij wordt opgeteld: $R_i \to aR_i + bR_j, a \neq 0$. Men noemt deze operatie soms ook een (niet-elementaire) rijoperatie.

- Je kan ook twee combinaties in één stap uitvoeren, behalve wanneer je eerst een rij gewijzigd

CC BY-NC-SA 4.0

10.20 Stelsels: oplossen via echelonvorm

hebt en daarna terug de oude rij gebruikt.

$$\text{Juist: } \begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_3\to R_3-R_1} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&2\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{Fout: } \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_1\to R_1-R_2} \begin{bmatrix}0&-1\\0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} : \textit{fout!}$$

10.20.2 Eliminatiemethode van Gauss

Het doel van de eliminatiemethode van Gauss is om een stelsel om te vormen tot een eenvoudiger gelijkwaardig stelsel door het gericht toepassen van elementaire rijoperaties. Omdat rijoperaties de oplossingsverzameling niet veranderen, kunnen we proberen om het stelsel te vereenvoudigen tot een vorm waarop die oplossingsverzameling direct kan worden afgelezen. We bekijken eerst enkele voorbeelden die we daarna veralgemenen.

Voorbeeld 10.20.4. Het stelsel

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 1 \\ u - 2v = -1 \end{cases}$$

heeft als uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{cc|c}1&1&5\\1&-1&1\\1&-2&-1\end{array}\right]$.

We vereenvoudigen nu de matrix, en dus het stelsel, door rijoperaties toe te passen. In een eerste stap zorgen we dat er nullen staan in de **eerste** kolom in rij 2 en rij 3. Hiervoor trekken we eerst van de tweede rij de eerste rij af:

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left[\begin{array}{cc|c}1&1&5\\0&-2&-4\\1&-2&-1\end{array}\right]$$

en vervolgens trekken we van de derde rij de eerste rij af

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \left[\begin{array}{cc|c}1&1&5\\0&-2&-4\\0&-3&-6\end{array}\right].$$

In de volgende stap plaatsen we een nul in de **tweede** kolom, in rij 3. Hiervoor delen we eerst de tweede rij door -2 en de derde rij door -3:

$$\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_3/-3]{R_2\to R_2/-2} \left[\begin{array}{cc|c}1&1&5\\0&1&2\\0&1&2\end{array}\right]$$

en trekken vervolgens van de derde rij de tweede rij af

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left[\begin{array}{cc|c}1&1&5\\0&1&2\\0&0&0\end{array}\right].$$

Nu kunnen we kiezen:

- ofwel plaatsen we door het toepassen van elementaire rijoperaties nog een nul in de tweede

CC BY-NC-SA 4.0

10.20 Stelsels: oplossen via echelonvorm

kolom in rij 1

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

en bekomen we het gelijkwaardige maar eenvoudigere stelsel

$$\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$$

Er is dus een unieke oplossing die onmiddellijk kan worden afgelezen: $(u, v) = (3, 2)$.

- ofwel noteren we meteen het gelijkwaardige stelsel

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ v = 2 \end{cases}$$

en lossen het verder op met achterwaartse substitutie

$$\begin{cases} u = 5 - v \\ v = 2 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$$

We vinden in beide gevallen

$$\mathrm{Opl}(S) = \{\ (3, 2)\ \}$$

Voorbeeld 10.20.5. Beschouw het stelsel S : $\begin{cases} -3s + 6t - u + v - 7w = 5 \\ s - 2t + 2u + 3v - w = 0 \\ 2s - 4t + 5u + 8v - 4w = 1 \end{cases}$

met als uitgebreide matrix

$$\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ \mathbf{b}\ \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

We vereenvoudigen de matrix, en dus het stelsel, door rijoperaties toe te passen. In een eerste stap zorgen we dat er nullen staan in de **eerste** kolom in rij 2 en rij 3:

De tweede rij met drie vermenigvuldigen (een herschaling) geeft

$$\xrightarrow{R_2 \to 3R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 3 & -6 & 6 & 9 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

en dan levert bij de tweede rij de eerste rij optellen een nul in de eerste kolom op de tweede rij:

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Deze twee elementaire operaties samen kunnen beschouwd worden als één (niet elementaire) operatie: vervang rij 2 door 3 maal zichzelf plus rij 1.

Op dezelfde manier levert rij 3 vervangen door 3 maal zichzelf plus 2 maal rij 1:

$$\xrightarrow{R_3 \to 3R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{array}\right]$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.20 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Door in deze eerste stap door middel van rijoperaties nullen te plaatsen in de eerste kolom in rij 2 en rij 3, zijn in dit voorbeeld ook meteen nullen terecht gekomen in de **tweede** kolom.

In de volgende stap plaatsen we een nul in de **derde** kolom in rij 3.

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_3/13]{R_2 \to R_2/5} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu kunnen we kiezen:

- ofwel plaatsen we door het toepassen van elementaire rijoperaties nog een nul in de derde kolom in rij 1

  $$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  en bekomen we het gelijkwaardige maar eenvoudigere stelsel

  $$\left\{\begin{array}{rrrrrl} -3s & +6t & +0u & +3v & -9w & = 6 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{array}\right.$$

  Voor willekeurige waarden voor t, v en w vinden we de bijhorende u en s als

  $$\left\{\begin{array}{rcl} s & = & -2 + 2t + v - 3w \\ u & = & 1 - 2v + 2w \end{array}\right.$$

- ofwel noteren we meteen het gelijkwaardige stelsel

  $$\left\{\begin{array}{rrrrrl} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{array}\right.$$

  en lossen het verder op met achterwaartse substitutie

  $$\left\{\begin{array}{rcl} -3s & = & 5 - 6t + u - v + 7w = 5 - 6t + 1 - 2v + 2w - v + 7w \\ u & = & 1 - 2v + 2w \end{array}\right.$$

  Voor willekeurige waarden voor t, v en w vinden we de bijhorende u en s als

  $$\left\{\begin{array}{rcl} -3s & = & 6 - 6t - 3v + 9w \\ u & = & 1 - 2v + 2w \end{array}\right. \quad \text{of} \quad \left\{\begin{array}{rcl} s & = & -2 + 2t + v - 3w \\ u & = & 1 - 2v + 2w \end{array}\right.$$

We vinden in beide gevallen

$$\text{Opl}(S) = \{\ (-2 + 2t + v - 3w, t, 1 - 2v + 2w, v, w) \mid t, v, w \in \mathbb{R}\}$$

We bestuderen de methode die toegepast werd in bovenstaande voorbeelden nu wat formeler. De meest eenvoudige vorm waarin *elk stelsel* kan worden gebracht is de zogenaamde *rijcanonieke* of *gereduceerde rijechelonvorm*:

CC BY-NC-SA 4.0

10.20 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Definitie 10.20.2. Een matrix is in **rijcanonieke vorm** of **gereduceerde rijechelonvorm** als:

(a) het eerste niet-nul element in een rij is steeds 1. Dergelijk element noemt een **spil** (Engels: pivot).

(b) boven en onder elke spil staan enkel nullen.

(c) voor elke spil geldt dat de spil van een *lagere* rij steeds verder naar *rechts* staat.

(d) nulrijen staan onderaan staan (als er zijn).

Opmerking 10.20.2.

- Elke matrix kan je met behulp van elementaire rijoperaties in rijcanonieke vorm brengen.
- In de verdere voorbeelden zullen we de spilelementen *omcirkelen*.
- De derde regel leidt tot de kenmerkende (dalende) *trap*- of echelonvorm met de spilelementen.
- Er bestaat ook een meer algemene, dus niet noodzakelijk *gereduceerde rijechelonvorm*: dan vervalt de voorwaarde dat *boven* de spil nullen moeten staan en dat de spillen 1 moeten zijn. Zowel met de gereduceerde als met de niet-gereduceerde echelonvorm kunnen stelsels worden opgelost, zoals getoond in bovenstaande voorbeelden. Bij de niet-gereduceerde echelonvorm gebruik je achterwaartse substitutie om de oplossingen te vinden, bij de gereduceerde echelonvorm zijn de oplossingen direct af te lezen.

In onderstaande voorbeelden stelt een $*$ een willekeurig getal voor, al dan niet 0.

Voorbeeld 10.20.6. Voorbeelden van matrices in rijcanonieke vorm of gereduceerde rijechelonvorm :

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 10.20.7. Voorbeelden van matrices in rijechelonvorm maar niet in gereduceerde rijechelonvorm:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 7 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.20 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Voorbeeld 10.20.8. Voorbeelden van matrices NIET in rijechelonvorm:

$$\begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 1 & \textcircled{1} & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Oefening 10.20.1. Staan volgende matrices in rijcanonieke vorm (of ook: gereduceerde echelonvorm) ?

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

5. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

6. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

Opmerking 10.20.3. In Voorbeeld 24.7.1 werden in de *eerste kolom* alle elementen nul gemaakt behalve het element links boven (dat zelf verschillend was van nul) door de andere rijen te herschalen en een gepast veelvoud van de eerste rij daarvan af te trekken. Dit noemen we het *schoonvegen van een kolom*.

De **eliminatiemethode van Gauss** veegt achtereenvolgens verschillende kolommen van de matrix $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ schoon. Hiervoor gebruiken we in elke stap een van nul verschillend zogenaamd *spilelement*, dat telkens dezelfde rol speelt als het element links boven in voorbeeld 24.7.1.

Voorbeeld 10.20.9 (spilelement)**.** Hoe vind je een spilelement? Een spil wordt eerst en vooral steeds gezocht in de deelmatrix *onder en rechts* van de vorige spil. Bij het zoeken van de eerste spil is deze deelmatrix de gehele matrix. Als we verder werken op voorbeeld 24.7.1, bekijken we dus de volgende matrix die we bekomen hadden maar dan zonder de eerste rij en de eerste kolom, als volgt:

uit $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$ halen we de deelmatrix $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$

In deze deelmatrix zoeken we *de eerste kolom die niet volledig uit nullen bestaat*. In het voorbeeld is dat de tweede kolom van de 2×5 deelmatrix. We kiezen het bovenste niet-nul element, 5, als spil en vegen daarmee de hele derde kolom van de totale matrix schoon, zowel boven als onder de spil. Hiertoe combineren we zowel de eerste als de derde rij met de tweede om boven en onder de 5 een nul te bekomen als volgt.

We nemen terug de volledige matrix (en niet de deelmatrix, die enkel diende om de nieuwe spil te bepalen):

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.20 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Door bij elke rij een geschikt veelvoud op te tellen van de **spilrij** (rij 2), kunnen we de **spilkolom** (kolom 3) 'schoonvegen'. We kunnen, zoals in Voorbeeld 24.7.1, eerste rij 2 delen door 5 en rij 3 door 13, of we gaan als volgt te werk:
Rij 1 vervangen door vijf maal zichzelf plus rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Rij 3 vervangen door 5 maal zichzelf min 13 maal rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Merk op dat bij het schoonvegen van de derde kolom de nullen die we al bekomen hadden in de eerste twee kolommen niet gewijzigd zijn.

Via een herschaling van rij 1 en rij 2 zorgen we tenslotte nog dat het eerste element van de niet-nulrijen een 1 is: Dit levert

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze matrix is in rijcanonieke vorm.

Merk op dat in de bovenstaande afleiding geen rijverwisselingen voorkwamen, enkel herschalingen en optellingen. Veronderstel echter dat we volgende deelmatrix hadden gevonden:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Dan is de tweede kolom van de deelmatrix nog steeds de eerste niet-nulkolom. Maar het eerste niet-nulelement, 13, staat dan niet bovenaan. In zo'n geval moet de rij van de nieuwe spil door een verwisseling net onder de rij van de vorige spil gebracht worden om tot een echte trapvorm te komen. Dus zouden we in dit voorbeeld rij 2 met rij 3 moeten verwisselen.

Bij een uitgebreide matrix in *rijcanonieke vorm* kan je de oplossing van een stelsel direct *aflezen*:

Eigenschap 10.20.2 (Oplossingen van een stelsel in rijcanonieke vorm)**.**

Voor een stelsel S met uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$ *in rijcanonieke vorm* geldt:

- De **spilkolommen** zijn de kolommen die een spil bevatten .
- De **hoofdonbekenden** of **gebonden onbekenden** zijn de onbekenden die horen bij een spilkolom, de andere onbekenden zijn de **nevenonbekenden** of **vrije onbekenden**.
- Het *aantal* oplossingen van het stelsel hangt af van de *plaats* van de spilelementen:
  - *de laatste kolom* (= het rechterlid) bevat een spil: er is **geen oplossing**.
    Inderdaad, het stelsel is *strijdig*, want
    een rij $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$ komt overeen met de strijdige vergelijking $0x_0 + \dots 0x_n = 1$.
  - *elke kolom behalve de laatste* bevat een spil: er is een **unieke oplossing**.

CC BY-NC-SA 4.0

10.20 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met $b_i \in \mathbb{R}$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

en de overeenkomstige vergelijkingen geven dus direct de unieke oplossing: $x_i = b_i$.

– in alle andere gevallen: er zijn **oneindig veel oplossingen**.
Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met de b_i en * willekeurige getallen)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & * & 0 & * & 0 & * & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Bij elke willekeurige keuze van de *vrije* onbekenden, hoort dan precies één set waarden voor de gebonden onbekenden die een oplossing opleveren voor het stelsel. Het aantal vrije onbekenden noemt men ook het **aantal vrijheidsgraden** of de **dimensie** van de oplossingsverzameling.

Opmerking 10.20.4. Als een *homogeen* stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ een unieke oplossing oplossing heeft, dan is dit altijd de nulvector $\mathbf{x} = 0$. Dus, voor een *homogeen* stelsel is een unieke oplossing meestal geen interessante oplossing.

Voorbeeld 10.20.10. [Vervolg van Voorbeeld 24.7.3]

In het vorige voorbeeld berekenden we voor het stelsel S : $\left\{\begin{array}{rrrrrl} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{array}\right.$

de rijcanonieke vorm

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Voor dit stelsel zijn de *eerste* en de *derde* kolom de *spilkolommen*: s en u zijn dus gebonden onbekenden, en t, v en w vrije onbekenden.

Bij elke willekeurige keuze van vrije onbekenden t, v, w vinden we precies één set van waarden voor de gebonden onbekenden s en u. Als we t, v, w *vrij* kiezen als

$$t = a, \quad v = b, \quad w = c,$$

met a, b, en c willekeurige reële getallen, dan ligt de waarde van de gebonden onbekenden vast om een oplossing te hebben voor het stelsel: de *gebonden variabelen* hebben dus een waarde die *gebonden* is aan de vrije keuzes voor de waarden van de vrije variabelen. De gebonden variabelen zullen dus uitdrukkingen worden in de *parameters* a, b en c. Elk van de vergelijkingen in de rijcanonieke vorm

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} s & -2t & & -v & +3w & = -2 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{array}\right.$$

bevat immers precies één van de gebonden onbekenden, die we daar telkens uit kunnen 'berekenen in functie van de vrije onbekenden':

$$\left\{\begin{array}{rcrrrr} s & = & -2 & +2a & +b & -3c \\ u & = & 1 & & -2b & +2c \end{array}\right.$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.20 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Samen levert dat de volledige oplossing

$$(s,t,u,v,w) = (-2+2a+b-3c, a, 1-2b+2c, b, c)$$

of

$$(s,t,u,v,w) = (-2,0,1,0,0) + a(2,1,0,0,0) + b(1,0,-2,1,0) + c(-3,0,2,0,1)$$

met a, b en c willekeurige reële getallen. De oplossingsverzameling is dus

$$\text{Opl}(S) = \{(-2+2a+b-3c, a, 1-2b+2c, b, c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} .$$

Opmerking 10.20.5. Het is niet strikt nodig om te schrijven dat $t = a, v = b, w = c$ voor willekeurige $a,b,c \in \mathbb{R}$. Je kan dan even goed zeggen dat $t,v,w \in \mathbb{R}$ willekeurig zijn. Je kan de oplossingsverzameling dus ook schrijven als

$$\text{Opl}(S) = \{(-2+2t+v-3w, t, 1-2v+2w, v, w) \mid t,v,w \in \mathbb{R}\} .$$

Voorbeeld 10.20.11. De uitgebreide matrix van het homogene stelsel

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 0 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 0 \end{cases}$$

is $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right]$.

Dit stelsel heeft dus dezelfde matrix $\mathbf{A}$ als voorbeeld 24.7.1, maar het rechterlid is 0. De oplossingsmethode verloopt volledig analoog, alleen bestaat de laatste kolom van de uitgebreide matrix uit nullen. *Dergelijke nulkolom blijft onveranderd doorheen de verschillende rijoperaties!* De rijcanonieke vorm is dan ook dezelfde, op de laatste kolom na. De oplossingen zijn

$$\text{Opl}(S) = \{(2a+b-3c, a, -2b+2c, b, c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.20.A Oefeningen stelsels

Oefening 10.20.2. Schrijf de volgende stelsels in matrixvorm. Bepaal de oplossingenverzameling door met de eliminatiemethode van Gauss de uitgebreide matrix in rijgereduceerde echelonvorm te brengen.

1. $S_1 = \begin{cases} 3x & -2y & +z & = 4 \\ 3x & +y & -z & = 2 \\ x & & +3z & = 1 \end{cases}$

2. $S_2 = \begin{cases} s+2t+3w & = 1 \\ u+2w & = 2 \\ v-w & = 3 \end{cases}$

3. $S_3 = \begin{cases} 2x & +y & +z & = 1 \\ 4x & +y & +3z & = 1 \\ -2x & +2y & +z & = 7 \end{cases}$

4. $S_4 = \begin{cases} x & +2y & +z & +4u & = -1 \\ 2x & +4y & +2z & +u & = 5 \\ -x & -2y & & -u & = 0 \end{cases}$

5. $S_5 = \begin{cases} x & +2y & & = a \\ 4x & +7y & +z & = b \\ -2x & +2y & -6z & = c \end{cases}$

voor de gevallen

(a) $(a,b,c) = (0,0,0)$,

(b) $(a,b,c) = (-1,-2,-10)$,

(c) $(a,b,c) = (0,-2,3)$.

Oefening 10.20.3. Schrijf $(1,7,0,6)$ als een lineaire combinatie van $(0,2,3,1)$, $(1,-1,1,-1)$ en $(2,1,0,1)$.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 11
Goniometrie (voorbereiding)

(Versie 2026/08/25H.51)

11.1 Basiseigenschappen van driehoeken

Driehoeken zijn erg belangrijke objecten bij meetkundige problemen. Enerzijds kunnen we van elke *hoek* eenvoudig een rechthoekige *drie*hoek maken door een loodlijn te tekenen op één van de benen van de hoek. Anderzijds kan de studie van veelhoeken zoals rechthoeken of zeshoeken dikwijls worden herleid tot de studie van driehoeken door *diagonalen* te tekenen. Zo kan de oppervlakte van een veelhoek –minstens theoretisch– worden berekend als de som van de oppervlakte van een aantal driehoeken.

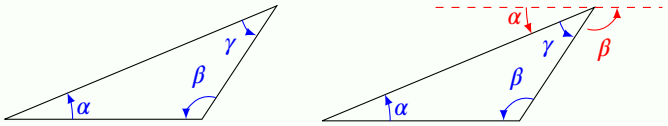


Een hoek Een driehoek Eén *veel*hoek *Veel* driehoeken

Door een rechte te tekenen evenwijdig aan de overstaande zijde blijkt dat de som van de drie hoeken een gestrekte hoek is:

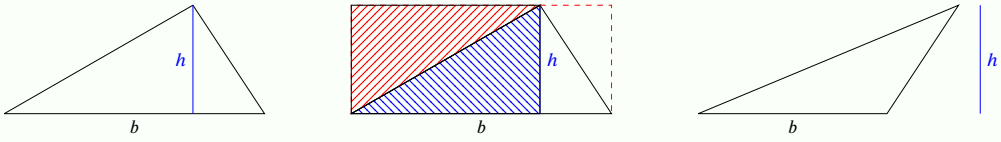
Eigenschap 11.1.1. De *som van de hoeken* van een driehoek is een gestrekte hoek.

In symbolen: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$



Als de hoeken α, β en γ in graden zijn uitgedrukt wordt de som $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Eigenschap 11.1.2. De *oppervlakte* van een driehoek is $\dfrac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}$



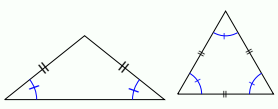
De oppervlakte van een driehoek is inderdaad precies de helft van die van de rechthoek met zijden b en h. De oppervlakte hangt niet af van de *vorm* van de driehoek, enkel van een *basis* en de bijhorende *hoogte*.

Definitie 11.1.1.

Een **gelijkbenige** driehoek is een driehoek met (minstens) twee gelijke zijden.
Een **gelijkzijdige** driehoek is een driehoek met drie gelijke zijden.

Eigenschap 11.1.3.

Een gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke basishoeken.
Een gelijkzijdige driehoek heeft drie gelijke hoeken.



De som van de hoeken is $180°$, dus is elke hoek van een gelijkzijdige driehoek $\dfrac{180°}{3} = 60°$ of $\dfrac{\pi}{3}$.

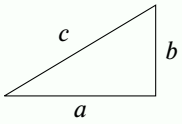
CC BY-NC-SA 4.0

11.1 Basiseigenschappen van driehoeken

Eigenschap 11.1.4 (Stelling van Pythagoras)**.**

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de aanliggende zijden.

In symbolen: $a^2 + b^2 = c^2$



Oefening 11.1.1. Bepaal de grootte van de derde hoek van volgende driehoeken:

1. $\alpha = 80°, \beta = 30°$, $\gamma =$ ... ...°.

2. $\beta = 31°, \gamma = 72°$, $\alpha =$ ... ...°.

3. $\alpha = \pi/4, \gamma = \pi/3$, $\beta =$ ... ... radialen.

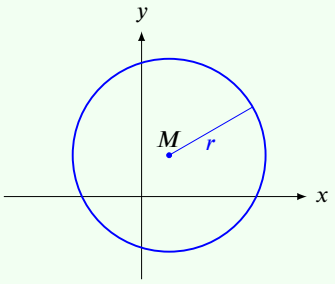
4. Gegeven een gelijkbenige driehoek waarvan één basishoek grootte $\pi/4$ heeft. De andere basishoek heeft dan grootte = ..., en de derde hoek heeft grootte = ...

CC BY-NC-SA 4.0

11.2 Basiseigenschappen van de cirkel

Een kort overzicht van enkele belangrijke eigenschappen van *cirkels*:

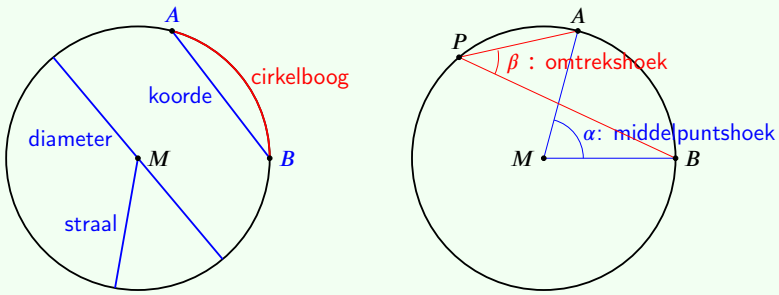
Definitie 11.2.1. De **cirkel** met **middelpunt** M en **straal** r is de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt M liggen.



Volgende begrippen worden dikwijls gebruikt in verband met cirkels:

Definitie 11.2.2 (Begrippen in verband met cirkels)**.**

- Een **koorde** van een cirkel is een lijnstuk waarvan beide eindpunten op de cirkel liggen.
- Een **cirkelboog** is een deel van een cirkel tussen twee van zijn punten.
- Een **middellijn** of **diameter** van een cirkel is een koorde die het middelpunt bevat. Een diameter is een koorde van maximale lengte. Het woord diameter wordt behalve voor het lijnstuk zelf ook gebruikt voor de *lengte* van het lijnstuk. Hetzelfde fenomeen doet zich voor bij het begrip straal: de straal van een cirkel is een getal, maar soms ook een lijnstuk tussen het middelpunt en een punt van de cirkel.
- Een **middelpuntshoek** op een koorde is een hoek waarvan het hoekpunt samenvalt met het middelpunt en de benen door de eindpunten van de koorde gaan.
- Een **omtrekshoek** op een koorde is een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en de benen door de eindpunten van de koorde gaan.



We zeggen dus dat middelpuntshoeken en omtrekshoeken *op een koorde* of *op een cirkelboog* staan, maar ook dat een omtrekshoek of middelpuntshoek een koorde of cirkelboog *afsnijden* op de cirkel.

Eigenschap 11.2.1 (Eigenschappen van een cirkel)**.**

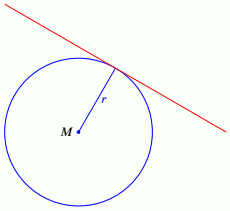
(a) De omtrek van een cirkel met straal r is $2\pi r$.

11.2 Basiseigenschappen van de cirkel

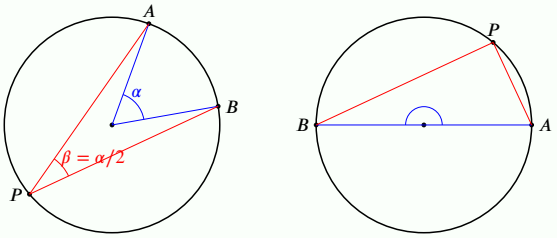
(b) De oppervlakte van een cirkel met straal r is πr^2.

(c) De diameter van een cirkel is het dubbel van de straal.

(d) De raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.



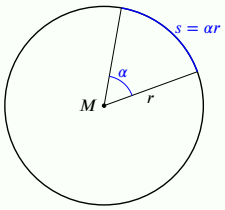
(e) Elke omtrekshoek meet de helft van de middelpuntshoek die op dezelfde boog staat.



Als α een gestrekte hoek van $180°$ is, volgt dat de omtrekshoek β op een halve cirkel $90°$ meet. Dus:

(f) Elke driehoek op een diameter met derde hoekpunt op de cirkel is rechthoekig.

(g) De lengte van een boog s die een middelpuntshoek α afsnijdt op een cirkel met straal r is gegeven door αr als de hoek α wordt uitgedrukt in radialen.



CC BY-NC-SA 4.0

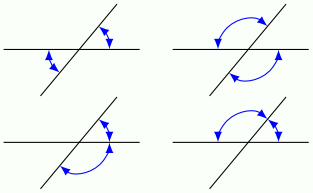
11.3 Basiseigenschappen van hoeken en rechten

Hoeken en lengten voldoen aan volgende eenvoudige maar belangrijke eigenschappen:

Eigenschap 11.3.1. Als twee rechten snijden geldt:

overstaande hoeken zijn *gelijk*.

aanliggende hoeken zijn *supplementair*.



Eigenschap 11.3.2. Als een rechte twee evenwijdige rechten snijdt geldt:

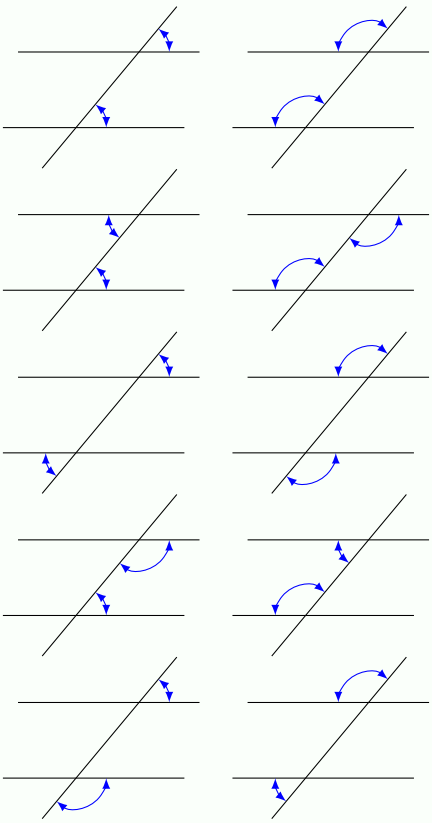
overeenkomstige hoeken zijn gelijk

verwisselende binnenhoeken zijn gelijk

verwisselende buitenhoeken zijn gelijk

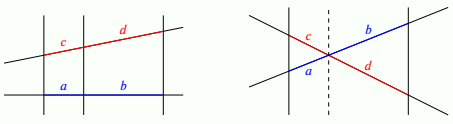
binnenhoeken aan dezelfde kant zijn supplementair

buitenhoeken aan dezelfde kant zijn supplementair



Eigenschap 11.3.3 (Stelling van Thales)**.**

Als drie evenwijdige lijnen twee andere lijnen snijden, dan worden de verhoudingen van deze laatste lijnstukken behouden: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.



CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 12
Goniometrie

(Versie 2026/08/25H.51)

12.1 Intro Goniometrie

Goniometrie (of driehoeksmeting) is het deel van de wiskunde dat zich bezighoudt met de studie van hoeken en driehoeken.

De natuurlijke getallen zijn de bouwstenen van het 'tellen'. Deze worden uitgebreid tot gehele getallen, rationale getallen en reële getallen. In de meetkunde zijn de bouwstenen punten en rechten. We bekomen een voor de hand liggende uitbreiding door twee halfrechten uit hetzelfde punt te bestuderen: dergelijke constructie vormt een *hoek*.

Om dergelijke hoeken te bestuderen voeren we het begrip *georiënteerde hoek* in en leren we hoeken *meten* in *radialen* en aflezen op de *goniometrische cirkel*. Dat leidt tot de definitie van sinus, cosinus en tangens gevolgd door een collectie eigenschappen en formules.

We zullen die sinus, cosinus en tangens ook als zogenaamde *goniometrische functies* bestuderen.

CC BY-NC-SA 4.0

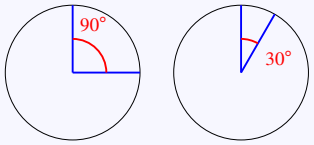
12.2 Definitie van een hoek

Iedereen weet wat een *hoek* is. Het begrip is echter wat ingewikkelder dan je misschien zou verwachten, omdat we in het dagelijkse leven met het woord *hoek* soms lichtjes verschillende dingen bedoelen. We zullen verder vooral zogenaamde **georiënteerde hoeken** bestuderen.

Voorbeeld 12.2.1 (Verschillende soorten hoeken)**.**

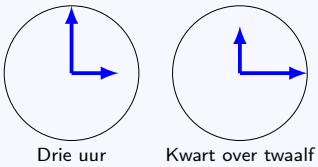
(a) Op een tekening van een analoge klok kan je een tijdspanne van vijftien minuten aangeven met een *hoek*.

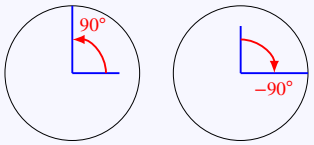




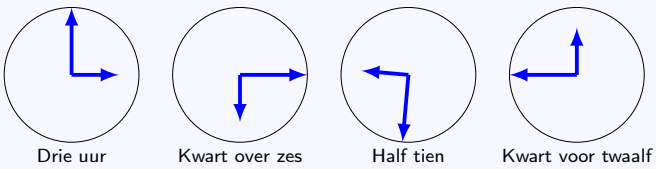
Bij dit soort hoeken spelen beide benen van de hoek precies dezelfde rol.
Een kwartier wordt aangegeven met een hoek van $90°$. Negatieve hoeken komen niet ter sprake.
Ook bij driehoeken is het dikwijls niet belangrijk in welke zin de hoeken worden doorlopen.

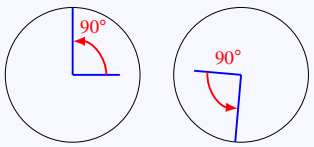
(b) Op een tekening van een analoge klok kan je zowel drie uur als kwart over twaalf aangegeven door (ongeveer) dezelfde hoek van 90 graden maar de kleine en de grote wijzer duiden de verschillende betekenis aan.



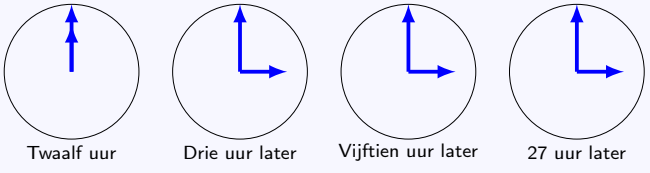


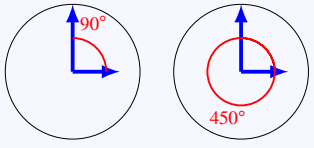
Bij deze hoeken zijn er dus twee verschillende benen, elk met een verschillende betekenis. Per afspraak geeft het korte been de uren aan, en het lange been de minuten.
Om beide situaties te onderscheiden zouden we kunnen afspreken de positie van drie uur aan te duiden met '$+90°$', en die van kwart over twaalf met '$-90°$'. Maar er is geen algemeen geldende afspraak daarover, en je zou het ook precies omgekeerd kunnen doen.
In deze situatie is natuurlijk ook de oriëntatie belangrijk, want de relatieve positie van kleine en grote wijzer zijn (ongeveer) hetzelfde bij bijvoorbeeld negen uur, kwart over twaalf, half vier en kwart voor zes.





(c) Op een analoge klok kan je geen tijdsverlopen van meer dan 12 uur aflezen. Als die belangrijk zijn, moet je ze onthouden of uit de context afleiden.

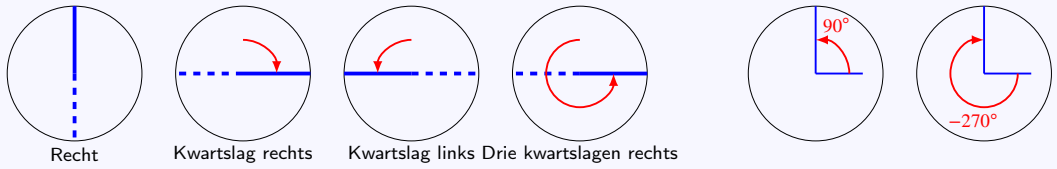




(d) Om een klok manueel van twaalf uur op drie uur te zetten is het niet belangrijk of je de kleine wijzer $90°$ verder draait, of $270°$ terug draait: het effect is precies hetzelfde.
Als je echter een schroef van een positie 'rechtop' naar '$90°$ rechts' zou moeten draaien, is het wel erg belangrijk in welke richting je ze draait. Je draait ze immers ofwel een kwartslag vaster, ofwel drie kwartslagen losser.

CC BY-NC-SA 4.0

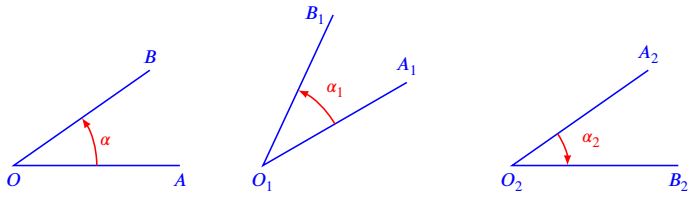
12.2 Definitie van een hoek



Samengevat: soms maakt het een verschil of een hoek in wijzerzin of in tegenwijzerzin wordt doorlopen, en soms niet. Soms is ook het aantal omwentelingen belangrijk, en soms niet. Soms is enkel het eindresultaat belangrijk, soms ook de manier waarop je dat eindresultaat hebt bereikt.
In de goniometrie bestuderen we meestal zogenaamde **georiënteerde hoeken**, waarbij de hoek gaat van een *begin*been naar een *eind*been, maar het *aantal* omwentelingen niet belangrijk is, en ook niet of we die hoek langs de kortste weg hebben gemaakt of niet. Dus hoeken van $30°$, $-330°$, $390°$ en $750°$ beschouwen we als *gelijk*.
Dat komt best overeen met de kleine-en-grote-wijzer op de klok, zoals in voorbeeld b). Maar, bij de georiënteerde hoek wordt vastgelegd welk been 'eerst' is, en welk 'tweede' in plaats van welk 'klein' is en welk 'groot'.

Definitie 12.2.1. Een **georiënteerde hoek** is een meetkundige figuur bestaande uit een **hoekpunt** O en een halfrechte OA als **eerste been** of **beginbeen** en een halfrechte OB als **tweede been** of **eindbeen**. Twee dergelijke figuren bepalen dezelfde hoek als ze door verschuiven en draaien op elkaar kunnen worden gelegd.
Een georiënteerde hoek wordt genoteerd als $\measuredangle AOB$, waarbij het hoekpunt dus in het midden staat.

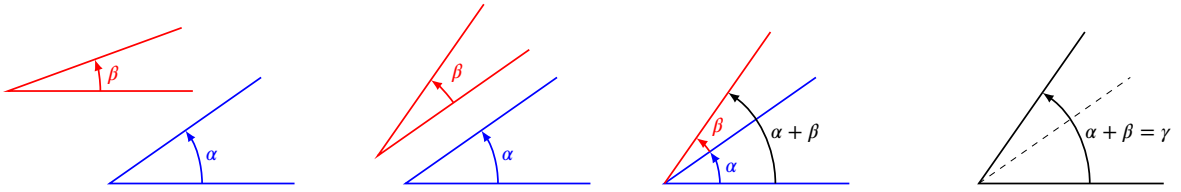
Op een tekening duiden we $\measuredangle AOB$ dikwijls aan met een boogje-met-een-pijltje-van-het-beginbeen-naar-het-eindbeen. Als *namen* zijn Griekse letters α (alfa), β (beta) en γ (gamma) erg populair.



Hoek $\alpha = \measuredangle AOB$ Hoek $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ Hoek $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$

De *georiënteerde hoeken* $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ zijn dus *aan elkaar gelijk* omdat ze via *verschuiven* en *draaien* op elkaar kunnen gelegd worden. De hoeken $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$ zijn echter niet aan elkaar gelijk, want om $\alpha = \measuredangle AOB$ op $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$ te leggen moeten we ook *spiegelen* en dat is voor georiënteerde hoeken niet toegelaten. Ook $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle BOA$ zijn dus onderling verschillende hoeken.

Je kan met georiënteerde hoeken *rekenen*: je telt twee hoeken α en β bij elkaar op door ze 'achter elkaar' te leggen, dus je legt het beginbeen van β op het eindbeen van α. Dat levert een nieuwe georiënteerde hoek γ op die we de *som* van α en β noemen. We noteren $\alpha + \beta = \gamma$.



Als het eindbeen samenvalt met het beginbeen is er geen echte hoek maar enkel een halfrechte en spreken we van de **nulhoek** $\measuredangle AOA$. Het is onmiddellijk duidelijk dat de nulhoek optellen bij een hoek de hoek niet verandert – net zoals nul optellen bij een getal dat getal niet verandert.

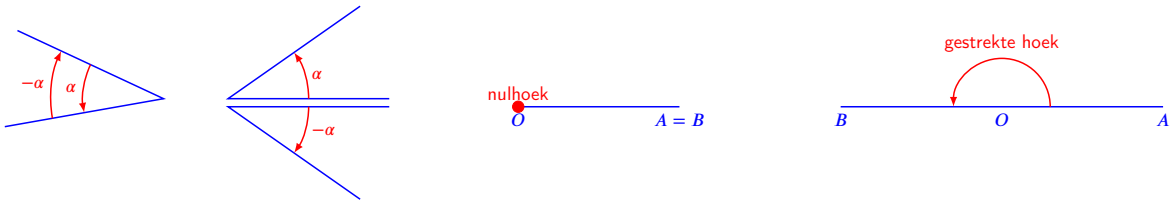
We noemen de georiënteerde hoek $\measuredangle BOA$ de **tegengestelde hoek** van $\measuredangle AOB$ en noteren die met een minteken: als $\alpha = \measuredangle AOB$, dan is $-\alpha = \measuredangle BOA$.

CC BY-NC-SA 4.0

12.2 Definitie van een hoek

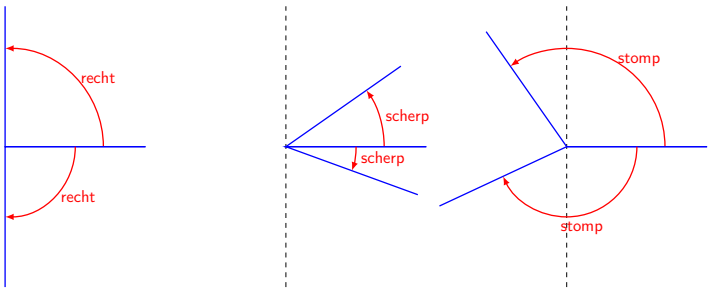
We stellen vast dat de som van twee tegengestelde hoeken de nulhoek is en dat de tegengestelde hoek $-\alpha$ bekomen wordt door α over zijn eerste been te spiegelen.

De **gestrekte hoek** is de hoek waarbij het eindbeen in het verlengde van het beginbeen ligt: dergelijke hoek is onzichtbaar, want het hoekpunt is gewoon een punt O op een rechte AB.



Een **rechte hoek** is de helft van een gestrekte hoek, dus een hoek α zodat $\alpha + \alpha$ een gestrekte hoek vormt.

Een hoek is **scherp** als hij kleiner is dan een rechte hoek en **stomp** als hij groter is.



Samengevat:

Definitie 12.2.2.

Een **gestrekte hoek** is een hoek waarbij beginbeen en eindbeen in elkaars verlengde liggen.
Een **nulhoek** is een hoek waarbij beginbeen en eindbeen aan elkaar gelijk zijn.
Een **rechte hoek** is de helft van een gestrekte hoek.
Een **scherpe hoek** is een hoek die kleiner is dan een rechte hoek.
Een **stompe hoek** is een hoek die groter is dan een rechte hoek.

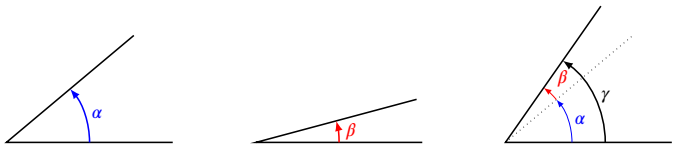
De **tegengestelde hoek** van de hoek $\alpha = \measuredangle AOB$ is de hoek $-\alpha = \measuredangle BOA$.

Opmerking 12.2.1. Merk op dat we voorlopig niet gesproken hebben over het *meten* van hoeken. Alle regels over rekenen en vergelijken van hoeken zijn voorlopig zuiver meetkundig, er komen geen getallen voor. In de praktijk is het natuurlijk handig hoeken te kunnen *meten*, en vervolgens eerder te rekenen met de maatgetallen van de hoeken dan met de hoeken zelf. Dat wordt verder uitgelegd.

CC BY-NC-SA 4.0

12.2.A Oefeningen hoeken

Oefening 12.2.1. Basisrekenen met hoeken (op basis van een tekening, nog zonder maatgetallen)



Bepaal door verschuiven en draaien welke hoek hier telkens getekend is:

1.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

2.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

3.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

4.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

5.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

6.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

7.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

8.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

9.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

Bepaal door te redeneren op een tekening telkens volgende uitdrukking:

10. $\alpha + \beta =$ | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

11. $\beta + \alpha =$ | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

12. $\gamma - \beta =$ | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

13. $\alpha - \gamma =$ | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

CC BY-NC-SA 4.0

12.3 Goniometrische cirkel

Hoeken worden traditioneel *gemeten in (boog)graden*, waarbij een rechte hoek $90°$ is, een gestrekte hoek $180°$ en de nulhoek $0°$ of $360°$. Het maatgetal van een georiënteerde hoek is daarbij slechts bepaald 'op $360°$ na': per afspraak zijn $20°$, $20° + 360° = 380°$, $20° + 720° = 740°$ en $20° - 360° = -340°$ allemaal maatgetallen van *dezelfde georiënteerde hoek*.

De keuze voor (boog)graden, die onderverdeeld zijn in (boog)minuten en (boog)seconden is historisch gemotiveerd, en gebaseerd op een zestigtallig talstelsel. Je kan het vergelijken met het meten van lengtes in mijl, el of voet. Er is een meer natuurlijke manier om hoeken te meten, die eigenlijk zelfs geen willekeurige keuze van een nieuwe eenheid vraagt. We zullen hiervoor een hoek bekijken op de goniometrische cirkel.

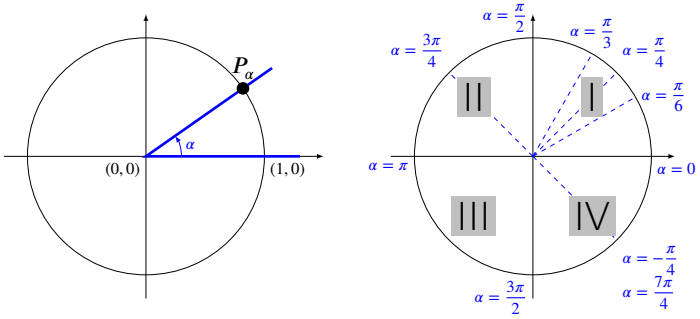
Door verschuiven en draaien (maar niet spiegelen) kan je het hoekpunt van een georiënteerde hoek in de oorsprong van het vlak leggen, en het eerste been op de positieve x-as. Dat leidt tot volgende definities:

Definitie 12.3.1.

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong.

Met elke georiënteerde hoek α komt een uniek **beeldpunt** P_α van de goniometrische cirkel overeen door het hoekpunt van α te verschuiven naar de oorsprong, het eerste been op de positieve x-as te leggen en het unieke snijpunt van het tweede been met de goniometrische cirkel P_α te noemen. Omgekeerd bepaalt elk punt P_α van de goniometrische cirkel een georiënteerde hoek α.

De goniometrische cirkel wordt verdeeld in vier **kwadranten**, die vanaf rechtsboven tegen de klok in genummerd worden met Romeinse cijfers I, II, III, IV zoals op de figuur hieronder.



Hoeken komen dus overeen met *punten van de goniometrische cirkel* en in de praktijk wordt meestal geen onderscheid gemaakt tussen het punt P_α en de hoek α.

Omdat de omtrek van een cirkel met straal één gelijk is aan 2π, ligt het voor de hand om een hoek die éénmaal ronddraait maatgetal 2π te geven; een 'halve draai', dus een gestrekte hoek heeft dan maat π, en de helft daarvan, dus een rechte hoek, heeft maatgetal $\pi/2$. Deze manier van hoeken meten noemt men 'meten in radialen'. Op bovenstaande figuur zijn enkele hoeken gemeten in radialen aangeduid.

Het blijkt wiskundig veel handiger hoeken te meten in *radialen* dan in *graden*. De formules voor afgeleiden van sinus en cosinus werken bijvoorbeeld enkel als de hoeken worden gemeten in radialen.

Het maatgetal van een georiënteerde hoek is slechts bepaald 'op 2π na', dus per afspraak zijn $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{-11\pi}{6}$ allemaal maatgetallen van dezelfde hoek.

We schrijven dikwijls $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

Als symbool voor radialen wordt **rad** gebruikt, maar het wordt meestal niet geschreven. Men schrijft dus meestal *een hoek met grootte* π in plaats van *een hoek met grootte* π *rad*.

CC BY-NC-SA 4.0

12.3 Goniometrische cirkel

Opmerking 12.3.1.

- De **lengte van de cirkelboog** tussen de twee benen van een hoek is gelijk aan het maatgetal van die hoek uitgedrukt in radialen, wanneer we dit maatgetal kiezen tussen 0 en 2π. Dit verklaart waarom men soms het begrip *booglengte* gebruikt voor de grootte van een hoek.
- Het verband tussen een hoek gemeten in graden en radialen wordt gegeven door $360° = 2\pi$, en dus geldt ook $90° = \frac{\pi}{2}$ en $180° = \pi$. Voor enkele gekende hoeken geldt dus $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{3\pi}{2} = 270°$, ... Merk op dat de grootte in radialen erg dikwijls wordt uitgedrukt als een veelvoud van π.
- Een gestrekte hoek van $180°$ meet π radialen, en dus komt één graad overeen met $\frac{\pi}{180} \approx 0.017\ldots$ rad. Omgekeerd komt 1 rad overeen met ongeveer $\frac{180°}{\pi} \approx 57,\ldots°$.
- Zowel het maatgetal van een hoek als de hoek zelf worden meestal genoteerd met Griekse letters. We spreken dus zowel van 'de hoek α' (waarbij α een letter is, namelijk de naam van de hoek) als 'de hoek met grootte α' (waar α dan staat voor een getal, namelijk het maatgetal van de hoek). Het maatgetal is altijd in radialen uitgedrukt, tenzij er expliciet staat $\alpha°$. De dubbelzinnigheid tussen een 'hoek' en 'de grootte van een hoek' is gelukkig compatibel met de optelling van hoeken: de grootte van de som van twee hoeken is de som van de groottes.
- Het symbool ° kan begrepen worden als een afkorting voor 'maal $\frac{2\pi}{360}$', waardoor dus graden automatisch worden omgezet naar radialen: $7° = 7 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{14\pi}{360} = \frac{7\pi}{180}$. De breuk $\frac{2\pi}{360}$ moet je daarbij niet echt onthouden, want een hoek van $360°$ moet worden omgezet naar 2π, en daarvoor moet je natuurlijk vermenigvuldigen met $\frac{2\pi}{360}$.

Voorbeeld 12.3.1 (Omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd)**.**

Van graden omzetten naar radialen gaat met behulp van *de regel van drie*. Vertrek van het feit dat $360°$ gelijk is aan 2π radialen en bereken dan hoeveel radialen één graad is, en daarna hoeveel radialen bijvoorbeeld 7 graden zijn. Met dezelfde redenering zet je radialen om naar graden.

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 2$	$: 2$
$180°$	π

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 360$	$: 360$
$1°$	$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$
$\times 7$	$\times 7$
$7°$	$\frac{7\pi}{180}$

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 2\pi$	$: 2\pi$
$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$	1
$\times 7$	$\times 7$
$\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$	7

Een hoek van $180°$ meet π radialen, $7°$ is gelijk aan $\frac{7\pi}{180}$ radialen en 7 radialen is gelijk aan $\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$.

CC BY-NC-SA 4.0

12.4 Goniometrische getallen

Door een georiënteerde hoek op de goniometrische cirkel te plaatsen bekomen we een punt op die cirkel, en dergelijk punt heeft x en y coördinaten. Deze coördinaten zijn per definitie de cosinus en de sinus van die hoek. We zullen verder zien dat wegens de stelling van Pythagoras deze definitie overeenkomt met de mogelijk meer vertrouwde definities met aanliggende en overstaande zijden in een driehoek.

Definitie 12.4.1.

Als P_α het punt is op de goniometrische cirkel dat hoort bij een hoek α, dan is

de **cosinus** van de hoek α per definitie de x-coördinaat van het punt P_α, en

de **sinus** van de hoek α per definitie de y-coördinaat van het punt P_α:

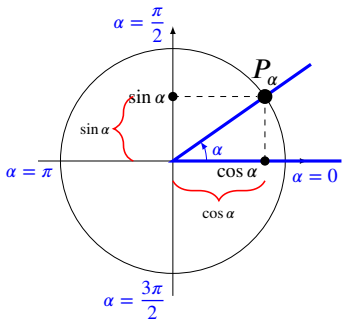
$$P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Per definitie is ook

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{(tangens)} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{(secans)}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{(cotangens)} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{(cosecans)}$$

We noemen de $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$ de **goniometrische getallen** van een hoek.



Oefening 12.4.1. Lees volgende waarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 2\pi = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$
2. $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$
3. $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$
4. $\cos(-\pi) = \ldots\ldots$ $\sin(-\pi) = \ldots\ldots$

De vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ (of de Stelling van Pythagoras) geeft onmiddellijk de hoofdformule van de goniometrie omdat het punt P_α op de goniometrische cirkel coördinaten $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ heeft:

Eigenschap 12.4.1 (Hoofdformule van de goniometrie)**.** Voor elke hoek α geldt:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \text{(hoofdformule goniometrie)}$$

Hieruit volgt onmiddellijk ook dat

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \cos^2\alpha\text{)}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \sin^2\alpha\text{)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

12.4 Goniometrische getallen

Opmerking 12.4.1.

Let op de notatie voor machten: $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2 = \cos^2(\alpha) \neq \cos(\alpha^2) = \cos\alpha^2$.

Merk ook op dat in het algemeen $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$ en $\cos 2\alpha \neq 2\cos\alpha$.

Inderdaad, $\cos(\alpha+\beta) \stackrel{?}{=} \cos\alpha + \cos\beta$ werkt al niet voor bijvoorbeeld $\beta = 0$:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha+0) \neq \cos\alpha + \cos 0 = \cos\alpha + 1$$

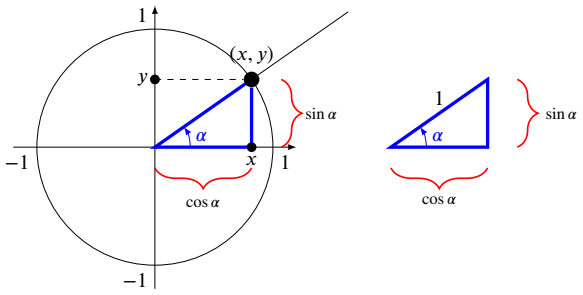
en $\cos 2\alpha \stackrel{?}{=} 2\cos\alpha$ werkt niet voor bijvoorbeeld $\alpha = 0$

$$\cos(2\cdot 0) = \cos 0 = 1 \text{ maar } 2\cdot\cos 0 = 2\cdot 1 = 2$$

Gelijkaardige problemen doen zich voor bij sinus, tangens, secans en cosecans. Er bestaat een hele collectie formules om toch de goniometrische getallen van sommen te berekenen.

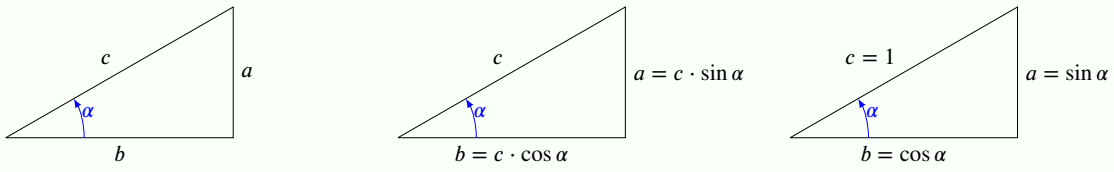
12.4.1 Rechthoekige driehoeken

Voor *scherpe hoeken* kunnen we de sinus en cosinus ook bekijken in een **rechthoekige driehoek**. Omdat het punt $P_\alpha = (x, y)$ op de goniometrische cirkel ligt, heeft de schuine zijde van de rechthoekige driehoek op onderstaande figuur lengte 1. De lengte van de *aanliggende zijde* van hoek α is gelijk aan $\cos\alpha$, de lengte van de *overstaande zijde* is $\sin\alpha$.



De volgende eigenschap veralgemeent dit voor rechthoekige driehoeken waarvan de schuine zijde niet noodzakelijk lengte 1 heeft. Het volstaat dan te *herschalen* met de lengte van de schuine zijde:

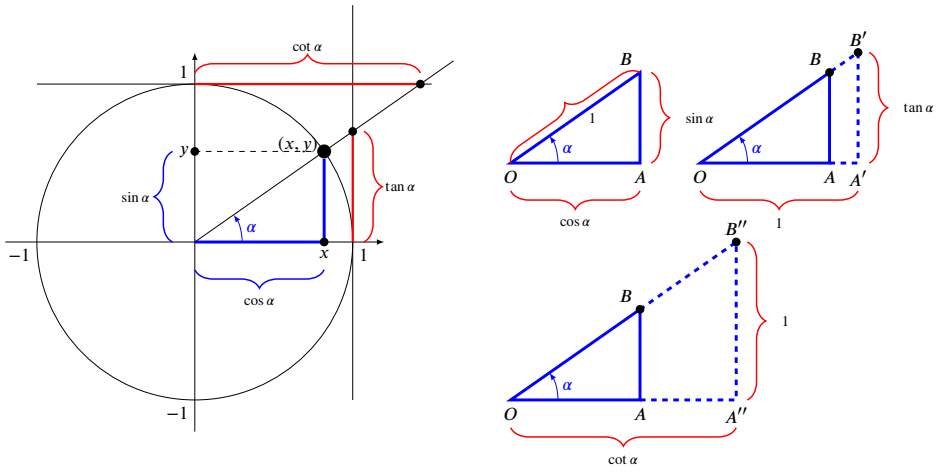
Eigenschap 12.4.2 (Sinus en cosinus in een rechthoekige driehoek)**.**



12.4 Goniometrische getallen

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$a = \sin\alpha \cdot c$	SOS
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$= \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$b = \cos\alpha \cdot c$	CAS
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$a = \tan\alpha \cdot b$	TOA
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	$= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$b = \cot\alpha \cdot a$	cotangens

De cosinus en de sinus van een hoek α kan je op de goniometrische cirkel aflezen op de *assen*. Ook de tangens en de cotangens kan je aflezen, en wel op de *raaklijnen* aan de goniometrische cirkel in punten $(1,0)$ en $(0,1)$:



Opmerking 12.4.2.

- We lezen de cosinus af op de x-as, en de sinus op de y-as.
  We zien dat $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ en $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$
- We lezen de *tangens* af op de verticale *raak*lijn $x = 1$. Dat volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle A'OB'$
  want in driehoek $\measuredangle AOB$ geldt $\tan\alpha = \frac{|AB|}{|AO|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
  terwijl in driehoek $\measuredangle A'OB'$ geldt dat $\tan\alpha = \frac{|A'B'|}{|A'O|} = \frac{|A'B'|}{1} = |A'B'|$.
  Dus is $|A'B'| = \tan\alpha$.
  Op analoge wijze lezen we de cotangens af op de horizontale rechte $y = 1$.
  We zien dat $\tan\alpha$ en $\cot\alpha$ alle mogelijk reële waarden kunnen aannemen.
- De formule $a = c \cdot \sin\alpha$ betekent dat de sinus precies het getal is waarmee we de lengte van de *schuine* zijde van een driehoek moeten vermenigvuldigen om de lengte van de *overstaande* zijde te bekomen. Idem voor cosinus en aanliggende zijde.

12.4.2 Standaardhoeken

Voor enkele hoeken zijn er eenvoudige formules voor de goniometrische getallen. Deze hoeken komen in de praktijk regelmatig voor, en het is handig en belangrijk de *exacte uitdrukkingen* te kennen.

CC BY-NC-SA 4.0

12.4 Goniometrische getallen

De waarden in volgende eigenschap zijn eenvoudig te onthouden: schrijf de hoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ van klein naar groot. De bijhorende sinussen zijn dan een rijtje halve vierkantswortels van klein naar groot. De cosinus is hetzelfde rijtje omgekeerd, en de tangens is natuurlijk het quotiënt van de sinus en de cosinus. Merk op dat $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

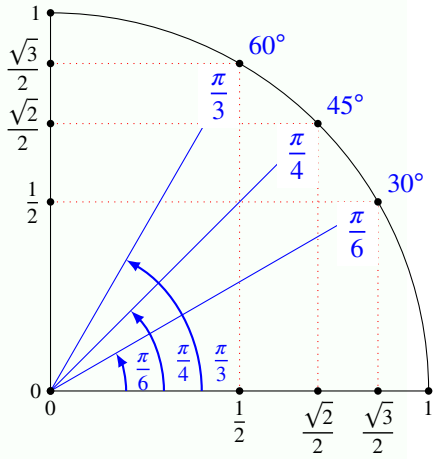
Opmerking 12.4.3.

Een rekenmachine geeft enkel numerieke oplossingen, en het is soms veel handiger om met uitdrukkingen als $\sqrt{2}$ te rekenen dan met $1,41421\ldots$. Dat is bijvoorbeeld het geval als je de waarde even verder moet kwadrateren, wat met goniometrische formules wel eens voorkomt.

Met de goniometrische cirkel bepaal je ook de goniometrische getallen van verwante hoeken in de andere kwadranten: de sinus lees je af op de rechte $x = 0$ (dus de y-as), de tangens op de rechte $x = 1$, de cosinus op de rechte $y = 0$ (dus de x-as), en de cotangens op de rechte $y = 1$. Je kan ook het *teken* van de sinus, cosinus en tangens dadelijk aflezen.

BELANGRIJK: leer dit niet van buiten, maar bestudeer het tot je er de evidentie van inziet.

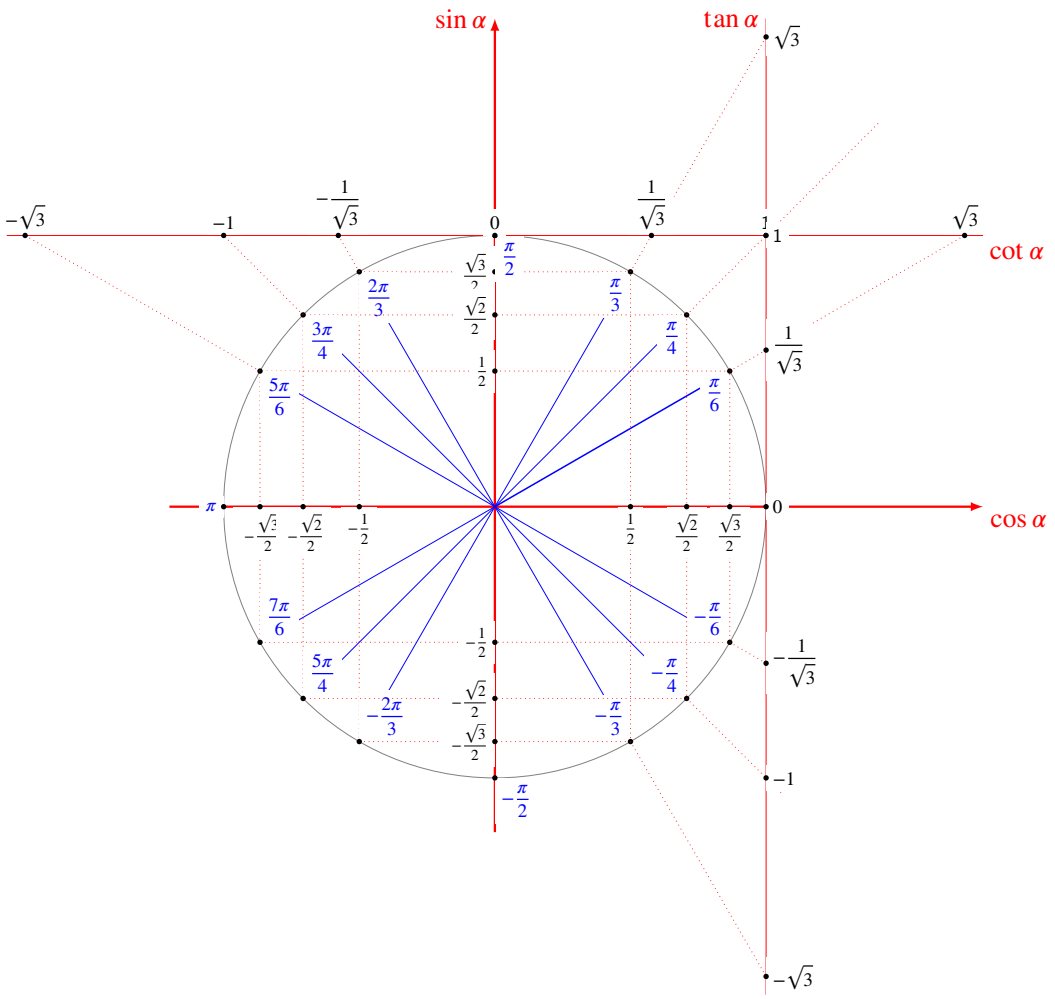
Eigenschap 12.4.3 (Goniometrische getallen van standaardhoeken)**.**



α	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

CC BY-NC-SA 4.0

12.4 Goniometrische getallen



12.5 Verwante hoeken

Op de goniometrische cirkel zien we dat er eenvoudige verbanden zijn tussen de goniometrische getallen van zogenaamde *verwante* hoeken. Uit de gekende waarden voor sinus, cosinus, tangens en cotangens van enkele *standaardhoeken*, volgen dus ook de waarden van veel meer hoeken. Bovendien kunnen we het berekenen van goniometrische getallen van een willekeurige hoek steeds herleiden tot het berekenen van een goniometrisch getal van een hoek uit het eerste kwadrant.

Definitie 12.5.1 (Verwante hoeken)**.** Elke hoek α heeft volgende zogenaamde **verwante** hoeken:

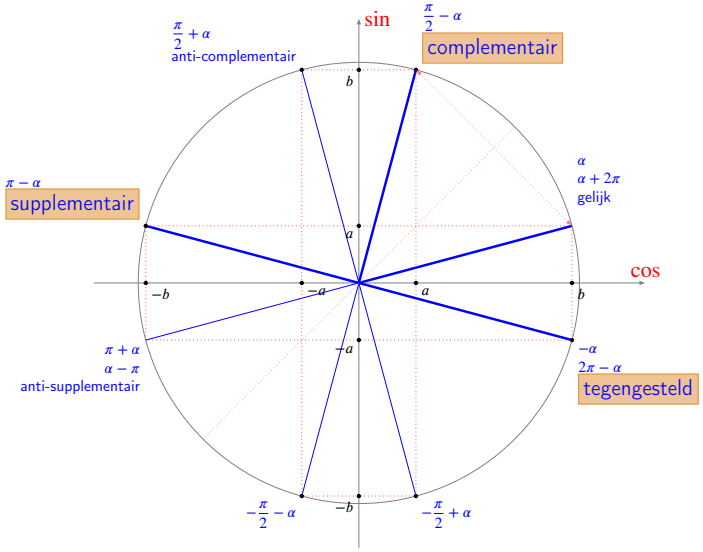
$-\alpha$	is de **tegengestelde** hoek	(de som van α en $-\alpha$ is gelijk aan 0)
$\pi - \alpha$	is de **supplementaire** hoek	(de som van α en $\pi - \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	is de **complementaire** hoek	(de som van α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)
$\pi + \alpha$	is de **anti-supplementaire** hoek	(het verschil van α en $\pi + \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	is de **anti-complementaire** hoek	(het verschil van α en $\frac{\pi}{2} + \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)

Uit deze definitie volgt direct volgende eigenschap:

Eigenschap 12.5.1.

- Twee hoeken zijn *tegengesteld* als hun som gelijk is aan de *nulhoek*, *supplementair* als hun som gelijk is aan een *gestrekte* hoek, en *complementair* als hun som gelijk is aan een *rechte* hoek.
- Tegengestelde hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzichte van de x-as, supplementaire hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzichte van de y-as en complementaire hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzicht van de *eerste* bissectrice.

Op een tekening ziet dat er uit als volgt:



Het is *niet* zinvol deze figuur of volgende tabellen van buiten te leren. Het is *wel* zinvol de goniometrische getallen van verwante hoeken direct te leren aflezen. Hierbij is $\sin\alpha = a$ en $\cos\alpha = b$, en de goniometrische getallen van de verwante hoeken zijn dan a, b, $-a$ of $-b$.

CC BY-NC-SA 4.0

12.5 Verwante hoeken

Eigenschap 12.5.2.

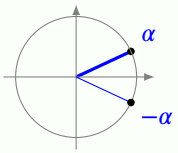
Cosinus:	(op de x-as)		Sinus:	(op de y-as)	
$\cos\alpha$	$= \cos(-\alpha)$	$= b$	$\sin\alpha$	$= \sin(\pi-\alpha)$	$= a$
$\cos(\pi-\alpha)$	$= \cos(\pi+\alpha)$	$= -b$	$\sin(-\alpha)$	$= \sin(\pi+\alpha)$	$= -a$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \cos(\alpha-\frac{\pi}{2})$	$= a$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$	$= b$
$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$	$= \cos(-\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= -a$	$\sin(-\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \sin(\alpha-\frac{\pi}{2})$	$= -b$

Per type van verwante hoek geeft dat volgende lijst verbanden tussen de *goniometrische getallen*:

Eigenschap 12.5.3 (Verwante hoeken)**.**

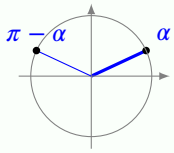
Tegengestelde hoeken

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos\alpha\\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



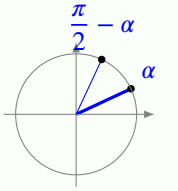
Supplementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(\pi-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



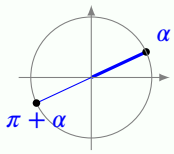
Complementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \tan\alpha\end{aligned}$$



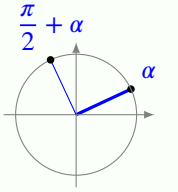
Anti-supplementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\pi) &= -\sin\alpha\\ \cos(\alpha\pm\pi) &= -\cos\alpha\\ \tan(\alpha\pm\pi) &= \tan\alpha\\ \cot(\alpha\pm\pi) &= \cot\alpha\end{aligned}$$



Anti-complementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\alpha\\ \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\cot\alpha\\ \cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\tan\alpha\end{aligned}$$



CC BY-NC-SA 4.0

12.6 Goniometrische formules

Ter referentie staan hier een aantal goniometrische formules om allerlei uitdrukkigen om te vormen en soms te berekenen. Alle formules zijn zowel van links naar rechts te lezen, als van rechts naar links.

Eigenschap 12.6.1 (Goniometrische formules)**.**

Hoofdformule en varianten:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \qquad \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1 \qquad \cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1$$

Som- en verschilformules:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Formules voor dubbele hoek:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Formules van Simpson:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \qquad \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \qquad \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

Verwante hoeken:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= -\sin(-\alpha) &&= \sin(\pi-\alpha) &&= -\sin(\pi+\alpha)\\
&&&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\\
&&&= -\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\\
\cos\alpha &= \cos(-\alpha) &&= -\cos(\pi-\alpha) &&= -\cos(\pi+\alpha)\\
&&&= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\\
&&&= -\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= -\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

12.6.A Oefeningen goniometrie

Oefening 12.6.1. Zet om van graden naar radialen of omgekeerd.

Graden	*Radialen*
$120°$	$\ldots\ldots$
$8°$	$\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\,°$	$7\pi/4$
$\ldots\ldots\,°$	$\pi/10$
$90°$	$\ldots\ldots$
$1°$	$\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\,°$	$7\pi/5$

Oefening 12.6.2. Lees de waarden van volgende goniometrische getallen af op de cirkel:

1. $\cos 0° = \ldots\ldots$

2. $\cos \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$

3. $\cos 90° = \ldots\ldots$

4. $\cos \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$

5. $\sin 0° = \ldots\ldots$

6. $\sin \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$

7. $\sin 90° = \ldots\ldots$

8. $\sin \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$

9. $\tan \frac{\pi}{3} = \ldots\ldots$

10. $\cos \frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$

11. $\tan \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$

12. $\cot \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$

Oefening 12.6.3. Duid het juiste antwoord aan (er is telkens precies één antwoord correct).

1. De hoeken $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{5\pi}{6}$ zijn

tegengesteld	complementair	supplementair

2. $\cos \frac{5\pi}{4}$ is gelijk aan

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\cos \frac{\pi}{4}$	$\cos \frac{3\pi}{4}$

3. $\sin(\pi - 23)$ is gelijk aan

$-\sin(23)$	$\sin(23)$	$\cos(23)$

4. $\sin(2\pi + 1)$ is gelijk aan

$-\sin 1$	$\sin 1$	$\cos 1$

CC BY-NC-SA 4.0

12.6.A Oefeningen goniometrie

Oefening 12.6.4. Zoek aan de hand van de goniometrische cirkel (zie onder) waaraan volgende uitdrukkingen gelijk zijn.

1. $\cos(\pi - \alpha) =$

$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$

2. $\sin(\alpha - \pi) =$

$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$

3. $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$

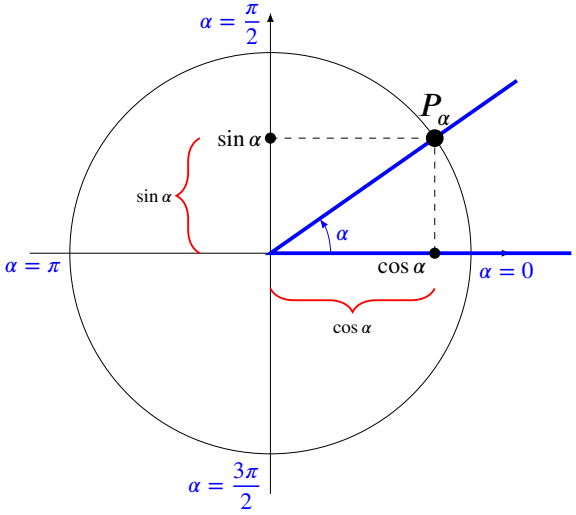
$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$

4. $\sin(\pi + \alpha) =$

$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$

5. $\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$

$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$



Oefening 12.6.5. Bereken zonder rekentoestel. Gebruik de gekende goniometrische getallen en de formules voor tegengestelde, (anti)supplementaire en (anti)complementaire hoeken.

1. $\sin(135°) =$ ... ...

2. $\tan(3\pi/4) =$ ... ...

3. $\cos(-30°) =$ ... ...

4. $\sin(-120°) =$ ... ...

5. $\tan(-\frac{5\pi}{6}) =$ ... ...

6. $\cot(390°) =$ ... ...

Oefening 12.6.6. Bereken volgende goniometrische getallen door gebruik te maken van de gekende waarden van de standaardhoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ en de symmetrieën voor de verwante hoeken.

1. $\cos\frac{\pi}{3} =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\cos\frac{2\pi}{3} =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

12.6.A Oefeningen goniometrie

3. $\cos\frac{5\pi}{6} =$

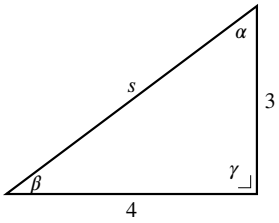
4. $\sin\frac{7\pi}{4} =$

5. $\cos\frac{-\pi}{2} =$

6. $\cos\frac{-2\pi}{3} =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Oefening 12.6.7. We bekijken een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden met lengte 3 en 4 (zie tekening). Bereken de lengte van de schuine zijde s. Bereken ook de sinus en cosinus van elk van de hoeken α, β en γ.



1. $s =$ … …

2. $\sin\alpha =$ … …

3. $\cos\alpha =$ … …

4. $\sin\beta =$ … …

5. $\cos\beta =$ … …

6. $\sin\gamma =$ … …

7. $\cos\gamma =$ … …

Oefening 12.6.8. Bepaal $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ en $\cot\alpha$ en het kwadrant waarin α ligt in het volgende geval (zonder gebruik te maken van een rekenmachine):

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \text{en} \qquad \sin\alpha < 0.$$

1. α ligt in het | I^{e} | IIe | IIIe | IVe | kwadrant.

2. $\sin\alpha =$ … …

3. $\tan\alpha =$ … …

4. $\cot\alpha =$ … …

Oefening 12.6.9. Bepaal $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\cot\alpha$ en het kwadrant waarin α ligt in het volgende geval

CC BY-NC-SA 4.0

12.6.A Oefeningen goniometrie

(zonder gebruik te maken van een rekenmachine):

$$\tan\alpha = -\frac{3}{4} \qquad \text{en} \qquad \sin\alpha > 0.$$

1. α ligt in het | I^{e} | IIe | $\mathrm{III}^{\mathrm{e}}$ | IVe | kwadrant.

2. $\cot\alpha = \ldots\ldots$

3. $\sin\alpha = \ldots\ldots$

4. $\cos\alpha = \ldots\ldots$

Oefening 12.6.10. Verzeker je ervan dat de volgende gelijkheden correct zijn door het linker- of rechterlid van de gelijkheid, of beide, te herschrijven met behulp van goniometrische formules.

1. $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

2. $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

Oefening 12.6.11. Vereenvoudig (dit wil zeggen, schrijf met behulp van één goniometrisch getal).

1. $\cos^2 3 - \sin^2 3$

2. $2\sin 3\cos 3$

3. $\sin(5\alpha)\cos(3\alpha) + \cos(5\alpha)\sin(3\alpha)$

4. $\cos(5\alpha)\cos(3\alpha) + \sin(5\alpha)\sin(3\alpha)$

Oefening 12.6.12. Schrijf als een product van goniometrische getallen.

1. $\sin 3 - \sin 5$

2. $\cos 2 + \cos 7$

CC BY-NC-SA 4.0

12.7 Driehoeken oplossen

Het 'oplossen van driehoeken' betekent het bepalen van *alle* zijden en hoeken als er enkele gegeven zijn. Volgende eigenschappen worden daarbij gebruikt:

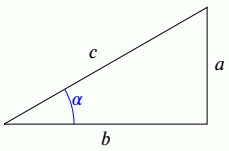
Eigenschap 12.7.1 (Herhaling eigenschappen driehoeken)**.**

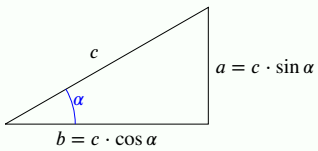
In elke driehoek geldt: de som van de drie hoeken is $180°$ of π rad.

In een rechthoekige driehoek geldt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{Stelling van Pythagoras}$$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$a = \sin\alpha \cdot c$	SOS
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$= \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$b = \cos\alpha \cdot c$	CAS
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$a = \tan\alpha \cdot b$	TOA
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	$= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$b = \cot\alpha \cdot a$	cotangens





Eigenschap 12.7.2 (Sinusregel en cosinusregel in een willekeurige driehoek)**.**

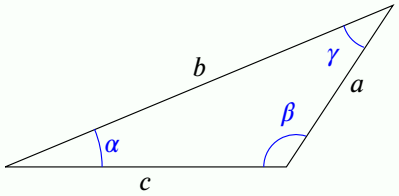
Sinusregel (de verhouding tussen lengtes van zijden en de sinus van hun overstaande hoeken is constant)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Cosinusregel (geeft een verband tussen kwadraten van de zijden en één hoek)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\cos\gamma$$

Alternatieve formuleringen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha$ en $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\cos\beta$



Opmerking 12.7.1. Enkele tips om deze regels toe te passen in oefeningen:

- De **sinusregel** legt een verband tussen verhoudingen van lengtes en hun overstaande hoeken. Stel dat je de lengte van een zijde kent, alsook de grootte van haar overstaande hoek. Indien

12.7 Driehoeken oplossen

je dan de lengte kent van een andere zijde, dan kan je met de sinusregel de grootte van haar overstaande hoek berekenen. Omgekeerd, stel dat je de grootte van een andere hoek kent, dan kan je de lengte van haar overstaande zijde berekenen.

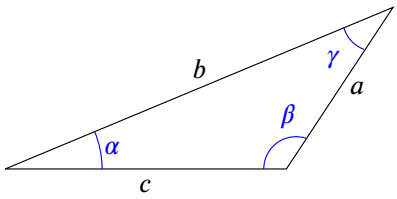
Je kan de sinusregel ook lezen als $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot b$ of $\sin\alpha = \frac{a}{b} \cdot \sin\beta$.

- De **cosinusregel** legt een verband tussen één hoek en de lengtes van alle zijden van de driehoek. Om de cosinusregel gemakkelijk te memoriseren, onthoud je dat de lengte van de zijde die aan de linkerkant van de vergelijking voorkomt (c hierboven) de overstaande zijde is van de hoek die voorkomt in het rechterlid van formule (γ hierboven). In oefeningen kan je met de cosinusregel de lengte van een zijde berekenen als je zowel de grootte van haar overstaande hoek kent als de lengtes van de twee andere zijden, of je kan eender welke hoek berekenen als je de lengtes van alle zijden kent.
- De cosinusregel is eigenlijk een uitbreiding van de stelling van Pythagoras. Als γ een rechte hoek is, dan is $\cos\gamma = 0$. De cosinusregel, toegepast op de hoek γ, geeft dan $c^2 = a^2 + b^2$. En inderdaad, in deze rechthoekige driehoek is c de schuine zijde en de cosinusregel is precies de stelling van Pythagoras. De cosinusregel geeft dus precies de correctieterm voor de stelling van Pythagoras bij niet-rechthoekige driehoeken.

CC BY-NC-SA 4.0

12.7.A Oefeningen cosinus- en sinus regel

Oefening 12.7.1. Bereken alle zijden en hoeken van een driehoek met gegeven zijden $a = 2$, $b = 4$ en hoek $\beta = \pi/2$. De notatie is als volgt:



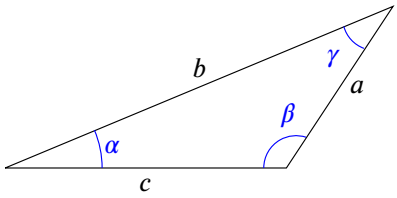
1. Bereken de hoek $\alpha = \ldots\ldots$ rad.

2. Bereken de hoek $\gamma = \ldots\ldots$ rad.

3. Bereken met de cosinusregel en de waarde van γ uit vorige deelvraag de lengte van de zijde $c = \ldots\ldots$

4. Bereken de lengte van de zijde c *zonder* de antwoorden van de eerste deelvraag te gebruiken.

Oefening 12.7.2. Bereken alle zijden en hoeken van een driehoek met gegeven zijde $a = 3$ en hoeken $\alpha = \frac{\pi}{4}$ en $\beta = \frac{\pi}{3}$. De notatie is als volgt:



Je mag een rekenmachine gebruiken.

1. Bereken de hoek $\gamma \approx \ldots\ldots$ rad.

2. Bereken de lengte van $b \approx \ldots\ldots$

3. Bereken de lengte van $c \approx \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 13

Goniometrische en cyclometrische functies

(Versie 2026/08/25H.51)

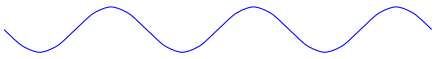
13.1 Goniometrische functies

Met een hoek α hebben we een getal $\sin\alpha$ geassocieerd. Door nu de hoek α te laten *variëren* (dus 'variabel' te maken), bekomen we een *functie* in de 'variabele' α. In de wiskunde gebruiken we dikwijls de letter x voor variabelen. We zullen hier dus ook meestal spreken van $\sin x$ in plaats van $\sin\alpha$. Ook van de cosinus, de tangens en de cotangens kunnen we functies maken.

Definitie 13.1.1 (Goniometrische functies)**.**

De **goniometrische functies** zijn de reële functies sinus, cosinus, tangens en cotangens:

$$\begin{aligned}
\sin &: \quad x \mapsto \sin(x) \\
\cos &: \quad x \mapsto \cos(x) \\
\tan &: \quad x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\cot &: \quad x \mapsto \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

We gaan nu na hoe de grafieken van deze functies er uit zien. We nemen als voorbeeld $\sin : x \mapsto \sin(x)$, waarvan velen de vorm kennen of minstens herkennen: 

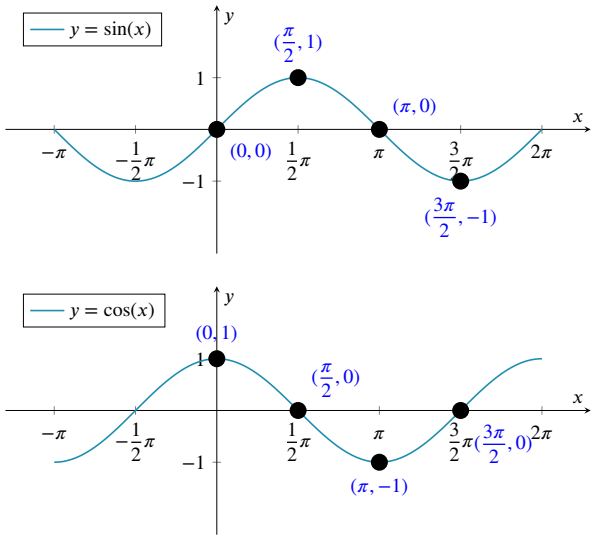
Zonder aanduidingen op de assen ziet de grafiek van $\cos : x \mapsto \cos(x)$ er net hetzelfde uit. Het is dus belangrijk om te weten waar de nulpunten, de maximale en de minimale waarden liggen.

Oefening 13.1.1. Lees volgende functiewaarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 0 = \ldots\ldots$ $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$ $\sin\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin 2\pi = \ldots\ldots$

2. $\cos 0 = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\cos\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$

Met de waarden uit vorige oefening kunnen we nu enkele waarden op de x-as en y-as noteren:



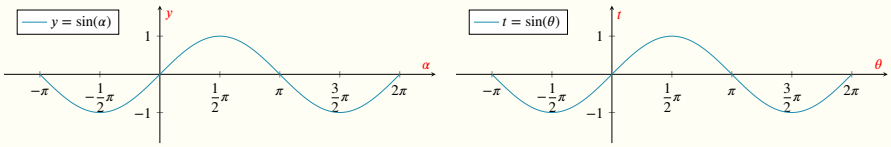
Opmerking 13.1.1.

- Als we sinus, cosinus en tangens als functies beschouwen, geldt dat in principe *altijd* met de variabele uitgedrukt in radialen.

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Goniometrische functies

- Als we de sinus beschouwen als een functie, gebruiken we dikwijls de letter x als variabele eerder dan α. Vooral in toepassingen gebruikt men ook andere letters. Men tekent dan bijvoorbeeld ook grafieken in een αy-vlak of een θt-vlak

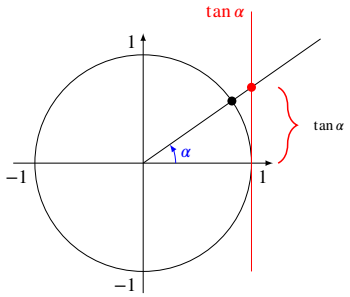


- Het domein van sin en van cos is $\mathbb{R}$ en het beeld is $[-1,1]$.
  Met de uitgebreidere notatie voor functies kunnen we dus ook schrijven

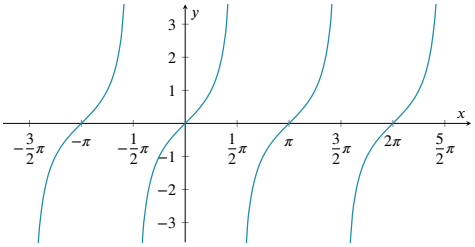
$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \sin(x)$$

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \cos(x)$$

Voor de tangensfunctie $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ merken we op dat ze niet gedefinieerd is in de nulpunten van de noemer, dus als $\cos x = 0$ zoals bijvoorbeeld in $\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ of algemeen als $x \in \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Waar $\sin x = 0$ zal ook de tangensfunctie nul zijn.



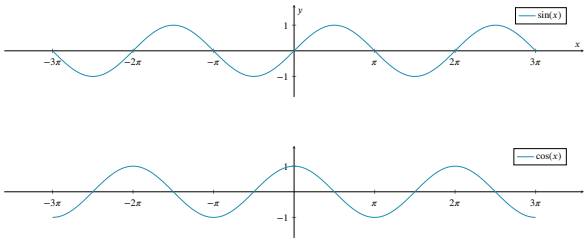
We lezen op de goniometrische cirkel af dat $\tan 0 = 0$, en dat naarmate de hoek groter wordt ook de tangens van de hoek groter wordt. Als de hoek de waarde $\dfrac{\pi}{2}$ krijgt, dan bestaat de tangens niet meer, dan wordt deze 'oneindig'. Volledig gelijkaardig wordt de tangens steeds negatiever als de hoek varieert van 0 tot $-\dfrac{\pi}{2}$. De grafiek van $x \mapsto \tan(x)$ ziet er als volgt uit:

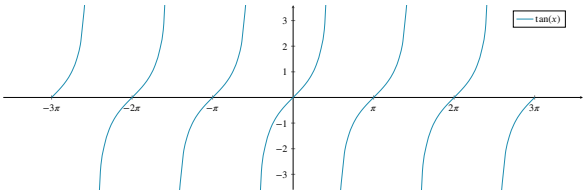


Op de grafieken van sin, cos en tan lees je onderstaande eigenschappen af (die je dus niet van buiten moet leren).

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Goniometrische functies





Eigenschap 13.1.1 (Eigenschappen van goniometrische functies)**.**

(a) de nulpunten van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft nulpunten in $\frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$

(b) de maxima en minima van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft maxima in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de sinusfunctie heeft minima in $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft maxima in $2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft minima in $\pi + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft geen maxima of minima

(c) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ en $\tan(x + \pi) = \tan(x)$

(d) de sinus over een afstand $\frac{\pi}{2}$ naar links verschuiven geeft de cosinus: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

(e) de cosinus over een afstand $\frac{\pi}{2}$ naar rechts verschuiven geeft de sinus: $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

(f) de tangensfunctie heeft *verticale asymptoten* in de punten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$: in die punten zelf is de tangens niet gedefinieerd, maar de grafiek komt er wel willekeurig dicht tegen de verticale rechten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Eigenschap (c) betekent dat sinus, cosinus en tangens *periodische functies* zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Goniometrische vergelijkingen

Vergelijkingen waarin goniometrische functies voorkomen noemen we, weinig verrassend, *goniometrische vergelijkingen*. Voorbeelden zijn $\sin x = 1$, $\sin x = \sin 1$, $\sin x = x$ of $\sin x^2 = 2\cos^2 2x$. De meest nuttige oplossingen van deze goniometrische vergelijkingen zijn meestal niet de *georiënteerde hoeken* die voldoen aan de vergelijking, maar wel *alle maatgetallen* die voldoen. Er zijn geen algemene formules of procedures om willekeurige goniometrische vergelijkingen exact op te lossen, en het volstaat vertrouwd te zijn met de hier behandelde eerder eenvoudige gevallen.

Sommige goniometrische vergelijkingen kan je direct oplossen met behulp van de tabel met gekende waarden, met de grafiek van de goniometrische functies of met de goniometrische cirkel. Omdat we geïnteresseerd zijn in *alle* oplossingen, is het toch belangrijk ook deze vergelijkingen met de nodig aandacht te bestuderen.

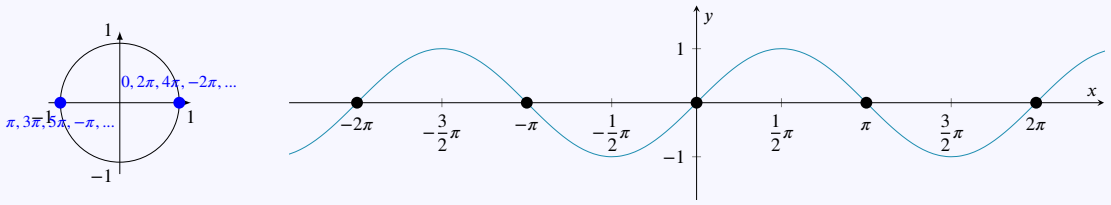
Voorbeeld 13.2.1. Voor welke getallen x geldt dat $\sin x = 0$?

$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$✓

Uitwerking:

Je kan redeneren met de *goniometrische cirkel*: de sinus is de y-coördinaat, of dus de hoogte. Een hoek α met $\sin\alpha = 0$ heeft dus hoogte nul. Zo zijn er twee hoeken, namelijk de nulhoek en de gestrekte hoek. We zoeken echter de *maatgetallen* van die hoeken, en de maatgetallen van de nulhoek zijn $2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$ en de maatgetallen van de gestrekte hoek zijn $\pi + 2k\pi$, ook met $k \in \mathbb{Z}$. Samen geeft dat de maatgetallen $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$: $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Je kan ook redeneren op de *grafiek van de sinusfunctie* en de nulpunten zoeken. Dat zijn precies de punten $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$.



Oefening 13.2.1. Geef alle oplossingen van volgende vergelijkingen:

1. $\sin x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $\cos x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. $\cos x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Voorbeeld 13.2.2. Voor welke getallen x geldt dat $\cos x = \cos\alpha$, met $\alpha \in [0, 2\pi]$?

$\{\pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$✓

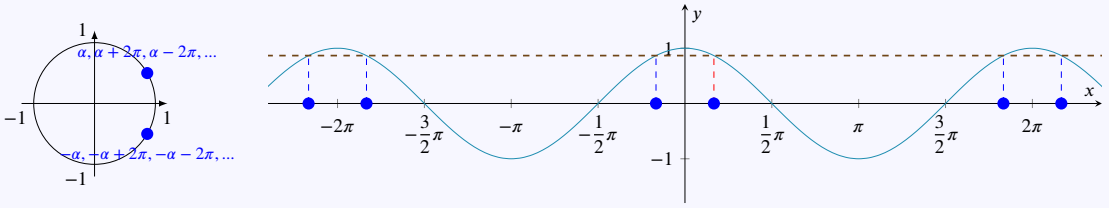
CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Goniometrische vergelijkingen

Uitwerking:

Je redeneert hier best met de *goniometrische cirkel*. α is een vast getal, maar er is geen concrete waarde voor gegeven. De oplossingen zullen dus afhangen van α. Teken daarom een willekeurige hoek α. De cosinus is de x-coördinaat, en dus heeft de hoek $-\alpha$ dezelfde cosinus als α. Er voldoen dus twee hoeken, namelijk α en $-\alpha$ aan de vergelijking. Maar, er worden geen hoeken gevraagd, maar reële getallen, dus maatgetallen van hoeken. Elke hoek heeft oneindig veel maatgetallen, dus de maatgetallen x waarvoor $\cos x = \cos\alpha$ zijn de getallen $\{\pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Je kan ook redeneren op de grafiek van de cosinusfunctie en de hoek α aanduiden op de x-as. Door een verticale lijn vind je dan $\cos\alpha$, en door een horizontale lijn vind je alle punten die dezelfde cosinus hebben.



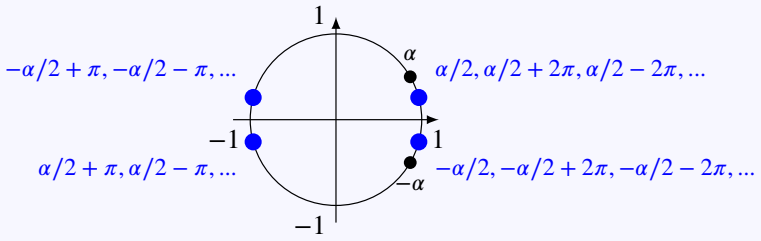
Voorbeeld 13.2.3. Voor welke getallen x geldt dat $\cos 2x = \cos\alpha$, met $\alpha \in [0, 2\pi]$?

$\{\pm\alpha/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$✓

Uitwerking:

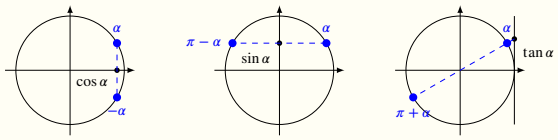
Dit voorbeeld lijkt erg op het vorige.

Uit vorig voorbeeld volgt dat $2x \in \{\pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, en dus $x \in \{\pm\alpha/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



Opmerking 13.2.1.

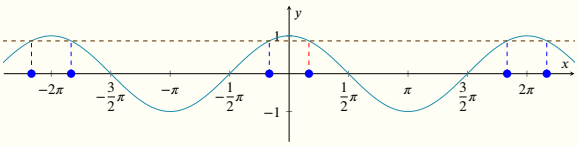
- Vergelijkingen van de vorm $\sin x = \sin\alpha$, $\cos x = \cos\alpha$ of $\tan x = \tan\alpha$, met een gegeven $\alpha \in \mathbb{R}$, kunnen opgelost worden door te redeneren op de *goniometrische cirkel*:
  - duid een willekeurige hoek α aan op de goniometrische cirkel
  - markeer de andere hoek die dezelfde sinus,cosinus of tangens heeft. Voor de cosinus is dat de hoek $-\alpha$, voor de sinus de hoek $\pi - \alpha$ en voor de tangens de hoek $\pi + \alpha$.
  - als de *maatgetallen* van de hoeken worden gevraagd, wat meestal het geval is, tel je bij elke hoek een willekeurig veelvoud van 2π op



CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Goniometrische vergelijkingen

- Dergelijke vergelijkingen kunnen ook worden opgelost door te redeneren op de *grafiek*:
  - teken een horizontale rechte door het gegeven goniometrische getal op de y-as
  - de gezochte maatgetallen komen overeen met de snijpunten van de grafiek



- Je bekomt dus telkens oplossingsverzamelingen van de vorm

$$\begin{array}{ll} \cos x = \cos\alpha & \{\pm\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \sin x = \sin\alpha & \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \tan x = \tan\alpha & \{\alpha + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

- Vergelijkingen van de vorm $\sin x = a$ of $\cos x = a$ zijn enkel oplosbaar als $a \in [-1, 1]$. In dat geval volstaat het van één hoek α te vinden waarvoor $\sin\alpha = a$ om het probleem te reduceren tot het voorgaande geval. Dergelijke hoek α kan je vinden met een rekenmachine, namelijk door boogcosinus, boogsinus of boogtangens te berekenen.
- In een vergelijking van de vorm $\sin x = \sin\alpha$ mag je *niet* gewoon de sinus schrappen, en concluderen dat $x = \alpha$. Inderdaad, $x = \alpha$ is *een* oplossing, maar er zijn er meer.
- Voor vergelijkingen van de vorm $\cos mx = \cos\alpha$, met $m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$, volstaat het alle oplossingen van $\cos x = \cos\alpha$ te delen door m, en dat geeft dan $x \in \left\{\pm\frac{\alpha}{m} + \frac{2k}{m}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

CC BY-NC-SA 4.0

13.2.A Oefeningen goniometrische vergelijkingen

Oefening 13.2.2. Los volgende goniometrische vergelijkingen op.

1. $\tan x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $\sin 2x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/4, 3\pi/4\}$	$\{\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pm\pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

3. $\cos 7x = \cos \frac{\pi}{6}$ heeft als oplossingsverzameling

$\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{42} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\pm\frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. $\cos 2x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pm\pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Oefening 13.2.3. Los volgende goniometrische ongelijkheden op.

1. $\sin x < 0$, met $x \in [0, 4\pi]$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

2. $\sin 2x < 0$, met $x \in [0, 2\pi]$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

Oefening 13.2.4. Los volgende goniometrische vergelijkingen op.

1. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\sin x = \sin y$, met $y \in [0, 2\pi]$? $x \in$ ... ...

2. $\cos x = \frac{1}{2}$ heeft als oplossingverzameling: ... ...

3. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

4. $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

5. $\sin x = \cos x$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

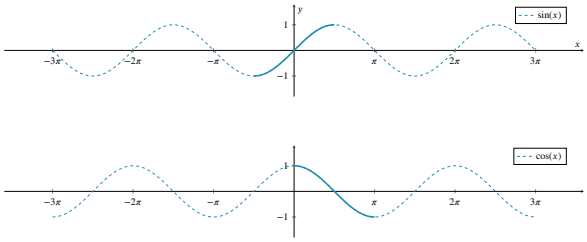
6. $\sin x = -\cos x$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

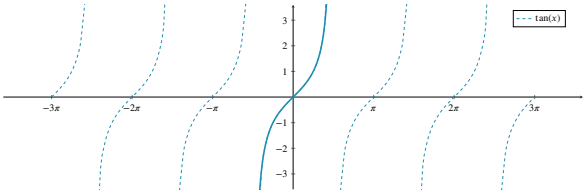
CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Cyclometrische functies

We bestuderen de *inverse functies* van de gekende functies sinus, cosinus en tangens. We zoeken dus niet de sinus van een bepaald getal x (dus niet r zodat $r = \sin x$), maar net het omgekeerde: we krijgen $r \in [-1, 1]$ en zoeken x zodat $\sin x = r$. Dat is enigszins subtiel omdat er natuurlijk *meerdere* dergelijke getallen x bestaan. Voor $r = 0$ weten we bijvoorbeeld dat $\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(-\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = 0$.

Om dit probleem op te lossen kijken we eerst naar de grafieken van sin, cos en tan:





Op de grafiek kan je zien dat, wanneer we het domein van sin beperken tot $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *wel* geldt dat voor elke $r \in [-1, 1]$ er *één unieke* x is zodat $\sin x = r$. Om dezelfde reden spreken we af om het domein van cos te beperken tot $[0, \pi]$ en dat van tan tot $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

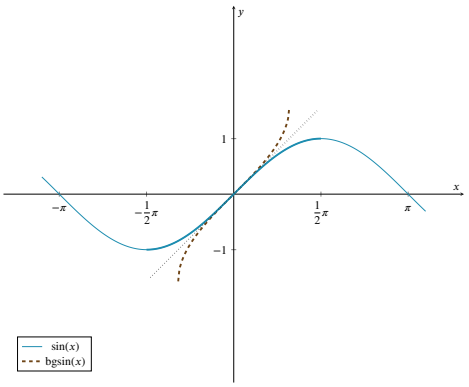
Definitie 13.3.1 (Cyclometrische functies)**.** Volgende **cyclometrische functies** zijn de inversen van de goniometrische functies als we het domein van die goniometrische functies gepast beperken:

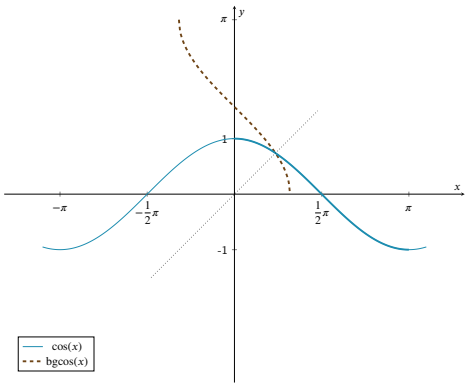
$$\text{bgsin} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : x \mapsto \text{bgsin}(x) \text{ is invers van } \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \sin(x)$$

$$\text{bgcos} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] : x \mapsto \text{bgcos}(x) \qquad \cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \cos(x)$$

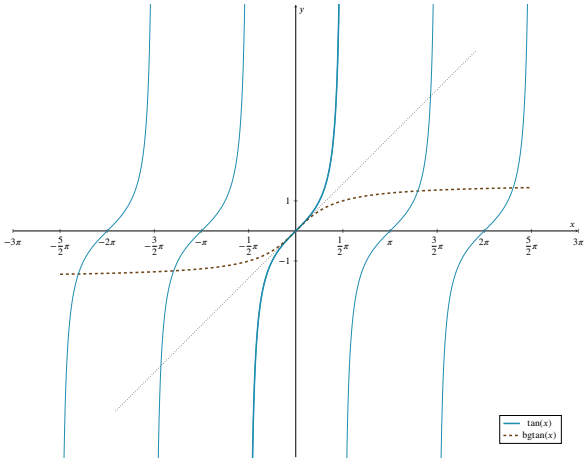
$$\text{bgtan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: x \mapsto \text{bgtan}(x) \qquad \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x)$$

We bekomen de *grafiek* van de cyclometrische functies door het domein van de goniometrische functies te beperken, en de grafiek te spiegelen over de eerste bissectrice:

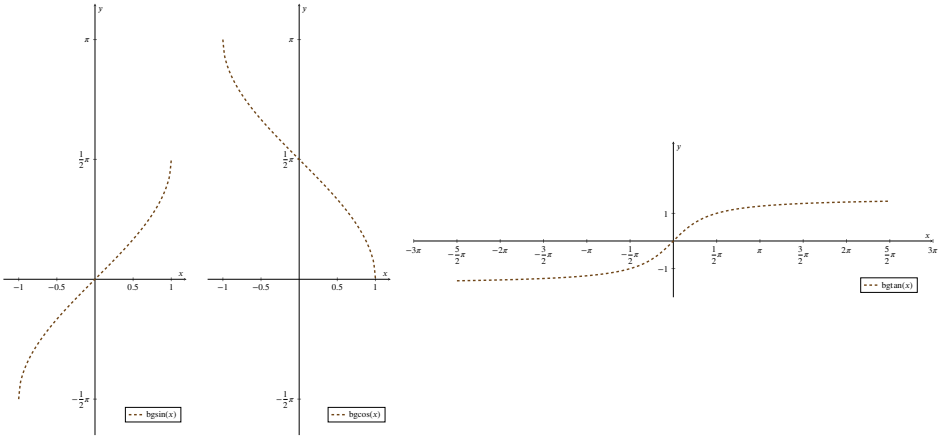




13.3 Cyclometrische functies



en dat resulteert in volgende grafieken van bgsin, bgcos en bgtan:



Opmerking 13.3.1.

- Cyclometrische functies geven *altijd* de waarde van een hoek uitgedrukt in radialen.
- De naam *boog*sinus komt van het feit dat de boogsinus de lengte geeft van de *boog* met een gegeven sinus. Men gebruikt zowel de notaties bgsin, Bgsin, arcsin als asin.
- De boogsinus en boogtangens is *altijd* een getal tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of IV.
- De boogcosinus van een getal is *altijd* een getal tussen 0 en π, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of II.
- Zoals steeds voor inverse functies geldt dat de grafiek van de sin en bgsin elkaars *spiegelbeeld* zijn over de eerste bissectrice $y = x$. Idem voor cos en bgcos, en tan en bgtan.
- bgsin en bgcos zijn slechts gedefinieerd op het interval $[-1, 1]$.
- bgtan is gedefinieerd op $\mathbb{R}$.
- bgsin en bgtan zijn *stijgende* functies, bgcos is een *dalende* functie.
- Soms wordt ook de standaard wiskunde notatie voor inverse functies $\sin^{-1}(x)$ gebruikt. Meestal wordt dat echter vermeden omdat er verwarring mogelijk is met $(\sin(x))^{-1} = \frac{1}{\sin(x)}$ wat iets

CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Cyclometrische functies

heel anders is. De verwarring is fundamenteler bij de goniometrische functies dan elders omwille van de historisch gegroeide conventie om $\sin^2(x)$ te schrijven voor $(\sin(x))^2$.

Voorbeeld 13.3.1.

- $\text{bgsin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ want $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\text{bgsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ want $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ en $-\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\text{bgcos}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ want $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\text{bgcos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ want $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{3\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\text{bgtan}\,1 = \frac{\pi}{4}$ want $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ want $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$ en $-\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

13.3.1 Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies

CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Cyclometrische functies

Voorbeeld 13.3.2 (Voorbeelden boogtangens)**.**

We kijken wat er gebeurt als we de functies bgtan en tan samenstellen. We weten bijvoorbeeld dat $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$, $\text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ en $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$. Hiermee kunnen we berekenen dat

- $\tan(\text{bgtan}(1)) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$. Voor $x = 1$ geldt bijgevolg $\tan(\text{bgtan}(x)) = x$.
- $\tan(\text{bgtan}(-1)) = \tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$. Voor $x = -1$ geldt ook $\tan(\text{bgtan}(x)) = x$.
- $\text{bgtan}(\tan(\frac{\pi}{4})) = \text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{\pi}{4}$ geldt bijgevolg $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha$.
- $\text{bgtan}(\tan(\frac{3\pi}{4})) = \text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ is $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) \neq \alpha$. Hier geldt dat $\text{bgtan}(\tan(\frac{3\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \pi$.

In het algemeen geldt voor hoeken tussen $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$ (hoeken in het 2de en 3de kwadrant) dat:

$$\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha - \pi \text{ en dus } \alpha = \text{bgtan}(\tan\alpha) + \pi.$$

Voor hoeken in het 1ste en 4de kwadrant geldt wel $\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha$.

Voor alle getallen x geldt *wel* dat $x = \tan(\text{bgtan}(x))$.

Merk op: We hebben hier bij de functie boogtangens gekozen om x als naam van de variable te nemen omdat de *boog*tangens genomen wordt van een gewoon *reëel getal*, terwijl we voor de functie *tangens* hierboven α hebben gebruikt omdat de tangens genomen wordt van de (getalwaarde van) een *hoek* (maar die is *ook* uitgedrukt als een reëel getal). De naam van de variabele kan natuurlijk vrij worden gekozen, en dikwijls wordt ook voor de tangens de letter x gebruikt.

Eigenschap 13.3.1 (Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies)**.**

- Als x een getal is dan geldt

$$\begin{aligned} &\text{als } x \in [-1,1] : \sin(\text{bgsin}(x)) = x. && \text{Voor andere } x \text{ is } \text{bgsin}(x) \text{ niet gedefinieerd} \\ &\text{als } x \in [-1,1] : \cos(\text{bgcos}(x)) = x. && \text{Voor andere } x \text{ is } \text{bgsin}(x) \text{ niet gedefinieerd} \\ &\text{als } x \in \mathbb{R} : \tan(\text{bgtan}(x)) = x \end{aligned}$$

- Als α het maatgetal is van een hoek dan geldt

$$\begin{aligned} \text{als } \alpha \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] &: \text{bgsin}(\sin(\alpha)) = \alpha. \\ \text{als } \alpha \in [0,\pi] &: \text{bgcos}(\cos(\alpha)) = \alpha \\ \text{als } \alpha \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[&: \text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha \end{aligned}$$

  Voor α buiten deze intervallen gelden deze gelijkheden niet.

CC BY-NC-SA 4.0

13.3.A Oefeningen cyclometrische functies

Oefening 13.3.1. Bereken volgende uitdrukkingen.

1. $\text{bgtan}(\tan\frac{\pi}{3}) = \ldots\ldots$
2. $\text{bgtan}(\tan\frac{2\pi}{3}) = \ldots\ldots$
3. $\text{bgtan}(\tan\frac{3\pi}{3}) = \ldots\ldots$
4. $\text{bgtan}(\tan\frac{4\pi}{3}) = \ldots\ldots$
5. $\text{bgtan}(\tan\frac{5\pi}{3}) = \ldots\ldots$
6. $\text{bgtan}(\tan\frac{6\pi}{3}) = \ldots\ldots$
7. $\text{bgtan}(\tan\frac{7\pi}{3}) = \ldots\ldots$
8. $\text{bgtan}(\tan\frac{8\pi}{3}) = \ldots\ldots$

Oefening 13.3.2.

1. $\tan\left(\text{bgcos}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) =$ $\boxed{-\sqrt{3}}$ $\boxed{\sqrt{3}}$ $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ $\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$ $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(Bron: IJkingstoets burgerlijk ingenieur, september 2013)

2. $\sin\left(\text{bgcos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$ $\boxed{-\frac{1}{2}}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ $\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(Bron: IJkingstoets burgerlijk ingenieur, september 2014)

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

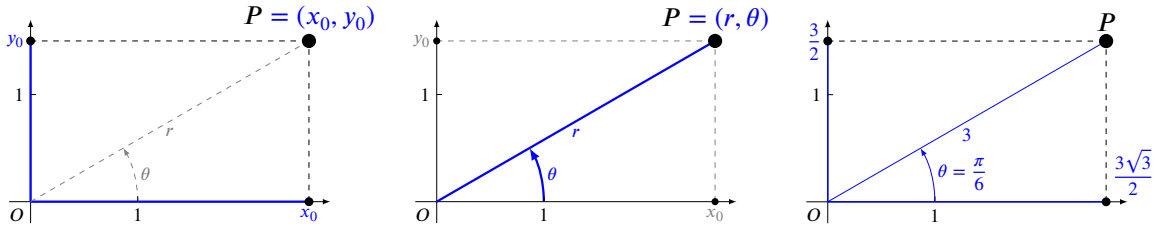
Voorkennis Wiskunde

Module 14
Poolcoordinaten

(Versie 2026/08/25H.51)

14.1 Poolcoördinaten

Gewoonlijk gebruiken we in het vlak een koppel *cartesische coördinaten* (x_0, y_0) om het punt aan te duiden dat in een gegeven assenstelsel x_0 *eenheden naar rechts* ligt van de oorsprong en y_0 *eenheden naar boven*. Er zijn echter ook alternatieve manieren om een punt in het vlak te bepalen, en in sommige toepassingen zijn die alternatieven veel handiger. De zogenaamde *poolcoördinaten* leggen een punt vast via een *hoek* en een *afstand*.



Op de eerste tekening zien we de cartesische coördinaten (x_0, y_0) van een punt P. De getallen x_0 en y_0 zijn de lengtes (met een teken) van de loodrechte projecties op respectievelijk de horizontale x-as en de verticale y-as.

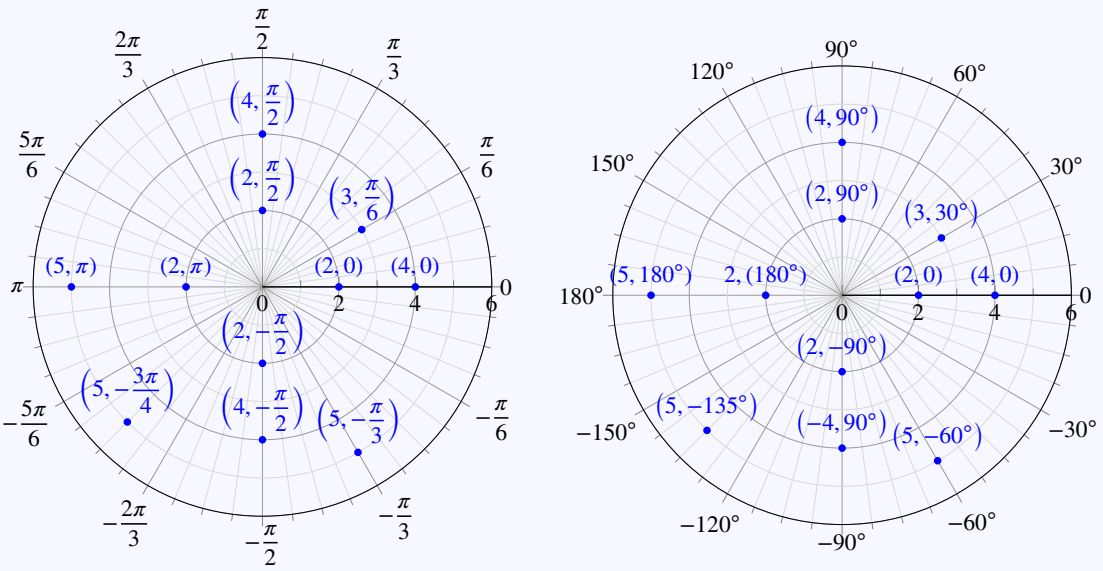
Op de tweede tekening zien we hoe je hetzelfde punt P ook kan vastleggen door de afstand r tot de oorsprong en de hoek θ met de positieve x-as. We noemen (r, θ) *pool*coördinaten van P:

Definitie 14.1.1. Poolcoördinaten van een punt P zijn elk koppel reële getallen (r, θ) waarvoor

- r de afstand is van de oorsprong O tot P (en dus $r \geq 0$)
- θ de grootte is in radialen van de (georiënteerde) hoek tussen de positieve x-as en het lijnstuk OP.

Voor een gegeven punt P ligt de afstand r vast, maar θ is slechts bepaald op een veelvoud van 2π na.

Voorbeeld 14.1.1 (Poolcoördinaten)**.**



Merk op dat de hoek θ steeds moet uitgedrukt zijn in radialen. De rechtse figuur is dus enkel bedoeld

14.1 Poolcoördinaten

als hulp voor wie (nog) niet voldoende vertrouwd is met hoeken uitgedrukt in radialen.

Oefening 14.1.1. Bij welk punt op de figuur onderaan horen volgende poolcoördinaten?

1. $(1, \frac{\pi}{6}) = \ldots\ldots$

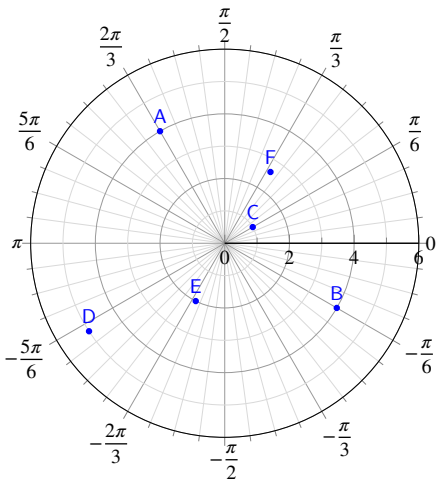
2. $(4, \frac{2\pi}{3}) = \ldots\ldots$

3. $(4, \frac{-\pi}{6}) = \ldots\ldots$

4. $(2, \frac{4\pi}{3}) = \ldots\ldots$

5. $(5, 10) = \ldots\ldots$

6. $(\frac{5\pi}{6}, 1) = \ldots\ldots$



Opmerking 14.1.1.

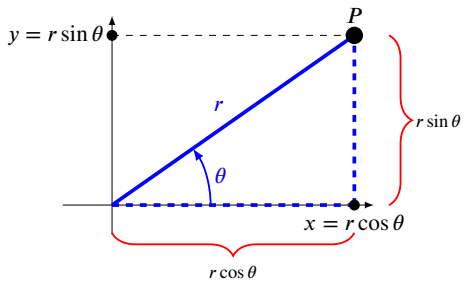
- Poolcoördinaten van een punt zijn *niet uniek bepaald*: als (r, θ) poolcoördinaten zijn van een punt P, dan zijn alle $(r, \theta + 2k\pi)$ met $k \in \mathbb{Z}$ ook poolcoördinaten van P. Soms spreekt men toch van *de* poolcoördinaten door te eisen dat bv. $\theta \in [0, 2\pi[$.
- De oorsprong heeft nog veel meer poolcoördinaten, namelijk alle koppels $(0, \theta)$ met $\theta \in \mathbb{R}$.
- De *notatie* van poolcoördinaten als een koppel (r, θ) is enigszins dubieus: de uitdrukking 'het punt $(1, \pi)$' is namelijk dubbelzinnig. Inderdaad, afhankelijk of $(1, \pi)$ de cartesische dan wel de poolcoördinaten zijn gaat het om een *ander* punt. Tenzij de precieze betekenis erg duidelijk blijkt uit de context, is het dus aangewezen om steeds te vermelden om *welke soort* coördinaten het gaat: het punt met *cartesische* coördinaten (a, b) of het punt met *pool*coördinaten (a, b).

Als een punt zowel cartesische coördinaten heeft als poolcoördinaten, ligt het voor de hand zich af te vragen of (en hoe) we de ene kunnen omrekenen naar de andere.

- Omrekenen van poolcoördinaten (r, θ) naar cartesische coördinaten (x, y) is eenvoudig want uit de *formules* van de sinus en de cosinus in de rechthoekige driehoek met hoekpunten $(0, 0), (x, 0)$ en (x, y) volgt onmiddellijk dat
$$x = r\cos\theta \text{ en } y = r\sin\theta.$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Poolcoördinaten



- Omgekeerd, stel dat cartesische coördinaten (x, y) gegeven zijn, en we willen de poolcoördinaten (r, θ) bepalen. Omdat $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$, vinden we dat $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$, en dus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Als we $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ invullen in $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ krijgen we

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

  Dit stelsel bepaalt ondubbelzinning de hoek θ.

Volgende eigenschap vat dat samen:

Eigenschap 14.1.1 (Transformatieformules cartesische coördinaten en poolcoördinaten)**.**

Een punt P met poolcoördinaten (r, θ) heeft als cartesische coördinaten (x, y):

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Een punt P met cartesische coördinaten (x, y) heeft poolcoördinaten (r, θ) die voldoen aan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Voorbeeld 14.1.2. Omrekenen van poolcoördinaten naar cartesische coördinaten of omgekeerd:

1. Vind cartesische coördinaten van het punt met poolcoördinaten $(2, \frac{17\pi}{6})$.

Uitwerking: Uit de formule $x = r\cos\theta$ volgt dat $x = 2\cos\frac{17\pi}{6} = 2\cos\frac{5\pi}{6} = -2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$, en uit de formule $y = r\sin\theta$ volgt dat $y = 2\sin\frac{17\pi}{6} = 2\sin\frac{5\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.

De cartesische coördinaten zijn dus $(-\sqrt{3}, 1)$

2. Vind poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$.

Uitwerking: Uit de formule voor r volgt dat $r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Poolcoördinaten

Uit die voor $\cos\theta$ volgt dat $\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$, dus is $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ of $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$.

Uit die voor $\sin\theta$ volgt dat $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, dus is $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ of $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

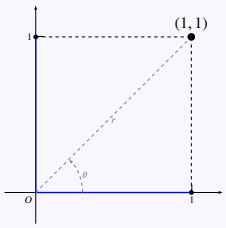
De poolcoördinaten zijn dus $(2\sqrt{2}, \dfrac{2\pi}{3})$

De poolcoördinaten van sommige punten kunnen sneller bepaald worden op een tekening.

Voorbeeld 14.1.3 (Poolcoördinaten van een punt met gegeven cartesische coördinaten grafisch bepalen)**.** .

Zoek de poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(1, 1)$.

Uitwerking: We zien in dit geval meteen dat $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. De straal r kan berekend worden via $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.



Opmerking 14.1.2. Omrekenen tussen cartesische coördinaten en poolcoördinaten

Omrekenen van (r, θ) naar (x, y) is eenvoudig via $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$.
Omrekenen van (x, y) naar (r, θ) is ook eenvoudig voor r, want $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, maar wat moelijker voor θ.
Het stelsel

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

bepaalt ondubbelzinnig de hoek θ. Inderdaad, als we zowel de cosinus als de sinus van een hoek kennen, ligt die hoek volledig vast. Hoeken waarvan we de cosinus en de sinus kennen, zoals bijvoorbeeld $\dfrac{\pi}{3}$ kunnen we met dit stelsel gemakkelijk vinden.

Om dit stelsel in het algemeen op te lossen (voor een punt verschillend van de oorsprong) hebben we echter de cyclometrische functies boogsinus, boogcosinus of boogtangens nodig.

Als $x \neq 0$ kunnen we de tweede vergelijking delen door de eerste (waardoor de vierkantswortel wegvalt) en krijgen we

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{als } x \neq 0$$

Als $x > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

$$\theta = \operatorname{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{als } x > 0$$

Als $x < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

$$\theta = \operatorname{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{als } x < 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Poolcoördinaten

Als $x = 0$, dan ligt het punt (x, y) dus op de y-as en geldt

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } x = 0, y > 0$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als } x = 0, y < 0$$

Samengevat geeft dit voor θ:

$$\theta = \begin{cases} \text{bgtan}\,\dfrac{y}{x} & \text{als } x > 0 \\ \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{y}{x} & \text{als } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{als } x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{als } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

We hernemen een vorig voorbeeld:

Voorbeeld 14.1.4.

1. Vind poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$.

Uitwerking: $r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$x < 0$ dus $\theta = \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{y}{x} = \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = \pi + \text{bgtan}(-\sqrt{3}) = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

De poolcoördinaten zijn dus $(2\sqrt{2}, \dfrac{2\pi}{3})$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1.A Oefeningen poolcoördinaten

Oefening 14.1.2. Omrekenen van poolcoördinaten naar cartesische coördinaten.

1. Het punt A met poolcoördinaten $(1, \pi)$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

2. Het punt B met poolcoördinaten $(1, \frac{\pi}{2})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

3. Het punt C met poolcoördinaten $(2, -\frac{\pi}{2})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

4. Het punt D met poolcoördinaten $(2, \frac{\pi}{4})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

5. Het punt E met poolcoördinaten $(5, \frac{5\pi}{4})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

Oefening 14.1.3. Omrekenen van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten. (Kies de hoek θ steeds tussen 0 en 2π).

1. Het punt A met cartesische coördinaten $(-1, -1)$ heeft poolcoördinaten $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$

2. Het punt B met cartesische coördinaten $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ heeft poolcoördinaten $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

14.2 Poolvergelijkingen

Een veel gebruikte manier om krommen te beschrijven is door middel van *vergelijkingen* in cartesische coördinaten, zoals bijvoorbeeld $x^2 + y^2 = 1$ voor een cirkel. Voor sommige krommen zijn de vergelijkingen in poolcoördinaten echter veel eenvoudiger.

Voorbeeld 14.2.1. De vergelijking van een cirkel in poolcoördinaten.

Uit de stelling van Pythagoras volgt dat de punten (x, y) waarvoor $x^2 + y^2 = 4$ een cirkel vormen met straal 2 en centrum in de oorsprong. In cartesische coördinaten is de vergelijking van de cirkel $C(O, 2)$ met oorsprong O en straal 2 dus

$$C(O, 2) \leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad \text{vergelijking cirkel in cartesische coördinaten}$$

Als we een gelijkaardige voorwaarde zoeken voor de punten van de cirkel $C(O, 2)$ uitgedrukt in poolcoördinaten (r, θ) vinden we een veel eenvoudigere uitdrukking: een punt (r, θ) ligt natuurlijk op $C(O, 2)$ zodra $r = 2$. Dus

$$C(O, 2) \leftrightarrow r = 2 \quad \text{vergelijking cirkel in poolcoördinaten}$$

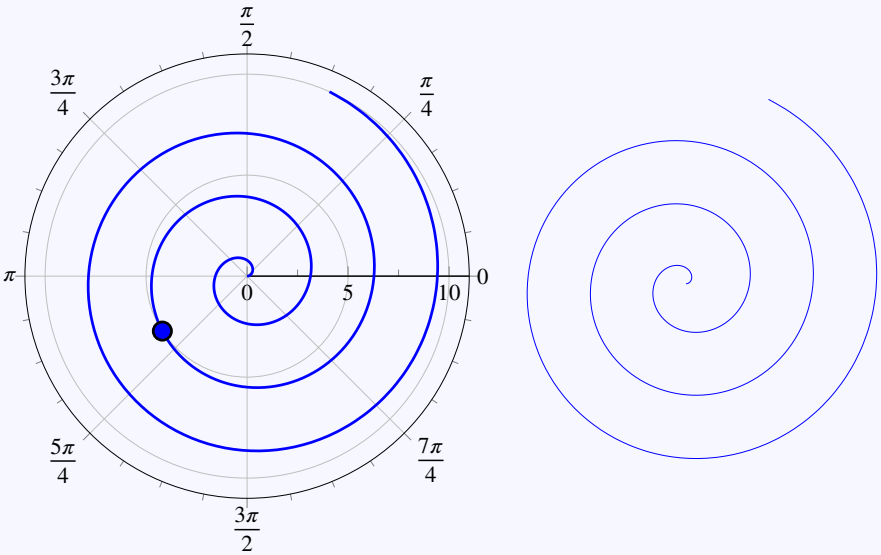
We stellen vast dat de vergelijking in poolcoördinaten veel eenvoudiger is.

Voorbeeld 14.2.2. De spiraal van Archimedes

In de figuur hieronder zijn de punten getekend die voldoen aan de poolvergelijking (met $r \geq 0$)

$$2r = \theta.$$

Deze kromme noemt men een *Archimedische spiraal*.



Het punt met poolcoördinaten $(5, 10)$ voldoet aan de vergelijking, en ligt dus op de kromme.

Uitdaging: Ligt het punt met poolcoördinaten $(5, 10 - 2\pi)$ op de kromme ? En voldoet het koppel $(5, 10 - 2\pi)$ aan de vergelijking? Is dat een probleem? Waarom wel of waarom niet?

Definitie 14.2.1 (Poolvergelijking)**.**

Een vergelijking $f(r, \theta) = 0$ in de twee poolcoördinaten r en θ wordt een **poolvergelijking** genoemd.

CC BY-NC-SA 4.0

14.2 Poolvergelijkingen

De verzameling van de punten $P(r,\theta)$ die voldoen aan de vergelijking bepaalt een kromme $\mathcal{C}$ in het vlak, en $f(r,\theta)$ is *een* poolvergelijking *van* die kromme.

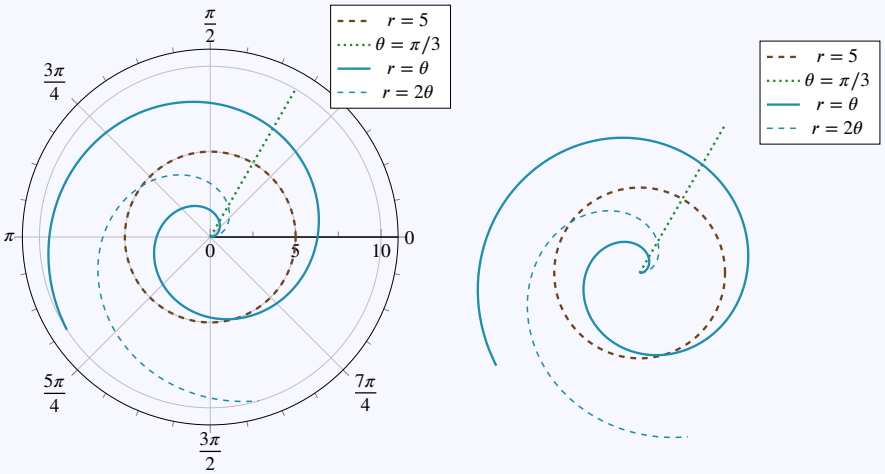
Opmerking 14.2.1.

- Een punt $P(r,\theta)$ ligt op de kromme met poolvergelijking $f(r,\theta)=0$ als en slechts als *een* stel poolcoördinaten van P voldoet aan de poolvergelijking. Dat zijn niet noodzakelijk (r,θ), maar mogelijk bv $(r,\theta-24\pi)$.

  Voorbeeld: Het punt P met poolcoördinaten $(2\pi,0)$ ligt op de kromme met vergelijking $r=\theta$ hoewel duidelijk $2\pi\neq 0$. Maar, het punt P heeft ook $(2\pi,2\pi)$ als poolcoördinaten die wel voldoen (want de tweede coördinaat θ is maar op een factor 2π na bepaald).

- θ wordt *steeds* uitgedrukt in *radialen*.

Voorbeeld 14.2.3. Enkele krommen met eenvoudige poolvergelijkingen



Met behulp van de transformatieformules ken je volgende oefeningen oplossen.

Oefening 14.2.1. Geef een poolvergelijking voor volgende krommen.

1. de rechte $x=2$: ... ...

2. de cirkel met straal a en centrum $(0,a)$: ... ...

Oefening 14.2.2. Geef een cartesische vergelijking voor volgende krommen:

1. de kromme met poolvergelijking $r=2$: ... ...

2. de kromme met poolvergelijking $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$: ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 15
Vectoren in de fysica

(Versie 2026/08/25H.51)

15.1 Vectoren in de fysica

15.1.1 Vectoren als objecten met grootte, richting en zin

Als we de fysische wereld wiskundig willen beschrijven en bestuderen, stellen we al snel vast dat er twee essentieel verschillende *soorten* fysische grootheden bestaan.

Enerzijds zijn er grootheden als lengte, massa of temperatuur: die worden uitgedrukt door een *getal* en een *eenheid*, bijvoorbeeld 2 meter of 3,14 kilogram of 37,5 graden Celsius. Het getal duidt aan *hoeveel keer* de eenheid moet worden genomen, of correcter geformuleerd, met welke factor we de eenheid moeten *herschalen* om de concrete hoeveelheid te vinden: 2 meter betekent dat je de eenheidsmeter met een factor twee moet vermenigvuldigen (of herschalen), net zoals 3,14 kilogram betekent dat je de eenheidskilogram met een factor 3,14 moet herschalen. Dergelijke grootheden noemt men in de fysica **scalaire grootheden**.

Maar een verplaatsing, snelheid, kracht of elektrisch veld kan in het algemeen *niet* worden uitgedrukt door een getal en een eenheid. Deze grootheden hebben telkens een grootte, een richting en een zin, en men noemt ze **vectoriële grootheden**.

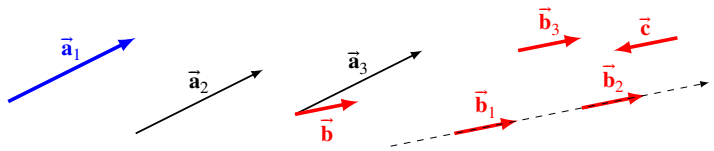
Definitie 15.1.1 (Vectoren in de fysica)**.**

Een **(vrije) vector** $\vec{\mathbf{a}}$ is een object met een *grootte*, een *richting* en een *zin*.

Twee vrije vectoren zijn aan elkaar *gelijk* zodra ze dezelfde grootte, richting en zin hebben.

De **nulvector** is de unieke vector met grootte nul.

Voor sommige fysische grootheden zoals krachten is eigenlijk zelfs nog een iets strenger begrip nodig: het aangrijpingspunt (het vertrekpunt van de pijl) is bij een kracht wel degelijk van belang. Men spreekt dan van een **gebonden vector**. De **drager** van een gebonden vector is de rechte waarop de vector ligt. Bij **vrije vectoren** die we hierboven hebben gedefinieerd, is het aangrijpingspunt *niet* van belang.



Een **vrije** vector stellen we grafisch voor door een *pijl* te tekenen vanaf een (willekeurig) *beginpunt* met de gegeven grootte, richting en zin naar een daardoor uniek bepaald *eindpunt*. Een pijl vanaf een ander beginpunt maar met dezelfde *grootte*, *richting* en *zin* stelt dan *dezelfde vrije vector* voor. Merk wel op dat het begrip richting hier in een wat speciale betekenis wordt gebruikt: in deze wiskundige context geeft de *richting* enkel aan met welke rechte(n) de vector evenwijdig is. Dat laat nog twee mogelijkheden open naar welke *kant* –in welke *zin*– de vector wijst.

In de figuur hierboven zijn $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2$ en $\vec{\mathbf{a}}_3$ telkens *dezelfde vrije vector*, maar wel *andere gebonden vectoren*. Ook $\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2$ en $\vec{\mathbf{b}}_3$ stellen vier keer dezelfde vrije vector voor. Vector $\vec{\mathbf{c}}$ heeft dezelfde richting, maar de omgekeerde zin van vector $\vec{\mathbf{b}}$. De gebonden vectoren $\vec{\mathbf{b}}_1$ en $\vec{\mathbf{b}}_2$ hebben dezelfde *drager* omdat ze op dezelfde rechte liggen.

Bij de nulvector heeft de pijl lengte nul, en het beginpunt en eindpunt vallen dus samen. De nulvector wordt dus grafisch voorgesteld als een punt, en er bestaat slechts één *nulvector*.

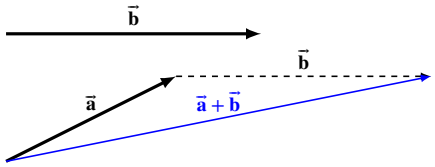
15.1.2 Basisbewerkingen met vectoren

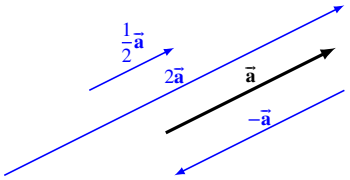
Met vrije vectoren kan je twee belangrijke bewerkingen uitvoeren:

(a) twee vectoren bij elkaar **optellen**. De *som* $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ van twee vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ bekom je door ze *achter elkaar te leggen*: je legt het *begin*punt van $\vec{\mathbf{b}}$ in het *eind*punt van $\vec{\mathbf{a}}$, en de som is dan de vector van het beginpunt van $\vec{\mathbf{a}}$ naar het eindpunt van $\vec{\mathbf{b}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

15.1 Vectoren in de fysica



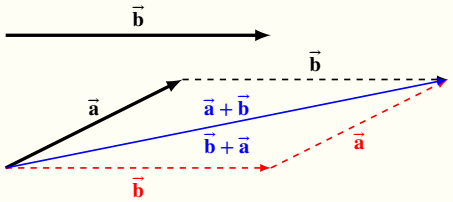


(b) een vector **scalair vermenigvuldigen** met een getal. Een vector $\vec{\mathbf{a}}$ vermenigvuldigen met een getal r geeft een nieuwe *herschaalde* vector $r\vec{\mathbf{a}}$, die *dezelfde richting* heeft als $\vec{\mathbf{a}}$ maar $|r|$ keer *groter* is. Als r positief is wordt de zin behouden en als r negatief is krijgt $r\vec{\mathbf{a}}$ de tegengestelde zin van $\vec{\mathbf{a}}$.

De scalaire vermenigvuldiging behoudt dus de richting, vermenigvuldigt de grootte met $|r|$ en behoudt al dan niet de zin naargelang het teken van r.

Opmerking 15.1.1.

- Als we de som *in de andere volgorde* zouden berekenen, dan merken we op dat we voor $\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}$ een *andere constructie* maken dan voor $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$. We construeren inderdaad een *andere* driehoek. Toch bekomen we steeds *dezelfde resultaatvector* omdat beide driehoeken samen een parallellogram vormen, en de twee sommen allebei gelijk zijn aan dezelfde diagonaal van dat parallellogram, en dus ook gelijk aan elkaar. We zeggen dat de optelling van vectoren *commutatief* is, en men spreekt ook van de *parallellogramregel* voor het optellen van vectoren.



- Behalve de optelling en de scalaire vermenigvuldiging bestaan er nog andere bewerkingen met vectoren. Zo associeert het **inwendig product** (of scalair product) met twee vectoren een *getal* (een scalar). In de driedimensionale ruimte bestaat er ook een **vectorieel product** dat met twee vectoren die nieuwe *vector* associeert.

CC BY-NC-SA 4.0

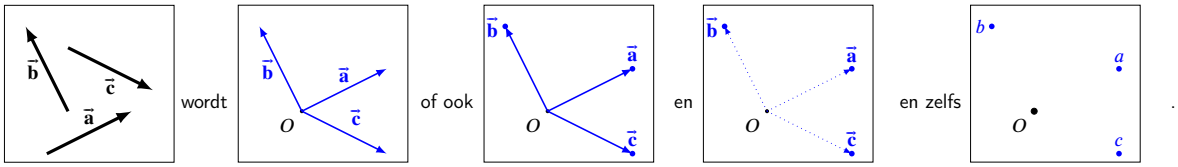
15.2 Assenstelsels en coördinaten

We zullen hier met elke vrije vector in het vlak een koppel getallen associëren, waardoor het mogelijk wordt om ook algebraïsch te rekenen met vectoren. We tonen de redenering in het vlak, maar ze werkt even goed in dimensie 3 (of in dimensie n, met $n \in \mathbb{N}$).

Door *één vast punt* te kiezen in het vlak en af te spreken om alle vrije vectoren te tekenen met dat vaste punt als aangrijpingspunt, krijgen we voor elke vrije vector een *unieke* voorstelling: de pijl die vertrekt uit dat gekozen punt. Een logische naam voor dat gekozen punt is **de oorsprong**, omdat we alle vectoren laten beginnen in dat punt. Als de oorsprong vastligt, is een vector volledig bepaald door zijn eindpunt.

Een vlak met één vast gekozen punt noemen we een **gepunt vlak**. In een gepunt vlak komt met elk *punt* een unieke *vector* overeen, en met elke *vector* een uniek *punt*. In een *gepunt* vlak kunnen we dus vectoren en punten met elkaar identificeren. Merk op dat dat in een gewoon vlak, waar *geen* oorsprong vast ligt, *niet mogelijk* is: daar heb je steeds *twee punten* nodig om een vector te bepalen. De oorsprong is dus eigenlijk een eens-en-voor-altijd afgesproken 'eerste punt' of het beginpunt van een vector.

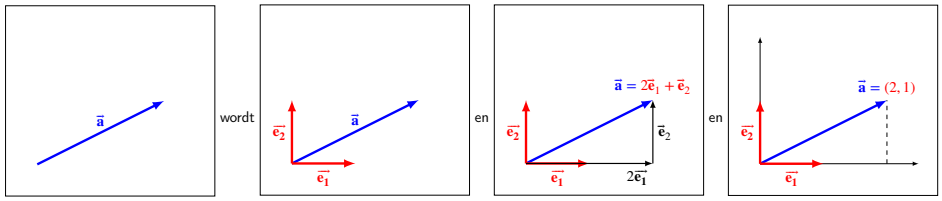
Samengevat: in *een vlak met een oorsprong* zijn *vectoren en punten* eigenlijk hetzelfde. We zullen verder zien dat hetzelfde geldt in de driedimensionale ruimte.



Vrije vectoren | 'gebonden' aan O | markeer eindpunten | beklemtoon eindpunt | beschouw als 'punten'

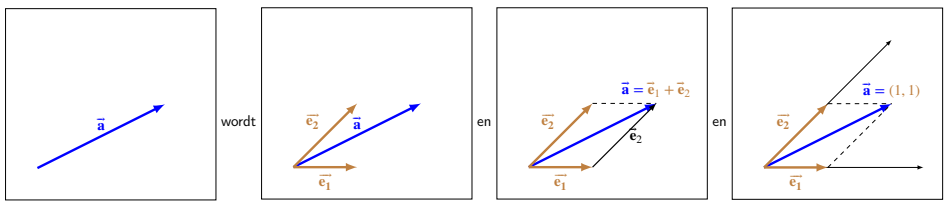
Door *twee willekeurige gebonden vectoren* $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ te kiezen met hetzelfde beginpunt en die geen veelvoud zijn van elkaar bepalen we een **assenstelsel**. De **assen** zijn de twee dragers van de vectoren en de twee vectoren $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ zelf worden de **basisvectoren** genoemd van het assenstelsel. Het gemeenschappelijke beginpunt is de **oorsprong** van het assenstelsel.

Elke vector $\vec{\mathbf{a}}$ *van het vlak* kan dan op een unieke wijze geschreven worden als $\vec{\mathbf{a}} = a_1\vec{\mathbf{e}}_1 + a_2\vec{\mathbf{e}}_2$. We noemen de getallen a_1 en a_2, of ook het koppel (a_1, a_2), de **coördinaten** of de **scalaire componenten** van de vector $\vec{\mathbf{a}}$ ten opzichte van de **basisvectoren** $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$.



Vector $\vec{\mathbf{a}}$ | Keuze $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ | $\vec{\mathbf{a}} = 2\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2$ | $\vec{\mathbf{a}} = (2, 1)$

maar ook

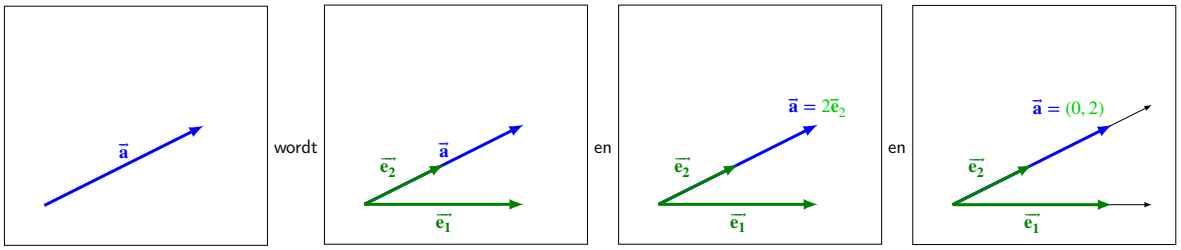


Vector $\vec{\mathbf{a}}$ | Andere $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ | $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2$ | $\vec{\mathbf{a}} = (1, 1)$

of

CC BY-NC-SA 4.0

15.2 Assenstelsels en coördinaten



Vector $\vec{a}$ | Andere $\vec{e_1}$ en $\vec{e_2}$ | $\vec{a} = 2\vec{e_2}$ | $\vec{a} = (0, 2)$

Eigenschap 15.2.1.

De keuze van een *oorsprong* associeert aan elke vector een punt en ook aan elk punt een vector.

De keuze van een *assenstelsel* associeert aan elke vector in het vlak een koppel reële getallen, en ook aan elk koppel reële getallen een vector.

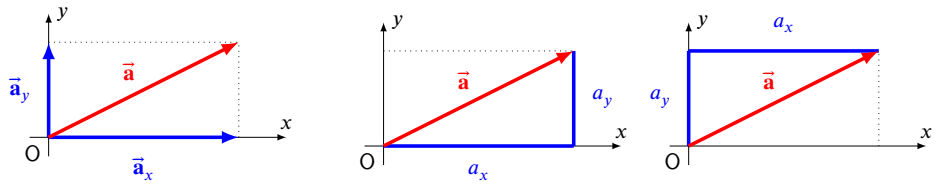
De keuze van een assenstelsel impliceert de keuze van het snijpunt van de assen als oorsprong. Zodra een oorsprong vastligt, is er eigenlijk geen onderscheid meer tussen vectoren en punten. Zodra een assenstelsel vastligt, is er geen onderscheid meer tussen vectoren, punten en koppels van getallen.

Als de basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ loodrecht op elkaar staan en beide lengte één hebben spreken we van een **orthonormaal**, een **euclidisch** of een **cartesiaans assenstelsel**, met bijhorende **cartesiaans coördinaten**. Zodra je met lengtes en hoeken wil rekenen, is het van belang in een orthonormaal assenstelsel te werken.

Bij de keuze van een assenstelsel neemt men dikwijls de eerste as horizontaal en georiënteerd naar rechts. Men noemt ze de x-as. De tweede as, die er loodrecht op staat, is dan verticaal en wordt meestal naar boven georiënteerd. Dat is de y-as.

In de fysica noteert men de basisvectoren dikwijls als $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$, en schrijft men $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$, met de coördinaten van $\vec{a}$ dus de getallen a_x en a_y. Men gebruikt ook erg dikwijls de zogenaamde **vectorcomponenten** $\vec{a}_x = a_x\vec{e}_x$ en $\vec{a}_y = a_y\vec{e}_y$. Er geldt dan

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$$



Op bovenstaande tekening worden de scalaire componenten a_x en a_y van de vector $\vec{a}$ op drie equivalente manieren weergegeven. De tekening toont ook dat de vectorcomponent $\vec{a}_x$, respectievelijk $\vec{a}_y$, de loodrechte projectie is van de vector $\vec{a}$ op de x-as, respectievelijk de y-as. Soms gebruikt men de term component om zowel de scalaire component als de vectorcomponent aan te duiden. Merk wel op dat dit erg *verschillende* dingen zijn: een scalaire component is een *getal* (dat mogelijk negatief kan zijn), en een vectorcomponent is een *vector*.

In sommige handboeken en cursussen gebruikt men $\hat{\mathbf{i}}$ en $\hat{\mathbf{j}}$ als notatie voor de eenheidsvectoren, of $\hat{\mathbf{x}}$ en $\hat{\mathbf{y}}$. Wiskundigen kiezen eerder voor $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ omdat dat het makkelijkst veralgemeent naar meerdere dimensies.

Uit een tekening blijkt onmiddellijk dat de componenten van een som van vectoren gelijk zijn aan de som van de componenten, en ook dat de componenten van een scalair veelvoud gelijk zijn aan de veelvouden van de componenten. Som en scalaire veelvoud worden dus component per component berekend:

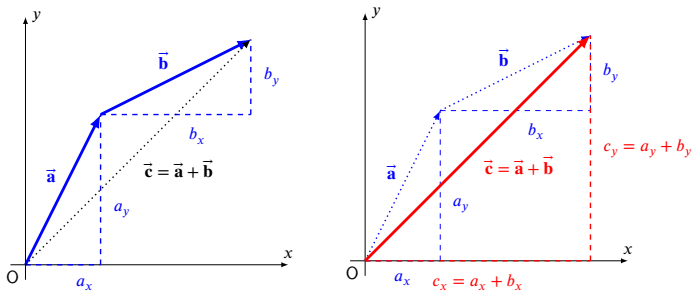
CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

15.2 Assenstelsels en coördinaten

Eigenschap 15.2.2. Als $\vec{\mathbf{a}} = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{\mathbf{b}} = b_x\vec{\mathbf{e}}_x + b_y\vec{\mathbf{e}}_y$ en $r \in \mathbb{R}$ dan geldt dat

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = (a_x + b_x)\vec{\mathbf{e}}_x + (a_y + b_y)\vec{\mathbf{e}}_y \tag{9}$$

$$r\vec{\mathbf{a}} = (ra_x)\vec{\mathbf{e}}_x + (ra_y)\vec{\mathbf{e}}_y \tag{10}$$



Voorbeeld 15.2.1. Als $\vec{\mathbf{a}} = 2\vec{\mathbf{e}}_x + 3\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{\mathbf{b}} = 5\vec{\mathbf{e}}_x - 2\vec{\mathbf{e}}_y$ dan is

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = (2+5)\vec{\mathbf{e}}_x + (3-2)\vec{\mathbf{e}}_y = 7\vec{\mathbf{e}}_x + \vec{\mathbf{e}}_y\,, \quad \text{en} \quad 2\vec{\mathbf{a}} = 4\vec{\mathbf{e}}_x + 6\vec{\mathbf{e}}_y.$$

Merk op dat de scalaire componenten van een vector afhangen van het gekozen assenstelsel: een ander assenstelsel betekent andere componenten. Maar de som en veelvouden kunnen in elk assenstelsel worden berekend, en ze zijn dus onafhankelijk van de keuze van het assenstelsel.

Voorbeeld 15.2.2. In de fysica wordt de positie van een puntmassa weergegeven door een vector $\vec{\mathbf{r}}$ die de oorsprong van het assenstelsel verbindt met de locatie van de puntmassa. Deze positievector $\vec{\mathbf{r}}$ kan geschreven worden met behulp van zijn componenten: $\vec{\mathbf{r}} = r_x\vec{\mathbf{e}}_x + r_y\vec{\mathbf{e}}_y$.

Voor een bewegende puntmassa hangt de positievector af van de tijd: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$

De ogenblikkelijke snelheid is een vector $\vec{\mathbf{v}}$ die raakt aan de baan van de beweging. De lengte van de ogenblikkelijke snelheidsvector is de grootte van de ogenblikkelijke snelheid (bv. 10 m/s). Deze vector geeft dus informatie over zowel de grootte van de snelheid als de bewegingsrichting en -zin.

De versnellingsvector $\vec{\mathbf{a}}$ is de verandering van de snelheidsvector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ over een bepaald tijdsinterval Δt.

De snelheidsvector $\vec{\mathbf{v}}$ is altijd gericht volgens de bewegingszin van het deeltje, en raakt dus aan de baan van het deeltje. De versnellingsvector $\vec{\mathbf{a}}$ daarentegen kan verschillende richtingen aannemen. Typisch kan de versnelling ontbonden worden in twee componenten. Enerzijds de normale versnelling $\vec{a}_n$ die de verandering van de richting van de snelheid beschrijft en anderzijds de tangentiële versnelling $\vec{a}_t$ die verandering van de grootte van de snelheid beschrijft. De totale versnelling is dan de vectorsom

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

Opmerking 15.2.1.

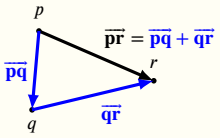
Een vector met beginpunt p en eindpunt q wordt soms ook voorgesteld als $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$, dus met *één* pijltje boven *twee* punten p en q. Met die afspraak geldt dat $\overrightarrow{\mathbf{op}} = \vec{\mathbf{p}}$, want $\vec{\mathbf{p}}$ is per definitie de vector met beginpunt oorsprong o en eindpunt p.

De vector $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ duidt de verschuiving aan om van beginpunt p naar eindpunt q te gaan. De optelling van vectoren krijgt dan een eenvoudige meetkundige interpretatie: eerst van p naar q verschuiven, en dan van q naar r is hetzelfde als direct van p naar r verschuiven:

$$\overrightarrow{\mathbf{pq}} + \overrightarrow{\mathbf{qr}} = \overrightarrow{\mathbf{pr}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

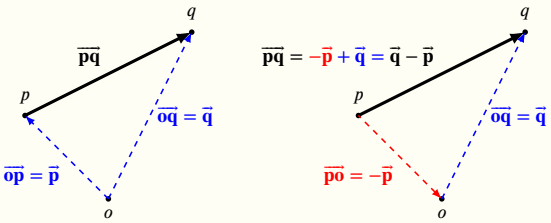
15.2 Assenstelsels en coördinaten



Als we $\overrightarrow{pq}$ dan willen uitdrukken in termen van de vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$, die de verplaatsing van oorsprong o naar p resp. q aanduiden, krijgen we

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{po} + \overrightarrow{oq} = -\overrightarrow{op} + \overrightarrow{oq} = -\vec{p} + \vec{q} \quad \text{en dus} \quad \boxed{\overrightarrow{pq} = \vec{q} - \vec{p}}$$

Er geldt natuurlijk ook dat $\overrightarrow{op} = \vec{p}$, $-\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{qp}$ en $\overrightarrow{pp} = \vec{o}$.



De betrekking $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$ staat ook gekend als de gelijkheid van Chasles-Möbius. Ze kan, gelezen van rechts naar links, gebruikt worden om een vector te schrijven als een som van twee andere vectoren.

CC BY-NC-SA 4.0

15.3 Vectoren in poolcoördinaten

Als we de componenten of coördinaten van een vector kennen ten opzichte van een cartesisch assenstelsel, levert de stelling van Pythagoras een eenvoudige formule op voor de grootte van die vector:

Eigenschap 15.3.1. De grootte (ook **lengte** of **norm**) van de vector $\vec{\mathbf{a}} = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y$ is

$$\|\vec{\mathbf{a}}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Om een *richting* van een vector in twee dimensies aan te geven zijn er twee opties:

- met **een eenheidsvector** (dus een vector met lengte 1 met dezelfde richting en zin).

  Voor bijvoorbeeld de vector $(2,5)$ met lengte $\sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$, vinden we een eenheidsvector met dezelfde richting en zin, door te delen door de lengte: $\dfrac{1}{\sqrt{29}}(2,5)$. Een eenheidsvector noteert men soms met $\hat{\mathbf{a}}$, en dan geldt

  $$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\|}$$

- met **een hoek t.o.v. een referentierichting**:

  Als een x,y-assenstelsel gegeven is, kiest men meestal voor de hoek in tegenwijzerzin t.o.v. de positieve x-as (maar andere referentierichtingen zijn even goed). Als $a_x \neq 0$ dan geldt voor de hoek θ die een vector maakt met de positieve x-as, wegens de formules in de rechthoekige driehoek,

  $$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

  Let wel op: er zijn *twee hoeken* met dezelfde tangens, die allebei *dezelfde richting* bepalen. De *juiste* hoek wordt bepaald door de *zin*, en daarvoor moet je nagaan in welk kwadrant de vector ligt, bijvoorbeeld door het teken van de x en y componenten te bepalen, of door een figuur te maken.

  Als $a_x > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

  $$\theta = \operatorname{bgtan}\frac{a_y}{a_x}$$

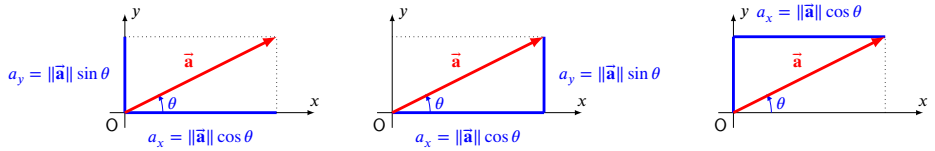
  Als $a_x < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

  $$\theta = \operatorname{bgtan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + \pi$$

Voor toepassingen is het belangrijk dat je snel kan overstappen van een richting gegeven door een hoek t.o.v. een as naar een richting gegeven door een eenheidsvector.

Als de hoek θ tussen vector $\vec{\mathbf{a}}$ en de positieve x-as gekend is, volgt uit de definitie van sinus en cosinus dat

$$a_x = \|\vec{\mathbf{a}}\|\cos\theta \quad \text{en} \quad a_y = \|\vec{\mathbf{a}}\|\sin\theta$$

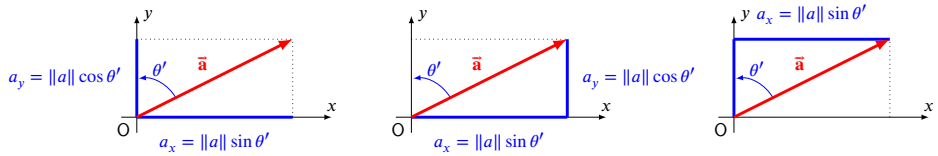


Als de hoek θ' tussen vector $\vec{\mathbf{a}}$ en de positieve y-as gekend is, volgt uit de definitie van sinus en cosinus dat

$$a_x = \|a\|\sin\theta' \quad \text{en} \quad a_y = \|a\|\cos\theta'$$

CC BY-NC-SA 4.0

15.3 Vectoren in poolcoördinaten



Leer de formules echter niet uit het hoofd, maar probeer dit grafisch te zien. Dit kan zowel met het beeld van rechthoekige driehoeken, als door het beeld van de goniometrische cirkel te gebruiken. Hoe je het beeld van de goniometrische cirkel gebruikt kan je zien in de clip.

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/EsHYrhoYJHM

Voorbeeld 15.3.1. In de fysica wordt de positie van een puntmassa weergegeven door een vector $\vec{\mathbf{r}}$ die de oorsprong van het assenstelsel verbindt met de locatie van de puntmassa. Deze positievector $\vec{\mathbf{r}}$ kan geschreven worden met behulp van zijn componenten: $\vec{\mathbf{r}} = r_x\vec{\mathbf{e}}_x + r_y\vec{\mathbf{e}}_y$.

Voor een bewegende puntmassa hangt de positievector af van de tijd: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$

De ogenblikkelijke snelheid is een vector $\vec{\mathbf{v}}$ die raakt aan de baan van de beweging. De lengte van de ogenblikkelijke snelheidsvector is de grootte van de ogenblikkelijke snelheid (bv. 10 m/s). Deze vector geeft dus informatie over zowel de grootte van de snelheid als de bewegingsrichting en -zin.

De versnellingsvector $\vec{\mathbf{a}}$ is de verandering van de snelheidsvector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ over een bepaald tijdsinterval Δt.

De snelheidsvector $\vec{\mathbf{v}}$ is altijd gericht volgens de bewegingszin van het deeltje, en raakt dus aan de baan van het deeltje. De versnellingsvector $\vec{\mathbf{a}}$ daarentegen kan verschillende richtingen aannemen.

CC BY-NC-SA 4.0

15.4 Inwendig product van vectoren

Het *inwendig product* van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ is een reëel getal dat makkelijk te berekenen is en belangrijke informatie levert over de *onderlinge ligging* van die twee vectoren:

Definitie 15.4.1. Het **inwendig product** (ook **scalair product** of **inproduct** genoemd) van vectoren $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2), \vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ is het reëel getal

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 15.4.1. $(1,2)\cdot(3,4) = 1\cdot 3+2\cdot 4 = 3+8 = 11$ en $(1,2)\cdot(2,-1) = 1\cdot 2+2\cdot(-1) = 2-2 = 0$

We hebben hierboven het scalair product geïntroduceerd in termen van de coördinaten van vectoren, maar er is ook een meetkundige interpretatie via lengte, projectie, loodrechte stand en hoeken.

Omdat $(a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2$, berekent het scalair product van een vector met zichzelf ook de norm van die vector, $\|(a_1, a_2)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Eigenschap 15.4.1. Voor $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^2$ is $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|^2$, en dus $\|\vec{\mathbf{a}}\| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}}$.

Een andere belangrijke meetkundige interpretatie zegt dat het scalair product van *eenheids*vectoren gelijk is aan de *cosinus van hun tussenliggende hoek*. We geven verder een verband met *projecties*.

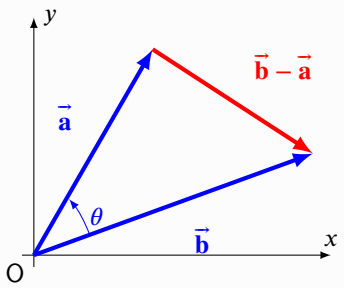
Eigenschap 15.4.2. Voor twee vectoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2$, met θ de hoek tussen de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$, geldt:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \cos(\theta)$$

Gevolg 15.4.1. Voor $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}} \neq \vec{\mathbf{b}}$ berekent het scalair product de cosinus:

$$\frac{\vec{\mathbf{a}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\|} \cdot \frac{\vec{\mathbf{b}}}{\|\vec{\mathbf{b}}\|} = \cos(\theta) \quad \text{of dus ook} \quad \cos(\theta) = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\|} \cdot \frac{\vec{\mathbf{b}}}{\|\vec{\mathbf{b}}\|}.$$

Bewijs:. De drie vectoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ en $\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$ vormen volgende driehoek:



De cosinusregel zegt:	$\|\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\|^2$	$= \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 - 2\|\vec{\mathbf{a}}\|\|\vec{\mathbf{b}}\| \cos(\theta)$
en de rekenregels voor inproduct:	$\|\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\|^2 = (\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) \cdot (\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})$	$= \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{b}} - 2\,\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$
en dus moet inderdaad		$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|\|\vec{\mathbf{b}}\| \cos(\theta).$

CC BY-NC-SA 4.0

15.4 Inwendig product van vectoren

Omdat de cosinus enkel nul is voor rechte hoeken volgt onmiddellijk een criterium voor loodrechte stand:

Gevolg 15.4.2. Voor twee vectoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2$ geldt $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0 \iff \vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}}$.

Het inwendig product berekent de cosinus van de hoek tussen vectoren, indirect dus ook die hoek zelf en het bepaalt de *loodrechte stand van vectoren*.

Oefening 15.4.1.

Beschouw de vector $\vec{\mathbf{a}} = 2\vec{\mathbf{e}}_x + 2\sqrt{3}\vec{\mathbf{e}}_y$ met $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$ de standaard orthonormale eenheidsvectoren.

1. $\vec{\mathbf{a}}$ heeft grootte $||\vec{\mathbf{a}}|| = \ldots\ldots$
2. $\vec{\mathbf{a}}$ maakt een hoek van $\ldots\ldots$ radialen met de positieve x-as.

Het inproduct berekent ook de *projectie* van een vector op een andere vector. Dit is vaak handig bij het oplossen van problemen in de fysica zoals het ontbinden van kracht of snelheid volgens bepaalde richtingen.

Opmerking 15.4.1.

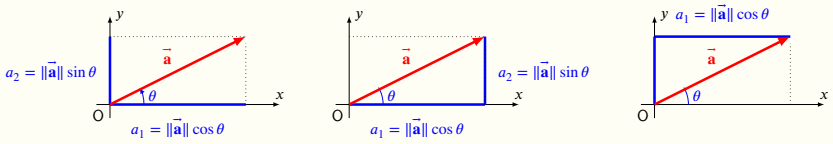
We kunnen de formule $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|\|\vec{\mathbf{b}}\| \cos(\theta)$ gebruiken om vectoren te projecteren op de x- en y-as respectievelijk. Stel $\overrightarrow{\mathbf{e_x}} = (1, 0)$ een eenheidsvector die op de x-as ligt, en θ de hoek tussen vector $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2)$ en de positieve x-as. Dan vinden we:

$$a_1 = \|\vec{\mathbf{a}}\|\|\overrightarrow{\mathbf{e_x}}\| = \|\vec{\mathbf{a}}\| \cos(\theta)$$

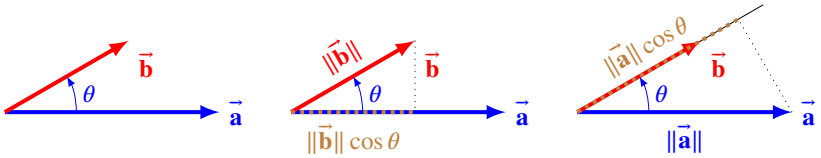
Op analoge manier kan men een eenheidsvector $\overrightarrow{\mathbf{e_y}} = (0, 1)$ op de y-as beschouwen, en θ' als de hoek tussen $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2)$ en de positieve y-as nemen. Merk op dat $\theta' = 90° - \theta$. We krijgen dus:

$$a_2 = \|\vec{\mathbf{a}}\|\|\overrightarrow{\mathbf{e_y}}\| = \|\vec{\mathbf{a}}\| \cos(\theta') = \|\vec{\mathbf{a}}\| \sin(\theta)$$

De projecties kunnen grafisch geïnterpreteerd worden als volgt:



Uit de driehoeksmeetkunde weet men dat in een rechthoekige driehoek een rechthoekszijde gelijk is aan de schuine zijde maal de cosinus van de aanliggende hoek. Bijgevolg is $\|\vec{\mathbf{a}}\| \cos\theta$ de projectie van $\vec{\mathbf{a}}$ op de drager van $\vec{\mathbf{b}}$, en ook dat $\|\vec{\mathbf{b}}\| \cos\theta$ de projectie geeft van $\vec{\mathbf{b}}$ op de drager van $\vec{\mathbf{a}}$.



Samengevat geeft dat volgende mogelijke interpretaties voro het inwendig product:

CC BY-NC-SA 4.0

15.4 Inwendig product van vectoren

Eigenschap 15.4.3. Het inwendig product $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ van vectoren kan zowel beschouwd worden als

$a_1\, b_1 \;+\; a_2\, b_2$	de algebraïsche som van de producten van hun componenten
$\|\vec{\mathbf{a}}\|\, \|\vec{\mathbf{b}}\|\, \cos(\theta)$	de grootte van $\vec{\mathbf{a}}$ maal de grootte van $\vec{\mathbf{b}}$ maal de cosinus van hun hoek
$\|\vec{\mathbf{a}}\|\Big(\|\vec{\mathbf{b}}\| \cos(\theta)\Big)$	de grootte van $\vec{\mathbf{a}}$ maal de grootte van de projectie van $\vec{\mathbf{b}}$ op $\vec{\mathbf{a}}$
$\|\vec{\mathbf{b}}\|\Big(\|\vec{\mathbf{a}}\| \cos(\theta)\Big)$	de grootte van $\vec{\mathbf{b}}$ maal de grootte van de projectie van $\vec{\mathbf{a}}$ op $\vec{\mathbf{b}}$

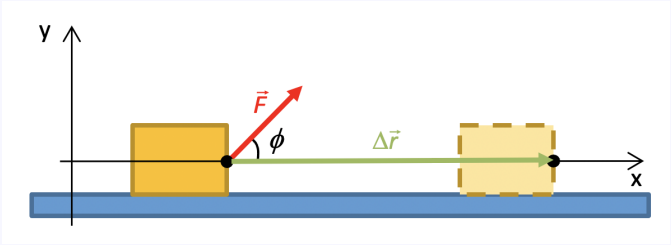
Gevolg 15.4.3. Voor een eenheidsvector $\vec{\mathbf{e}}$ is het getal $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{e}}$ de grootte van $\vec{\mathbf{a}}$ 'in de richting' $\vec{\mathbf{e}}$.

Gevolg 15.4.4. Voor een eenheidsvector $\vec{\mathbf{e}}$ is de vector $(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{e}})\vec{\mathbf{e}}$ de projectie van $\vec{\mathbf{a}}$ op de drager van $\vec{\mathbf{e}}$.

Volgend voorbeeld illustreert het belang van projecties en dus van het scalair product in de fysica.

Voorbeeld 15.4.2. Beschouw een massa die op een rechte baan een verplaatsing $\Delta\vec{r}$ maakt en daarbij een constante kracht $\vec{F}$ ondervindt (zie figuur). De arbeid geleverd door de kracht $\vec{F}$ wordt gedefinieerd als het scalair product van de kracht en de verplaatsing:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot ||\Delta r|| \cdot \cos\phi.$$



Figuur 1: Arbeid geleverd door een kracht $\vec{F}$ op een massa bij een verplaatsing $\Delta\vec{r}$.

Afhankelijk van de hoek kan de arbeid positief ($\phi < \frac{\pi}{2}$), negatief ($\phi > \frac{\pi}{2}$) of nul zijn ($\phi = \frac{\pi}{2}$). De arbeid geleverd door een kracht die loodrecht staat op de verplaatsing is dus steeds nul. Dit is bijvoorbeeld steeds het geval voor de normaalkracht, die immers steeds loodrecht staat op de bewegingsrichting.

Volgende eigenschappen kan je makkelijk verifiëren via wat rekenwerk:

Eigenschap 15.4.4. Voor vectoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ en $\vec{\mathbf{c}}$ en getallen $r, s \in \mathbb{R}$ geldt:

(a) $\vec{\mathbf{a}} \cdot (r\vec{\mathbf{b}} + s\vec{\mathbf{c}}) = r(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) + s(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})$ (lineair)

(b) $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ (symmetrisch)

(c) $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} \geq 0$ (positief)

(d) $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$ (positief definiet)

(e) $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = 0$

CC BY-NC-SA 4.0

15.4 Inwendig product van vectoren

Hieruit volgt onmiddellijk dat $(r\vec{\mathbf{a}} + s\vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}} = r(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) + s(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}})$ en dat $(r\vec{\mathbf{a}}) \cdot (s\vec{\mathbf{b}}) = rs(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$.

Oefening 15.4.2. Toon aan met de rekenregels van het scalair product dat $\dfrac{\vec{\mathbf{a}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\|}$ een eenheidsvector is.

Opmerking 15.4.2.

(a) Verwar het scalair *product* $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}$ van twee vectoren niet met het scalair *veelvoud* $r \cdot \vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^2$ van een reëel getal met een vector.

Pas dus op met haakjes bij een scalair product: $\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}})$ is namelijk een scalaire vermenigvuldiging van vector $\vec{\mathbf{a}}$ en $(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}}$ is een scalair veelvoud van vector $\vec{\mathbf{c}}$. De bewerking binnen de haakjes is een scalair product, maar de bewerking buiten de haakjes is de scalaire vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal. Dus geldt in het algemeen $\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) \neq (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}$.

(b) In principe laten we de punt bij het scalair product nooit weg: we schrijven dus $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ en niet $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

15.5 Vectorieel product van vectoren

Het *vectorieel product* van twee vectoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ in $\mathbb{R}^3$ is een nieuwe vector $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ in $\mathbb{R}^3$ die loodrecht staat op zowel $\vec{\mathbf{a}}$ als $\vec{\mathbf{b}}$. Dit vectorieel product speelt een belangrijke rol in meetkundige en fysische problemen in $\mathbb{R}^3$ en kan ofwel gedefinieerd worden met een directe formule, ofwel met 2×2-determinanten:

Definitie 15.5.1. Het **vectorieel product** (of **vectorproduct**) van $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ in $\mathbb{R}^3$, genoteerd $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$, is de vector

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) &\overset{\text{def}}{=} (\, a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1\,) \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \quad \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Voorbeeld 15.5.1.

$(1,2,3) \times (4,5,6) = (2\cdot 6 - 3\cdot 5,\ 3\cdot 4 - 1\cdot 6,\ 1\cdot 5 - 4\cdot 2) = (-3, 6, -3)$

$(1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$ en $(0,1,0) \times (1,0,0) = (0,0,-1)$

Wie vertrouwd is met 3×3-determinanten kan best volgende interessante formule onthouden:

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y & \vec{\mathbf{e}}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

met $\vec{\mathbf{e}}_x = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{e}}_y = (0,1,0)$ en $\vec{\mathbf{e}}_z = (0,0,1)$ de drie basisvectoren van $\mathbb{R}^3$. Inderdaad:

$$\vec{\mathbf{e}}_x \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{\mathbf{e}}_y \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{\mathbf{e}}_z \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

De grootte $\|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\|$ voldoet aan een gelijkaardige formule als het inproduct, maar met een sinus:

Eigenschap 15.5.1. Als θ de hoek is tussen de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$, dan geldt

$$\|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\| = \|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \sin\theta$$

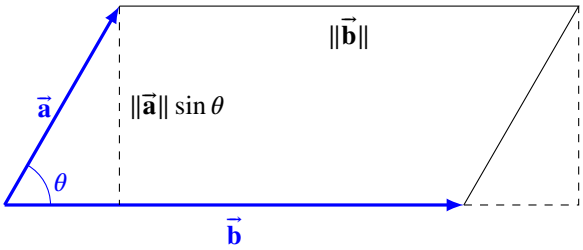
Bewijs.

$$\begin{aligned}\|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \sin\theta &= \|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \sqrt{1 - \cos^2\theta} \quad (0 \le \theta \le \pi) \\ &= \|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \sqrt{1 - \frac{(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})^2}{\|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \|\vec{\mathbf{b}}\|^2}} \\ &= \sqrt{\|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2} \\ &= \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2} \\ &= \|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\|\end{aligned}$$

We kunnen de grootte van het vectorproduct ook interpreteren als de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$:

CC BY-NC-SA 4.0

15.5 Vectorieel product van vectoren

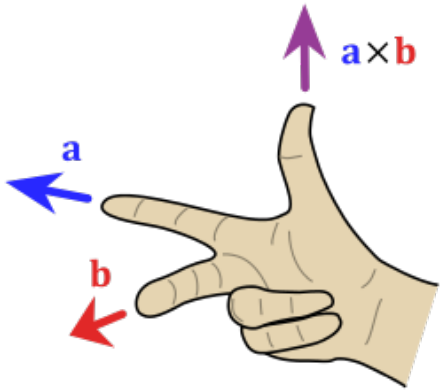


Gevolg 15.5.5. $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}} \iff \vec{\mathbf{a}} \parallel \vec{\mathbf{b}}$ (i.e.: $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ liggen op één lijn, of $\vec{\mathbf{a}} = 0$ of $\vec{\mathbf{b}} = 0$)

Gevolg 15.5.6. Als θ de hoek is tussen de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$, dan geldt

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \sin\theta \vec{\mathbf{n}}$$

met $\vec{\mathbf{n}}$ een eenheidsvector loodrecht op $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ en georiënteerd via de rechterhandregel.



Invullen en rekenen leert dat $(x, y, z) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ voldoet aan de vergelijkingen

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

Deze vergelijkingen kunnen geïnterpreteerd worden als voorwaarde dat (x, y, z) loodrecht staat op (a_1, a_2, a_3) en op (b_1, b_2, b_3), en dus volgt dat de vector $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$ loodrecht staat op (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3). Dit geeft volgende eigenschap, die drie keer in een andere vorm precies hetzelfde weergeeft:

Eigenschap 15.5.2.

(a) Het vectorieel product $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ staat *loodrecht* op $\vec{\mathbf{a}}$ en op $\vec{\mathbf{b}}$: $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \perp \vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \perp \vec{\mathbf{b}}$.

(b) Het vectorieel product $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ voldoet aan de *identiteiten* $\begin{cases} \vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = 0 \\ \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = 0 \end{cases}$.

(c) Het vectorieel product $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ is een *oplossing* van het stelsel $\begin{cases} \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0 \\ \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0 \end{cases}$.

CC BY-NC-SA 4.0

15.5 Vectorieel product van vectoren

Opmerking 15.5.1.

- Het vectorproduct is *niet commutatief*, want $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}}$. Hieruit volgt dat $\vec{\mathbf{a}}\times k\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}, k \in \mathbb{R}$.
- Het vectorproduct is *niet associatief*: $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) \neq (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \times \vec{\mathbf{c}}$. Inderdaad, je kan bijvoorbeeld eenvoudig nagaan dat $\overrightarrow{\mathbf{e_x}} \times (\overrightarrow{\mathbf{e_x}} \times \overrightarrow{\mathbf{e_y}}) = \overrightarrow{\mathbf{e_x}} \times \overrightarrow{\mathbf{e_z}} = -\overrightarrow{\mathbf{e_y}}$, terwijl $(\overrightarrow{\mathbf{e_x}} \times \overrightarrow{\mathbf{e_x}}) \times \overrightarrow{\mathbf{e_y}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Het concept van een vectorproduct wordt vaak gebruikt in de fysica. Een bekend voorbeeld is wanneer een magnetisch veld een kracht uitoefent op bewegende ladingen (en bijgevolg ook op een stroomvoerende geleider). Deze kracht noemt men de laplacekracht.

Voorbeeld 15.5.2.

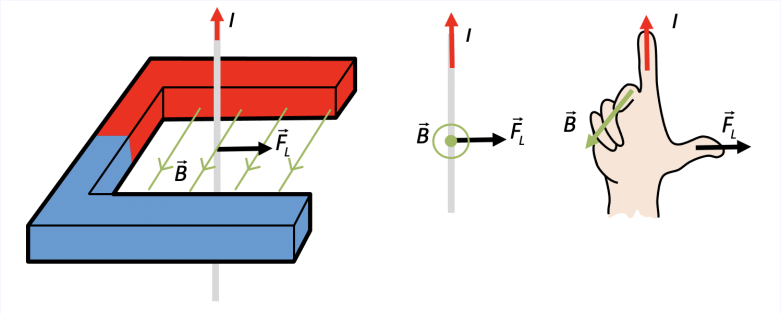
Met een gedetailleerd onderzoek kan men nagaan dat de grootte van de laplacekracht F_L op een stroomdraad met lengte ℓ die zich in een magnetisch veld $\vec{B}$ bevindt en waardoor je een stroom I stuurt, gelijk is aan

$$F_L = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin(\widehat{\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{l}}})$$

De kracht zelf is een vectoriële grootheid die we kunnen schrijven als een vectorproduct:

$$\overrightarrow{\mathbf{F_L}} = I\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}}$$

waarbij $\vec{\ell}$ een vector gericht langs de draad volgens de conventionele stroomzin $(\vec{\mathbf{l}})$. De kracht staat loodrecht op de stroomdraad $\vec{\mathbf{l}}$ en ook loodrecht op de veldlijnen $\vec{\mathbf{B}}$.



Figuur 2: Kracht op een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld.

Merk op dat

- Het aangrijpingspunt van de kracht ligt op de draad.
- De richting: de kracht staat loodrecht op het vlak gevormd door de draad en het magnetische veld op die plaats.
- De zin van de laplacekracht kun je gemakkelijk bepalen met de rechterhandregel: als je de wijsvinger (Index) van je rechterhand volgens de conventionele stroomzin I houdt en je Middenvinger in de zin van het Magnetische veld, geeft je duim de zin van de kracht aan.
- De grootte van de kracht hangt o.a. af van de sterkte van de stroom en van de sterkte van het veld.

CC BY-NC-SA 4.0

15.5.A Oefeningen vectoren

We werken steeds in een gegeven xy-assenstelsel, en noteren $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$ voor de eenheidsvectoren op respectievelijk de x- en de y-as. We tekenen vrije vectoren door ze te laten aangrijpen in de oorsprong.

Oefening 15.5.1. Duid op een tekening de vectoren $\vec{a} = 2\vec{\mathbf{e}}_x + \vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{b} = \vec{\mathbf{e}}_x - \vec{\mathbf{e}}_y$ aan.

Duid daarna ook de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ aan.

Oefening 15.5.2. Teken de vectoren $\vec{a} = \vec{\mathbf{e}}_x + 2\vec{\mathbf{e}}_y$, $\vec{b} = -2\vec{\mathbf{e}}_x + 3\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{c} = \vec{\mathbf{e}}_x - \vec{\mathbf{e}}_y$. Bereken en construeer daarna ook de vectoren

- $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b}$
- $\vec{t} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right)$

Oefening 15.5.3. $\vec{a} = \vec{\mathbf{e}}_x - \sqrt{3}\vec{\mathbf{e}}_y$

1. $\vec{a}$ heeft grootte $||\vec{a}|| = \ldots\ldots$

2. $\vec{a}$ maakt een hoek van $\ldots\ldots$ radialen met de positieve x-as.

Oefening 15.5.4. Een gegeven vector $\vec{a}$ met lengte 10 maakt een hoek van $5\pi/4$ met de x-as. Bereken de vectorcomponenten volgens $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$.
Antwoord: $a_x = \ldots\ldots, a_y = \ldots\ldots$

Oefening 15.5.5. Bereken de grootte van de vectoren $\vec{a} = 3\vec{\mathbf{e}}_x + 4\vec{\mathbf{e}}_y$, $\vec{b} = 4\vec{\mathbf{e}}_x - 3\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
Antwoord: $||\vec{a}|| = \ldots\ldots, ||\vec{b}|| = \ldots\ldots, ||\vec{c}|| = \ldots\ldots$

Geef ook eenheidsvectoren met dezelfde richting en zin als deze vectoren.

Oefening 15.5.6. Is volgende uitspraak waar: voor vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt steeds dat $||\vec{a} + \vec{b}|| = ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$.
Antwoord: | Juist | Fout |

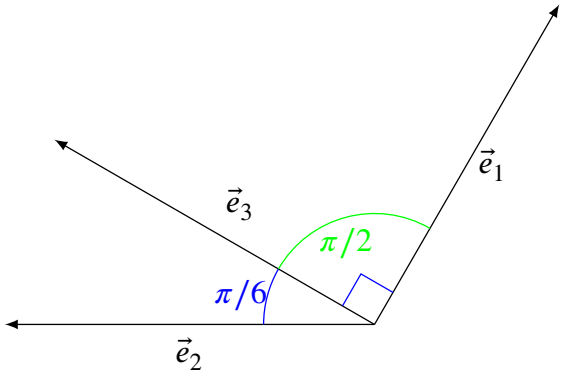
Oefening 15.5.7. De vector $\vec{a}$ heeft lengte $\sqrt{2}$ en maakt een hoek van $\pi/4$ radialen met de positieve x-as. De vector $\vec{b}$ heeft lengte 4, staat loodrecht op $\vec{a}$ en voldoet bovendien aan $b_y > 0$.
Bepaal de componenten van de vector $\vec{b}$ en teken de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Antwoord: $b_x = \ldots\ldots, b_y = \ldots\ldots$

Volgende oefening is een voorbeeld van het oplossen van vectorvergelijkingen.

Oefening 15.5.8. Beschouw volgende drie eenheidsvectoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ en $\vec{e}_3$ in het vlak:

CC BY-NC-SA 4.0

15.5.A Oefeningen vectoren



Los op twee manieren volgende vectorvergelijking op naar v_2 en v_3.

$$\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = v_3\vec{e}_3.$$

1. Meetkundig: door snijpunten van rechten te bepalen.

Antwoord: $v_2 = \ldots\ldots$ en $v_3 = \ldots\ldots$

2. Algebraïsch: door te rekenen met componenten. Je moet natuurlijk hetzelfde antwoord bekomen als hierboven.

Oefening 15.5.9. Gegeven zijn de vectoren

- $\vec{\mathbf{r_1}} = 2\vec{\mathbf{e_x}} + 3\vec{\mathbf{e_y}}$
- $\vec{\mathbf{r_2}} = 4\vec{\mathbf{e_x}} - 5\vec{\mathbf{e_y}}$
- $\vec{\mathbf{r_3}} = 5\vec{\mathbf{e_x}} + 2\vec{\mathbf{e_y}}$
- $\vec{\mathbf{r_4}} = 4\vec{\mathbf{e_x}} - 10\vec{\mathbf{e_y}}$

Bepaal welk van deze vectoren loodrecht op elkaar staan.

Oefening 15.5.10. Teken de vector $\vec{a} = -4 \cdot \vec{e}_x + 5 \cdot \vec{e}_y$. Bepaal de hoek die deze vector maakt met de positieve x-as.

$$\theta = \ldots\ldots\ ^\circ$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 16
Complexe getallen

(Versie 2026/08/25H.51)

16.1 Complexe getallen

Veeltermvergelijkingen hebben niet altijd reële oplossingen. Zo hebben vierkantsvergelijkingen met een negatieve discriminant geen reële wortels. Een erg eenvoudig voorbeeld is de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ of, anders geschreven, $x^2 = -1$. Deze vergelijking heeft geen reële wortels, omdat het kwadraat van een reëel getal nooit negatief kan zijn, en dus nooit gelijk aan -1.

De zogenaamde *complexe getallen* vormen een uitbreiding van de reële getallen. Aan de reële getallen wordt een nieuw 'getal' toegevoegd dat traditioneel i genoemd wordt, en i is *per definitie* een oplossing van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$. Er geldt dus per definitie dat $i^2 = -1$. Het is een hoogst merkwaardig feit dat door een oplossing van deze vergelijking $x^2 + 1 = 0$ toe te voegen, ineens *alle* veeltermvergelijkingen met reële coëfficiënten oplossingen blijken te hebben.

Definitie 16.1.1.

Een **complex getal** is een uitdrukking $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en waarbij $i^2 = -1$. Het symbool i is de **imaginaire eenheid**. De verzameling van alle complexe getallen noemen we $\mathbb{C}$.

Per definitie zijn twee complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ enkel aan elkaar gelijk als $a = c$ en $b = d$.

Een willekeurig complex getal wordt dikwijls genoteerd met z. Als $z = a + bi$, dan

- is a het **reëel deel** van z, genoteerd als $\mathrm{Re}(z) \stackrel{\text{def}}{=} a$.
- is b het **imaginair deel** van z, genoteerd als $\mathrm{Im}(z) \stackrel{\text{def}}{=} b$.
- Als $b = 0$, dan is $z = a$ een **(zuiver) reëel getal** (en $\mathbb{R}$ is dus een deelverzameling van $\mathbb{C}$).
- Als $a = 0$, dan is $z = bi$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Voorbeeld 16.1.1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

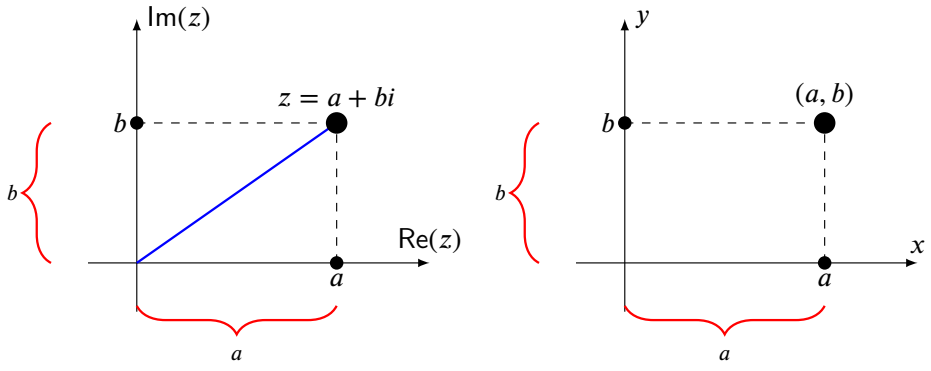
(a) $2 + 3i$ (c) $42i$ (e) $1 + i\sqrt{2}$

(b) 42 (d) $1 + \pi$ (f) $\dfrac{1 - i\sqrt{5}}{2}$

De getallen 42 en $1 + \pi$ zijn zuiver reële getallen, en $42i$ is een zuiver imaginair getal.

16.1.1 Het complexe vlak

We kunnen met elk complex getal $z = a + bi$ een uniek koppel (a, b) associëren. Op die manier kan een complex getal z ook voorgesteld worden als een punt in het vlak, met x-coördinaat a en y-coördinaat b:



CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Complexe getallen

Als we het vlak op deze manier bekijken als de verzameling van de complexe getallen, spreken we van het **complexe vlak**. Het getal i komt daarbij overeen met het koppel $(0,1)$ op de y-as.

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/Ho_oadFkm1o

Oefening 16.1.1. Schets in het complexe vlak de gebieden omschreven door volgende vergelijkingen:

1. $\text{Im}(z) \leq 0$
2. $0 \leq \text{Re}(z) \leq 4$

16.1.2 Rekenen met complexe getallen

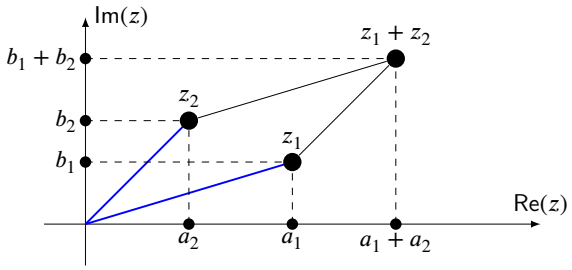
Voor complexe getallen kan, met de gebruikelijke rekenregels, de optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd worden, waarbij steeds i^2 vervangen wordt door -1.

Definitie 16.1.2 (Som en product)**.**
Als $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, en dus $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ geldt:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \overset{\text{def}}{=} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \overset{\text{def}}{=} a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{i^2=-1} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Meetkundig is de optelling van complexe getallen hetzelfde als de optelling van vectoren in het vlak: het komt neer op de parallellogramregel:



Opmerking 16.1.1.

- Een complex getal kan per definitie op een unieke manier geschreven worden als $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$. Dus $1, i, 1+i, 1+3i$ zijn allemaal complexe getallen die we niet eenvoudiger kunnen schrijven. Maar $2i+3+i, i(1+i)$ en $(1+i)(1-i)$ zijn complexe getallen die we wel eenvoudiger kunnen schrijven als $2i+3+i = 3+3i, \quad i(1+i) = i+i^2 = -1+i, \quad (1+i)(1-i) = 1-i^2 = 1+1 = 2.$
- Als je twee complexe getallen kan optellen, is het ook eenvoudig om ze van elkaar af te trekken: $(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$. Je kan twee complexe getallen ook *delen* door elkaar, dit wordt later uitgelegd.
- Ingenieurs gebruiken meestal de letter j in plaats van i, onder meer om verwarring te voorkomen met de elektrische stroom i. Dan geldt dus $j^2 = -1$, en $z = a + bj \in \mathbb{C}$.
- Men kan aantonen dat de verzameling $\mathbb{C}$ **niet totaal kan geordend worden** zoals $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{R}$. Hiermee wordt bedoeld dat het niet mogelijk is om een definitie te vinden voor $a + bi < c + di$ die zou voldoen aan dezelfde eigenschappen als de ongelijkheid $<$ in $\mathbb{R}$ of $\mathbb{Q}$. Je kan van twee

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Complexe getallen

complexe getallen dus niet zeggen welk "het kleinsteïs.
In het bijzonder heeft het geen betekenis om te vragen of $2+3i$ *positief* of *negatief* is. Zo kan je ook niet zeggen dat $1+i$ *positief* is en $-1-i$ *negatief*, maar wel dat ze elkaars *tegengestelde* zijn. Hetzelfde geldt zelfs voor i: het heeft geen betekenis om te beweren dat i positief is, en $-i$ negatief. Het heeft wel betekenis om te zeggen dat i en $-i$ elkaars tegengestelde zijn.

Oefening 16.1.2.

1. $(1+2i)+(3+4i) = \ldots\ldots$

2. $(1+2i)\cdot(3+4i) = \ldots\ldots$

3. $(1+2i)\cdot(1-2i) = \ldots\ldots$

4. $(1+2i)\cdot\dfrac{1-2i}{2} = \ldots\ldots$

5. $(1+2i)\cdot i = \ldots\ldots$

6. $i^3 = \ldots\ldots$

7. $i^4 = \ldots\ldots$

16.1.3 Modulus en complex toegevoegde

Complexe getallen zijn niet alleen 'samengesteld', maar toch ook net iets 'complexer' dan reële getallen. Om ze te bestuderen beschikken we over twee nieuwe begrippen. Het eerste, de *modulus*, is een veralgemening van de absolute waarde van reële getallen. Het tweede, de zogenaamde *complex toegevoegde*, heeft niet direct een analoog voor de reële getallen:

Definitie 16.1.3 (Modulus en complex toegevoegde)**.**

De **modulus** (of **norm**) van een complex getal $z = a+bi$, genoteerd $|z|$, is het *positief reëel* getal

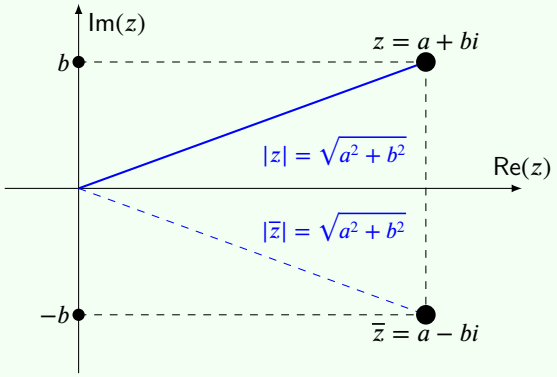
$$|z| \overset{\text{def}}{=} \boxed{|a+bi| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a^2+b^2}}.$$

De modulus is meetkundig *de afstand tot de oorsprong*.

De **complex toegevoegde** van een complex getal $z = a+bi$, genoteerd als $\overline{z}$, is

$$\overline{z} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\overline{a+bi} \overset{\text{def}}{=} a-bi}.$$

We noemen z en $\overline{z}$ **complex toegevoegd** (aan elkaar), en beide zijn elkaars spiegeling over de x-as.



CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Complexe getallen

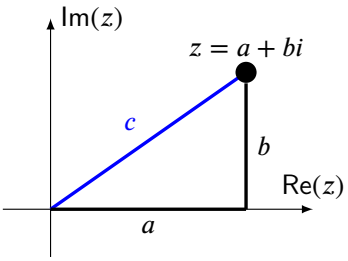
Opmerking 16.1.2. Soms noteert men ook z^* in plaats van $\overline{z}$.

Voorbeeld 16.1.2.

1. $\overline{3-4i} = 3+4i$
2. $|3-4i| = 5$
3. $|i| = 1$
4. $|-i| = 1$
5. $|-2| = 2$
6. $|-1|+|1| = 2$

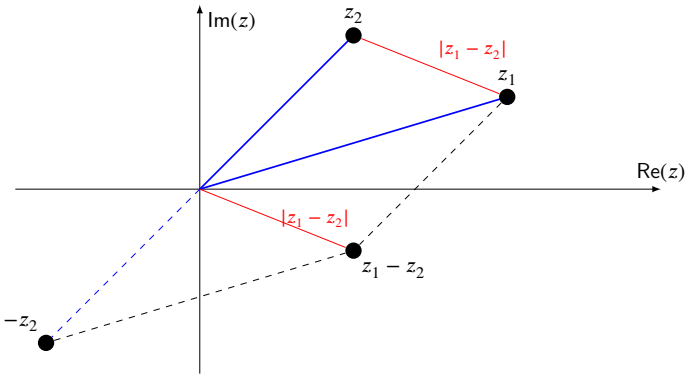
De modulus $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong in het complexe vlak.

Dit volgt uit de stelling van Pythagoras in onderstaande driehoek, waar $|z|^2 = c^2 = a^2 + b^2$:



$|z_1 - z_2|$ is de afstand tussen z_1 en z_2 in het complexe vlak.

Dit volgt uit het feit dat $z_1 - z_2$ wegens de parallellogramregel als vector gelijk is aan de vector tussen z_1 en z_2.



De meetkundige betekenis van de modulus en complex toegevoegde wordt ook uitgelegd in onderstaande video:

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/uSl9oLBjw1U

Eigenschap 16.1.1 (Eigenschappen modulus)**.** Voor complexe getallen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt

(a) $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong.

(b) $|z_1 - z_2|$ is de afstand tussen z_1 en z_2.

(c) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

(d) $|z| = 0 \iff z = 0$.

(e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

LET OP: in het algemeen geldt niet ~~$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$~~ (want bv. $0 = |1+(-1)| \neq |1|+|-1| = 2$)

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Complexe getallen

Oefening 16.1.3. Bereken voor een complex getal $z = a + bi \in \mathbb{C}$ volgende uitdrukkingen:

1. $z + \overline{z} = \ldots\ldots$
2. $z - \overline{z} = \ldots\ldots$
3. $z \cdot \overline{z} = \ldots\ldots$
4. $|z|^2 = \ldots\ldots$

Hiermee zijn volgende eigenschappen aangetoond die een complex getal combineren met zijn complex toegevoegde:

Eigenschap 16.1.2 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.**

Voor een complex getal $z = a + bi$ geldt dat

$$\begin{array}{rclcrcl} z + \overline{z} & = & 2\mathrm{Re}(z) & \text{en} & z - \overline{z} & = & 2i\mathrm{Im}(z) \\ z\overline{z} & = & |z|^2 & & & & \end{array}$$

In het bijzonder zijn zowel de som als het product van een getal en zijn complex toegevoegde steeds *reëel*. Dat $z\overline{z}$ een reëel getal is kunnen we gebruiken om het quotiënt van twee complexe getallen te berekenen. We nemen als voorbeeld

$$\frac{3+2i}{1-5i}.$$

De deling van deze twee complexe getallen is opnieuw een complex getal. De deling uitvoeren wil zeggen $\frac{3+2i}{1-5i}$ schrijven in de vorm $a+bi$. Als we teller en noemer vermenigvuldigen met het complex toegevoegde van de noemer verdwijnt de i in de noemer en krijgen we een complex getal van de vorm $a + bi$:

$$\frac{3+2i}{1-5i} = \frac{(3+2i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{3+15i+2i+10i^2}{1+5i-5i-25i^2} = \frac{-7+17i}{26} = -\frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$$

Merk op dat dit volledig analoog is met het verdrijven van wortelvormen als $2 + 3\sqrt{2}$ uit de noemer door teller en noemer te vermenigvuldigen met de zogenaamde *toegevoegde tweeterm* $2 - 3\sqrt{2}$.

Oefening 16.1.4. Schrijf volgende uitdrukkingen als een complex getal van de vorm $a + bi$:

1. $\dfrac{1}{1+2i} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{1+2i}{3+4i} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{3+4i}{1+2i} = \ldots\ldots$

Complex toevoegen werkt erg goed samen met de basisbewerkingen $+, -, \cdot$ en $\div$. We vermelden hier nog enkele eigenschappen:

Eigenschap 16.1.3 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.**

Voor complexe getallen z_1 en z_2 geldt dat

$$\begin{array}{rclcrcl} \overline{z_1 + z_2} & = & \overline{z_1} + \overline{z_2} & \text{en} & \overline{z_1 - z_2} & = & \overline{z_1} - \overline{z_2} \\ \overline{z_1 \cdot z_2} & = & \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} & \text{en} & \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} & = & \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \end{array}$$

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Complexe getallen

16.1.4 Vierkantsvergelijkingen

Voorbeeld 16.1.3. Bepaal alle oplossingen van volgende veeltermvergelijkingen.

1. $x^2 = 64$. Antwoord: $x = \pm 8$.

2. $x^2 = -64$. Antwoord: $x = \pm 8i$.

Uitwerking: Schrijf -1 als i^2, dan wordt de vergelijking $x^2 = (i\,8)^2$ met oplossingen $x = 8i$, en $x = -8i$.

3. $x^2 = -3$. Antwoord: $x = \pm i\sqrt{3}$.

Uitwerking: Schrijf -1 als i^2, dan wordt de vergelijking $x^2 = (i\sqrt{3})^2$ met oplossingen $x = i\sqrt{3}$, en $x = -i\sqrt{3}$.

We kunnen dus complexe getallen vinden waarvan het kwadraat een negatief reëel getal is. Stel dat we een vierkantsvergelijking hebben met negatieve disciminant D, bijvoorbeeld

$$z^2 + z + 1 = 0$$

met

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3,$$

dan zijn er geen reële oplossingen, maar kunnen we toch twee complexe oplossingen vinden. We weten dat $D = -3 = (i\sqrt{3})^2$, of ook $i\sqrt{3} = i\sqrt{-D}$ want $-D = 3$. We spreken af om het symbool $\sqrt{\cdot}$ enkel te gebruiken voor positieve reële getallen, niet voor complexe getallen, maar in andere cursussen kunnen andere afspraken gemaakt worden. De oplossingen van de vierkantsvergelijking zijn

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{en} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Inderdaad $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ is een oplossing van $z^2 + z + 1 = 0$ want

$$\begin{aligned}(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 &= \frac{(-1 + i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})}{4} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 \\ &= \frac{1 - i\,2\sqrt{3} - 3}{4} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 \\ &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{-2}{2} + 1 = 0.\end{aligned}$$

Met een analoge berekening kan je nagaan dat ook z_2 een oplossing is van $z^2 + z + 1 = 0$.

Zo maken de complexe getallen de theorie van het oplossen van vergelijkingen in zekere zin makkelijker. Bij vierkantsvergelijkingen moeten we geen gevalsonderscheid meer maken naargelang de waarde van de discriminant $D = b^2 - 4ac$. Bij $D < 0$ zijn de oplossingen dan geen reële getallen, maar twee complexe getallen.

Eigenschap 16.1.4 (Oplossen van vierkantsvergelijkingen met negatieve discriminant)**.**

De twee oplossingen z_1 en z_2 van een vierkantsvergelijking $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ met discriminant $D = b^2 - 4ac < 0$ zijn

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$$

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Complexe getallen

Oefening 16.1.5. Los volgende vergelijkingen op over de complexe getallen

1. $x^2 + 4 = 0$. Antwoord: ... ...

2. $x^2 + 2x + 5 = 0$. Antwoord: ... ...

3. $x^2 + 3x + 7 = 0$. Antwoord: ... ...

In de verzameling van de complexe getallen heeft een vierkantsvergelijking dus steeds twee al dan niet samenvallende oplossingen. Of anders geformuleerd: een tweedegraadsveelterm heeft steeds 2 al dan niet samenvallende nulpunten, indien ook complexe getallen als nulpunten toegelaten zijn. Dit kunnen we veralgemenen tot n-de graadsveeltermen, waarbij we ook toelaten dat de coëfficiënten complexe getallen zijn:

Eigenschap 16.1.5 (Hoofdstelling van de algebra)**.** Voor een veelterm $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ met coëfficiënten $a_i \in \mathbb{C}$
bestaan er n complexe getallen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, (niet noodzakelijk allemaal onderling verschillend) zodat

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 + a_0 = a_n(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$$

Bijgevolg zijn $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ oplossingen van de vergelijking

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

16.1.A Basisoefeningen complexe getallen

Oefening 16.1.6. Bereken volgende uitdrukkingen. Schrijf de complexe getallen in de vorm $a+bi$.

1. $(4+i)+(1-2i) = \ldots\ldots$
2. $(2+4i)-(6-7i) = \ldots\ldots$
3. $(2+3i)(-5+i) = \ldots\ldots$
4. $(2+i)^2 = \ldots\ldots$
5. $(2+i)+\overline{(3+2i)} = \ldots\ldots$
6. $(5-6i)(5+6i) = \ldots\ldots$
7. $|3-2i| = \ldots\ldots$
8. $|3-2i+\overline{4-2i}| = \ldots\ldots$
9. $|3+4i+4+3i| = \ldots\ldots$
10. $|3+4i|+|4+3i| = \ldots\ldots$
11. $\left|\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = \ldots\ldots$

Oefening 16.1.7. Een complex getal z kunnen we schrijven als $z = a+bi$ met a en b reële getallen en $i^2 = -1$. Dan zijn er onder de lijst van complexe getallen

$$\frac{(1+i)^4}{4}, \quad \frac{(1-i)^4}{4}, \quad \frac{(1+i)^2}{2}, \quad \frac{(1-i)^2}{2}, \quad i^2$$

precies | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 42 | die gelijk zijn aan -1.

Oefening 16.1.8. Schets in het complexe vlak de gebieden omschreven door volgende vergelijkingen:

1. $|z| < 1$
2. $|z| \leq 1$
3. $|z| = 1$
4. $|z-i| < 1$
5. $|z-i| \geq 1$
6. $1 < |z+2i-1| \leq 2$
7. $-1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2$
8. $|\mathrm{Im}(z)-i| < \sqrt{2}$
9. $|\mathrm{Re}(z)-i| < \sqrt{2}$
10. $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) > 0$

CC BY-NC-SA 4.0

16.1.A Basisoefeningen complexe getallen

Oefening 16.1.9. Voer volgende delingen uit door de opgave te schrijven in de vorm $a + bi$.

1. $\frac{7}{i} = \ldots\ldots$
2. $\frac{1}{5+2i} = \ldots\ldots$
3. $\frac{1+i}{2+3i} = \ldots\ldots$
4. $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = \ldots\ldots$

Oefening 16.1.10. Bepaal alle oplossingen van volgende veeltermvergelijkingen.

1. $x^2 + x = 0$
2. $x^3 + 16x = 0$
3. $x^2 + 5x + 2 = 0$
4. $x^2 + 4x + 5 = 0$
5. $9x^2 - 14 = 4x$
6. $x = 2x^2 + 5$

Oefening 16.1.11. Geef een vierkantsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ die

1. enkel het getal -5 als oplossing heeft.
2. $x_1 = 3 - i$ en $x_2 = 3 + i$ als oplossingen heeft.

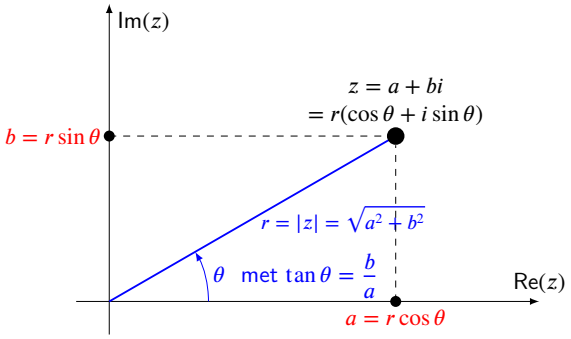
CC BY-NC-SA 4.0

16.2 De goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Een punt z in het vlak kan volledig bepaald worden door zijn projecties op de x-as en de y-as. In het complexe vlak noemen we de x-as ook de *reële* as en de y-as de *imaginaire* as. We schrijven een complex getal als $z = a + bi$. Er is echter een alternatieve manier via zogenaamde poolcoördinaten die gebruik maken van $r = |z|$, de afstand tot de oorsprong, en θ, de hoek die de overeenkomstige vector maakt met de positieve reële as. Het koppel (r, θ) zijn de *poolcoördinaten* van het punt z. In de context van complexe getallen noemen we $r = |z|$ de **modulus** en θ het **argument** (ook wel *fase* genoemd). De hoek θ wordt gemeten in radialen, in tegenwijzerzin, en is slechts op een veelvoud van 2π na bepaald.

Deze schrijfwijze is bijvoorbeeld erg handig bij vermenigvuldigingen en machten van complexe getallen, want die worden veel eenvoudiger.

We tekenen het complexe getal z met cartesische coördinaten en met poolcoördinaten:



Omdat $a = r\cos\theta$ en $b = r\sin\theta$ kunnen we $z = a + bi$ ook schrijven als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Dit noemen we de **goniometrische** (ook **polaire**) **schrijfwijze** van het complex getal z. We noemen $z = a + bi$ de **cartesische schrijfwijze**.

Opmerking 16.2.1.

- Omdat θ niet uniek bepaald is, heeft elk complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *oneindig veel goniometrische schrijfwijzes* $z = r\,(\cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi))$, met $k \in \mathbb{Z}$. Vaak wordt er echter voor gekozen om θ tussen 0 en 2π te geven: we kunnen ons sneller voorstellen waar de hoek $\frac{5\pi}{4}$ ligt dan de hoek $\frac{1093\pi}{4}$.
- Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na.

Oefening 16.2.1.

Geef de goniometrische schrijfwijze van volgende complexe getallen waarvan het argument gemakkelijk grafisch gevonden kan worden:

1. $z = 1$

2. $z = i$

3. $z = 1 + i$

4. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Merk op: bij het opschrijven van de goniometrische schrijfwijze met concrete getallen moet je de sin en cos laten staan. Als je die toch zou uitrekenen, krijg je immers terug de cartesische schrijfwijze.

CC BY-NC-SA 4.0

16.2 De goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Je kan verder experimenteren met volgende applet: Je kan $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ verplaatsen en telkens $a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$, $r = |z|$ en θ aflezen.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/NwzgUCQG

Het blijkt dat sommige berekeningen eenvoudiger zijn in de cartesische schrijfwijze en andere in de goniometrische schrijfwijze. Om te switchen tussen beide schrijfwijzes herhalen we de transformatieformules van poolcoördinaten:

Eigenschap 16.2.1 (Transformatieformules cartesische en goniometrische schrijfwijze)**.**

Een complex getal z met goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ heeft als cartesische schrijfwijze $a + bi$ met:

$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$

Een complex getal z met cartesische schrijfwijze $a + bi$ heeft als goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ met:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Opmerking 16.2.2.

Als $a \neq 0$ kunnen we de tweede vergelijking delen door de eerste (waardoor de vierkantswortel wegvalt) en krijgen we

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \quad \text{als } a \neq 0$$

Als $a > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{als } a > 0$$

Als $a < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \quad \text{als } a < 0$$

Als $a = 0$, dan ligt $z = a + bi$ op de y-as en geldt

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b > 0$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b < 0$$

Samengevat geeft dit voor θ:

$$\theta = \begin{cases} \text{bgtan}\,\dfrac{b}{a} & \text{als } a > 0 \\ \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{b}{a} & \text{als } a < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

16.2 De goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Dit alles wordt ook uitgelegd in onderstaande video:

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/_qLKTopxSXc

16.2.1 Vermenigvuldiging van complexe getallen in goniometrische schrijfwijze

In de goniometrische schrijfwijze is het niet eenvoudig om complexe getallen op te tellen: hiervoor is de cartesische schrijfwijze veel makkelijker, omdat we dan gewoon reëel en imaginair deel bij elkaar moeten optellen. Voor de vermenigvuldiging van complexe getallen is het andersom: daarvoor is er de volgende interessante formule voor de goniometrische schrijfwijze:

Als $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ twee complexe getallen zijn, dan is

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))\,, \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap gebruik hebben gemaakt van de som- en verschilformules. Dit betekent dat de moduli r_i moeten worden vermenigvuldigd, en de argumenten θ_i moeten worden opgeteld.

Eigenschap 16.2.2 (Vermenigvuldiging van twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze)**.**

De *modulus* van het product van twee complexe getallen is het *product van de moduli* van die getallen.

Het *argument* van het product van twee complexe getallen is de *som van de argumenten* van die getallen.

CC BY-NC-SA 4.0

16.2.A Oefeningen goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

16.2.A Oefeningen goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Oefening 16.2.2. Schrijf onderstaande getallen in goniometrische vorm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Zorg er steeds voor dat θ tussen 0 en 2π ligt, dus niet $-\frac{\pi}{2}$ invullen maar $\frac{3\pi}{2}$.

1. Voor $z = 1$ is $r =$ ..... en $\theta =$ .....

2. Voor $z = -1$ is $r =$ ..... en $\theta =$ .....

3. Voor $z = i$ is $r =$ ..... en $\theta =$ .....

4. Voor $z = -i$ is $r =$ ..... en $\theta =$ .....

5. Voor $z = \sqrt{3} + i$ is $r =$ ..... en $\theta =$ .....

6. Voor $z = -\sqrt{3} + i$ is $r =$ ..... en $\theta =$ .....

7. Voor $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ is $r =$ ..... en $\theta =$ .....

8. Voor $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ is $r =$ ..... en $\theta =$ .....

Oefening 16.2.3. Bepaal de modulus $|z|$ en het argument θ van volgende complexe getallen z. Geef de hoek θ in tussen 0 en 2π radialen.

1. Als $z = -7i$, dan is $|z| =$ ..... en $\theta =$ .....

2. Als $z = (7i)^{-1}$, dan is $|z| =$ ..... en $\theta =$ .....

3. Als $z = \overline{1+i}$, dan is $|z| =$ ..... en $\theta =$ .....

4. Als $z = \frac{1-i}{1+i}$, dan is $|z| =$ ..... en $\theta =$ .....

CC BY-NC-SA 4.0

16.3 Machten van complexe getallen: formule van De Moivre

Met de formules van het product van complexe getallen kunnen we natuurlijk ook het *kwadraat* van een complex getal berekenen, door eenvoudig twee keer hetzelfde getal in te vullen. In de cartesische schrijfwijze is dat mooi, maar niet spectaculair. In de goniometrische schrijfwijze vinden we iets bijzonder interessants:

Een kwadraat van een complex getal $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ is

$$z^2 = a^2 - b^2 - 2abi = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

Als we een derde of vierde macht willen berekenen worden de formules met a en b steeds ingewikkelder, maar de formules in r en θ blijven verrassend eenvoudig:

Eigenschap 16.3.1 (Formule van De Moivre)**.**

Voor een complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ en elk natuurlijk getal n geldt

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Onderstaande applet illustreert de geometrische betekenis van deze formule: $z = 1 + i$ is vast gekozen en weergegeven in het complexe vlak. De modulus van z is $|z| = r = \sqrt{2}$. Je kan met het schuivertje een macht n opgeven en daarna z^n op de figuur laten weergeven. Eerst wordt $r^n = (\sqrt{2})^n$ berekend en weergegeven op de reële as. Daarna wordt θ vermenigvuldigd met n en wordt ook z^n weergegeven.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/nglwjJ79

Voorbeeld 16.3.1. We kunnen $(1+i)^8$ op 2 manieren berekenen:

(a) $(1+i)(1+i) = 1+2i-1 = 2i$, dus $(1+i)(1+i)(1+i)(1+i) = (2i)^2 = -4$, dus $(1+i)^8 = (-4)^2 = 16$

(b) $1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, dus $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}) = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(1 + i\cdot 0) = 16$

Oefening 16.3.1. Bereken met de formule van De Moivre

1. $(\sqrt{3}+i)^3 = \ldots\ldots$

2. $(-1-i)^{20} = \ldots\ldots$

3. $(1+i)^{21} = \ldots\ldots$

4. $(-\sqrt{3}+i)^5 = \ldots\ldots$

Ook vergelijkingen van de vorm: $z^n = a + bi$ met $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ zijn met de formule van De Moivre op te lossen. Volgens de Hoofdstelling van de Algebra heeft de vergelijking $z^n = a+bi$ steeds n oplossingen. Het oplossen van de vergelijking $z^n = a + bi$ komt neer op het zoeken van de n-de machtswortels van $a + bi$.

Oefening 16.3.2. Bereken alle oplossingen van $z^2 = 1 - i$, met $z \in \mathbb{C}$.

Voorbeeld 16.3.2. Zoek alle vierdemachtswortels uit 1.

Uitwerking: We zoeken dus alle oplossingen van de vergelijking $z^4 = 1$.

We stellen $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta).$$

CC BY-NC-SA 4.0

16.3 Machten van complexe getallen: formule van De Moivre

Voor het rechterlid 1 geldt

$$|1| = 1, \qquad \arg(1) = 0,$$

zodat

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0).$$

De vergelijking $z^4 = 1$ in de onbekende z wordt zo een vergelijking in de onbekenden r en θ:

$$r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

Gelijkheid van complexe getallen leert ons dat

$$r^4 = 1 \quad \text{met } r \in \mathbb{R}^+ \quad \text{en } 4\theta = 0 + 2k\pi \quad \text{met } k \in \mathbb{Z}.$$

Dus $r = 1$, want $r^4 = 1$ heeft slecht 1 reële oplossing, en $\theta = k\pi/2$ met $k \in \mathbb{Z}$.
Dit levert vier verschillende wortels.
$z_1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$,
$z_2 = 1(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2) = i$,
$z_3 = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1$,
$z_4 = 1(\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2) = -i$.

Dit voorbeeld kan je veel sneller oplossen door $z^4 - 1$ te ontbinden in factoren:

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$$

De nulpunten hiervan zijn inderdaad 1,-1,i,-i. Ontbinden in factoren lukt echter niet meer bij bijvoorbeeld $z^5 = 1$, hiervoor moet je bovenstaande methode gebruiken.

Oefening 16.3.3. Bereken alle oplossingen van $z^3 = 8i$, met $z \in \mathbb{C}$.

CC BY-NC-SA 4.0

16.4 De exponentiële schrijfwijze van complexe getallen

We definiëren een uitbreiding van de exponentiële functie tot de verzameling van de complexe getallen.

Definitie 16.4.1. Als $z = x + iy \in \mathbb{C}$ dan is e^z het complexe getal

$$e^z = e^{x+iy} \stackrel{\text{def}}{=} e^x(\cos y + i \sin y)$$

Dit is inderdaad een uitbreiding want voor $z \in \mathbb{R}$ is e^z de reeds gekende exponentiële functie.

Met behulp van de somformules van sinus en cosinus kan je ook aantonen dat met deze definitie de gekende eigenschap van de reële exponentiële functie $e^{x+y} = e^x e^y$ voor $x, y \in \mathbb{R}$ blijft gelden in $\mathbb{C}$.

Eigenschap 16.4.1. Voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt

$$e^{z_1+z_2} = e^{z1} e^{z2}$$

Opmerking 16.4.1. Omdat met $z = x + iy$ en $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ in de vorm $r(\cos\theta + i \sin\theta)$ staat, geldt voor de modulus en het argument van e^z dat $|e^z| = e^x$ en $\arg e^z = y + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Oefening 16.4.1. Geef modulus en argument van e^{iz} met $z = x + iy$.

Een onmiddellijk gevolg van deze definitie is wat dikwijls de mooiste wiskundige formule wordt genoemd: een erg merkwaardig verband tussen de fundamentele grootheden e, π, i en -1.

Eigenschap 16.4.2. $e^{i\pi} = -1$

Vermits $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, voor $y \in \mathbb{R}$, kunnen we een complex getal in goniometrische vorm $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ ook schrijven als $z = re^{i\theta}$. We noemen dit de **exponentiële schrijfwijze**.

Opmerking 16.4.2.

Twee complexe getallen in exponentiële schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na.

Oefening 16.4.2. Schrijf $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ in de vorm $x + iy$. $2e^{i\frac{2\pi}{3}} = \ldots\ldots$

Omdat $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, wordt het vermenigvuldigen van twee complexe getallen nog eenvoudiger in de exponentiële schrijfwijze.

Eigenschap 16.4.3. Als $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ en $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ twee complexe getallen zijn, dan is

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \end{aligned}$$

en als $z = re^{i\theta}$, dan is voor $n \in \mathbb{N}$ (formule van De Moivre)

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

CC BY-NC-SA 4.0

16.4 De exponentiële schrijfwijze van complexe getallen

Oefening 16.4.3 (Vierkantswortels). Bereken alle oplossingen van $z^2 = 1 - i$, met $z \in \mathbb{C}$.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

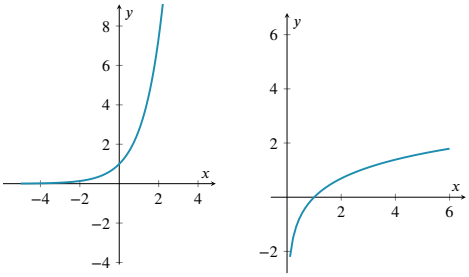
Module 17
Exponentiele en logaritmische functies

(Versie 2026/08/25H.51)

17.1 Intro exponentiële en logaritmische functies

In alle wetenschappen worden fenomenen bestudeerd die exponentiële of logaritmische kenmerken hebben. Het meest gekend is de zogenaamde *exponentiële groei*. Deze uitdrukking betekent informeel meestal 'erg sterke groei', en wordt dan dikwijls tegenover de eerder gematigde 'lineaire groei' gesteld.

Het concept *exponentieel* slaat op een zekere veralgemening van het *machtsverheffen*. De machtsfuncties $x^2, x^3, x^4, \ldots$ bekomen we door een getal x telkens een extra keer te vermenigvuldigen met zichzelf. Er is een machtsfunctie voor *elke positieve exponent*, het grondtal varieert. Bij de *exponentiële functie* kiezen we het grondtal vast, en laten de exponent variëren: we bestuderen de functies $2^x, 3^x, 4^x, \ldots$. Er is dus een exponentiële functie voor *elk positief grondtal*.



Het tweede belangrijke concept dat we hier invoeren is de *logaritme*. De logaritme geeft de **grootte-orde** van iets. Voor een macht van 10 betekent dat het aantal cijfers, of nauwkeuriger het aantal nullen. De logaritme van 10 is per definitie gelijk is aan 1 (want er is één nul). De logaritme van 100 is 2, die van 1000 is 3, en die van 10^{42} is 42. Dit soort logaritme wordt de *tiendelige logaritme* of 10-logaritme genoemd en is erg populair bij bijvoorbeeld economen, maar ook bij fysici, chemici en biologen. Informatici daarentegen begrijpen de wereld dikwijls binair, en ze tellen liever in machten van 2: de 2-logaritme van 2 is per definitie 1, die van $4 = 2^2$ is 2, die van $16 = 2^4$ is 4, die van $64 = 2^8$ is 8, en die van 2^{1024} is 1024. Wiskundigen – en alle andere wetenschappers als ze wiskunde aan het gebruiken zijn – vinden het bijzonder aangenaam om de grootte-ordes te berekenen in termen van het getal $e = 2.71\ldots$. Dat lijkt een wat *gekke* keuze, maar wie al afgeleiden heeft gestudeerd weet zeker ook waarom het een bijzonder *slimme* keuze is.

Je kan het begrip logaritme invoeren door te vertrekken van een exponentiële functie a^x, en gebruik te maken van het begrip *inverse functie*: de logaritme $log_a x$ is per definitie de inverse functie van de exponentiële functie a^x. Wij hebben hier gekozen voor een tweede mogelijkheid, die meer elementair is en enkel de rekenregels voor het machtsverheffen gebruikt.

In wat volgt hebben we de leerstof over exponentiële en logaritmische functies als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) De definitie van de logaritme van een getal

(3) Enkele rekenregels voor logaritmen

(4) Enkele voorbeelden van groeimodellen

(5) De definitie en basiseigenschappen van exponentiële functies

(6) De definitie en basiseigenschappen van logaritmische functies

(7) Een korte inleiding tot exponentiële vergelijkingen

CC BY-NC-SA 4.0

17.2 Begintest Logaritme

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je Rekenen met Logaritme verder overslaan, anders herhaal je best grondig de definitie en de rekenregels.

Oefening 17.2.1. Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

1. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \ldots\ldots$
2. $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = \ldots\ldots$

Oefening 17.2.2. Schrijf als één logaritme. $(x > 0, y > 0, z > 0)$

1. $\log_5(xy) - \log_5(yz) + \log_5(zx) = \log_5 \ldots\ldots$

Oefening 17.2.3. Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

1. $\log_9 25 - \log_3 15 = \ldots\ldots$
2. $\ln 108 - 2 \cdot \ln 6 + \ln\left(\frac{e}{3}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Groeimodellen

Wetenschappers bestuderen grootheden die veranderen in de tijd zoals temperatuur, snelheid, winst, consumptieprijzen en bevolkingsaantallen. We gebruiken hier de term **groeimodel** voor twee types erg *regelmatig* groeiende grootheden. Het woord 'groeien' moet niet te letterlijk worden genomen: het kan ook 'krimpen' of 'afnemen' betekenen: dan spreken we van *negatieve groei* of *verval*. In de praktijk groeien grootheden ook veel onregelmatiger en dat kan met behulp van de wiskundige techniek van afgeleiden van functies worden bestudeerd.

In het **lineaire groeimodel** wordt per tijdseenheid een constante term *opgeteld* bij de grootheid, in het **exponentieel groeimodel** wordt de grootheid per tijdseenheid telkens met een constante factor *vermenigvuldigd* (de zogenaamde *groeifactor*).

Definitie 17.3.1 (Pseudo-definitie van lineaire en exponentiële groei)**.**

Een grootheid groeit **lineair** als er na elke tijdseenheid een vaste waarde wordt *bijgeteld*. Deze waarde noemen we de **groeisnelheid**.

Een grootheid groeit **exponentieel** als ze na elke tijdseenheid met een vaste waarde wordt *vermenigvuldigd*. Deze waarde noemen we de **groeifactor**.

Merk alvast op dat de waarde die telkens wordt opgeteld ook negatief kan zijn, en de waarde waarmee wordt vermenigvuldigd kleiner kan zijn dan 1. In beide gevallen spreken we over **negatieve groei**.

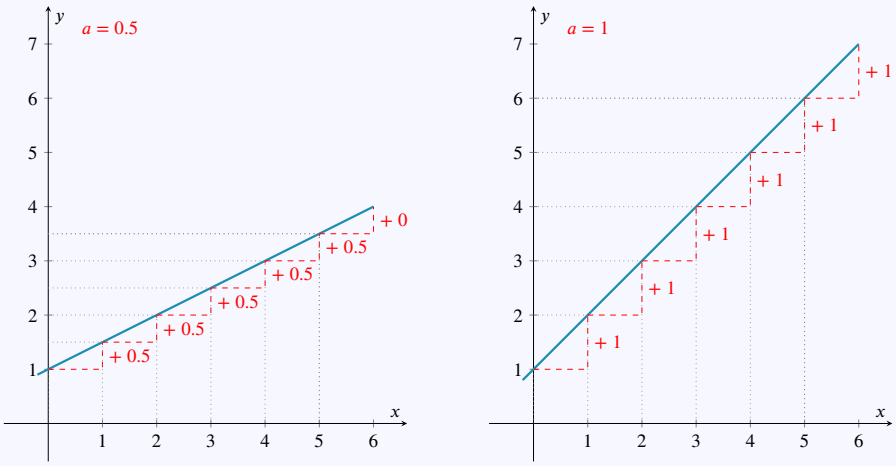
We onderzoeken eerst wat lineaire en exponentiële groei betekenen voor *reële functies*.

Voorbeeld 17.3.1 (Lineaire groei)**.**

Voor een reële functie $f : x \mapsto f(x)$ betekent lineaire groei volgens de definitie dat telkens wanneer x met 1 toeneemt, de functiewaarde $f(x)$ ook met een vaste waarde moet toenemen. Als we die waarde a noemen, betekent dat dus dat $f(x+1) = f(x) + a$. Als we de functiewaarde voor $x = 0$ bijvoorbeeld b noemen, dan weten we dat $f(0) = b$, en dus

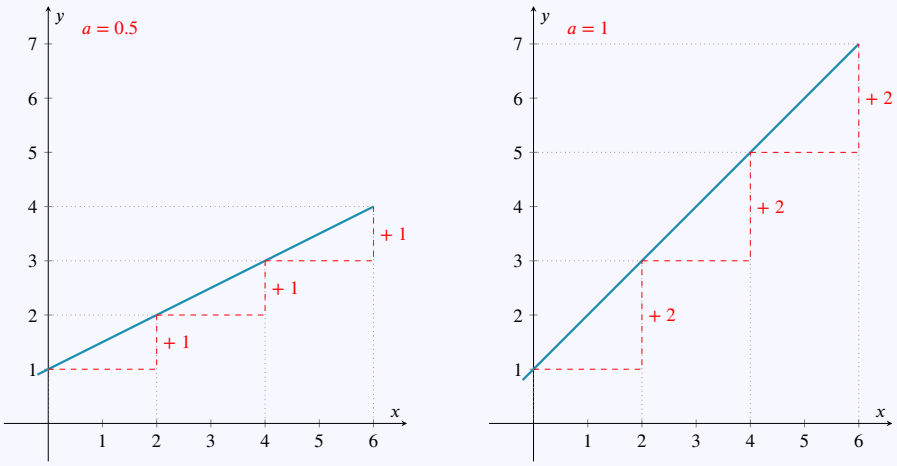
$$\begin{aligned} f(1) &= f(0+1) = f(0) + a = b + a \\ f(2) &= f(1+1) = f(1) + a = (b+a) + a = b + 2a \\ f(3) &= f(2+1) = f(2) + a = (b+2a) + a = b + 3a \\ f(4) &= f(3+1) = f(3) + a = (b+3a) + a = b + 4a. \end{aligned}$$

Op de grafiek van f ziet dit er als volgt uit:



Merk op dat ook steeds $f(x+2) = f((x+1)+1) = f(x+1) + a = f(x) + a + a = f(x) + 2a$:

17.3 Groeimodellen

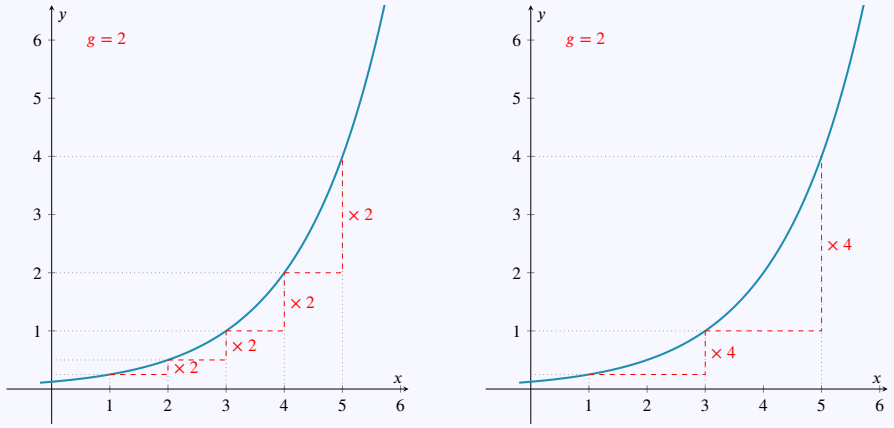


Voorbeeld 17.3.2 (Exponentiële groei)**.**

Voor een reële functie $f : x \mapsto f(x)$ betekent exponentiële groei volgens de definitie dat telkens wanneer x met 1 toeneemt, de functiewaarde $f(x)$ met een vaste waarde moet vermenigvuldigd worden. Als we die waarde g noemen, betekent dat dus dat $f(x+1) = gf(x)$. Als we de functiewaarde voor $x = 0$ bijvoorbeeld b noemen, dan weten we dat $f(0) = b$, en dus

$$f(1) = f(0+1) = f(0) \cdot g = b \cdot g$$
$$f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot g = (b \cdot g) \cdot g = b \cdot g^2$$
$$f(3) = f(2+1) = f(2) \cdot g = (b \cdot g^2) \cdot g = b \cdot g^3$$
$$f(4) = f(3+1) = f(3) \cdot g = (b \cdot g^3) \cdot g = b \cdot g^4.$$

Op de grafiek van f ziet dit er als volgt uit:



Merk op dat dus ook geldt dat $f(x+2) = f((x+1)+1) = gf(x+1) = g^2 f(x)$.

We gebruiken de letter a voor de groeisnelheid bij lineaire groei en de letter g voor de groeifactor bij exponentiële groei.

Eigenschap 17.3.1.

Het functievoorschrift van een reële functie met *lineaire groei* met **beginwaarde** b en **groeisnelheid**

CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Groeimodellen

a is

$$f(t) = at + b.$$

Het functievoorschrift van een reële functie met *exponentiële groei* met **beginwaarde** b en **groeifactor** g is

$$f(t) = b \cdot g^t.$$

Hierbij veronderstellen we $a \neq 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Opmerking 17.3.1.

- De groeifactor wordt soms ook met de letter a genoteerd, of de variabele van de functie met de letter x. Dan krijg je als functievoorschrift

$$f(t) = b \cdot a^t \text{ of } f(x) = b \cdot a^x.$$

- Zowel voor lineaire als voor exponentiële groei is b de *begin*waarde: voor $t = 0$ is telkens $f(0) = b$.

Oefening 17.3.1.

1. Teken de grafiek van een functie met lineaire groei met beginwaarde 4 waarbij de groeisnelheid 0 zou zijn. Teken ook de grafiek van een functie met exponentiële groei met beginwaarde 4 waarbij de groeifactor 1 zou zijn.

Besluit: De groeisnelheid a bij lineaire groei moet verschillend zijn van 0, en de groeifactor g bij exponentiële groei moet verschillend zijn van 1, want anders krijgen we *constante* functies. Een constante functie noemen we *geen* lineaire of exponentiële groei.

Eigenschap 17.3.2.

- Als bij lineaire groei een functie over één tijdseenheid groeit met a, dan groeit ze met $n \cdot a$ over n tijdseenheden, want

$$f(t+n) = a(t+n) + b = at + an + b = f(t) + an$$

- Als bij exponentiële groei een functie over één tijdseenheid groeit met een groeifactor g, dan groeit ze met een factor g^n over n tijdseenheden, want

$$f(t+n) = b \cdot g^{t+n} = b \cdot g^t \cdot g^n = g^n \cdot f(t).$$

- Een lineaire groeifunctie stijgt als $a > 0$ en daalt als $a < 0$.
- Een exponentiële groeifunctie stijgt als $g > 1$ en daalt als $g < 1$.

Oefening 17.3.2 (Lineaire groei: constante toevoer van zand)**.**

In een zandgroeve voert een lopende band aan een constant debiet van 3/5 ton per kwartier nieuw zand toe. Stel dat de band om 8 uur 's morgens begint een bestaande zandhoop van 2 ton zand aan te vullen volgens dit proces. Om hoe laat zal de zandhoop dan 10 ton zand bevatten?

We vertalen deze gegevens wiskundig als volgt: we meten de tijd t in eenheden van één kwartier en laten $t = 0$ overeenkomen met 8 uur 's morgens. De hoeveelheid zand op de hoop (in ton) op het

CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Groeimodellen

ogenblik t geven we aan met $f(t)$.

Zo komen we tot volgend schema:

t kwartier	$\overbrace{0}^{+1}$	$\overbrace{1}^{+1}$	$\overbrace{2}^{+1}$	$\overbrace{3}^{+1}$	4	⋯	n
$f(t)$ ton	2	$2+\frac{3}{5}$	$2+2\cdot\frac{3}{5}$	$2+3\cdot\frac{3}{5}$	$2+4\cdot\frac{3}{5}$	⋯	$2+n\cdot\frac{3}{5}$
		$\underbrace{+\frac{3}{5}}$		$\underbrace{+\frac{3}{5}}$			

We stellen vast dat voor elk natuurlijk getal n geldt

$$f(n) = \frac{3}{5}\,n + 2.$$

De tijd verloopt niet in sprongen van een kwartier, en we kunnen aannemen dat ook voor elk reëel getal t geldt

$$f(t) = \frac{3}{5}\,t + 2.$$

1. Teken de grafiek van deze functie f en geef de betekenis van de grootheden 2 en $\frac{3}{5}$ in de grafiek aan.

2. Verklaar de uitdrukking "lineaire groei".

3. Bereken hoe laat de zandhoop 10 ton zal bevatten.

Oefening 17.3.3 (Exponentiële groei: bacteriën)**.**

Een populatie bacteriën ontwikkelt zich in een kweekschaal. Stel dat het aantal bacteriën in het schaaltje elke 25 minuten verdubbelt en stel dat er in de beginsituatie vierduizend bacteriën aanwezig zijn. Hoe verloopt de groei van deze populatie bacteriën?

Om deze gegevens wiskundig te vertalen maken we volgende afspraken:

- We meten de tijd t in eenheden van 25 minuten.
- $t = 0$ komt overeen met het begin van onze observaties.
- De hoeveelheid bacteriën op het ogenblik t drukken we uit in duizendtallen en geven we aan met $f(t)$.

Zo komen we tot volgend schema:

t (per 25 min.)	$\overbrace{0}^{+1}$	$\overbrace{1}^{+1}$	$\overbrace{2}^{+1}$	$\overbrace{3}^{+1}$	4	⋯	n
$f(t)$ bacteriën (per 10^3)	4	$4\cdot 2$	$4\cdot 2^2$	$4\cdot 2^3$	$4\cdot 2^4$	⋯	$4\cdot 2^n$
		$\underbrace{\times 2}$		$\underbrace{\times 2}$			

We stellen vast dat voor elk natuurlijk getal n geldt

$$f(n) = 4 \cdot 2^n.$$

Hierin is $4 = f(0)$ de beginwaarde en de groeifactor (over 25 minuten) is in dit geval $g = 2$.

CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Groeimodellen

Omdat niet alle bacteriën gelijktijdig splitsen, is het aan te nemen dat de groei niet enkel gebeurt op de tijdstippen $0, 1, 2, 3 \ldots$ maar ook op elk moment tussen die tijdstippen. We kunnen bijvoorbeeld op zoek gaan naar het aantal bacteriën na 5 minuten ($\frac{1}{5}$ van de splitsingstijd) of na 50 minuten (het dubbele van de splitsingstijd).

1. Vul volgend schema aan:

t	0	$1/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$	1
$f(t)$	4	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$4 \cdot 2$
		$\times \ldots$	$\times \ldots$	$\times \ldots$	$\times \ldots$	$\times \ldots$
	$+1$	$+1/5$	$+1/5$	$+1/5$	$+1/5$	$+1/5$
	$\times 2$					

2. Met welke factor groeit de functie over $\frac{1}{5}$ van een tijdseenheid? $\boxed{\frac{2}{5}}$ $\boxed{\sqrt[5]{2}}$ $\boxed{\sqrt{2}}$ $\boxed{\log_5 2}$.

3. Vul volgend schema aan:

t	0	1	2
$f(t)$	4	$4 \cdot 2$	$4 \cdot 2^2$
		$\times 2$	$\times 2$
	$+1$	$+1$	
	$\times \ldots$		
$+2$			

4. Met welke factor groeit de functie over 2 tijdseenheden? $\ldots\ldots$

5. Met welke factor groeit de functie over een uur, dus over $\frac{12}{5}$ tijdseenheden? $\ldots\ldots$

6. Schets de grafiek van deze functie.

Voorbeeld 17.3.3 (Groei met procentuele toename of afname)**.**

Als in een vijver het aantal vissen elk jaar met 30% toeneemt, is dat dan een voorbeeld van lineaire groei of van exponentiële groei?

Het lijkt alsof er een vaste toename is per tijdsinterval (namelijk telkens $+30\%$), en dus zouden we kunnen denken dat dit proces beschreven kan worden met een lineaire groei. Maar klopt dit wel?

Neen, de vaste toename is een **procentuele toename**, dit betekent dat als we de tijd t in jaren uitdrukken en $f(t)$ de hoeveelheid vissen op het ogenblik t voorstelt, we voor elk tijdstip t hebben dat:

$$f(t+1) = f(t) + (30\,\% \text{ van } f(t)) = f(t) + \frac{30}{100} f(t) = (1 + \frac{30}{100}) f(t).$$

We vinden dat dit proces een exponentieel proces is en dat de groeifactor per jaar $(1 + \frac{30}{100}) = 1.3$ bedraagt.

Eigenschap 17.3.3 (Groei met procentuele toename of afname)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Groeimodellen

De **procentuele toename** p en de **groeifactor** g zijn verbonden via de formule

$$g = \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Hieruit volgt dat :

positieve groei:	procentuele toename p positief	$\Leftrightarrow$	groeifactor g groter dan 1
negatieve groei:	procentuele toename p negatief	$\Leftrightarrow$	groeifactor g kleiner dan 1

Een groei met procentuele toename $p = 0\%$ sluiten we uit, want dat zou een groeifactor gelijk aan 1 geven.

CC BY-NC-SA 4.0

17.3.A Oefeningen groeimodellen

Oefening 17.3.4. Elk schooljaar daalt de prijswaarde van een handboek wiskunde. Concreet verkoopt een leerling zijn handboek aan een leerling van een lager jaar voor $\frac{2}{3}$ van de prijs die hijzelf een jaar voordien voor het boek heeft betaald. Met andere woorden, de prijs daalt per jaar met $\frac{1}{3}$. Stel dat het handboek wiskunde oorspronkelijk voor 16 euro aangekocht werd in de boekhandel.

1. De groeifactor per tijdseenheid van een jaar = ...

2. Het functievoorschrift voor de prijs p van het handboek in functie van de tijd t in jaren is

$$p(t) = \ldots \ldots .$$

3. Het handboek wordt na 5 jaar verkocht aan ... ... euro.

4. Maak een grafiek van deze functie voor de 5 eerst jaren.

Oefening 17.3.5. Men maakt een studie over de bevolking van de stad Oostende. Het stadsbestuur neemt aan dat de bevolking exponentieel groeit. De tellingen zijn begonnen in 1995, maar deze resultaten zijn verloren gegaan. In 1997 waren er ongeveer 68000 inwoners; in 2001 is dit gegroeid tot 73000. Hoeveel mensen waren er, op basis van de gegevens, vermoedelijk in 1995? ... ...

Oefening 17.3.6. Op een spaarrekening met samengestelde intrest - waarbij de intrest dus maandelijks wordt toegevoegd aan het kapitaal - hebben je ouders bij je geboorte een startkapitaal van 20000 euro gezet. De rente bedroeg $0,12\%$ per maand.

1. Hoeveel geld stond er na 6 maanden op die rekening? ... ...

2. Hoeveel bedroeg de rentevoet (procentueel) per jaar? ... ...

3. Hoeveel stond er op de spaarrekening na 10 jaar? ... ...

Oefening 17.3.7. Enkele jaren geleden werd, n.a.v. een economische missie in China, in het VRT-journaal beweerd dat de economie van China jaarlijks met $14\,\%$ groeit, en dat dit betekent dat de Chinese economie dus binnen 7 jaar verdubbeld zal zijn.

1. Welke berekening werd wellicht gemaakt om van de $14\,\%$ jaarlijkse groei tot een verdubbeling na 7 jaar te komen?

2. Wat is het functievoorschrift van de groeifunctie $f(t)$ die de grootte van de Chinese economie voorstelt? Noteer hierbij de waarde van f voor $t = 0$ als $f(0)$.

$f(t) = \ldots \ldots$

3. Wat zal - in de veronderstelling dat de groei aan hetzelfde tempo blijft toenemen - de procentuele groei werkelijk zijn na 7 jaar? Ongeveer ... ... %.

4. Met welke factor groeit de economie na 4, 5, 6 en 7 jaar. Tussen welke van deze waarden treedt de verdubbeling werkelijk op?

Oefening 17.3.8.

1. De formule voor de procentuele groei p per tijdseenheid in functie van een gegeven groeifactor g is $p = \ldots \ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

17.3.A Oefeningen groeimodellen

2. De formule voor de procentuele groei q per n tijdseenheden in functie van een gegeven groeifactor g (met $n \in \mathbb{N}$) is $q = \ldots\ldots$

3. Een formule voor het verband tussen een procentuele groei p per maand en q per jaar is $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

17.4 De logaritme

We kennen voor een gegeven grondtal a en een gegeven exponent r de *macht* a^r. Zo hoort bij grondtal 3 en exponent 2 de macht $3^2 = 9$ en bij grondtal 2 en exponent 3 de macht $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Bij *logaritmen* keren we de berekening om: we *vertrekken* van een gegeven grondtal a en een gegeven macht a^r en *zoeken* de *exponent* r die hoort bij dat grondtal a om die macht a^r te bekomen. Als de macht geschreven is als a^r kunnen we r natuurlijk gewoon aflezen, maar als de macht is uitgerekend werkt dat niet meer. Zo zoeken we voor het grondtal 3 en het getal 9 de exponent r zodat $3^r = 9$. Die is 2 want $3^{\mathbf{2}} = 9$. We noemen die exponent 2 de 3-logaritme van 9, en we noteren $\log_3 9 = 2$. We hebben dus:

$\log_3 9 = \mathbf{2}$ want $3^{\mathbf{2}} = 9$. Er geldt dus dat $3^{\log_3 9} = 9$ en $\log_3 3^2 = 2$.

$\log_2 8 = \mathbf{3}$ want $2^{\mathbf{3}} = 8$. Er geldt dus dat $2^{\log_2 8} = 8$ en $\log_2 2^3 = 3$.

Definitie 17.4.1 (Logaritme)**.** De **logaritme met grondtal a van x** of de **a-logaritme van x** is per definitie **de exponent r waartoe men grondtal a moet verheffen om x als uitkomst te krijgen.**

We noteren die exponent r als $\log_a x$. In symbolen wordt de definitie

$$\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$$

Vb: $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

of equivalent: $\log_a x$ is het unieke reële getal zodat $a^{\log_a x} = x$.

Deze definitie is enkel zinvol voor a en x positieve reële getallen met $a \neq 1$ (zie Opmerking 17.4.2).

Voorbeeld 17.4.1. Je kan $\log_a x$ dus *direct aflezen* als je x als een macht van a kan schrijven:

1. $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
2. $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$
3. $\log 1000 = \log 10^3 = 3$
4. $\log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{-1} = -1$
5. $\log_4 4 = 1$
6. $\log_4 1 = 0$

Opmerking 17.4.1.

- In het secundair onderwijs gebruikt men dikwijls de notatie ${}^a\log x$, in de wetenschappen $\log_a x$.
- De definitie $\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$ lijkt erg op die van machtswortels $\sqrt[a]{x} = r \Longleftrightarrow r^a = x$, maar de rol van a en r is verwisseld: bij de wortel zoek je het *grondtal*, bij de logaritme de *exponent*.
- Net zoals wortels als $\sqrt{4}, \sqrt{25}$ en $\sqrt[3]{8}$ makkelijk te berekenen zijn terwijl je voor $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ of $\sqrt[3]{9}$ een rekentoestel nodig hebt, geldt voor logaritmen dat $\log_2 4, \log_5 25$ en $\log_2 8$ makkelijk te berekenen zijn, terwijl je voor $\log_3 8$ of $\log_5 30$ een rekentoestel nodig hebt.

Opmerking 17.4.2. Speciale grondtallen en argumenten waarvoor de logaritme niet bestaat:

$\log_1 5$	bestaat niet:	er bestaat immers geen r zodat $1^r = 5$, want 1^r is steeds 1.
$\log_0 5$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $0^r = 5$, want 0^r is nul of ongedefinieerd.
$\log_5 0$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $5^r = 0$, want 5^r is steeds strikt positief.
$\log_{-2} 5$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $(-2)^r = 5$. Er bestaat zeker geen *natuurlijk* getal r waarvoor $(-2)^r = 5$, en *rationale* getallen r zijn problematisch omdat bijvoorbeeld $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$ niet bestaat.
$\log_5(-2)$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $5^r = -2$, want 5^r is altijd positief.

In de definitie van de logaritme $\log_a x$ moeten dus a en x inderdaad beperkt worden:

- het grondtal a moet *strikt positief* zijn,

CC BY-NC-SA 4.0

17.4 De logaritme

- het grondtal a mag niet 1 zijn (want machten van 1 zijn altijd gelijk aan 1),
- het argument x moet *strikt positief* zijn (want machten met een strikt positief grondtal a zijn altijd strikt positief).

Het getal $\log_a x$ kan zelf *wel alle reële waarden aannemen*, en dus zowel negatief, nul als positief zijn.

Merk op dat de logaritme $\log_2 10$ wel bestaat, maar niet *exact* kan bepaald worden omdat je het getal 10 niet *exact* kan schrijven als een macht met grondtal 2. Omdat $2^3 < 10 < 2^4$ kunnen we wel besluiten dat $\log_2 10$ een waarde moet zijn tussen 3 en 4. Met een rekentoestel kunnen betere benaderende waarde worden gevonden. Zo is bijvoorbeeld $\log_2 10 \approx 3.3219$, afgerond op 4 decimalen.

In de praktijk komen twee grondtallen erg veel voor, en daarvoor is er telkens een speciale notatie:

Definitie 17.4.2.

De **tiendelige logaritme**, ook wel *Briggse logaritme* genoemd, is de logaritme met grondtal 10, en wordt per afspraak genoteerd zonder grondtal: $\log x \overset{\text{def}}{=} \log_{10} x$.

De **natuurlijke logaritme**, ook wel *Neperse logaritme* genoemd, is de logaritme met grondtal het **getal van Euler** $e \approx 2.718281$ en wordt genoteerd als $\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$.

De logaritme $\log_a x$ geeft de *grootte-orde* aan van x in termen van a, namelijk hoeveel machten van a er gaan in x. Voor de tiendelige logaritme gaat het dus om machten van 10, en (het gehele deel van) $\log x$ bepaalt het *aantal cijfers* van x: $\log 1000 = 3, \log 10^n = n$ en $3 < \log 1234 < 4$ en $5 < \log 123456 < 6$. Op dezelfde manier bepaalt voor informatici $\log_2 x$ het *aantal bits* dat nodig is om x op te slaan.

De natuurlijke logaritme is ondermeer erg handig bij het berekenen van afgeleiden, en het gebruik van ln maakt dan allerlei formules veel eenvoudiger. De afkorting ln komt van het Latijnse 'logaritmus naturalis'.

Uit de definities volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

Eigenschap 17.4.1 (Basisformules van de logaritme)**.**

Voor $x > 0$ en $a > 0$ met $a \neq 1$ geldt: $\log_a a^x = x$ en $a^{\log_a x} = x$

Voor $x = 0$ wordt dit: $\log_a 1 = 0$

Voor $x = 1$ wordt dit: $\log_a a = 1$.

Voor $a = 10$ wordt dit: $\log 10^x = x$ en $10^{\log x} = x$.

Voor $a = e = 2.7182\ldots$ wordt dit: $\ln e^x = x$ en $e^{\ln x} = x$.

Oefening 17.4.1. Bereken volgende logaritmen (zonder rekenmachine).

1. $\log_3 81 = \ldots\ldots$

2. $\log 100 = \ldots\ldots$

3. $\log 0.01 = \ldots\ldots$

4. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

5. $\log_2 128 = \ldots\ldots$

6. $\log_2(4^7) = \ldots\ldots$

7. $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = \ldots\ldots$

8. $\log_9 3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

17.4.A Basisoefeningen logaritmen

Oefening 17.4.2. Bereken indien mogelijk de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Indien de logaritme bestaat maar we deze niet exact kunnen berekenen, geef dan de grenzen aan (bv. $\log_3 10$ is een waarde tussen 2 en 3).

1. $\log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \ldots\ldots$

2. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \ldots\ldots$

3. $\log_1 1 : \ldots\ldots$

4. $\log \frac{1}{1000} = \ldots\ldots$

5. $\ln \sqrt[3]{e^2} = \ldots\ldots$

6. $\log_6 1 = \ldots\ldots$

7. $\log_4 8 = \ldots\ldots$

8. $\log_5 10 : \ldots\ldots$

9. $\log_3(-3)^6 = \ldots\ldots$

10. $\log_{-3}(-3)^6 : \ldots\ldots$

Oefening 17.4.3. Bereken zonder rekenmachine.

1. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

2. $\log_5 125 = \ldots\ldots$

3. $\log_2 \frac{1}{32} = \ldots\ldots$

4. $\log_6(36\sqrt{6}) = \ldots\ldots$

5. $\log 0,00001 = \ldots\ldots$

6. $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

17.5 Rekenregels voor logaritmen

Uit de rekenregels voor machten volgen enkele belangrijke rekenregels voor logaritmen.

Uit de formule $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ volgt door te stellen dat $a^r = x$ en $a^s = y$ de gelijkheid $x \cdot y = a^{r+s}$. Hiervan de a-logaritme nemen en opmerken dat $a^r = x$ hetzelfde betekent als $r = \log_a x$ levert

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a a^{r+s} = r + s = \log_a x + \log_a y$$

en dus:

Eigenschap 17.5.1. Logaritme van een product: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $(a, x, y \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1)$

In woorden: *de logaritme van een product is de som van de logaritmen.*
of: de logaritme zet een *product* om in een *som*.

Voorbeeld 17.5.1.

1. $\log 25 + \log 4 = \log(25 \cdot 4) = \log 100 = 2$
2. $\log_5 125 = \log_5(5 \cdot 25) = \log_5 5 + \log_5 25 = 1 + 2 = 3$
3. $\log_a x^2 = \log_a(x \cdot x) = \log_a x + \log_a x = 2 \log_a x$

Het laatste voorbeeld kan worden veralgemeend tot willekeurige machten: uit de formule $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ volgt door $a^r = x$ te stellen de gelijkheid $x^s = a^{r \cdot s}$. Van $x^s = a^{r \cdot s}$ de a-logaritmen nemen geeft

$$\log_a x^s = \log_a a^{r \cdot s} = s \cdot r = s \cdot \log_a x.$$

Eigenschap 17.5.2. Logaritme van een macht: $\log_a x^s = s \cdot \log_a x$ $(a, x \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1, s \in \mathbb{R})$

In woorden: *de logaritme zet een macht om in een product.*
of: de logaritme brengt *een exponent naar beneden* (of naar voor).

Speciaal geval $s = -1$: $\log_a x^{-1} = -\log_a x$

Voorbeeld 17.5.2. $\log_2 4^5 = 5 \log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10$ en $\log x^{1000} = 1000 \log x$

Het speciaal geval $\log_a x^{-1}$ geeft samen met de formule voor het product een formule voor het quotiënt:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x \cdot y^{-1}) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$$

Eigenschap 17.5.3. Logaritme van een quotiënt: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $(a, x, y \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1)$

In woorden: *de logaritme van een quotiënt is het verschil van de logaritmen.*
of: de logaritme zet een *quotiënt* om in een *verschil*.

Voorbeeld 17.5.3. $\log 500 - \log 5 = \log \frac{500}{5} = \log 100 = 2$

Stel dat je een getal x hebt geschreven als een macht van a, dus $x = a^r$ *en* als een macht van b, dus $x = b^s$. Dan kan je onderzoeken of er een verband is tussen de exponenten r en s. Welnu, de a-logaritme

CC BY-NC-SA 4.0

17.5 Rekenregels voor logaritmen

nemen van de gelijkheid $x = b^s$ geeft samen met de equivalentie $x = b^s \iff s = \log_b x$ dat

$$\log_a x = \log_a b^s = s \cdot \log_a b = \log_b x \cdot \log_a b$$

Eigenschap 17.5.4 (Verandering van grondtal).

Verandering van grondtal: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ of $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$

Speciaal geval $x = a$: $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b} = (\log_a b)^{-1}$

Je kan de formule $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ lezen als: de a-logaritme van x is een *herschaling* van de b-logaritme met een factor $\log_a b$. Of nog: de logaritmen met grondtal a resp. b zijn *evenredig*, met evenredigheidsfactor $\log_a b$

Ezelsbruggetje: je kan in $\log_a x$ formeel '$b \cdot \log_b$ inschuiven': $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ (met $b > 0$ willekeurig).

Voorbeeld 17.5.4.

1. $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{2}{3}$
2. $\dfrac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = 4$

Waarschuwing 17.5.1. Pas op voor volgende (te) veel gemaakte fouten:

~~$\log(x+y) = \log x + \log y$~~ want $\log(100+100) \neq \log 100 + \log 100$
omdat $\log 200 \neq 2 + 2 = 4 = \log 10000$

~~$\log(x+y) = \log x \cdot \log y$~~ want $\log(100+10) \neq \log 100 \cdot \log 10$
omdat $\log 110 \neq 2 \cdot 1 = 2 = \log 100$

~~$\log(x-y) = \dfrac{\log x}{\log y}$~~ want $\log(100-10) \neq \dfrac{\log 100}{\log 10}$
omdat $\log 90 \neq \dfrac{2}{1} = 2 = \log 100$

~~$(\log x)^n \neq n \cdot \log x$~~ want $(\log(10)^3 \neq 3 \cdot \log 10$
omdat $(\log 10)^3 = 1^3 = 1$ en $3 \cdot \log 10 = 3 \cdot 1 = 3$

In het algemeen kan je niet veel doen met de logaritme van een som of verschil. Er zijn enkel formules voor *logaritmen van* producten en quotiënten, en voor sommen of verschillen *van logaritmen*.

Opmerking 17.5.1. Eenvoudige rekentoestellen kennen soms enkel de functie 'log()' waarmee je wel $\log_{10}(25)$ kan berekenen, maar niet bijvoorbeeld $\log_2(25)$. Met behulp van de formule om van grondtal te veranderen bereken je $\log_2(25)$ dan toch als $\dfrac{\log 25}{\log 2}$.

Volgende voorbeeldoefeningen gebruiken telkens meerdere rekenregels om tot een oplossing te komen:

CC BY-NC-SA 4.0

17.5 Rekenregels voor logaritmen

Voorbeeld 17.5.5. Schrijf de uitdrukking $2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z &= \log_3(x^2) - \log_3(y^3) + \log_3(z^{0.5}) \\ &= \log_3(x^2 z^{0.5}) - \log_3(y^3) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2 z^{0.5}}{y^3}\right) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2\sqrt{z}}{y^3}\right). \end{aligned}$$

Hierbij hebben we eerst de rekenregel voor machten gebruikt, daarna de rekenregel voor product en tenslotte de rekenregel voor quotiënt.

Voorbeeld 17.5.6. Schrijf de uitdrukking $\log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z &= \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + \log_{\frac{1}{5}}(z^2) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}(xz^2) - \log_{\frac{1}{5}}(yz) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz^2}{yz}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz}{y}\right). \end{aligned}$$

Opnieuw hebben we gebruik gemaakt van de rekenregel voor machten, de rekenregel voor product en de rekenregel voor quotiënt, in deze volgorde, en tenslotte de breuk binnen de logaritme vereenvoudigd.

Voorbeeld 17.5.7. Bereken de waarde van $\log_2 3 - \log_2 12$ zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Dat kan met behulp van de quotiëntregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 = \log_2\left(\frac{3}{12}\right) &= \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \log_2(2^{-2}) = -2. \end{aligned}$$

Een alternatieve manier gebruikt de productregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 = \log_2 3 - \log_2(3 \cdot 4) &= \log_2 3 - \log_2 3 - \log_2 4 \\ &= -\log_2(2^2) = -2. \end{aligned}$$

Voorbeeld 17.5.8. Als gegeven is dat $\log x = 2.4$ en dat $\log y = -1.1$, bereken dan $\log\left(\sqrt{x} \cdot y^3\right)$.

Dit kan gebeuren op twee manieren.

Eerst gebruiken we de betekenis van de logaritme om x en y te bepalen: $x = 10^{2.4}$ en $y = 10^{-1.1}$.

CC BY-NC-SA 4.0

17.5 Rekenregels voor logaritmen

Dan geldt:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(\sqrt{10^{2.4}}\cdot(10^{-1.1})^3\right)\\ &= \log\left((10^{2.4/2})\cdot(10^{-1.1\cdot 3})\right)\\ &= \log\left(10^{1.2}\cdot 10^{-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{1.2-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{-2.1}\right) = -2.1.\end{aligned}$$

Anderzijds kunnen we gebruik maken van de rekenregels van logaritmen om de gegeven formule te herschrijven als een uitdrukking in $\log x$ and $\log y$:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(x^{0.5}\cdot y^3\right)\\ &= \log(x^{0.5}) + \log(y^3)\\ &= 0.5\cdot\log x + 3\cdot\log y\\ &= 0.5\cdot 2.4 + 3\cdot(-1.1) = 1.2 - 3.3 = -2.1.\end{aligned}$$

Voorbeeld 17.5.9. Herschrijf de uitdrukking $\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}}$ in functie van $\log_a x$, $\log_a y$ en $\log_a z$, weer door gebruik te maken van de rekenregels:

$$\begin{aligned}\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}} &= \log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)^{0.5}\\ &= 0.5\log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a(yz^2) - \log_a(ax)\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a y + \log_a(z^2) - \log_a a - \log_a x\right)\\ &= 0.5\cdot\left(-\log_a x + \log_a y + 2\log_a z - 1\right).\end{aligned}$$

We schrijven eerst de vierkantswortel als een macht, passen dan de rekenregel voor machten toe, vervolgens de regel voor quotiënt, de regel voor product en nogmaals de regel voor macht.

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.A Oefeningen rekenregels logaritmen

Oefening 17.5.1. Schrijf volgende uitdrukkingen in functie van $\log a$, $\log b$ en $\log c$ (met $a, b, c > 0$).

1. $\log \dfrac{a}{b^4} = \ldots\ldots$

2. $\log\left(c^3\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right) = \ldots\ldots$

3. $\log \dfrac{a^4bc}{\sqrt{bc^2}} = \ldots\ldots$

Oefening 17.5.2. Schrijf elke uitdrukking in functie van $\log x$, $\log(x-5)$ en $\log(x+1)$.

1. $\log \dfrac{x(x+1)}{x-5} = \ldots\ldots$

2. $\log\left((x+1)^2\sqrt{x-5}\right) = \ldots\ldots$

3. $\log\sqrt{\dfrac{x-5}{x^3(x+1)}} = \ldots\ldots$

4. $\log \dfrac{1}{(x+1)^2} = \ldots\ldots$

Oefening 17.5.3. Schrijf als één logaritme. $(x > 0, y > 0, z > 0)$

1. $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log(xy^2) + 5 \cdot \log y = \log \ldots\ldots$

2. $\dfrac{1}{2} \cdot \log_3\left(\dfrac{y}{x}\right) - \log_3\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \log_3 \ldots\ldots$

3. $\log_5(xy) - \log_5(yz) + \log_5(zx) = \log_5 \ldots\ldots$

Oefening 17.5.4. Schrijf elke uitdrukking als één enkele logaritme.

1. $\log(x+1) - \log x^2 + \dfrac{1}{2}\log(x-3) = \ldots\ldots$

2. $3 - \log x = \ldots\ldots$

3. $5\log(x-1) - \dfrac{1}{2}\log(x+3) = \ldots\ldots$

Oefening 17.5.5. Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Neem zeker pen en papier bij de hand, want je kan ze niet allemaal uit je hoofd uitrekenen.

1. $\log 25 + \log 40 = \ldots\ldots$

2. $\log_3 36 - \log_3 4 = \ldots\ldots$

3. $\log_9 25 - \log_3 15 = \ldots\ldots$

4. $\ln 108 - 2 \cdot \ln 6 + \ln\left(\dfrac{e}{3}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.A Oefeningen rekenregels logaritmen

Oefening 17.5.6. Bereken zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

1. $e^{3\ln 2} = \ldots\ldots$

2. $4^{\log_2 3} = \ldots\ldots$

3. $27^{\log_3 2} = \ldots\ldots$

Oefening 17.5.7. Schrijf als één logaritme. Je mag het grondtal zelf kiezen. $(x > 0, y > 0)$

1. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{\frac{1}{3}} x = \ldots\ldots$

2. $\log_5(4xy) - \log_{\frac{1}{5}}(4xy) = \ldots\ldots$

Oefening 17.5.8.

1. Schrijf onderstaande uitdrukking in functie van $\log(k-1)$, $\log k$ en $\log(k+1)$.

$$\log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ldots\ldots$$

Oefening 17.5.9.

1. Stel dat y impliciet gegeven is als functie van t door volgende formule:

$$2t = \frac{1}{3}[\ln(y-2) - \ln(y-5)]$$

Toon aan dat $y = \dfrac{5 - 2e^{-6t}}{1 - e^{-6t}}$

Oefening 17.5.10.

1. Toon aan dat $\log\dfrac{a}{b} - \log\dfrac{c}{d} = \log\dfrac{a}{c} - \log\dfrac{b}{d}$ (met $a, b, c, d > 0$).

2. Toon aan dat $\log\dfrac{2}{a} - \log\dfrac{2}{b} = \log\dfrac{b}{a}$ (met $a, b > 0$).

CC BY-NC-SA 4.0

17.6 Exponentiële functies

Aan twee positieve getallen a en r kunnen we de **macht** a^r associëren, met **grondtal** a en **exponent** r. Door nu in a^r ofwel a, ofwel r constant te houden en het andere getal in waarde te laten variëren krijgen we twee soorten *functies*, waarbij we de *variërende* grootheid met de letter x aanduiden:

- een *vaste* waarde r voor de exponent en een *variërend grondtal* x (met x in de plaats van a).
  Voor $r = 2$ krijgen we dan de *kwadraatfunctie* $x \mapsto x^2$.
  Voor $r = -1$ krijgen we $x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$, en voor $r = 1/2$ wordt dat $x \mapsto x^{1/2} = \sqrt{x}$.
  In het algemeen bekomen we een **machtsfunctie** met *exponent* r: $x \mapsto x^r$.
- een *vaste* waarde a voor het grondtal en een *variërende exponent* x (met x in de plaats van r).
  Voor $a = 2$ krijgen we dan de functie $x \mapsto 2^x$.
  Deze functie noemen we een **exponentiële functie**, en we noteren ze ook als $\exp_2$:
  $$\exp_2 : x \mapsto 2^x$$
  Voor $a = 10$ krijgen we bijvoorbeeld $\exp_{10} : x \mapsto 10^x$.
  In het algemeen bekomen we een **exponentiële functie** $\exp_a$ met *grondtal* a: $\exp_a : x \mapsto a^x$.

Definitie 17.6.1 (Exponentiële functie)**.**
De **exponentiële functie met grondtal** a (met $a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd $\exp_a$, is de reële functie
$$\exp_a : x \mapsto a^x$$
waarbij x alle reële waarden mag aannemen.

Opmerking 17.6.1.

- In de praktijk worden zowel de notaties a^x als $\exp_a(x)$ gebruikt voor exponentiële functies.
- De haakjes rond het argument van $\exp_a$ worden dikwijls weggelaten: $\exp_a x = \exp_a(x) = a^x$.
- Het grondtal a van een exponentiële functie moet worden beperkt:
  - a mag niet negatief zijn, want dat geeft problemen voor *niet-gehele* waarden van de exponent x (bv. $(-3)^{\frac{1}{2}}$)
  - a mag niet gelijk zijn aan 0, want dat geeft problemen voor *negatieve* exponenten x (bv. $0^{-1} = 1/0$)
  - a mag niet gelijk zijn aan 1, want $1^x = 1$ voor alle x, en de functie $f : x \mapsto 1^x = 1$ is een *constante functie* met waarde 1. Om technische redenen is het beter die functie niet te beschouwen als een exponentiële functie.

We bestuderen nu de *grafiek* van een exponentiële functie $\exp_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

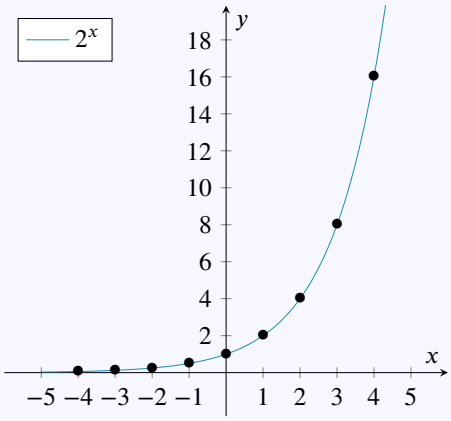
Voorbeeld 17.6.1 (Het geval $a > 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_2$)**.**
We nemen als voorbeeld $a = 2$, en schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\exp_2 : x \mapsto 2^x$ met grondtal 2 door een aantal punten van de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

CC BY-NC-SA 4.0

17.6 Exponentiële functies

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

Dit levert een aantal punten op op de gezochte grafiek, namelijk de bolletjes op de figuur. Met een rekentoestel kunnen we ook functiewaarden berekenen voor niet-gehele waarden van x, bv. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4142$. Op die manier krijgen we een vrij precies beeld van de grafiek:

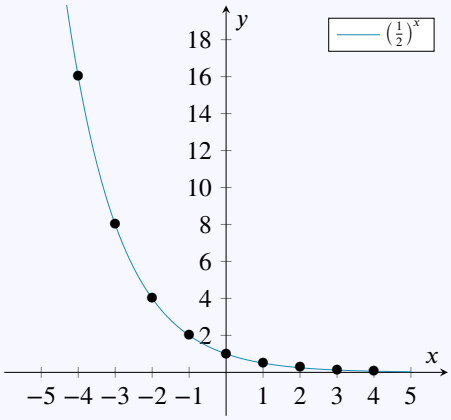


Voorbeeld 17.6.2 (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_{\frac{1}{2}}$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$, en schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten op de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625

Dit levert weer een aantal punten op op de grafiek. Met een rekentoestel kunnen we opnieuw functiewaarden voor niet-gehele waarden van x berekenen, bv. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$. Op die manier krijgen we weer een vrij precies beeld van de grafiek:



CC BY-NC-SA 4.0

17.6 Exponentiële functies

Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = \frac{1}{2}$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* exponentiële functies:

Eigenschap 17.6.1 (Eigenschappen van exponentiële functies)**.**

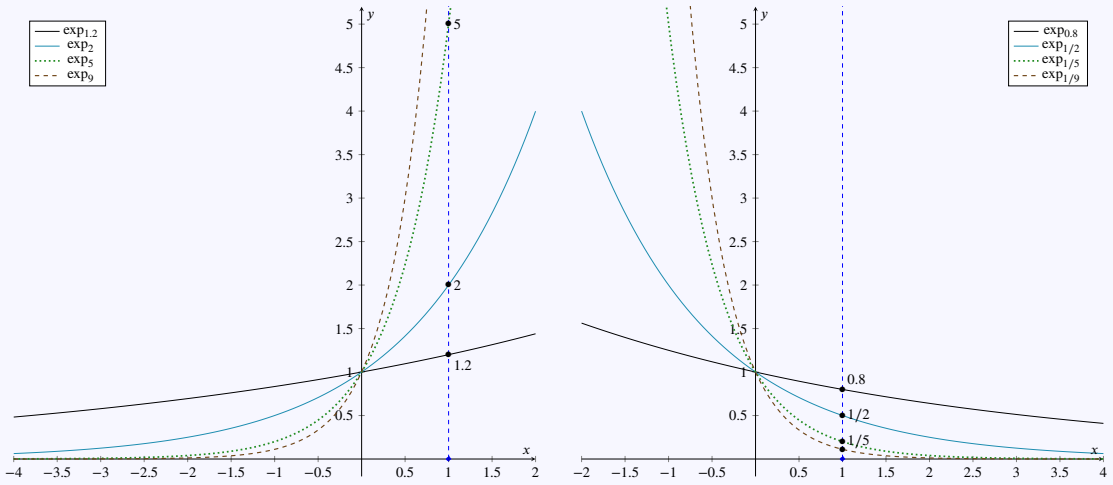
(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff a^x < a^y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff a^x > a^y$
(3) Het **domein** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$: a^x is gedefinieerd voor alle reële getallen x
(4) Het **beeld** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: a^x kan alleen strikt positieve waarden aannemen

De grafiek van $\exp_a$
(5) snijdt **de y-as** in het punt $(0,1)$: $a^0 = 1$
(6) snijdt **de x-as** niet: a^x is nooit gelijk aan 0
(7) snijdt **de rechte $x = 1$** in het punt $(1,a)$: $a^1 = a$

Omdat $\mathbb{R}$ het domein is van $\exp_a$ en $\mathbb{R}_0^+$ het beeld, is het volledige functievoorschrift

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto a^x.$$

Voorbeeld 17.6.3 (Voorbeelden van exponentiële functies met verschillende grondtallen)**.**



Omdat $\exp_a(0) = a^0 = 1$ gaan alle grafieken door het punt $(0,1)$, en omdat $\exp_a(1) = a^1 = a$ snijdt elke grafiek de verticale rechte $x = 1$ in het punt $(1,a)$.

In het geval $a > 1$ worden de functiewaarden willekeurig klein voor erg negatieve x. Als $0 < a < 1$ worden de functiewaarden willekeurig klein zodra x voldoende groot is. Het begrip *asymptoot* dat we later zullen definiëren beschrijft dit fenomeen meer exact.

We weten nu voor een *gegeven grondtal* a hoe de *grafiek* van $\exp_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal a, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$. Het geval $a = 1$ levert de constante functie $x \mapsto 1$ en is het grensgeval tussen dalende functies voor $a < 1$ en stijgende functies voor $a > 1$.

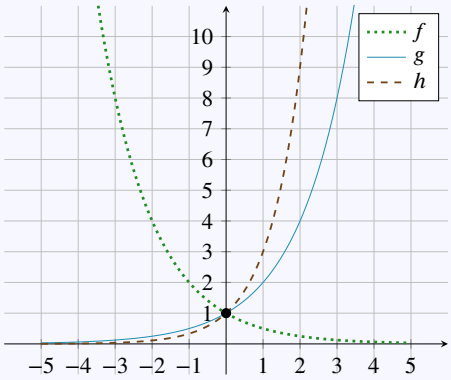
Stel dat we omgekeerd voor een *gegeven grafiek* van een exponentiële functie willen weten wat het *grondtal* is. Het stijgen of dalen van de grafiek bepaalt al onmiddellijk of het grondtal tussen 0 en 1 ligt dan wel groter is dan 1. Maar er is meer: omdat $\exp_a(1) = a^1 = a$, is het grondtal a gelijk aan de y-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de verticale rechte $x = 1$ (i.e. door $(1,0)$). Zelfs als we de *exacte* waarde niet kunnen aflezen op de grafiek, is minstens een goede schatting meestal wel mogelijk.

CC BY-NC-SA 4.0

17.6 Exponentiële functies

Voorbeeld 17.6.4 (Onderscheiden van exponentiële functies)**.**

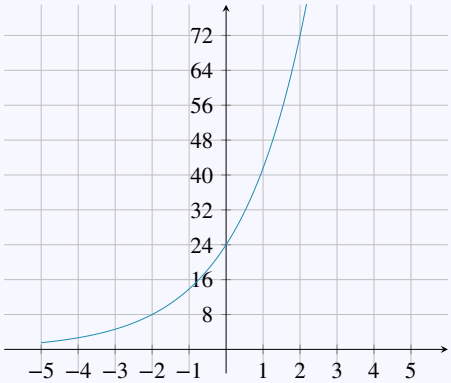
Hieronder worden de grafieken geschetst van drie functies $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \mapsto 2^x$ en $x \mapsto 3^x$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.



We kunnen eerst de grafieken onderscheiden op grond van hun vorm. De grafieken van g en h zijn stijgend, hun grondtal is dus groter dan 1. De grafiek van f is dalend, dus is dat grondtal kleiner dan 1. Daarmee is het functievoorschrift van f gevonden, want er is maar één keuzemogelijkheid met $a < 1$, namelijk $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
Om de grafieken van g en h te onderscheiden, kijken we naar de y-waarde voor $x = 1$: $g(1) = 2$ en $h(1) = 3$. h is dus de functie $x \mapsto 3^x$ en g is de functie $x \mapsto 2^x$.
Je kan ook redeneren dat 3 groter is dan 2 waardoor de functie $x \mapsto 3^x$ sneller stijgt dan de functie $x \mapsto 2^x$ en dat daarom h bij $x \mapsto 3^x$ moet horen.

Voorbeeld 17.6.5 (Bepalen functievoorschrift)**.**

Stel dat we weten dat onderstaande tekening de grafiek is van een functie $f(x) = ba^x$, met a, b reële getallen. De punten $(-2, 8)$ en $(0, 24)$ behoren tot de grafiek. We willen het functievoorschrift bepalen, dus a en b vinden.



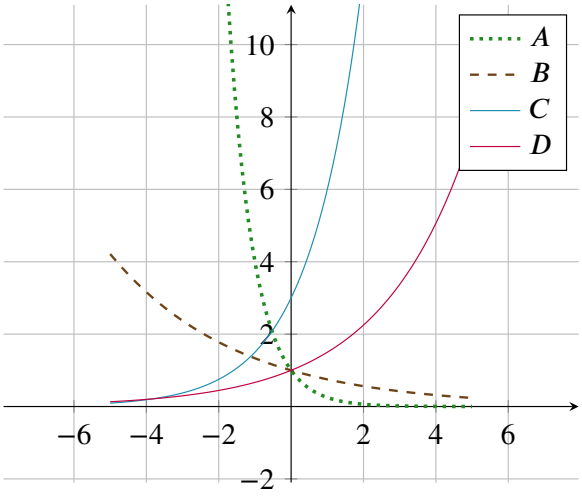
We weten dat $f(0) = 24$ en dat $f(-2) = 8$. Uit $24 = f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1$ volgt dat $b = 24$. Hiermee vinden we dan dat $f(-2) = 24 \cdot a^{-2} = 8$, dus dat $a^2 = 3$ of $a = \sqrt{3}$.

Merk op dat $a = -\sqrt{3}$ onmogelijk is, het grondtal a van een exponentiële functie moet positief zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

17.6 Exponentiële functies

Oefening 17.6.1. Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?



1. $x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$: | A | B | C | D |
2. $x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x$: | A | B | C | D |
3. $x \mapsto 3 \cdot 2^x$: | A | B | C | D |
4. $x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)^x$: | A | B | C | D |

Oefening 17.6.2.

1. Als $a > 1$, dan is $\exp_a$ een | stijgende | dalende | niet (altijd) gedefinieerde | functie.
2. Als $0 < a < 1$, dan is $\exp_a$ een | stijgende | dalende | niet (altijd) gedefinieerde | functie.
3. Als $\exp_a$ een dalende functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.
4. Als $\exp_a$ een stijgende functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.

Voor grondtal a gelijk aan de specifieke waarde $e = 2.7182818\ldots$ verkrijgen we een veel voorkomende exponentiële functie $x \mapsto e^x$, die we meestal *de* exponentiële functie noemen, en korter noteren als exp:

Definitie 17.6.2. ***De* exponentiële functie** is de functie

$$\exp : x \mapsto e^x$$

met grondtal $e = 2.71\ldots$ (getal van Euler) (en ze wordt dus genoteerd *zonder subscript* e).

Door een positief getal a te schrijven als $e^{\ln a}$ wordt *elke* macht *een macht van* e:

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$$

en zo wordt een *willekeurige* exponentiële functie een *herschaling* van *de* exponentiële functie $x \mapsto e^x$:

Eigenschap 17.6.2. Elke exponentiële functie $x \mapsto a^x$ kan geschreven worden als $x \mapsto e^{kx}$ met $k = \ln a$.

CC BY-NC-SA 4.0

17.6 Exponentiële functies

Voorbeeld 17.6.6. De functie $x \mapsto 3^x$ is gelijk aan de functie $x \mapsto e^{\ln 3\, x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

17.7 Logaritmische functies

Door in de uitdrukking voor de logaritme $\log_a b$ het grondtal a constant te houden en het getal b te laten variëren, bekomen we een *functie*, namelijk een *logaritmische functie*:

Definitie 17.7.1 (Logaritmische functie)**.**

De **logaritmische functie met grondtal** a ($a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd als $\log_a$, is de reële functie

$$\log_a : x \mapsto \log_a x$$

waarbij x enkel *strikt positieve waarden* mag aannemen.

Opmerking 17.7.1. Bij de invoering van de logaritme $\log_a b$ hebben we de noodzaak besproken om bovenstaande beperkingen op te leggen aan het grondtal a en het argument x.

De haakjes rond het argument van de functie $\log_a$ worden dikwijls weggelaten: $\log_a x = \log_a(x)$.

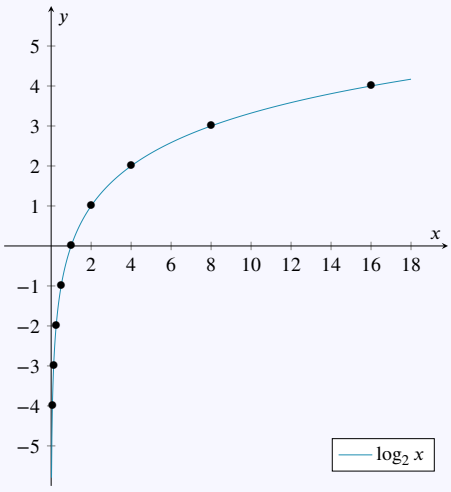
We bestuderen nu de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

Voorbeeld 17.7.1 (Het geval $a > 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_2$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_2 : x \mapsto \log_2(x)$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. Het ligt voor de hand om voor de x-waarden machten van 2 te kiezen, omdat daarvoor de 2-logaritme gemakkelijk te bepalen is.

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_2(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Dit levert voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



Voorbeeld 17.7.2 (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2}(x)$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2} : x \mapsto \log_{1/2}(x)$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. We kunnen dezelfde

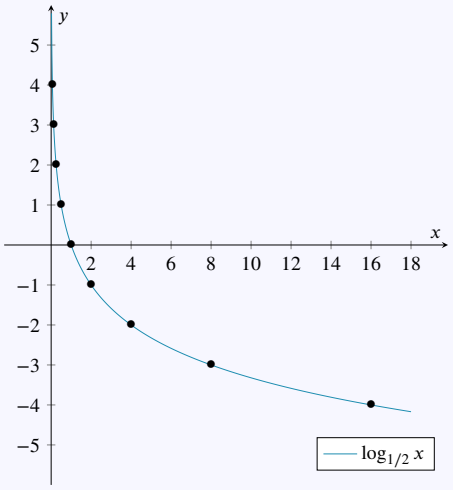
CC BY-NC-SA 4.0

17.7 Logaritmische functies

tabel hergebruiken:

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_{1/2}(x)$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Dit levert opnieuw voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = 1/2$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* logaritmische functies:

Eigenschap 17.7.1 (Eigenschappen van logaritmische functies)**.**

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff \log_a x < \log_a y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff \log_a x > \log_a y$
(3) Het **domein** van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: de functiewaarde $\log_a x$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$
(4) Het **beeld** van $\log_a$ is $\mathbb{R}$: de functiewaarde $\log_a x$ kan alle reële waarden aannemen

De grafiek van $\log_a$
(5) snijdt **de x-as** in het punt $(1, 0)$: $\log_a 1 = 0$
(6) snijdt **de y-as** niet: voor $x = 0$ is $\log_a x$ niet gedefinieerd
(7) snijdt **de rechte $y = 1$** in het punt $(a, 1)$: $\log_a(a) = 1$

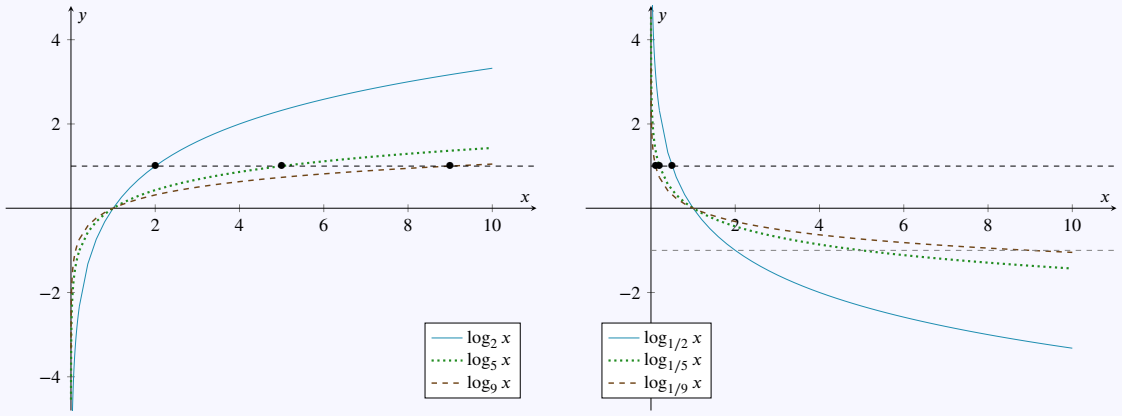
Omdat $\mathbb{R}_0^+$ het domein is van $\log_a$ en $\mathbb{R}$ het beeld, is het volledige functievoorschrift

$$\log_a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a x.$$

Voorbeeld 17.7.3 (Voorbeelden van logaritmische functies met verschillende grondtallen)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

17.7 Logaritmische functies



De bovenstaande grafieken tonen aan dat voor grondtal $a > 1$ en x zeer klein de grafiek naar $-\infty$ gaat. Indien het grondtal $0 < a < 1$ is, dan zal voor x zeer klein de grafiek naar $+\infty$ gaan. In een latere module zal de terminologie van asymptoten ingevoerd worden, wat ons toelaat om dit meer exact te bespreken.

Definitie 17.7.2. De **natuurlijke logaritme** is de functie

$$\ln : x \mapsto \ln x$$

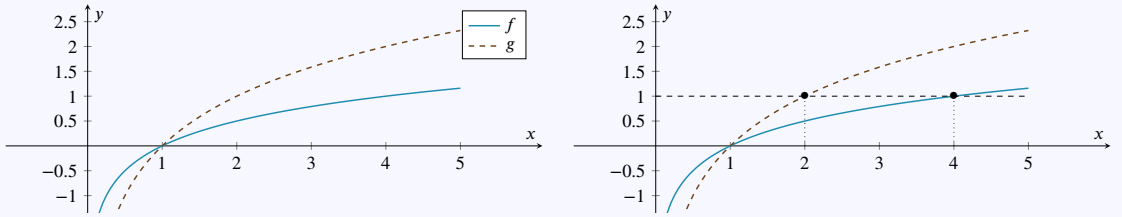
waarbij $\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$ met $e = 2.71\ldots$ (getal van Euler).

We weten nu voor een *gegeven grondtal* a hoe de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal a, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$.

Stel dat we omgekeerd voor een *gegeven grafiek* van een logaritmische functie willen weten wat het *grondtal* is. Het stijgen of dalen van de grafiek bepaalt al onmiddellijk of het grondtal tussen 0 en 1 ligt dan wel groter is dan 1. Om de precieze waarde van a te vinden volstaat het te zoeken naar **de waarde van x die een functiewaarde 1 geeft:** immers, als $\log_a x = 1$, dan $x = a^1 = a$. We zoeken dus de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de horizontale rechte $y = 1$. Ook als de grafiek niet gedetailleerd genoeg is om de exacte waarde van a terug te vinden, blijft een goede schatting wel mogelijk op deze manier.

Voorbeeld 17.7.4 (Aflezen grondtal van grafiek)**.**

Hieronder worden de grafieken geschetst van de twee functies $x \mapsto \log_4(x)$ en $x \mapsto \log_2(x)$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.

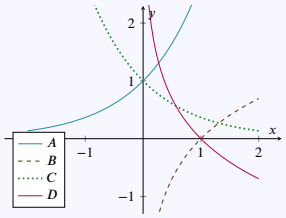


Omdat beide grondtallen groter zijn dan 1, kunnen we beide grafieken niet onderscheiden op grond van hun vorm. We weten echter dat het grondtal terug te vinden is als de x-waarde waarvoor de functiewaarde gelijk is aan 1. We tekenen daarom de horizontale rechte $y = 1$ en kijken waar deze de twee grafieken snijdt. De x-coördinaat van het snijpunt komt overeen met het grondtal. Het blijkt dat f de grafiek is van $x \mapsto \log_4(x)$ en g de grafiek van $x \mapsto \log_2(x)$.

CC BY-NC-SA 4.0

17.7 Logaritmische functies

Voorbeeld 17.7.5. Welke grafiek hoort bij de functie $x \mapsto \ln(x)$?



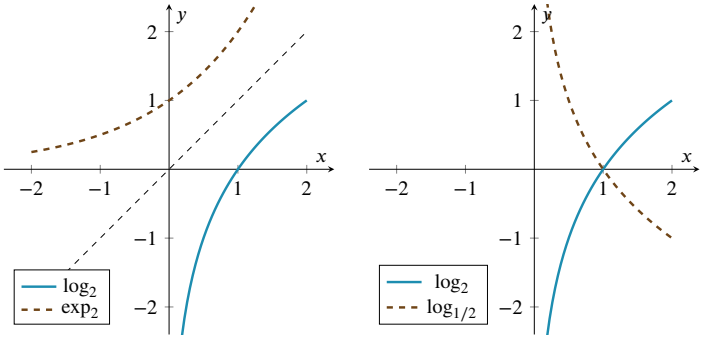
Deze vraag kunnen we beantwoorden louter op basis van de vorm van de grafieken. Omdat $x \mapsto \ln(x)$ een logaritmische functie is, is deze enkel gedefinieerd voor strikt positieve waarden van x. Omdat het grondtal $e > 1$, moet de grafiek stijgend zijn. Enkel grafiek $\boldsymbol{B}$ voldoet hieraan.

Als je in de formules $\log_a a^x = x$ en $a^{\log_a x}$ de machten schrijft met de $\exp_a$ krijg je volgende eigenschap:

Eigenschap 17.7.2. De functies $\log_a$ en $\exp_a$ zijn elkaars *inverse*:

$$\log_a(\exp_a x) = x \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\exp_a(\log_a x) = x \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

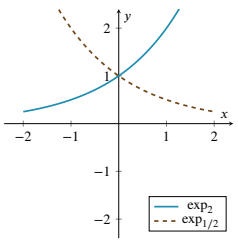
Als inverse functies zijn de grafieken elkaars *spiegelbeeld ten opzichte van de eerste bissectrice*.



Uit de formule voor verandering van grondtal $\log_{1/a} x = \dfrac{\log_a x}{\log_a 1/a} = \dfrac{\log_a x}{-1} = -\log_a x$ volgt:

Eigenschap 17.7.3. De functies $\log_a$ en $\log_{1/a}$ zijn elkaars *tegengestelde*, en hun grafieken zijn dus elkaars *spiegelbeeld ten opzichte van de x-as*.

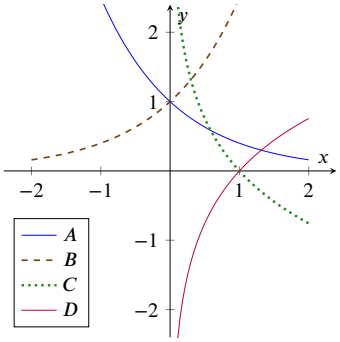
Merk op dat iets gelijkaardigs geldt voor de exponentiële functie: $\exp_{1/a}(x) = (1/a)^x = a^{-x} = \exp_a(-x)$, en dus heeft $\exp_{1/a}$ in x dezelfde waarde als $\exp_a$ in $-x$, en dus zijn de grafieken van $\exp_a$ en $\exp_{1/a}$ onderling *gespiegeld ten opzichte van de y-as*:



CC BY-NC-SA 4.0

17.7 Logaritmische functies

Oefening 17.7.1. Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?



1. $x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x$: A B C D
2. $x \mapsto \log_{2/5}(x)$: A B C D
3. $x \mapsto \log_{5/2}(x)$: A B C D
4. $x \mapsto \left(\frac{5}{2}\right)^x$: A B C D

Opmerking 17.7.2 (Eigenschappen logaritmische functies)**.**

De rekenregels voor logaritmen leveren soms extra eigenschappen op van logaritmische functies. Zo kan je de op het eerste zicht tamelijk ingewikkelde functie $x \mapsto \log_4(2^x)$ herschrijven als

$$\log_4(2^x) = x \cdot \log_4(2) = x \cdot \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = x/2.$$

en vaststellen dat $\log_4(2^x)$ gewoon de lineaire functie $x \mapsto \frac{1}{2}x$ is.

Oefening 17.7.2. Herschrijf volgende uitdrukkingen zonder exponentiële of logaritmische functies:

1. $4^{\log_2(x)} = \ldots\ldots$
2. $27^{\log_3(x)} = \ldots\ldots$

Voorbeeld 17.7.6 (Domein logaritmische functie)**.**

Bepaal het domein van de functie $x \mapsto \log_3\left(\frac{3}{4-x}\right)$. Bepaal dus alle mogelijke reële waarden van x waarvoor het functievoorschrift geldig is.

- De noemer van de breuk binnen de logaritme mag niet nul mag zijn: $4 - x \neq 0$ en dus $x \neq 4$.
- Een logaritme kan enkel berekend worden voor een strikt positief getal, en dus moet $\frac{3}{4-x} > 0$. Omdat de teller positief is, moet ook de noemer dat dus zijn: $4 - x > 0$ of $x < 4$.

Alleen als aan deze twee voorwaarden voldaan is, kan de functiewaarde bepaald worden.

Het domein van deze functie is dus het (oneindige) interval $]-\infty, 4[$.

Oefening 17.7.3. Bepaal het domein van de functie $x \mapsto \ln(\sqrt{2x} - 4)$: $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

17.7.A Oefeningen ongelijkheden met exponentiële en logaritmische functies

Oefening 17.7.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid. Vergeet niet na te gaan voor welke $x \in \mathbb{R}$ de logaritmische functies gedefinieerd zijn.

1. $\ln(x+5) > 7 \iff \ldots\ldots$

2. $\log(x^2-3) > 2 \iff \ldots\ldots$

3. $\log_{0,5}(x-1) < 1 \iff \ldots\ldots$

Oefening 17.7.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid. Vergeet niet na te gaan voor welke $x \in \mathbb{R}$ de logaritmische functies gedefinieerd zijn.

1. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{7}\right)^3 > 0 \iff \ldots\ldots$

2. $2 \leqslant \frac{\log x - 1}{\log x} \iff \ldots\ldots$

3. $2 \geqslant \frac{\log(x+1)}{\log x} \iff \ldots\ldots$

4. $e^{\sqrt{x}\ln(1/2)} < e^{5\ln(1/2)} \iff \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

17.7.B Extra oefeningen logaritmen (usolv-it)

17.7.B Extra oefeningen logaritmen (usolv-it)

Via onderstaande knop kan je in USolv-it extra oefeningen maken.

Je krijgt telkens 5 vragen.

CC BY-NC-SA 4.0

17.8 Exponentiële vergelijkingen

Een **exponentiële vergelijking** is een vergelijking waarbij de onbekende minstens één keer voorkomt in de *exponent* van een uitdrukking.
Voorbeelden van dergelijke vergelijkingen zijn $3^x - 81 = 0$, $3^x = 81x$ en $2^x = 4 \cdot 3^{x-1}$.

Niet alle exponentiële vergelijkingen kunnen exact opgelost worden. Voor de oplossing van $3^x = 81x$ bestaat bijvoorbeeld geen exacte formule. Als een exponentiële vergelijking *wel* exact kan worden opgelost, wordt ergens in de berekening de *logaritme* gebruikt om *de onbekende uit de exponent te verdrijven*. We illustreren enkele oplossingsmethoden aan de hand van onderstaande voorbeelden.

Voorbeeld 17.8.1. Los op: $3^x - 81 = 0$.

In deze vergelijking komt de onbekende x slechts één keer voor, en wel als exponent. Dergelijke vergelijkingen zijn eenvoudig op te lossen door de macht waarbij x in de exponent voorkomt te isoleren en dan een gepaste logaritme te nemen:

$$\begin{array}{rcll} 3^x - 81 & = & 0 & \\ 3^x & = & 81 & \text{(breng naar het andere lid)} \\ \log_3(3^x) & = & \log_3 81 & \text{(neem links en rechts } \log_3 \text{)} \\ x & = & \log_3 3^4 = 4 & \text{(want } \log_3 3^x = x, \text{ en } 81 = 9^2 = 3^4) \end{array}$$

omdat x voorkomt als exponent met grondtal 3 werd hier de logaritme met grondtal 3 toegepast op linker- en rechterlid. Maar omdat *elke* logaritme exponenten voorop brengt, kan je het grondtal van de logaritme eigenlijk kiezen. Hieronder is dezelfde vergelijking opgelost met de logaritme log met grondtal 10 en met de natuurlijk logaritme ln:

$$\begin{array}{rcl} 3^x & = & 81 \\ \log(3^x) & = & \log 81 \\ x \cdot \log 3 & = & \log 81 \\ x & = & \dfrac{\log 81}{\log 3} \end{array} \quad \text{of ook} \quad \begin{array}{rcl} 3^x & = & 81 \\ \ln(3^x) & = & \ln 81 \\ x \cdot \ln 3 & = & \ln 81 \\ x & = & \dfrac{\ln 81}{\ln 3} \end{array}$$

Het resultaat ziet er telkens anders uit, maar het is wel degelijk steeds dezelfde oplossing $x = 4$, want uit de formule voor verandering van grondtal bij logaritmen volgt dat

$$\frac{\ln 81}{\ln 3} = \frac{\log 81}{\log 3} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4.$$

Voorbeeld 17.8.2. Los op: $3^x = 81x$.

In deze vergelijking komt de onbekende x twee keer voor: eenmaal in de exponent van een macht met grondtal 3 in het linkerlid en eenmaal als lineaire term in het rechterlid. Dergelijke vergelijking is in het algemeen niet exact op te lossen. Uit het vorige voorbeeld blijkt dat de onbekende x uit de exponent kan gehaald worden door een logaritme toe te passen. Laat ons dat doen in dit geval:

$$\begin{array}{rcll} 3^x & = & 81x & \\ \log_3(3^x) & = & \log_3(81x) & \text{(neem links en rechts } \log_3 \text{)} \\ x & = & \log_3 81 + \log_3 x & (\log_3 3^x = x, \log ab = \log a + \log b) \\ x & = & 4 + \log_3 x & (81 = 3^4) \end{array}$$

De onbekende is nu uit de exponent verdwenen, maar er is een nieuwe complicatie: de onbekende komt nu voor binnen de logaritme. Je zou de onbekende x uit de logaritme kunnen krijgen door een exponentiële functie te gebruiken. Maar dan wordt de x in het linkerlid terug een exponent. Een exacte oplossing is op deze manier niet mogelijk. Er bestaan wel technieken om de vergelijking *benaderend* op te lossen, maar deze behoren niet tot de leerstof van deze cursus. Men kan aantonen

CC BY-NC-SA 4.0

17.8 Exponentiële vergelijkingen

dat er een unieke oplossing is: $x \approx 0.0125\ldots$

Voorbeeld 17.8.3. Los op: $2^x = 4 \cdot 3^{x-1}$.

In deze vergelijking komt de onbekende twee keer voor, telkens in de exponent van een macht, maar voor twee verschillende grondtallen. Dergelijk vergelijking kan op twee manieren worden opgelost.

De eerste oplossingsmethode herschrijft de vergelijking zodanig dat er maar één macht meer voorkomt. We kunnen dan, zoals in het eerste voorbeeld, eenvoudigweg de logaritme nemen om de vergelijking op te lossen.

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \cdot 3^{x-1} = 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{4}{3} \cdot 3^x && \text{(rechterlid herschrijven)} \\ \frac{2^x}{3^x} &= \frac{4}{3} && \text{(breng onbekenden naar linkerlid)} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{4}{3} && \left(\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x\right) \\ x &= \log_{2/3}\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0.7095\ldots && \text{(bereken met een rekentoestel)} \end{aligned}$$

Een tweede oplossingsmethode bestaat erin de logaritme te nemen van linker- en rechterlid met de bedoeling van de onbekende x uit de exponenten te halen. Uit het eerste voorbeeld weten we dat het grondtal van de logaritme geen belang heeft. We gebruiken hier de logaritme met grondtal 10. We krijgen in dit geval een *lineaire* vergelijking in x die we zonder problemen kunnen oplossen.

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \cdot 3^{x-1} \\ \log(2^x) &= \log(4 \cdot 3^{x-1}) = \log 4 + \log(3^{x-1}) \\ x \cdot \log 2 &= \log 4 + (x-1) \cdot \log 3 = x \cdot \log 3 + (\log 4 - \log 3) \\ x \cdot \log 2 - x \cdot \log 3 &= \log 4 - \log 3 \\ x \cdot (\log 2 - \log 3) &= \log 4 - \log 3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\log 4 - \log 3}{\log 2 - \log 3}.$$

Opnieuw ziet de gevonden oplossing er helemaal anders uit dan wat we met de eerste oplossingsmethode hebben gevonden. Met behulp van de rekenregels voor logaritmen kan je echter zien dat beide oplossingen gelijk zijn.

Oefening 17.8.1. Los $2^{3x-5} = 5^x$ op naar x. Oplossing: $x \approx \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

17.8.A Toepassingen exponentiële en logaritmische functies

Oefening 17.8.2. Jodium 131 heeft een halveringstijd van 8 dagen d.w.z. dat de hoeveelheid radioactieve massa jodium 131 na 8 dagen slechts de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid bedraagt.

1. De groeifactor per tijdseenheid van een dag = … …

2. Geef het functievoorschrift dat deze groeifunctie beschrijft in de vorm $f(t) = b_0 \cdot g^t$, waarbij t gemeten wordt in dagen en we de beginwaarde van de radioactieve massa noteren we met b_0.

$f(t) =$ … …

3. Geef het functievoorschrift dat deze groeifunctie beschrijft in de vorm $f(t) = b_0 \cdot e^{-\lambda t}$ met $\lambda > 0$, waarbij t gemeten wordt in dagen en we de beginwaarde van de radioactieve massa noteren we met b_0.

$f(t) =$ … …

4. Wanneer is de hoeveelheid jodium 131 gedaald tot 1/20 van de oorspronkelijke hoeveelheid?

Na … … dagen.

Oefening 17.8.3. Het CO_2 dat in de atmosfeer voorkomt, bevat het stabiele ^{12}C en de radioactieve isotoop ^{14}C die een halveringstijd van 5730 jaar heeft. Wetenschappers nemen aan dat de verhouding van de hoeveelheden ^{14}C en ^{12}C in de CO_2 van de atmosfeer nagenoeg constant is. Noem die verhouding R_0. Levende planten absorberen CO_2 uit de lucht en daarom is de verhouding tussen ^{14}C en ^{12}C in een levende plant hetzelfde als in de lucht, nl. R_0. Wanneer een plant afsterft, stopt de absorptie van CO_2. Het stabiele ^{12}C blijft in de plant, terwijl het radioactieve ^{14}C exponentieel vervalt.

1. Geef het functievoorschrift van de grootheid $R(t)$ die de verhouding is van de hoeveelheid ^{14}C t.o.v. ^{12}C in de plantenresten t jaar na het afsterven van de plant.

$R(t) =$ … …

2. Een archeoloog vindt een fossiel waarvan de verhouding van de hoeveelheid ^{14}C t.o.v. ^{12}C 1/5 is van die in de atmosfeer. Hoe oud is dat fossiel?

… … jaar.

Oefening 17.8.4. Een geluid, geproduceerd met een intensiteit van I watt/m^2, levert volgend geluidsniveau

$$\text{dB-niveau} = 10 \log_{10}(10^{12} I) \text{ dB}.$$

1. Toon aan dat als je de intensiteit van je stereo verdubbelt, het geluidsniveau slechts met ongeveer 3 dB verhoogt.

2. Met welke factor moet je de intensiteit vermenigvuldigen opdat het geluidsniveau met 10 dB vermeerdert.

I moet met een factor … … vermenigvuldigd worden.

Oefening 17.8.5. Je maakt een avontuurlijke reis door Afrika, in een zone met hoog risico voor malaria-besmetting en slikt daarom regelmatig pilletjes met antistoffen. Op een dag word je echter bestolen; niet alleen ben je al je geld kwijt, maar bovendien ook je hele voorraad pilletjes. Toevallig had je nog één dosis (500 mg) antistoffen in je broekzak zitten. Je hebt op dat ogenblik, als gevolg van wekenlange inname, 1000 mg antistoffen in je bloed. Laten we veronderstellen dat je pas gevaar loopt besmet te raken wanneer de hoeveelheid antistoffen in het bloed kleiner wordt dan 750 mg.

CC BY-NC-SA 4.0

17.8.A Toepassingen exponentiële en logaritmische functies

Voorlopig is er dus niets aan de hand. Je lichaam verwijdert deze vreemde stoffen echter geleidelijk — met een halveringstijd van 3 weken — dus vroeg of laat onstaat er een reële kans op besmetting. Beschouw de volgende twee mogelijkheden:

(a) Je neemt onmiddellijk die laatste dosis in.

1. De totale hoeveelheid antistoffen komt daarmee op ..... mg.

2. Hiermee kan je nog gedurende ..... dagen boven de kritische drempel van 750 mg kan blijven.

(b) Je stelt de inname van die laatste dosis nog even uit: je wacht namelijk tot je de kritische waarde een eerste maal bereikt, en slikt pas dan je laatste pilletje.

3. Je bereikt de drempel van 750 mg na ongeveer ..... dagen.

4. Daarna kan je opnieuw een tijdje verder, nl. nog ..... dagen, vooraleer je antistof-peil onherroepelijk onder de 750 mg duikt.

Wat is het verstandigst, onmiddellijke of uitgestelde inname?

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

17.8.B Oefeningen ongelijkheden met exponentiële en logaritmische functies

Oefening 17.8.6. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid. Vergeet niet na te gaan voor welke $x \in \mathbb{R}$ de logaritmische functies gedefinieerd zijn.

1. $\ln(x+5) > 7 \iff \ldots\ldots$

2. $\log(x^2-3) > 2 \iff \ldots\ldots$

3. $\log_{0,5}(x-1) < 1 \iff \ldots\ldots$

Oefening 17.8.7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid. Vergeet niet na te gaan voor welke $x \in \mathbb{R}$ de logaritmische functies gedefinieerd zijn.

1. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{7}\right)^3 > 0 \iff \ldots\ldots$

2. $2 \leqslant \frac{\log x - 1}{\log x} \iff \ldots\ldots$

3. $2 \geqslant \frac{\log(x+1)}{\log x} \iff \ldots\ldots$

4. $e^{\sqrt{x}\ln(1/2)} < e^{5\ln(1/2)} \iff \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 18
Limieten

(Versie 2026/08/25H.51)

18.1 Definitie limieten

Functies zoals $x \mapsto \frac{1}{x}$ of $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ zijn niet gedefinieerd in $x = 0$ maar bestaan wel *in de buurt* van $x = 0$.

Met het begrip *limiet van een functie $x \mapsto f(x)$ als x naar 0 gaat* kan in goede gevallen het gedrag van f rond 0 worden weergegeven. We geven hier enkel een eerder informele definitie, bepalen dan enkele basislimieten en beschrijven daarna hoe met rekenregels vanaf die basislimieten ingewikkeldere limieten kunnen worden bepaald. Limieten worden gebruikt bij integralen en afgeleiden, maar ook bij asymptoten en het bestuderen van het verloop van functies.

Voorbeeld 18.1.1. De functie $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



$y = \frac{1}{x^2}$	0	$\downarrow$	0.01	1	100	$\uparrow$	$+\infty$	$\uparrow$	100	1	0.01	$\downarrow$	0
x	$-\infty$	$\leftarrow$	-10	-1	-0.1	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	0.1	1	10	$\rightarrow$	$+\infty$

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $1/x^2$ niet gedefinieerd, maar zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat *in de buurt van $x = 0$ de functiewaarden steeds groter* worden.

Dat *alle* functiewaarden *onbeperkt groter* worden naarmate x dichter bij $x = 0$ komt noteren we als

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \text{of} \quad \frac{1}{x^2} \to +\infty \text{ als } x \to 0$$

en we zeggen:

- de **limiet** van de functie $x \mapsto 1/x^2$ als x naar 0 gaat is **plus oneindig** of
- de functie $x \mapsto 1/x^2$ **gaat naar** plus oneindig als x naar nul **gaat**, of
- de functie $x \mapsto 1/x^2$ **wordt** plus oneindig als x nul **wordt**.

We voeren daarbij dus zowel het begrip 'limiet' als het begrip 'plus oneindig' $(+\infty)$ in.

Als x steeds *groter* wordt, dan komen de functiewaarden $1/x^2$ willekeurig dicht bij nul te liggen. Dat alle functiewaarden willekeurig dicht bij nul komen naarmate x groter wordt noteren we als

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{1}{x^2} \to 0 \text{ als } x \to +\infty$$

en we zeggen:

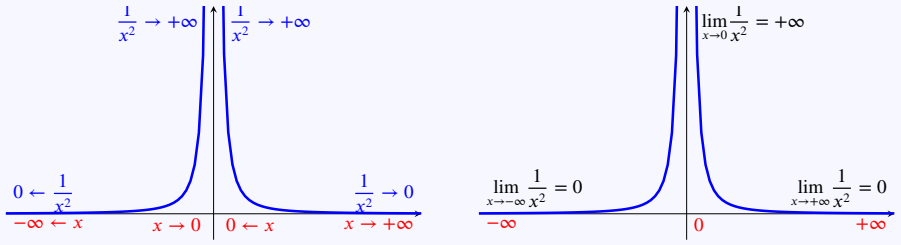
- de **limiet** van de functie $x \mapsto 1/x^2$ als x naar $+\infty$ gaat is 0.

Hetzelfde gebeurt als x erg negatief wordt: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

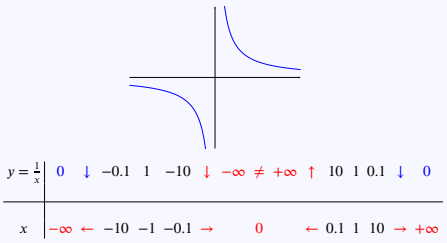
De situatie wordt verduidelijkt op volgende tekening:

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Definitie limieten



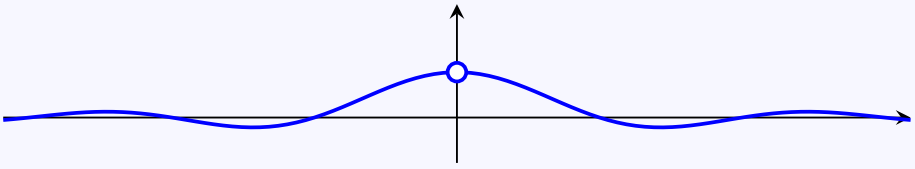
Voorbeeld 18.1.2. De functie $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



$y = \frac{1}{x}$	0	$\downarrow$	-0.1	1	-10	$\downarrow$	$-\infty \neq +\infty$	$\uparrow$	10	1	0.1	$\downarrow$	0
x	$-\infty \leftarrow$		-10	-1	$-0.1 \rightarrow$		0		$\leftarrow 0.1$	1	$10 \rightarrow$		$+\infty$

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $1/x$ niet gedefinieerd, en zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat *in de buurt van* $x = 0$ de functiewaarden steeds *groter* worden voor positieve x, maar dat ze steeds *kleiner* worden voor negatieve x. We zeggen in dat geval dat de limiet van de functie $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ als $x \to 0$ *niet bestaat*. In dit geval kunnen de begrippen *linkerlimiet* en *rechterlimiet* voor 'naderen langs links' of 'naderen langs rechts' de situatie beschrijven.

Voorbeeld 18.1.3. De functie $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



x	$\frac{\sin x}{x}$
0	niet gedefinieerd
0.01	0.999983
0.1	0.998334
1	0.841470
10	-0.054402
100	-0.005063

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $\dfrac{\sin x}{x}$ niet gedefinieerd, maar zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat in de buurt van $x = 0$ de functiewaarden *willekeurig dicht* bij 1 komen te liggen.

Dat alle functiewaarden willekeurig dicht bij één komen naarmate x dichter bij nul ligt noteren we als

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

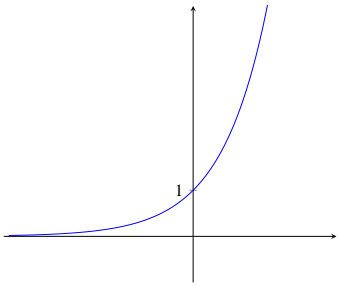
en we zeggen: de *limiet* van de functie $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ als x naar 0 gaat is 1.

Op dezelfde manier blijkt dat $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ en ook $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Oefening 18.1.1. Lees de volgende limieten af op de grafiek.

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Definitie limieten



1. $\lim_{x\to+\infty} e^x =$ | 0 | 1 | $+\infty$ | $-\infty$ | bestaat niet |

2. $\lim_{x\to-\infty} e^x =$ | 0 | 1 | $+\infty$ | $-\infty$ | bestaat niet |

3. $\lim_{x\to 0} e^x =$ | 0 | 1 | $+\infty$ | $-\infty$ | bestaat niet |

Limieten zijn vooral nuttig om het gedrag van functies te bestuderen op de grens (of de 'limiet') van hun domein. Dat kunnen bijvoorbeeld geïsoleerde punten zijn waar de functie niet gedefinieerd is zoals nulpunten van de noemer, maar dankzij de begrippen $+\infty$ en $-\infty$ werkt het ook voor 'heel erg grote waarden' van x. Het blijkt dat het begrip ook werkt voor punten die tot het domein zelf behoren.

Een formele wiskundige definitie van het begrip limiet is enigszins ingewikkeld, en we beperken ons hier tot volgende pseudo-definitie:

Definitie 18.1.1 (Intuïtieve pseudo-definitie van limiet)**.** Voor een reële functie f en voor L en c telkens ofwel een reëel getal ofwel één van de symbolen $+\infty$ of $-\infty$, zeggen en schrijven we dat

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x) = L \quad &\iff \text{de } \textbf{limiet} \text{ van } f \text{ in } c \text{ is gelijk aan } L \\
&\iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } L \\
&\iff \text{als } x \text{ naar } c \text{ gaat, dan gaat } f(x) \text{ naar } L \\
&\iff \text{als } x \to c, \text{ dan } f(x) \to L \\
&\iff \text{voor alle } x\text{-waarden erg dicht bij } c \text{ liggen de functiewaarden } f(x) \text{ zeer dicht bij } L.
\end{aligned}$$

Niet voor alle functies f en alle getallen c bestaat de limiet $\lim_{x\to c} f(x)$.

In eenvoudige gevallen zijn limieten dus uitdrukkingen zoals $\lim_{x\to 2}(x+3) = 5$. Door ook de symbolen $+\infty$ en $-\infty$ toe te laten kunnen we echter ineens ook beschrijven wat er gebeurt als de variabele x groot wordt, zoals bij $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ of als de functiewaarden groot worden, zoals bij $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Als de functiewaarden niet naar één vaste waarde gaan, dan bestaat de limiet niet. Voor $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ worden de functiewaarden erg groot voor grote positieve x, maar ze zijn negatief voor negatieve x.
Als een functie niet gedefinieerd is in de buurt van c is het onmogelijk functiewaarden te berekenen als x naar c gaat. Dan bestaat de limiet niet, zoals bijvoorbeeld voor $\lim_{x\to -5} \sqrt{x}$, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ of $\lim_{x\to-\infty} \ln x$.

Opmerking 18.1.1.

- In de definitie van $\lim_{x\to c} f(x)$ heeft de waarde $f(c)$ van f in c – als die al bestaat – geen enkel belang : enkel de waarden van f *in de buurt van* c bepalen de limiet.
  We zullen verder wel zien dat zodra f *continu* is in c geldt dat $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Definitie limieten

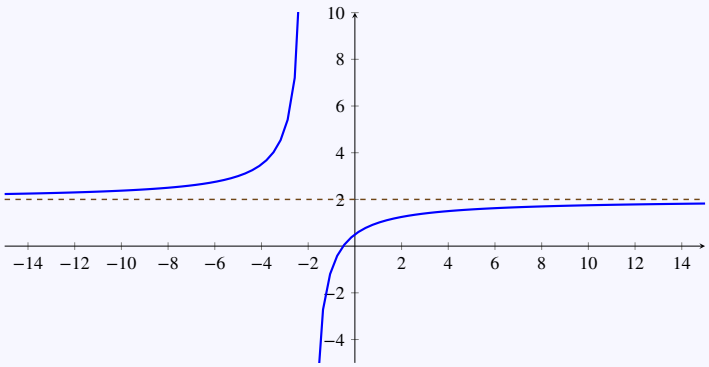
- In de uitdrukking $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ligt c op de x-as (het domein van f), en de limiet L op de y-as.
- Het symbool ∞ voor 'oneindig' is voorlopig enkel een notatie voor 'wordt willekeurig groot'. Verder zal met rekenregels de betekenis van $+\infty$ en $-\infty$ concreter worden vastgelegd.
- Let op: $x < c$ is hetzelfde als $c > x$. *Zowel* de tekens $<$ en $>$ *als* de volgorde zijn belangrijk.
- Het lezen van $x \to c$ als 'x gaat naar c' geeft een zeker dynamisch aspect: x wordt verondersteld te 'bewegen' naar iets. Het is belangrijk te beseffen dat het resultaat of de 'uitkomst' van zo'n limiet, dus datgene wat met het symbool $\lim_{x\to c} f(x)$ wordt aangeduid, gewoon een bepaald getal is of het symbool $\pm\infty$.
- De uitdrukking 'de limiet $\lim_{x\to c} f(x)$ bestaat' wordt in de wiskunde in twee mogelijke betekenissen gebruikt: soms bedoelt men 'de limiet bestaat en is eindig', maar soms bedoelt men ook 'de limiet bestaat maar is eventueel $\pm\infty$'. In deze cursus gebruiken we de tweede optie.
- De limiet van f als x gaat naar c is enkel bepaald als f gedefinieerd is in de buurt van c, zoals meestal het geval is bij punten of randpunten van het domein van f. Zo kunnen we spreken van de limiet van $f(x) = \sqrt{x}$ in de punten 1 en π en 81 (punten van het domein), of in 0 of $+\infty$ (punten 'op de rand van het domein'), maar de limiet in de punten -1 en -314 heeft *geen* betekenis want het is niet mogelijk om $\sqrt{x}$ te bepalen als x gaat naar -1. Ook de limieten $\lim_{x\to-\infty} \ln x$ en $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ bestaan niet.

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Definitie linker- en rechterlimieten

Soms bestaat een limiet niet omdat de functiewaarden langs links naar een andere waarde gaan dan langs rechts. Zo worden voor $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ de functiewaarden erg groot voor grote positieve x, maar ze zijn negatief voor negatieve x. Dat fenomeen kan wiskundig worden beschreven mer linkerlimieten en rechterlimieten.

Voorbeeld 18.2.1. De functie $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$ heeft volgende grafiek en functietabel:

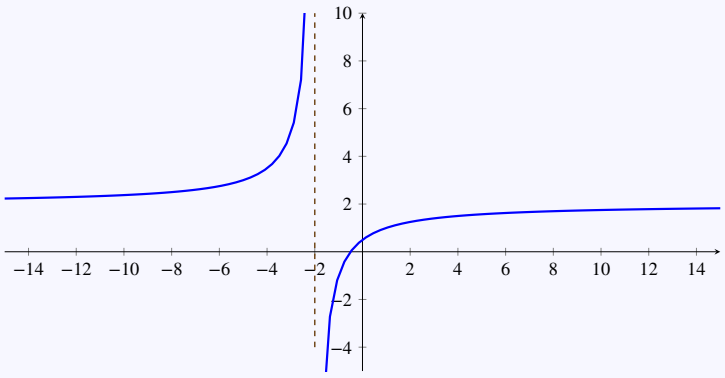


x	$\frac{2x+1}{x+2}$
10	1.75
100	1.97058823
1000	1.99700599
10000	1.99970006
100000	1.99997000
1000000	1.99999700
↓	↓
$+\infty$	2

x	$\frac{2x+1}{x+2}$
−10	2.375
−100	2.03
−1000	2.003
−10000	2.0003
−100000	2.00003
−1000000	2.000003
↓	↓
$-\infty$	2

Zowel in de tabel als op de grafiek blijkt dat $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2} = 2$ en ook $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x+2} = 2$.

Maar in de buurt van $x = -2$ geeft *langs links naderen* een ander resultaat dan *langs rechts naderen*:



x	$\frac{2x+1}{x+2}$
−3	5
−2.1	32
−2.01	302
−2.001	3002
−2.0001	30002
↓	↓
−2	$+\infty$

x	$\frac{2x+1}{x+2}$
−1	−1
−1.9	−28
−1.99	−298
−1.999	−2998
−1.9999	−29998
↓	↓
−2	$-\infty$

Bovenstaand fenomeen rond $x = -2$ wordt beschreven met de begrippen linkerlimiet en rechterlimiet.

Definitie 18.2.1 (Intuïtieve pseudo-definitie van linker- en rechterlimiet)**.**

Voor een reële functie f, voor een reëel getal c en voor L ofwel een reëel getal ofwel één van de symbolen $+\infty$ of $-\infty$, zeggen en schrijven we dat

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Definitie linker- en rechterlimieten

$\lim\limits_{\substack{x\to c\\<}} f(x) = L$ $\iff$ de **linkerlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L

$\iff$ als $x \to c$ langs links (dus met $x < c$), dan $f(x) \to L$

$\iff$ voor x voldoende dicht bij c en kleiner dan c nadert $f(x)$ willekeurig dicht tot L.

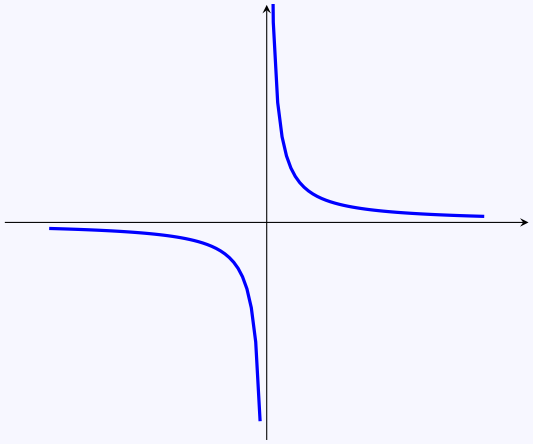
$\lim\limits_{\substack{x\to c\\>}} f(x) = L$ $\iff$ de **rechterlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L

$\iff$ als $x \to c$ langs rechts (dus met $c < x$), dan $f(x) \to L$

$\iff$ voor x voldoende dicht bij c en groter dan c nadert $f(x)$ willekeurig dicht tot L.

Linker- en rechterlimieten zijn alleen zinvol voor $c \in \mathbb{R}$ en worden niet gebruikt voor limieten naar $\pm\infty$. Maar ook $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \sqrt{x}$ bestaat niet, want $\sqrt{x}$ is niet gedefineerd voor negatieve x. Er geldt wel $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \sqrt{x} = 0$.

Voorbeeld 18.2.2. De functie $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



x	$1/x$
$-\infty$	0
$\uparrow$	$\uparrow$
-1000	-0.001
-100	-0.01
-10	-0.1
-1	-1
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000
$\downarrow$	$\downarrow$
0	$-\infty$

x	$1/x$
0	$+\infty$
$\uparrow$	$\uparrow$
0.001	1000
0.01	100
0.1	10
1	1
10	0.1
100	0.01
1000	0.001
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	0

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $\dfrac{1}{x}$ niet gedefinieerd, en zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat in de buurt van $x = 0$ en x positief de functiewaarden *willekeurig groot* worden. Maar, in de buurt van $x = 0$ met x negatief worden de functiewaarden *willekeurig klein*. Dit fenomeen noteren we als

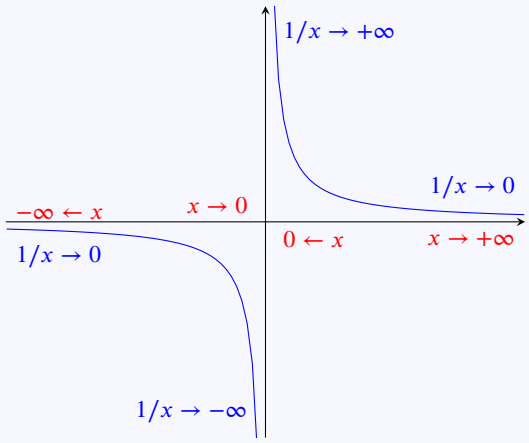
$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$$

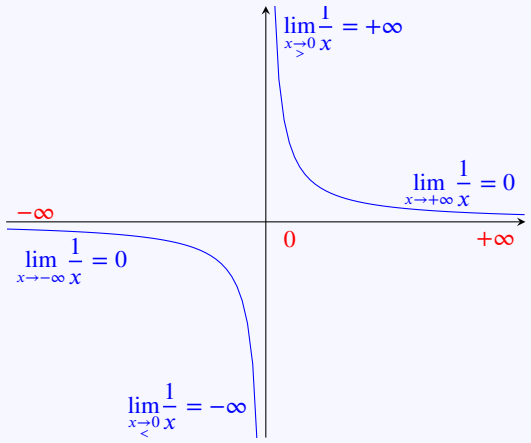
en we zeggen dat de *linkerlimiet* van de functie $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ als x naar 0 gaat min oneindig is, en de *rechterlimiet* plus oneindig is.

De situatie wordt verduidelijkt op volgende tekening:

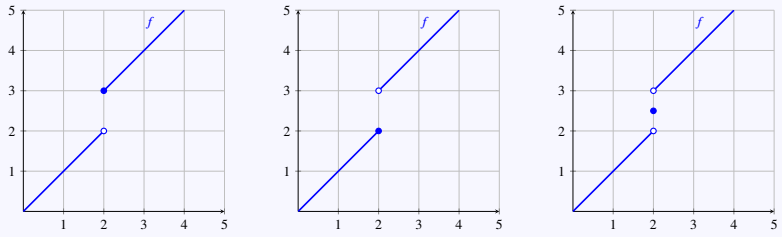
CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Definitie linker- en rechterlimieten



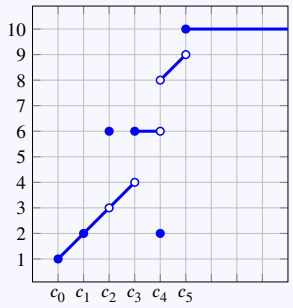


Voorbeeld 18.2.3. Linker- en rechterlimiet aflezen op een grafiek.



In de drie gevallen is de linkerlimiet als $x \to 2$ gelijk aan 2 en de rechterlimiet gelijk aan 3.
In de drie gevallen bestaat de limiet als $x \to 2$ niet.
De waarde van f in het punt 2 heeft geen belang bij het bepalen van limieten als $x \to 2$.

Voorbeeld 18.2.4. Beschouw de functie f met onderstaande grafiek en bijhorende limieten.



in c_0 :	$\lim_{x \to c_0, x<} f(x)$ geen betekenis	$\lim_{x \to c_0, x>} f(x) = 1$	$\lim_{x \to c_0} f(x) = 1$ (randpunt)
in c_1 :	$\lim_{x \to c_1, x<} f(x) = 2$	$\lim_{x \to c_1, x>} f(x) = 2$	$\lim_{x \to c_1} f(x) = 2$
in c_2 :	$\lim_{x \to c_2, x<} f(x) = 3$	$\lim_{x \to c_2, x>} f(x) = 3$	$\lim_{x \to c_2} f(x) = 3$
in c_3 :	$\lim_{x \to c_3, x<} f(x) = 4$	$\lim_{x \to c_3, x>} f(x) = 6$	$\lim_{x \to c_3} f(x)$ bestaat niet
in c_4 :	$\lim_{x \to c_4, x<} f(x) = 6$	$\lim_{x \to c_4, x>} f(x) = 8$	$\lim_{x \to c_4} f(x)$ bestaat niet
in c_5 :	$\lim_{x \to c_5, x<} f(x) = 9$	$\lim_{x \to c_5, x>} f(x) = 10$	$\lim_{x \to c_5} f(x)$ bestaat niet

De waarde $f(c_2) = 6$ speelt geen enkele rol bij het bepalen van de limiet van f in c_2: als x dicht bij c_2 ligt, dan ligt $f(x)$ dicht bij 2. Bij de definitie van limiet zijn enkel de waarden *in de buurt* belangrijk. Op dezelfde manier speelt bij het bepalen van de limiet van f in c_4 de waarde $f(c_4) = 2$ geen enkele rol: de limiet kijkt enkel in de buurt van c_4, en niet in c_4 zelf.

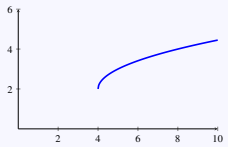
De functie f maakt sprongen in c_2, c_3, c_4 en c_5, en het begrip 'limiet' tracht de waarde te bepalen die f zou moeten gehad hebben als de grafiek van f vloeiend zou zijn geweest. We zullen dat later nog exacter formuleren aan de hand van het begrip continuïteit. We kunnen alvast het volgende observeren: als x langs links naar c_4 gaat, had die waarde 6 moeten zijn. Als x langs rechts naar c_4

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Definitie linker- en rechterlimieten

gaat, had de waarde 8 moeten zijn. Deze waarden zijn niet aan elkaar gelijk, dus bestaat de limiet niet. Bovendien zijn zowel de linker- als de rechterlimiet verschillend van de functiewaarde $f(c_4) = 2$.

Voorbeeld 18.2.5. Beschouw de functie $x \mapsto 2 + \sqrt{x-4}$.



De **rechterlimiet** bestaat: $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}}(2+\sqrt{x-4}) = 2$

De **linkerlimiet** bestaat niet: $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ <}}(2+\sqrt{x-4})$ is zinloos, want voor $x < 4$ is $\sqrt{x-4}$ niet gedefinieerd.

In deze cursus spreken we in dergelijke gevallen toch ook van **de limiet** $\lim\limits_{x\to 4}(2+\sqrt{x-4})$, waarbij dus begrepen wordt dat in dit geval x enkel langs rechts naar 4 kan gaan.

Volgende eigenschap geeft een precies verband tussen enerzijds limieten en anderzijds linker-en rechterlimieten. We noemen **een randpunt van het domein** elk punt op of aan de rand van het domein, met als typische voorbeelden de punten a en b van intervallen $[a,b]$, $[a,b[$ of $]a,b[$.

Eigenschap 18.2.1.

De limiet in een punt dat *geen randpunt* is van het domein bestaat als en slechts als

de linker- *en* de rechterlimiet er bestaan en beide aan elkaar gelijk zijn:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to c\\ <}} f(x) = L \text{ en } \lim_{\substack{x\to c\\ >}} f(x) = L$$

In randpunten van het domein bestaat de limiet zodra de linker- *of* de rechterlimiet er bestaan.

In sommige handboeken worden andere afspraken gemaakt over de precieze betekenis van het begrip 'randpunt' en 'limiet in een randpunt', en zegt men bv. dat in een randpunt toch geen limiet bestaat maar enkel een rechterlimiet. Dat is bv. van belang voor de limiet naar 0 van de vierkantswortel of de logaritme.

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Rekenregels limieten

In de praktijk worden limieten berekend met volgende rekenregels:

de limiet van een	som	is de	som	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt,
de limiet van een	verschil	is het	verschil	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt,
de limiet van een	product	is het	product	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt,
de limiet van een	quotiënt	is het	quotiënt	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt.

De beperking in verband met onbepaalde vormen is erg belangrijk, zoals blijkt uit volgend voorbeeld.

Voorbeeld 18.3.1 (Is de limiet van de som altijd gelijk aan de som van de limieten?)**.**

Beschouw de functies $f : x \mapsto x$ en $g : x \mapsto a - x$, met $a \in \mathbb{R}$. Dan is $f(x) + g(x) = x + (a - x) = a$ en kennen we volgende limieten op basis van de grafieken van deze eenvoudige functies:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (a - x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \big(g(x) + f(x)\big) = \lim_{x\to+\infty} a = a$$

Stel dat volgende regel zou gelden

$$\lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big).$$

Omdat $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ en $\lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} a = a$ zou dan

$$(+\infty) + (-\infty) \stackrel{?}{=} a$$

Maar a kan hierbij *willekeurig* gekozen worden: voor a kan je even goed 0 kiezen als 2 of $2\pi/3$ .... We noemen daarom $(+\infty) + (-\infty)$ een onbepaaldheid of een onbepaalde vorm.

De regel dat de limiet van een som de som is van de limieten, $\lim_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$, geldt enkel wanneer $\lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$ *geen onbepaaldheid oplevert*.

De rekenregels voor $\pm\infty$ zijn zodanig opgesteld dat volgende rekenregels voor limieten zouden gelden. Ook als een limiet $+\infty$ of $-\infty$ is zeggen we dat deze limiet **bestaat**.

Eigenschap 18.3.1 (Rekenregels limieten)**.**

Voor continue functies f, g waarvoor de limieten $\lim_{x\to c} f(x)$ en $\lim_{x\to c} g(x)$ bestaan,

gelden volgende (reken-)regels **tenzij ze een onbepaaldheid geven**:

$$\lim_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{som}) = \text{som}(\lim s)$$
$$\lim_{x\to c} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{verschil}) = \text{verschil}(\lim s))$$
$$\lim_{x\to c} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{product}) = \text{product}(\lim s)$$
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \qquad \lim(\text{quotient}) = \text{quotient}(\lim s)$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Rekenregels limieten

Voorbeeld 18.3.2.

1. $\lim_{x\to 1}(x^2+x) = \lim_{x\to 1}x^2 + \lim_{x\to 1}x = 1+1 = 2$
2. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-3\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} - \lim_{x\to+\infty}3 = 0-3 = -3$
3. $\lim_{x\to 1}\left((x^2+x)\cdot\left(\frac{1}{x}-3\right)\right) = \lim_{x\to 1}(x^2+x)\cdot\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}-3\right) = 2\cdot(-2) = -4$
4. $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x}-3}{x^2+x} = \frac{\lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{x}-3\right)}{\lim_{x\to 2}(x^2+x)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

In volgende voorbeelden leidt de toepassing van dezelfde rekenregels echter tot onbepaaldheden:

Voorbeeld 18.3.3.

1. $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) \overset{?}{=} \lim_{x\to+\infty}x^2 - \lim_{x\to+\infty}x = \infty-\infty$
2. $\lim_{x\to 0}\left((x^3-x)\cdot\frac{1}{x^3}\right) \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}(x^3-x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3} = 0\cdot(+\infty)$
3. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} \overset{?}{=} \frac{\lim_{x\to 1}(x-1)}{\lim_{x\to 1}(x^2-1)} = \frac{0}{0}$
4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x+2} \overset{?}{=} \frac{\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)}{\lim_{x\to+\infty}(x+2)} = \frac{+\infty}{+\infty}$

Als je een onbepaalde vorm uitkomt, betekent dat niet dat de limiet niet bestaat. Het betekent enkel dat je die bepaalde rekenregel niet mag toepassen om de limiet te berekenen. Bovenstaande limieten kunnen als volgt toch worden berekend:

Voorbeeld 18.3.4.

1. $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) = \lim_{x\to+\infty}x(x-1) \overset{?}{=} \lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}(x-1) = \infty\cdot\infty = \infty$
2. $\lim_{x\to 0}\left((x^3-x)\cdot\frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1-\infty = -\infty$
3. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

   Merk op dat het wegdelen van de gemeenschappelijk factor $x-1$ niet toegelaten is als $x-1$ nul is, of dus als $x=1$. Maar voor het bepalen van de limiet als x gaat naar 1 moet enkel rekening gehouden worden met waarden voor x in de buurt van 1 en niet voor $x=1$.
4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{x})}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$

Voorbeeld 18.3.5. Deze rekenregels mogen niet gebruikt worden als ze een onbepaaldheid geven:

CC BY-NC-SA 4.0

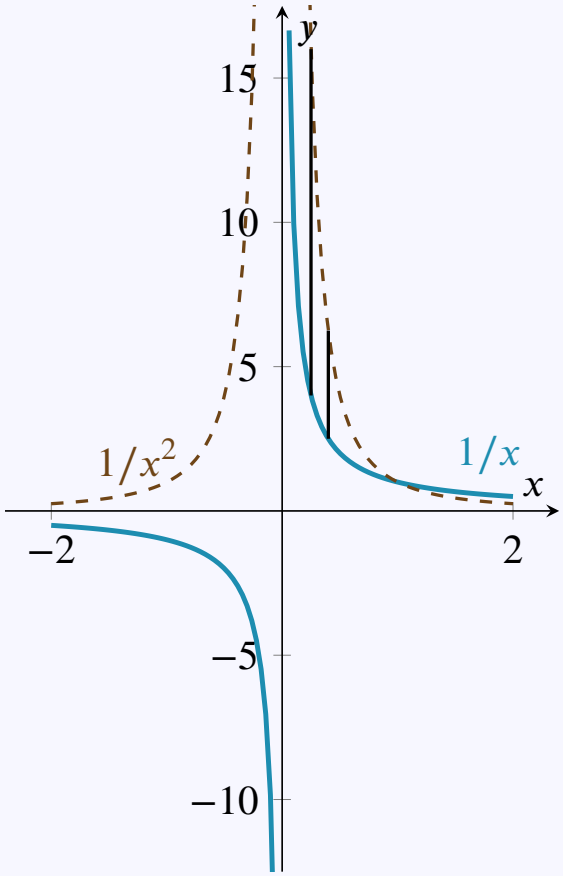
18.3 Rekenregels limieten

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} + \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^2} = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$$

maar $$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} - \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^2} = (+\infty)-(+\infty) \text{ (onbepaald!)}$$

terwijl $$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x-1}{x^2} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x-1)}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Als x nadert tot 0 langs rechts, wordt het verschil tussens $1/x$ en $1/x^2$ inderdaad willekeurig groot.



CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Limieten in ±∞

Voorbeeld 18.4.1. Bereken $\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)$.

Als we proberen de regel 'limiet van de som is som van de limieten' te gebruiken, krijgen we

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2\\ &= 3\cdot(+\infty)-4\cdot(+\infty)+2\\ &= \infty-\infty, \text{ en dus ONBEPAALD}\end{aligned}$$

Conclusie: we mogen de rekenregel *niet* toepassen. We hebben een fout gemaakt. De eerste gelijkheid geldt niet:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)\neq\lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2$$

Er is echter een manier om de onbepaaldheid te omzeilen, en de limiet *toch* te berekenen met behulp van de rekenregels. We kunnen namelijk *de hoogstegraadsterm buiten haakjes te brengen*, en daardoor de limiet van een som omzetten in de limiet van een product. Verder gebruiken we dan de rekenregel voor limieten van een product. We beginnen de berekening met:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})$$

We weten dat

$$\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})=\lim_{x\to+\infty}(3)-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=3+0+0=3$$

dus als we de limiet van dit product van functies schrijven als het product van de limieten krijgen we geen onbepaalde vorm:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\lim_{x\to+\infty}(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})\\ &= (+\infty)\cdot 3=+\infty, \text{ en dus GEEN onbepaaldheid}\end{aligned}$$

Als de rekenregels voor limieten een onbepaaldheid opleveren, probeer je de onbepaaldheid te *omzeilen*. Een mogelijke oplossing bij de limiet in $c=\pm\infty$ van een som is om de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haakjes te brengen en zo een som om te zetten in een product. Bij de limiet van een veelterm is dit de hoogstegraadsterm. We zetten enkel de macht van x buiten haakjes, de coëfficiënt laten we binnen haakjes staan. Dit idee beperkt zich echter niet tot veeltermen. We geven nog enkele voorbeelden:

Voorbeeld 18.4.2. Bereken $\lim_{x\to+\infty}(2e^{3x}-5e^{2x})$.

$$\lim_{x\to+\infty}(2e^{3x}-5e^{2x})=\lim_{x\to+\infty}e^{3x}(2-\frac{5}{e^x})=(+\infty).2=+\infty$$

Voorbeeld 18.4.3. Bereken $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8}$.

Dit is de limiet van een quotiënt, maar het quotiënt van de limieten geeft $\frac{+\infty}{+\infty}$, en dus kunnen we de

18.4 Limieten in $\pm\infty$

gewone rekenregel niet toepassen. We zetten nu zowel in teller als in noemer de hoogstegraadsterm buiten haken:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

Opmerking 18.4.1.

- Door het toepassen van de rekenregels zie je dat de limiet voor $x\to\pm\infty$ gelijk is aan de limiet van de hoogstegraadsterm voor een veeltermfunctie, en gelijk is aan het quotiënt van de hoogstegraadstermen in teller en noemer voor een rationale functie. In de oefeningen wordt echter verwacht dat je niet gewoon het eindresultaat opschrijft, maar dat je telkens met de rekenregels uitwerkt hoe je hier aan komt.
- Het heeft geen zin om de termen die het snelst naar oneindig gaan buiten haken te brengen bij een limiet in een nulpunt van de noemer zoals bijvoorbeeld:

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x^2+x-1}{x-1}$$

Ook bij irrationale functies zetten we de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haken:

Voorbeeld 18.4.4. Bereken $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right)$.

Dit is de limiet van een som, maar de som van de limieten geeft $\infty-\infty$, en dus kunnen we deze rekenregel niet toepassen. We zetten stap voor stap de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right)&=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right)\\
&=\left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right)\right)\\
&=(-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+3\right)\\
&=-\infty
\end{aligned}$$

Merk op: we hebben $|x|$ vervangen door $-x$ omdat we de limiet in $-\infty$ moeten berekenen, en voor negatieve x is inderdaad $|x|=-x$.

Opmerking 18.4.2.

Let op bij het berekenen van limieten met vierkantswortels:

$\sqrt{x^2}=|x|$ dus

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Limieten in $\pm\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} -x = -(-\infty) = +\infty$

Deze techniek werkt echter niet altijd. We nemen een voorbeeld dat erg lijkt op het vorige voorbeeld, maar toch op een heel andere manier uitgerekend moet worden:

Voorbeeld 18.4.5. Bereken $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right) \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)\right) \\
&= (-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+2\right) \\
&= (-\infty)\cdot 0
\end{aligned}$$

Met deze berekeningen krijgen we een onbepaaldheid, dus moeten we een andere techniek gebruiken om deze limiet te kunnen uitrekenen. We vermenigvuldigen teller en noemer met de toegevoegde tweeterm. De toegevoegde tweeterm nemen wil zeggen dat we het plusteken tussen de twee termen vervangen door een minteken, of omgekeerd.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+7x}+2x)(\sqrt{4x^2+7x}-2x)}{\sqrt{4x^2+7x}-2x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+7x-4x^2}{\sqrt{4x^2+7x}-2x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{7x}{|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{7x}{-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{7}{-\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2} \\
&= \frac{7}{-\sqrt{4}-2} = -\frac{7}{4}
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.5 Limieten in nulpunten van de noemer

1. Limieten van de vorm $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$

We hebben in het inleidend voorbeeld gezien dat $\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{1}{x}=-\infty$ en dat $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ niet bestaat.

Analoog kunnen we volgende situaties tegenkomen bij het berekenen van $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$, $c\in\mathbb{R}$:

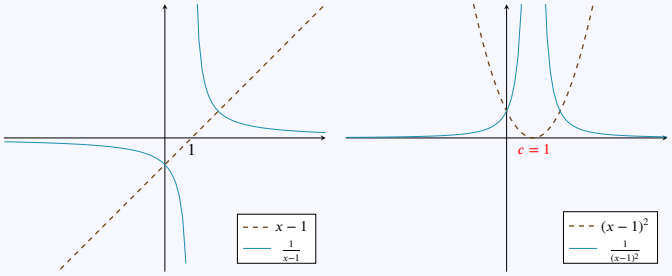
- Als $f(x)>0$ in een omgeving van c dan is $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.
- Als $f(x)<0$ in een omgeving van c dan is $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.
- Als $f(x)>0$ voor $x>c$ en $f(x)<0$ voor $x<c$ dan is $\lim_{\substack{x\to c\\>}}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ en $\lim_{\substack{x\to c\\<}}\frac{1}{f(x)}=-\infty$
- Als $f(x)<0$ voor $x>c$ en $f(x)>0$ voor $x<c$ dan is $\lim_{\substack{x\to c\\>}}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ en $\lim_{\substack{x\to c\\<}}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

Om deze limieten te berekenen moet je dus het tekenverloop van de noemer $f(x)$ zoeken in de buurt van c. Je hoeft hiervoor niet het gehele tekenverloop van $f(x)$ op te stellen, in de buurt van c volstaat.

Voorbeeld 18.5.1.

1. $\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{1}{x-1}=+\infty$ want de noemer $x-1$ is positief voor $x>1$.
2. $\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{1}{x-1}=-\infty$ want de noemer $x-1$ is negatief voor $x<1$.
3. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ bestaat niet, want de noemer $x-1$ verandert van teken rond $x=1$.
4. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$, want de noemer $x-1$ is positief rond $x=1$.

Ter illustratie geven we bij deze eenvoudige voorbeelden ook de grafieken van $\frac{1}{f(x)}$ en van $f(x)$. In het algemeen echter hebben functies met nulpunten in de noemer geen eenvoudige grafieken en gebruik je niet de grafiek om de limiet af te lezen maar bereken je juist de limieten in deze nulpunten van de noemer om meer te weten te komen over de grafiek van de functie.



Opmerking 18.5.1.

18.5 Limieten in nulpunten van de noemer

Merk op dat $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$ steeds $+\infty$ of $-\infty$ is als de limiet bestaat.

Als de linker- en rechterlimiet verschillen, dan bestaat $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ niet.

2. Limieten van de vorm $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}$ met $f(c)=0$

(a) **c is geen nulpunt van de teller**

In dit geval is c dus een nulpunt van de noemer maar geen nulpunt van de teller.
Dan kunnen we de limiet als volgt herschrijven:

$$\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to c}g(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=g(c)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}.$$

Dit is geen onbepaalde vorm vermits $g(c)\neq 0$. Om de limiet verder uit te rekenen moeten we het teken van $g(c)$ kennen en de limiet $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ berekenen. Het tekenverloop van de *teller* moet je niet zoeken, enkel het *teken* van $g(c)$ heeft belang.

Voorbeeld 18.5.2.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{x^2+x-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}(x^2+x+1)\cdot\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{1}{x-1}=(1^2+1-1)\cdot(+\infty)=+\infty$$

(b) **c is een nulpunt van teller en noemer**

Dit geval leidt tot de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$.

Bij **rationale functies** kunnen we in dit geval teller en noemer ontbinden in factoren en de factor $x-c$ wegdelen in teller en noemer.

Voorbeeld 18.5.3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Bij sommige **irrationale functies** kunnen we teller en noemer vermenigvuldigen met de toegevoegde uitdrukking van teller of noemer.

Voorbeeld 18.5.4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Opmerking 18.5.2. Men kan limieten die de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$ geven ook berekenen met de regel van de l'Hôpital.

CC BY-NC-SA 4.0

18.5 Limieten in nulpunten van de noemer

Samengevat wordt dit:

Eigenschap 18.5.1. De limiet in een nulpunt van de noemer bereken je als volgt:

1.	$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$	met $f(c) = 0$:	**tekenverloop** van $f(x)$ in de buurt van c
1.a	als	$f(x) > 0$ rond c	limiet is $+\infty$
1.b		$f(x) < 0$ rond c	limiet is $-\infty$
1.c		$f(x)$ verandert van teken in c	linker- en rechterlimiet zijn verschillend
2.	$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)}$	met $f(c) = 0$:	
2.a	als	$g(c) \neq 0$:	**reduceer tot geval 1** want $\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to c} g(x) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = g(c) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$.
2.b	als	$g(c) = 0$:	onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ wegwerken via
		met f en g veeltermen	**gemeenschappelijke factor** $x - c$ wegdelen
		met f *of* g som van wortels	vermenigvuldigen met **toegevoegde tweeterm**
		met f en g afleidbaar	**l'Hôpital** toepassen

CC BY-NC-SA 4.0

18.5.A Oefeningen limieten

Bij de oefeningen op limieten is het niet enkel van belang de uitkomst te vinden, maar ook om correct te kunnen uitleggen **hoe** je deze uitkomst vindt.

Oefening 18.5.1. Bereken volgende limieten in $\pm\infty$ met behulp van de rekenregels:

1. $\lim_{x\to+\infty}(-4x^5+7x^4-11)=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

2. $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+3x-2}{3x-7}=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3}{x^3-x+2}=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x-1}=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

6. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+5x^2+1}{x^4-x^6}=\ldots\ldots$

7. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-7x}+3x)=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

8. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+3}-x)=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

9. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+3}-x)=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

10. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1}=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

11. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1}=\ldots\ldots$

12. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{16x^2+9x}+4x)=\ldots\ldots$

13. $\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

Oefening 18.5.2. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van de noemer dat geen nulpunten is van de teller:

1. $\lim_{\substack{x\to2\\<}}\frac{1}{x-2}=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

2. $\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

3. $\lim_{\substack{x\to2\\>}}\frac{1}{\sqrt{x-2}}=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

4. $\lim_{\substack{x\to3\\<}}\frac{4x-20}{2x-6}=$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

CC BY-NC-SA 4.0

18.5.A Oefeningen limieten

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x-3}{x^2-1} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x-3}{x^2-1} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

8. $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ <}} \frac{x}{\sin x} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

Oefening 18.5.3. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van teller en noemer:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^3} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{x-3}{|x-3|} = \ldots\ldots$

4. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = \ldots\ldots$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x^3-1}{x-1} = \ldots\ldots$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3} = \ldots\ldots$

7. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \ldots\ldots$

8. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9} = \ldots\ldots$

Oefening 18.5.4. Bereken volgende limieten met behulp van de rekenregels:

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(12x^{503} + 7x^{404} + 25x^{200}\right) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2+42x-12}{2x^2-17} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{6x^2-7x} + 20x) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

5. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x-2} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

18.5.A Oefeningen limieten

Oefening 18.5.5. Bereken volgende limieten met parameters $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+ax}{\sqrt{x^2+2}} = \ldots\ldots$
2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+ax}{\sqrt{x^2+2}} = \ldots\ldots$
3. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{ax+b}{7x-\sqrt{x^2+10}} = \ldots\ldots$
4. $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x}+ax) = \ldots\ldots$
5. $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{4x^2+7x}+ax) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 19
Afgeleiden (basisversie)

(Versie 2026/08/25H.51)

19.1 Intro afgeleiden

Het begrip *afgeleide* komt frequent voor in allerlei wetenschappelijke en andere contexten. De techniek van afgeleiden laat toe om erg precies, erg efficiënt en in erg uiteenlopende situaties *veranderingen* te bestuderen.

Vele fenomenen zoals bewegingen, temperatuursverlopen, productievolumes, epidemies en hoogteprofielen van wielerwedstrijden kunnen beschreven worden als functies. *Afgeleiden* zeggen dan iets over de *veranderingen van de functiewaarden*. Hoe *verandert* de temperatuur, het geproduceerde volume, het aantal besmette personen als de tijd, de prijs of de sociale contacten veranderen? In vele contexten is de *waarde* van de functie zelfs minder belangrijk dan de *verandering van de waarde*. Een renner die een berg oprijdt, hecht op cruciale momenten in de wedstrijd meer belang aan de *verandering van de hoogte*, dat is de steilheid van de berg, dan aan de *absolute hoogte* op dat punt. De winst die iemand behaalt bij een belegging in aandelen hangt niet zozeer af van de *waarde* van de aandelen op een bepaald ogenblik, maar van de *verandering van die waarde* tussen de aankoop en de verkoop.

In deze context begrijpen we functies dikwijls als een verband tussen een 'onafhankelijke' variabele (de tijd, de prijs, de lockdown maatregelen) en de 'afhankelijke' variabele (de temperatuur, de hoeveelheid geproduceerde producten of het aantal besmette personen). In wiskundige taal noemen we de onafhankelijke variabele typisch x (maar soms ook t als het over tijd gaat, of s, of andere letters) en de afhankelijke grootheid is dan een functie die we typisch f noemen (maar soms ook T als het over temperatuur gaat, of v en a als het snelheden en versnellingen zijn). Als we de afhankelijke grootheid ook als 'variabele' willen weergeven, gebruiken we dikwijls de letter y en schrijven we $y = f(x)$, of soms ook $y(x)$, om aan te duiden dat de grootheid y afhangt van x.

Afgeleiden geven informatie over de *verhouding* tussen *de verandering van de afhankelijke variabele* ten opzichte van *de verandering van de onafhankelijke variabele*. Als je de onafhankelijke variabele varieert, wat gebeurt er dan met de afhankelijke variabele? Stijgt die, of daalt die, en hoe snel of hoe traag gebeurt dat? Je kan hetzelfde ook begrijpen in termen van *gevoeligheid*: hoe gevoelig is de afhankelijke variabele aan een wijziging in de onafhankelijke variabele?

In wat volgt hebben we de leerstof over afgeleiden als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Enkele voorbeelden en een wiskundige definitie

(3) Enkele basisregels over het berekenen van afgeleiden

(4) Regels voor producten en quotiënten van functies

(5) Regels voor samenstellingen van functies

(6) De afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

(7) De afgeleiden van goniometrische functies

(8) Tenslotte, bestuderen we als toepassing het oplossen van minimum-maximum problemen

CC BY-NC-SA 4.0

19.2 Definitie afgeleide

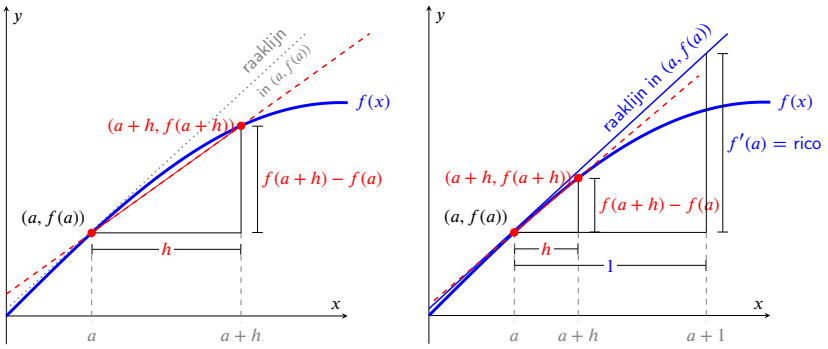
De *afgeleide van een reële functie in een punt* is een getal dat de helling van de grafiek in dat punt meet (concreet: het is de *richtingscoëfficiënt* van de *raaklijn* in dat punt). Je kan ook zeggen dat de afgeleide de *gevoeligheid* meet van de afhankelijke variabele voor veranderingen van de onafhankelijke variabele.

Definitie 19.2.1. De **afgeleide** van een reële functie f in a, genoteerd $f'(a)$ is het getal

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

als deze limiet bestaat en eindig is, en we noemen f dan **afleidbaar** of **differentieerbaar in** a.

De **afgeleide functie** is de functie $f' : x \mapsto f'(x)$, die enkel gedefinieerd is waar f afleidbaar is.



Opmerking 19.2.1. Door a te vervangen door x_0 en h door $x - x_0$ wordt $h \to 0$ nu $x \to x_0$ en:

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

De afgeleide $f'(x_0)$ zegt dat $f(x)$ in de onmiddellijke omgeving van x_0 ongeveer $f'(x_0)$ keer zo snel verandert als x. Inderdaad, voor x voldoende dicht bij x_0 geldt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x_0),$$

en dus $$f(x)-f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

of nog $$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

De laatste uitdrukking leidt tot de vergelijking van de raaklijn in x_0 aan de grafiek van f:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

waarbij $f'(x_0)$ dus de **richtingscoefficiënt** van de raaklijn is.

Soms gebruikt men ook de notatie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \stackrel{\text{def}}{=} f'$ voor de afgeleide. Vooral bij integralen is dat handig.

In de praktijk bereken je een afgeleide nooit met deze definitie, maar met eenvoudige rekenregels.

CC BY-NC-SA 4.0

19.3 Basisregels

De basisregels voor afgeleiden behandelen het afleiden van machten, sommen en scalaire veelvouden. Deze basisregels worden later aangevuld met de regels voor producten en quotiënten en voor samenstellingen.

We geven telkens twee versies van de basisregels: eerst met de notatie f', en vervolgens met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Eigenschap 19.3.1 (Basisregels voor machten)**.**

De afgeleiden van de constante functie $x \mapsto c$ en de machtsfunctie $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn

$$(x^r)' = rx^{r-1} \qquad (c)' = 0$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$

Merk op dat de machtregel voor *alle* reële exponenten geldt, en niet alleen voor natuurlijke getallen.

Voorbeeld 19.3.1.

1. $(1)' = 0$
2. $(\pi^2)' = 0$
3. $(x)' = 1$
4. $(x^2)' = 2x$
5. $(x^3)' = 3x^2$
6. $(x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
7. $(x^{-1/2})' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$
8. $(x^{n+42})' = (n+42)x^{n+41}$
9. $(x^{\pi})' = \pi x^{\pi-1}$

Opmerking 19.3.1.

De afgeleide van een **constante functie** $x \mapsto c$ is de nulfunctie $x \mapsto 0$: $\left(\sqrt{2}\right)' = 0$

De afgeleide van de **identieke functie** $x \mapsto x$ is de constante functie $x \mapsto 1$: $x' = 1$.
Inderdaad, dit volgt uit de formule $(x^r)' = rx^{r-1}$ voor $r = 1$: $x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$.

De afgeleide van een macht brengt een **kopie van de exponent naar voor** en **vermindert de exponent met** 1: $(x^5)' = 5x^4$ en $(x^{-2})' = -2x^{-3}$.

Oefening 19.3.1. Bereken volgende afgeleiden:

1. $(x^{3/2})' = \ldots\ldots$
2. $(x^{2/3})' = \ldots\ldots$
3. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \ldots\ldots$

Er zijn ook eenvoudige regels voor de som en scalaire veelvouden:

Eigenschap 19.3.2 (Basisregels voor som en scalair veelvoud)**.**

De afgeleiden van som $f + g$ en scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g en $c \in \mathbb{R}$ zijn

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$

CC BY-NC-SA 4.0

19.3 Basisregels

Oefening 19.3.2.

1. $(7x)' = \ldots\ldots$
2. $(7x^2)' = \ldots\ldots$
3. $(7x+1)' = \ldots\ldots$
4. $(7x^2+7x)' = \ldots\ldots$
5. $(2(x+1))' = \ldots\ldots$
6. $(x(x+1))' = \ldots\ldots$

Opmerking 19.3.2.

De afgeleide van een scalair veelvoud is het scalair veelvoud van de afgeleide: $(5x)' = 5x' = 5$.
of ook: **bij afleiden mag je constanten buiten brengen**: $(cf)' = cf'$.

De afgeleide van een som is de som van de afgeleiden: $(7+5x)' = 7' + (5x)' = 0 + 5 = 5$.
of ook: **afgeleiden mag je term per term berekenen**: $(f+g)' = f' + g'$.

Deze twee regels zijn samen equivalent met volgende regel:

$$(af+bg)' = af' + bg' \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af+bg) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$$

of: **de afgeleide van een lineaire combinatie is de lineaire combinatie van de afgeleiden**.

Met deze beperkte set van regels kunnen de afgeleiden van *alle* veeltermen berekend worden.

Oefening 19.3.3. Bereken volgende afgeleiden van veeltermen:

1. $\left(1+x+x^2\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(1+x+x^2+x^3\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(x+2x^2+3x^3+4x^4\right)' = \ldots\ldots$
5. $\left(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)' = \ldots\ldots$
6. $\left(\sqrt{\pi}+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 19.3.4. Bereken volgende afgeleiden

1. $\left(4x^2+8x+9\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(4x^2+8x+3^2\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left((2x)^2+8x+3^2\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(4x(x+2)+3^2\right)' = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.4 Product- en quotiëntregel

Met volgende formules kan je de afgeleiden berekenen van *producten en quotiënten* van functies.

Eigenschap 19.4.1 (Productregel en quotiëntregel)**.**

De *afgeleide van het product* $f \cdot g$ en *het quotiënt* $\frac{f}{g}$ van afleidbare functies f en g is

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{(productregel)} \qquad \text{en} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \text{(quotiëntregel)}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2}$

Opmerking 19.4.1.

De productregel zegt dat de *afgeleide van een product* van functies $f \cdot g$ berekend wordt door

- de afgeleide van de eerste factor te vermenigvuldigen met de tweede factor,
- de afgeleide van de tweede factor te vermenigvuldigen met de eerste factor,
- en de *som* te maken van die resultaten: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Bij een product van *meerdere functies* pas je de productregel herhaaldelijk toe:

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h)' &= (f \cdot (g \cdot h))' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g \cdot h)' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g' \cdot h + g \cdot h') \\ &= f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'\end{aligned}$$

Dus: leid *elke* factor af, vermenigvuldig die afgeleide met de andere factoren en tel alle producten op.

Voorbeeld 19.4.1. Bereken de afgeleide van volgende functies.

1. $x \mapsto (x^3 + 7x - 1) \cdot (5x + 2)$

Uitwerking: Deze functie is het product van $x^3 + 7x - 1$ en $5x + 2$, en de productregel zegt dan dat

$$\begin{aligned}\big((x^3 + 7x - 1) \cdot (5x + 2)\big)' &= (x^3 + 7x - 1)' \cdot (5x + 2) + (x^3 + 7x - 1) \cdot (5x + 2)' \\ &= (3x^2 + 7) \cdot (5x + 2) + (x^3 + 7x - 1) \cdot (5) \\ &= 15x^3 + 6x^2 + 35x + 14 + 5x^3 + 35x - 5 = 20x^3 + 6x^2 + 70x + 9\end{aligned}$$

Je kan voor deze functie ook eerst de haakjes uitwerken en dan de regels van machten toepassen.

2. $x \mapsto \frac{x^2}{3x - 1}$

Uitwerking: Deze functie is het quotiënt van x^2 en $3x - 1$, en de quotiëntregel zegt dan dat

$$\left(\frac{x^2}{3x - 1}\right)' = \frac{(3x - 1)(2x) - (x^2)(3)}{(3x - 1)^2} = \frac{6x^2 - 2x - 3x^2}{(3x - 1)^2} = \frac{x(3x - 2)}{(3x - 1)^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

19.4 Product- en quotiëntregel

3. $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}\left(2x - x^2\right)$

Uitwerking: De wortel herschrijf je als een macht: $x^{\frac{2}{3}}(2x - x^2)$. De productregel zegt dan dat

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\left(2x - x^2\right)\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2x - x^2) + x^{\frac{2}{3}}(2 - 2x)$$

Oefening 19.4.1. Bereken de afgeleide van volgende functies.

1. $x \mapsto (x^3 + 27)(x^4 - 1)$

2. $x \mapsto \dfrac{2x + 3}{4x + 5}$

3. $x \mapsto \dfrac{x + 1}{x - 1}$

4. $x \mapsto (x^{42} + x^{13} + 1)(x^{2020} - 1)$

5. $x \mapsto x \cdot \sqrt{x} \cdot (x^3 + 1)$

Oefening 19.4.2. Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = x \cdot x^2$

CC BY-NC-SA 4.0

19.5 Kettingregel

De zogenaamde *kettingregel* laat toe om de afgeleide te berekenen van *samengestelde* functies.

Eigenschap 19.5.1. De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \textbf{(kettingregel)}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(g(x))\big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big(g(x)\big) \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)$

Extra: subtiliteiten bij de formulering met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Bij samengestelde functies is er een wat subtiel maar erg belangrijk onderscheid tussen

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(g(x))\big) = \frac{\mathrm{d}(f\circ g)}{\mathrm{d}x}(x)$, de afgeleide van de samengestelde functie $f\circ g$

en $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big(g(x)\big)$, de afgeleide van de functie f, geëvalueerd in $g(x)$.

De kettingregel zegt: de afgeleide $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(g(x))\big)$ is het *product* van $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big(g(x)\big)$ met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$.

Voor niet-samengestelde functies heeft de plaats van f en (x) typisch geen belang: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.
En ja, dat is verwarrend ...

Opmerking 19.5.1.

De afgeleide van een *samenstelling* van functies bereken je **van buiten naar binnen**:

- bereken de afgeleide van de *buitenste* functie en evalueer in de binnenste: $f'(g(x))$,
- bereken de afgeleide van de *binnenste* functie en evalueer in x: $g'(x)$,
- maak het *product* van die resultaten: $(f\circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Bij de kettingregel let je zowel op de plaats van de *afgeleiden*: $(f\circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
als op de plaats van de *functies*: $(f\circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Merk ook op dat ergens wel logisch is om f' in $g(x)$ te evalueren, en niet in x. Inderdaad, $f'(x)$ is mogelijk betekenisloos voor x in het domein van $f\circ g$: bij $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en $g : x \mapsto x^2 - 5$ is $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ niet gedefinieerd in $x = -3$, maar $f(g(-3)) = \sqrt{(-3)^2 - 5} = \sqrt{9-5} = 2$ wel, en $f'(g(-3)) = \frac{1}{2\sqrt{(-3)^2-1}} = \frac{1}{4}$ ook.

Anderzijds is het ook logisch dat de afgeleide $f(g(x))'$ niet gewoon $f'(g(x))$ kan zijn: de functie $g : x \mapsto 100x$ drukt de grafiek van f erg samen in de x-richting, en dus worden de raaklijnen veel steiler. Hier is $g'(x) = 100$, en dus $(f(100x))' = 100f'(100x)$, en zijn de rico's bij $f(100x)$ precies 100 keer groter dan die bij $f(x)$.

Bij een samenstelling van *meerdere functies* pas je de kettingregel herhaaldelijk toe:

$$\begin{aligned}\big(f(g(h(x)))\big)' &= f'(g(h(x))) \cdot \big(g(h(x))\big)' \\ &= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)\end{aligned}$$

en dus $\big(e^{\sin 5x}\big)' \underset{e^{g(h(x))}}{=} \big(e^{\sin 5x}\big) \cdot (\sin 5x)' \underset{\sin(h(x))}{=} \big(e^{\sin 5x}\big) \cdot (\cos 5x) \cdot (5x)' = 5 \cdot \big(e^{\sin 5x}\big) \cdot (\cos 5x)$

CC BY-NC-SA 4.0

19.5 Kettingregel

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 19.5.1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (5x+2)^3$

Uitwerking: De functie $x \mapsto (5x+2)^3$ is de samenstelling van $f : x \mapsto x^3$ en $g : x \mapsto 5x+2$ want $f(g(x)) = f(5x+2) = (5x+2)^3$.
Omdat $f' : x \mapsto 3x^2$ en $g' : x \mapsto 5$ zegt de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ dat

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f(g(x))} \Big)' = \underbrace{3(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{5}_{g'(x)} = 15(5x+2)^2 = 15(25x^2+20x+4)$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(5x+2) = 3(5x+2)^2 = 3(25x^2+20x+4)$.

Zodra je voldoende vertrouwd bent met de kettingregel kan je zonder f en g direct schrijven

$$\big((5x+2)^3\big)' = 3(5x+2)^2 \cdot (5x+2)' = (125x^2+30x+12) \cdot 5 = 375x^2+300x+60.$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie wordt dit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^3 = 3(5x+2)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2) = (125x^2+30x+12) \cdot 5 = 375x^2+300x+60.$$

Merk op dat je in dit voorbeeld de kettingregel niet *moet* gebruiken:

$$\big((5x+2)^3\big)' = \big(125x^3+300x^2+60x+8\big)' = 375x^2+300x+60.$$

Voorbeeld 19.5.2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sqrt{x^3-7}$

Uitwerking: De functie $x \mapsto \sqrt{x^3-7}$ is de samengestelling van $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en $g : x \mapsto x^3-7$ want $f(g(x)) = f(x^3-7) = (x^3-7)^{1/2}$.
Omdat $f' : x \mapsto \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $g' : x \mapsto 3x^2$ zegt de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ dat

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{x^3-7}^{g(x)})^{1/2}}_{f(g(x))} \Big)' = \underbrace{\frac{1}{2}(\overbrace{x^3-7}^{g(x)})^{-1/2}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{(3x^2)}_{g'(x)} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-7}}$$

Voorbeeld 19.5.3. Berekenen de afgeleide van de functie $f : [-2,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sqrt{3x+6}$.

Uitwerking: Hiervoor gebruik je zowel de *productregel* als de *kettingregel*. De productregel levert

$$f'(x) = \Big(x \cdot \sqrt{3x+6}\Big)' = (x)' \cdot \sqrt{3x+6} + x \cdot \Big(\sqrt{3x+6}\Big)'$$

en met de kettingregel vind je $\Big(\sqrt{3x+6}\Big)' = \frac{1}{2\sqrt{3x+6}} \cdot (3x+6)' = \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$,

zodat $\Big(x \cdot \sqrt{3x+6}\Big)' = 1 \cdot \sqrt{3x+6} + x \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x+6}} = \frac{2(3x+6)}{2\sqrt{3x+6}} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+6}} = \frac{9x+12}{2\sqrt{3x+6}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

19.5 Kettingregel

Oefening 19.5.1. Bereken de afgeleide van volgende functies.

1. $x \mapsto (x^3 + 27)^{15}$

2. $x \mapsto (27x^3 + 5)^{15}$

CC BY-NC-SA 4.0

19.5.A Basisoefeningen afgeleiden

Oefening 19.5.2. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\left(x^{1/3}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(x^{-1/3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(9x^9\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(x^4 - 4x\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 19.5.3. Bereken de afgeleide van volgende functies op twee manieren:

1. $(x^2 \cdot x^2)' = \ldots\ldots$
2. $\left((3x+5)^2\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 19.5.4. Bereken de afgeleide van volgende rationale functies.

1. $\left(\frac{x-4}{x}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(\frac{x}{x+3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(\frac{1}{x+5}\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(\frac{4-x}{3-x}\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 19.5.5. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t^{-2} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 - 2\sqrt{x} + 5x - 2) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5 - x^4) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2x^{-n} = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1+x)(x+2)\big) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^{-3}(t+5)^7\right) = \ldots\ldots$
7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sqrt{1-2\theta} = \ldots\ldots$
8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2 - 7x + 8} = \ldots\ldots$
9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2+3)^4} = \ldots\ldots$

Oefening 19.5.6. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het gegeven punt.

1. $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1. $\ldots\ldots$
2. $f(x) = 1 - x^2$ in het punt met als x-coördinaat 2. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.6 Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide kan men aantonen dat:

Eigenschap 19.6.1. De afgeleide van de exponentiële en logaritmische functie zijn

$$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1}$

De kettingregel en het feit dat $a = e^{\ln a}$ en $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ geeft dan

Gevolg 19.6.7. Omdat $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ en $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x$ (met $a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$) geldt dat

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \ln a$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

Opmerking 19.6.1.

- De afgeleide van e^x is terug e^x. Dit is een erg handige en belangrijke eigenschap van de functie e^x en ze kan beschouwd worden als de *definitie* van het getal e: het getal e is het unieke getal $a \in \mathbb{R}$ waarvoor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x \stackrel{?}{=} a^x$.
- De afgeleide van $\ln x$ is $1/x$. Het lijkt wat merkwaardig dat in de mooie reeks van afgeleiden-van-een-macht-is-terug-een-macht (namelijk $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^r = r x^{r-1}$) ineens een vreemde eend opduikt: ook de afgeleide van $\ln x$ blijkt een macht te zijn (namelijk x^{-1}).
- De functie $x \mapsto e^x$ is essentieel de enige functie die gelijk is aan haar afgeleide. Inderdaad, stel dat voor een functie f geldt dat $f = f'$. De quotiëntregel toegepast op $f(x)/e^x$ geeft dan:

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{e^x f'(x) - f(x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x(f'(x) - f(x))}{(e^x)^2} \stackrel{f'(x)=f(x)}{=} 0$$

  Omdat de afgeleide nul is, is $f(x)/e^x = c$ voor een constante $c \in \mathbb{R}$, en dus is $f(x) = ce^x$.

Voorbeeld 19.6.1.

1. De afgeleide van $f : x \mapsto \ln(x^{100})$ is $f' : x \mapsto \frac{100}{x}$

Uitwerking: Beschouw f als samenstelling van $g(x) = \ln(x)$ en $h(x) = x^{100}$ en pas de kettingregel toe:

$$f'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{x^{100}} \cdot 100x^{99} = 100 \cdot \frac{1}{x} = \frac{100}{x}$$

Uit de rekenregels van logaritmen volgt echter gemakkelijker dat $\ln(x^{100}) = 100 \cdot \ln(x)$ en $(100 \cdot \ln x)' = \frac{100}{x}$.

2. De afgeleide van $f : x \mapsto x^4 - 4^x$ is $f' : x \mapsto 4x^3 - ln4 \cdot 4^x$

3. De afgeleide van $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$ is $f' : x \mapsto \frac{1-x}{e^x}$

CC BY-NC-SA 4.0

19.6 Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

Uitwerking: $\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{1e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{(1-x)}{e^x}$

4. De afgeleide van $f : x \mapsto e^{x^2}$ is $f' : x \mapsto 2x \cdot e^{x^2}$

Uitwerking: $(e^{x^2})' \overset{\text{kettingregel}}{=} e^{x^2} \cdot 2x$

Oefening 19.6.1.

1. De afgeleide van $f : x \mapsto x^4 \ln x$ is $f' : x \mapsto \ldots\ldots$

2. De afgeleide van $f : x \mapsto xe^{2x}$ is $f' : x \mapsto \ldots\ldots$

3. De afgeleide van $f : x \mapsto \frac{\ln x}{2^x}$ is $f' : x \mapsto \ldots\ldots$

Oefening 19.6.2. Bereken volgende afgeleiden.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2 - x^2 + 3e^{-x}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x + 3^x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4^{2x}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

4. $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x \ln x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

5. $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3^{x^2}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 19.6.3. Bereken volgende afgeleiden.

1. $(\pi^x)' = \ldots\ldots$

2. $(x^\pi)' = \ldots\ldots$

3. $(25 \cdot 7^x)' = \ldots\ldots$

4. $((a+7)^x)' = \ldots\ldots$

5. $(\ln x^2)' = \ldots\ldots$

6. $(\ln x^r)' = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.7 Afgeleiden van goniometrische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide kan men aantonen dat:

Eigenschap 19.7.1 (Afgeleiden goniometrische functies)**.**

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Opmerking 19.7.1.

- De afgeleide van de sinus is de cosinus en de afgeleide van de cosinus is *min* de sinus. Vind uzelf een ezelsbruggetje om die regel te onthouden. Sommigen onthouden SICO, voor (afgeleide van) SInus is COsinus, maar dat kan ongetwijfeld beter.
- De afgeleide van de sinus is niet zo eenvoudig te berekenen met de definitie, en we leggen hier niet uit *waarom* de afgeleide van de sinus gelijk is aan de cosinus.
- Zodra je weet dat $(\sin x)' = \cos x$ volgt met de kettingregel wel direct de formule voor $(\cos x)'$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \overset{\text{beide leden afleiden}}{\Longrightarrow} 2\cos x(\cos x)' + 2\sin x\cos x = 0 \implies (\cos x)' = -\sin x$$

- En de formule voor $(\tan x)'$ volgt dan eenvoudig uit de quotiëntregel:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot (\sin x)' - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- Omdat $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ kan je ook schrijven

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

wat soms handig is omdat het de afgeleide van de tangens schrijft in functie van een tangens.

Voorbeeld 19.7.1. Bereken de afgeleiden van de functies $x \mapsto \sin x^2$ en $x \mapsto \sin^2 x$.

1. De afgeleide van $x \mapsto \sin x^2$ is de functie $x \mapsto 2x\cos x^2$.

Uitwerking: De functie $h : x \mapsto \sin(x^2)$ is de samenstelling van $f : x \mapsto \sin x$ en $g : x \mapsto x^2$ want $h(x) = \sin(x^2) = f(g(x))$. Omdat $f'(x) = \cos x$ en $g'(x) = 2x$ zegt de kettingregel $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ dat

$$\Big(\underbrace{\sin(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{\cos(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{2x}^{g'(x)} = 2x\cos x^2$$

Indien je voldoende vertrouwd bent met de kettingregel kan je zonder f en g direct schrijven

$$\big(\sin x^2\big)' = \cos x^2 \cdot \big(x^2\big)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$$

CC BY-NC-SA 4.0

19.7 Afgeleiden van goniometrische functies

en met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ wordt dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$$

2. De afgeleide van $x \mapsto \sin^2 x$ is de functie $x \mapsto 2\sin x\cos x$.

Uitwerking: De functie $x \mapsto \sin^2 x = (\sin x)^2$ is de samenstelling van $g : x \mapsto x^2$ en $f : x \mapsto \sin x$ want $(\sin x)^2 = g(f(x))$. Omdat $g' : x \mapsto 2x$ en $f' : x \mapsto \cos x$ zegt de kettingregel $\big(g(f(x))\big)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ dat

$$\big(\underbrace{(\overbrace{\sin x}^{f(x)})^2}_{g(f(x))}\big)' = \underbrace{(2\overbrace{\sin x}^{f(x)})}_{g'(f(x))} \cdot \overbrace{\cos x}^{f'(x)} = 2\sin x\cos x$$

Indien je voldoende vertrouwd bent met de kettingregel kan je zonder f en g direct schrijven

$$\big(\sin^2 x\big)' = \big((\sin x)^2\big)' = (2\sin x)\cdot(\sin x)' = 2\sin x\cdot\cos x$$

en met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ wordt dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^2 = 2(\sin x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

Merk op dat je het antwoord nog kan herschrijven als $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

Oefening 19.7.1. Bereken volgende afgeleiden.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin 42x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x^{42}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin^{42} x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos^{42} x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 19.7.2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{\ln x}{\sin x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

19.7.A Oefeningen afgeleiden speciale functies

Oefening 19.7.3. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $(x + \sin x)' = \ldots\ldots$
2. $(x - \cos x)' = \ldots\ldots$
3. $(7e^x)' = \ldots\ldots$
4. $(e^{7x})' = \ldots\ldots$
5. $(\sin x + e^x)' = \ldots\ldots$

Oefening 19.7.4. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2\cos t) = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(4x+5) = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \ldots\ldots$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(-8x^2-1) = \ldots\ldots$
7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3 3x = \ldots\ldots$
8. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t\ \sin(t^2)) = \ldots\ldots$
9. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t^2) = \ldots\ldots$

Oefening 19.7.5. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $(2e^{-x})' = \ldots\ldots$
2. $(e^{2x})' = \ldots\ldots$
3. $(e^{x+2})' = \ldots\ldots$
4. $(e^{2x+2})' = \ldots\ldots$
5. $(e^{x^2})' = \ldots\ldots$
6. $(e^{2x^2+3})' = \ldots\ldots$
7. $(e^{x^2+2x+3})' = \ldots\ldots e^{x^2+2x+3}$
8. $(e^{1-x^2})' = \ldots\ldots$
9. $(2e^{\sqrt{x}})' = \ldots\ldots$

Oefening 19.7.6. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sin t^2} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^{\sin x+2x} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{1+\tan x} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.7.A Oefeningen afgeleiden speciale functies

4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \ldots\ldots$

5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin(3x)\cdot\cos(2x)\big) = \ldots\ldots$

6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{2x-1} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 20
Afgeleiden

(Versie 2026/08/25H.51)

20.1 Intro afgeleiden

Het begrip *afgeleide* komt frequent voor in allerlei wetenschappelijke en andere contexten. De techniek van afgeleiden laat toe om erg precies, erg efficiënt en in erg uiteenlopende situaties *veranderingen* te bestuderen.

Vele fenomenen zoals bewegingen, temperatuursverlopen, productievolumes, epidemies en hoogteprofielen van wielerwedstrijden kunnen beschreven worden als functies. *Afgeleiden* zeggen dan iets over de *veranderingen van de functiewaarden*. Hoe *verandert* de temperatuur, het geproduceerde volume, het aantal besmette personen als de tijd, de prijs of de sociale contacten veranderen? In vele contexten is de *waarde* van de functie zelfs minder belangrijk dan de *verandering van de waarde*. Een renner die een berg oprijdt, hecht op cruciale momenten in de wedstrijd meer belang aan de *verandering van de hoogte*, dat is de steilheid van de berg, dan aan de *absolute hoogte* op dat punt. De winst die iemand behaalt bij een belegging in aandelen hangt niet zozeer af van de *waarde* van de aandelen op een bepaald ogenblik, maar van de *verandering van die waarde* tussen de aankoop en de verkoop.

In deze context begrijpen we functies dikwijls als een verband tussen een 'onafhankelijke' variabele (de tijd, de prijs, de lockdown maatregelen) en de 'afhankelijke' variabele (de temperatuur, de hoeveelheid geproduceerde producten of het aantal besmette personen). In wiskundige taal noemen we de onafhankelijke variabele typisch x (maar soms ook t als het over tijd gaat, of s, of andere letters) en de afhankelijke grootheid is dan een functie die we typisch f noemen (maar soms ook T als het over temperatuur gaat, of v en a als het snelheden en versnellingen zijn). Als we de afhankelijke grootheid ook als 'variabele' willen weergeven, gebruiken we dikwijls de letter y en schrijven we $y = f(x)$, of soms ook $y(x)$, om aan te duiden dat de grootheid y afhangt van x.

Afgeleiden geven informatie over de *verhouding* tussen *de verandering van de afhankelijke variabele* ten opzichte van *de verandering van de onafhankelijke variabele*. Als je de onafhankelijke variabele varieert, wat gebeurt er dan met de afhankelijke variabele? Stijgt die, of daalt die, en hoe snel of hoe traag gebeurt dat? Je kan hetzelfde ook begrijpen in termen van *gevoeligheid*: hoe gevoelig is de afhankelijke variabele aan een wijziging in de onafhankelijke variabele?

Een aangename manier om vertrouwd te raken met de betekenis van afgeleiden (en integralen), is het met aandacht bekijken van de geniale videos van 3Blue1Brown:

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/WUvTyaaNkzM

In wat volgt hebben we de leerstof over afgeleiden als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Enkele voorbeelden en een wiskundige definitie

(3) Een kleine uitweiding over het begrip differentiaal

(4) Enkele basisregels over het berekenen van afgeleiden

(5) De afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

(6) De afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

(7) Regels voor producten en quotiënten van functies

(8) Regels voor samenstellingen van functies

(9) Hogere orde afgeleiden

(10) Afgeleide van inverse van een functie

(11) De regel van l' Hôpital om limieten te berekenen

(12) Als toepassing het oplossen van minimum-maximum problemen

CC BY-NC-SA 4.0

20.2 Definitie van afgeleide

De *afgeleide* van een functie f in een punt a geeft de *gevoeligheid* weer van de functiewaarde $f(x)$ voor kleine veranderingen van x in de buurt van a. Als de afgeleide gelijk is aan 1 verandert $f(x)$ ongeveer even snel als x, als de afgeleide 2 is dubbel zo snel, en als de afgeleide $1/2$ is half zo snel. De afgeleide is dus de *verhouding* tussen de verandering van $f(x)$ en die van x. Er is jammer genoeg een technische complicatie: die verhouding hangt in het algemeen af van de *grootte* van de verandering van x. En als de verandering in x nul is, dan verandert $f(x)$ natuurlijk ook niet, en is er geen verhouding te bepalen. De oplossing ligt in het begrip limiet en lijkt bij een eerste kennismaking misschien wat duister en zelfs afschrikwekkend. Gelukkig is het algemeen idee wel relatief eenvoudig, en in de praktijk wordt de definitie altijd vervangen door handige rekenregels.

Voorbeeld 20.2.1 (Gevoeligheid voor verandering bij rechten)**.**

De 'gevoeligheid voor verandering' is het duidelijkst zichtbaar bij rechten, dus bij *eerstegraadsfuncties*. De theorie van afgeleiden breidt dit uit tot veel algemenere functies.

Als x een klein beetje verandert bij een erg steile rechte, bijvoorbeeld $y = 100x + 42$, dan is de verandering in y veel groter dan die van x:

Als $y = 100x + 42$ en $x \rightsquigarrow x + 1$
dan $y \rightsquigarrow y + 100$ want $100(x+1) + 42 = \underbrace{100x + 42}_{y} + 100 = y + 100$

Voor de erg vlakke rechte $y = \frac{1}{100}x + 42$ is de verandering in y dan weer veel kleiner dan die in x:

Als $y = \frac{1}{100}x + 42$ en $x \rightsquigarrow x + 100$
dan $y \rightsquigarrow y + 1$ want $\frac{1}{100}(x+100) + 42 = \underbrace{\frac{1}{100}x + 42}_{y} + 1 = y + 1$

Conclusie: de richtingscoëfficiënt is een maat voor de gevoeligheid van y voor veranderingen in x. Het extreme geval is richtingscoëfficiënt gelijk aan nul: dan verandert y helemaal niet als x verandert.

Om later deze eenvoudige situatie voor rechten beter te kunnen vergelijken met het meer algemene geval, beschrijven we ze ook in detail in de taal van functies.

De functiewaarde van $f : x \mapsto f(x) = 2x - 1$ verandert in elk getal a dubbel zo snel als a zelf: als bij a één bijkomt dan komt er bij $f(a)$ twee bij, want

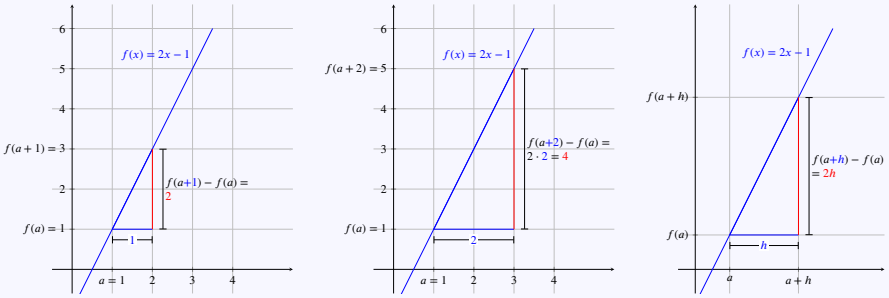
$$f(a{+}1) = 2(a{+}1) - 1 = 2a + 1 = (2a - 1) + 2 = f(a){+}2$$

Als bij a twee bijkomt, stijgt $f(a)$ met $2 \cdot 2 = 4$:

$$f(a{+}2) = 2(a{+}2) - 1 = 2a + 3 = (2a - 1) + 4 = f(a){+}4$$

en als bij a drie bijkomt, stijgt $f(a)$ met $2 \cdot 3 = 6$:

$$f(a{+}3) = 2(a{+}3) - 1 = 2a + 5 = (2a - 1) + 6 = f(a){+}6$$



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

20.2 Definitie van afgeleide

Als h de verandering is rond a, dan is de *verandering* van $f(a)$ naar $f(a+h)$ wiskundig het *verschil* tussen $f(a+h)$ en $f(a)$, dus $f(a+h)-f(a)$.

We stellen vast dat voor deze functie $f : x \mapsto 2x-1$ de verandering van de functiewaarden afhangt van de verandering h van x maar dat de *verhouding* tussen beide veranderingen constant is:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2(a+h)-1-(2a-1)}{h} = \frac{2a+2h-1-2a+1}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

Uit dezelfde berekening volgt dat dit voor elke functie $f : x \mapsto mx+q$ met $m, q \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{m(a+h)+q-(ma+q)}{h} = \frac{ma+mh+q-ma-q}{h} = \frac{mh}{h} = m.$$

We vinden dus het weinig verwonderlijke feit dat de richtingscoëfficiënt m van de rechte met vergelijking $y = mx+q$ aangeeft hoe snel y verandert als x verandert. Het is ook duidelijk dat deze verhouding niet afhangt van a: een rechte stijgt in elk punt even snel.

De hele theorie van afgeleiden is een succesvolle poging om deze eenvoudige inzichten over de richtingscoëfficiënt om het stijgen of dalen van rechten weer te geven te veralgemenen naar meer algemene functies (of krommen).
Er duiken daarbij twee enigszins vervelende aspecten op: enerzijds hangt de verhouding nu af van h, en anderzijds hangt de verhouding ook af van a. De afhankelijkheid van h wordt opgelost door de *limiet* te nemen voor $h \to 0$, en de afhankelijkheid van a door van de afgeleide een *functie van a* te maken.

Oefening 20.2.1. Onderzoek voor de functie $g : x \mapsto g(x) = \frac{x}{2} - 1$ de verhouding van de veranderingen van $g(a)$ en a, zoals in het vorige voorbeeld.

Voorbeeld 20.2.2 (Gevoeligheid voor verandering bij kwadratische functies)**.**

Veeltermfuncties van de tweede graad, dus parabolen, zijn subtieler dan eerstegraadsveeltermen.
We onderzoeken de veranderingen van de functiewaarden van de functie $f : x \mapsto f(x) = x^2+1$ in de buurt van het punt $a = 1$, en zijn dus geïnteresseerd in het verschil $f(a+h)-f(a)$.

Als bij a één bijkomt, veranderen de functiewaarden als

$$f(a+1)-f(a) = (a+1)^2+1-(a^2+1) = a^2+2a+1+1-a^2-1 = 2a+1$$

en als bij a twee bijkomt

$$f(a+2)-f(a) = (a+2)^2+1-(a^2+1) = a^2+4a+4+1-a^2-1 = 4a+4$$

en als bij a drie bijkomt

$$f(a+3)-f(a) = (a+3)^2+1-(a^2+1) = a^2+6a+9+1-a^2-1 = 6a+9$$

Voor algemene h geldt

$$f(a+h)-f(a) = (a+h)^2+1-(a^2+1) = a^2+2ha+h^2+1-a^2-1 = 2ah+h^2$$

en verschil $f(a+h)-f(a)$ hangt dus zowel af van a als van h, en nog wel op een wat moeilijke manier, namelijk met een kwadraat van h.

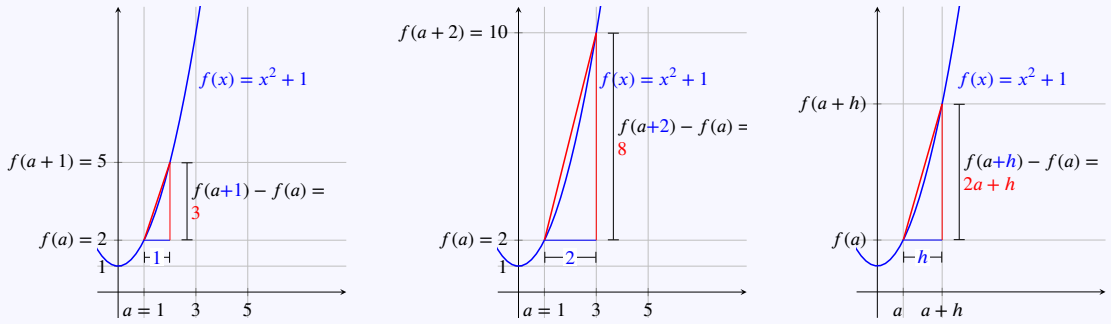
De *verhouding* van $f(a+h)-f(a)$ ten opzichte van h wordt

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$$

en ook die verhouding hangt af van zowel a als h.

CC BY-NC-SA 4.0

20.2 Definitie van afgeleide



Als we de verhouding echter berekenen voor $a = 1$ en steeds kleinere waarden van h, dus steeds dichter in de buurt van $a = 1$, geeft dat

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
1	1	2	2	5	3	3
1	0.5	1.5	2	3.25	1.25	2.5
1	0.1	1.1	2	2.21	0.21	2.1
1	0.01	1.01	2	2.0201	0.00201	2.01
1	0.001	1.001	2	2.0020	0.00020	2.001

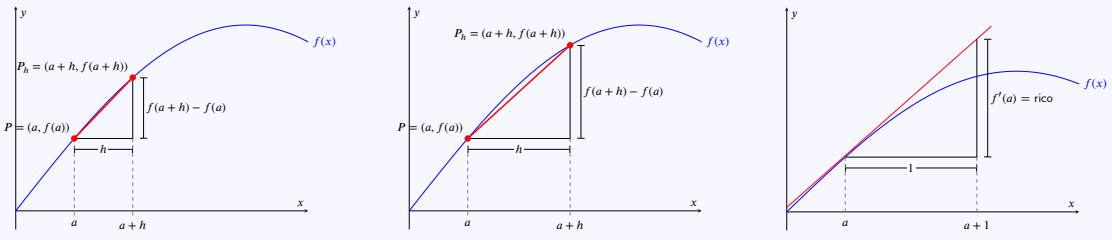
en we stellen vast dat die verhouding steeds dichter in de buurt van 2 ligt.

Een gelijkaardig onderzoek in de buurt van $a = 3$ levert een verhouding 6 op:

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3	1	4	10	17	7	7
3	0.5	3.5	10	13.25	3.25	6.5
3	0.1	3.1	10	10.61	0.61	6.1
3	0.01	3.01	10	10.0601	0.0601	6.01
3	0.001	3.001	10	10.006	0.006001	6.001

Voorbeeld 20.2.3.

De raaklijn aan de grafiek van een functie f in een punt $(a, f(a))$ kan je bekomen vanaf de rechte door $(a, f(a))$ en een naburig punt $(a+h, f(a+h))$, en dan h steeds kleiner te maken:



Opfrissing: formules voor rechten in het vlak.

Herinner u de vergelijking van de rechte L door twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) (met $x_1 \neq x_2$):

$$L \leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.2 Definitie van afgeleide

De vergelijking van de rechte door de twee punten $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ is

$$y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}(x - a)$$

Door de term $f(a)$ naar het rechterlid te brengen krijgt de vergelijking de vorm $y = mx + q$ met rico $m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Die rico hangt af van h (en van a, maar a is vast gekozen). Als h kleiner wordt, dan beweegt het punt $(a+h, f(a+h))$ op de grafiek van f naar het punt $(a, f(a))$. De rechte door $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ draait en heeft als limietstand de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$.
De rico van die raaklijn is dus gelijk aan

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en deze limietwaarde noemen we *de afgeleide van f in a*.
In het algemeen is die limiet niet eenvoudig berekenbaar, want hij leidt tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$. Maar verder zal blijken dat er gelukkig relatief eenvoudige technieken zijn om afgeleiden toch te berekenen.

Definitie 20.2.1 (Afgeleide in een punt)**.**

Een reële functie f is **afleidbaar** of **differentieerbaar** in een punt a van haar domein als de limiet $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *bestaat* en *eindig* is.
In dat geval noemen we die limiet **de afgeleide van f in a** en we noteren

$$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Uit voorbeeld 20.2.3 blijkt dat er een verband is tussen deze limiet en de raaklijn aan de grafiek:

Eigenschap 20.2.1 (Vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f)**.**

De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ is

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

en de *afgeleide in een punt* is dus de *richtingscoëfficiënt* van de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

Door de afgeleide van f in *elk punt* a te berekenen verkrijgen we een nieuwe *functie*:

Definitie 20.2.2 (Afgeleide functie)**.**

De **afgeleide functie** van een reële functie f, genoteerd f', is de functie

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

die enkel gedefinieerd is in de punten waar de afgeleide van f bestaat.

Het domein van de afgeleide functie kan strikt *kleiner* zijn dan het domein van de functie zelf als in een aantal punten de afgeleide niet bestaat.

CC BY-NC-SA 4.0

20.2 Definitie van afgeleide

Voorbeeld 20.2.4.

1. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto 2x + 1$ is de functie $f' : x \mapsto 2$.

Uitwerking: Voor willekeurige a is de afgeleide gelijk aan 2, de afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2$.

2. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto x^2 + 1$ is de functie $f' : x \mapsto 2x$.

Uitwerking: Voor willekeurige a is de afgeleide gelijk aan $2a$, de afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2x$.

3. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto |x|$ is de functie $f' : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$

Uitwerking: In het punt $x = 0$ bestaat de afgeleide niet, en f' is dus niet gedefinieerd in $x = 0$:

$$f' : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Opmerking 20.2.1.

(a) Door $a + h = b$ te stellen, en dus $h = b - a$, kan je de limiet van de afgeleide ook schrijven als

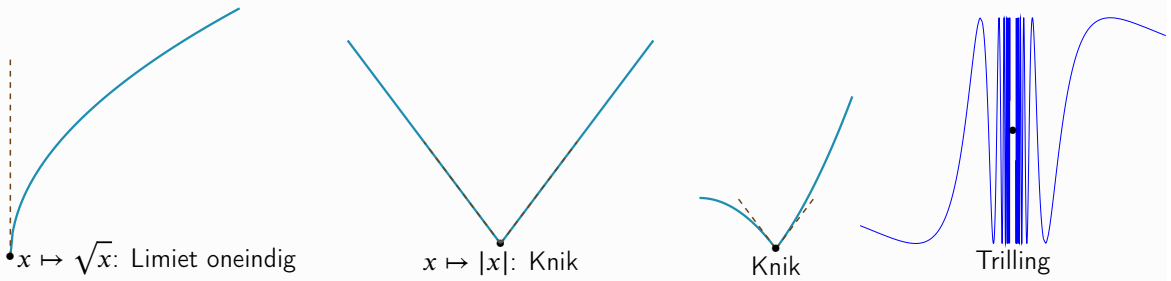
$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sommige handboeken gebruiken deze equivalente formulering.

(b) De breuk $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ beschouw je best niet als een *quotiënt* (dus het resultaat van een deling), maar eerder als een *verhouding*: de breuk meet hoe de verandering van y-waarden, dus $f(a+h) - f(a)$ zich verhoudt tot de verandering in x-waarden, dus $(a+h) - a = h$.
De afgeleide is *de limiet van die verhouding* voor steeds kleinere h, en meet dus hoeveel de y-waarden sneller of trager veranderen dan de x-waarden. Dat is op elke plaats anders, dus we hebben een functie nodig om al die verhoudingen netjes bij te houden.

Extra: voorbeelden van niet-afleidbare functies.

Niet alle functies zijn overal afleidbaar:



(a) Het is mogelijk dat de limiet $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *oneindig* wordt. In dat geval noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. We hebben dan een verticale raaklijn aan de grafiek van f in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de functie $x \mapsto \sqrt{x}$ in het punt $a = 0$. (figuur linksboven)

(b) De limiet bestaat in sommige gevallen niet omdat de linkerlimiet verschilt van de rechterlimiet in

CC BY-NC-SA 4.0

20.2 Definitie van afgeleide

een punt a. Er bestaat dan geen raaklijn aan de grafiek van f in a omdat de grafiek een knik maakt in a. Ook dan noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de absolute waarde $x \mapsto |x|$ in het punt $a = 0$. (figuur midden boven) Hier is

$$\lim_{\substack{h\to 0\\<}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\<}} \frac{-h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\<}} (-1) = -1 \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\>}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\>}} \frac{h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\>}} 1 = 1.$$

(c) In andere gevallen bestaat de limiet mogelijk niet omdat de functie f te erg trilt in de buurt van a. Er bestaan zelfs functies die *nergens* afleidbaar zijn. Hier gaan we niet verder op in.

Om historische en praktische redenen zijn in sommige contexten andere notaties gebruikelijk.

Definitie 20.2.3 (Notaties afgeleide)**.**

De afgeleide van een functie f wordt ook genoteerd als $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \overset{\text{def}}{=} f'$ (Leibniz notatie)

of ook als $Df \overset{\text{def}}{=} f'$ (Euler notatie)

De afgeleide van f in een punt a wordt dan $f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = Df(a)$.

De schrijfwijzen f', $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ en $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ worden in de praktijk door elkaar gebruikt.

Voorbeeld 20.2.5. We kunnen dus afgeleiden van functies op meerdere manieren schrijven:

$$(\sin x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin}{\mathrm{d}x}(x) \quad \text{en} \quad (5x^4+1)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^4+1) = \frac{\mathrm{d}(5x^4+1)}{\mathrm{d}x}$$

Extra: over notaties voor afgeleiden.

Geen echte leerstof, maar voor sommigen misschien toch verhelderend:

- Hoewel wiskundige begrippen bijna altijd erg nauwkeurig worden gedefinieerd, hangt er toch een mysterieuze *flou artistique* rond de precieze betekenis van het symbool x: soms is dat een onbekende, soms een willekeurig getal, soms een variabele, soms gewoon een letter en soms de naam van één of ander ding. In het bijzonder bij het afleiden van functies is het echter erg belangrijk x te beschouwen als een variabele, en zeker niet als een willekeurig getal. Inderdaad, als x een willekeurig getal zou zijn, zeg bijvoorbeeld 42, dan zou $x' = 42' = 0$ als afgeleide van een constante.

  Mede daarom gebruiken we in deze cursus liefst de notatie $f : x \mapsto f(x)$ of $f : t \mapsto f(t)$ om zo duidelijk mogelijk aan te geven dat x dan wel t de variabele is in een functiedefinitie. De identieke functie $x \mapsto x$ krijgt jammer genoeg meestal geen vaste naam, soms gebruikt men $\mathrm{Id} : x \mapsto \mathrm{Id}(x) = x$ of $\mathbb{1} : x \mapsto \mathbb{1}(x) = x$. De meest voor de hand liggende naam echter is – enigszins verrassend misschien – gewoon x, dus $x : x \mapsto x(x) = x$. En het is van die identieke functie x dat de afgeleide 1 is: $x' = 1$. En met x als naam voor de functie geldt zelfs de gelijkheid van functies $f(x) = f \circ x = f \ldots$

- Hoewel wiskundige notatie bijna altijd erg nauwkeurig wordt gedefinieerd, is de notatie voor afgeleiden een warboel. We definieerden de afgeleide van de functie f in a als $f'(a)$, en dus niet als $f(a)'$. En de afgeleide functie noteerden we $f' : x \mapsto f'(x)$, en ook hier komt dus $f(x)'$ niet voor. En dat is zeer terecht, want technisch staat in $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ het symbool $f(x)$ voor de functiewaarde van f in x, en dus $f(x) \in \mathbb{R}$. En als $f(x) \in \mathbb{R}$, dan is $f(x)' = 0$ als afgeleide van een constante.

  Dus, men zou willen afspreken dat je steeds $f'(x)$ moet gebruiken, en nooit $f(x)'$. Maar, dat werkt erg slecht voor concrete functies: hoe moet je de afgeleide noteren van $x \mapsto x^2$? Zeer zeker is x'^2

CC BY-NC-SA 4.0

20.2 Definitie van afgeleide

of $(x')^2$ onzin, en dus gebruikt men $(x^2)'$ of soms zonder haakjes $x^{2\prime}$. Eigenlijk feitelijk is dat fout ... Toch wordt het algemeen gebruikt, ook in deze cursus.

- Hoewel wiskundige notatie bijna altijd correct en consistent is opgebouwd, lijkt de notatie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ voor afgeleiden verdacht veel op een breuk, maar is het toch geen breuk, want het is volgens de definitie een *limiet* van een breuk. Toch zet men bij integralen het symbool dx ook in de teller, en men geeft betekenis aan de uitdrukking
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) \iff df = f'(x)dx$$
De symbolen df en dx zijn dan differentialen, maar die behandelen we hier niet.

- De notatie met f' is handig als de variabele waarnaar wordt afgeleid duidelijk is uit de context. In de wiskunde is die variabele dikwijls x, maar letters als t, u of y komen ook erg dikwijls voor. Als verwarring mogelijk is, zoals bij $2x^2t + 5u$, dan gebruik je beter de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$).

- Als een functie geschreven wordt als $y = f(x)$, en men dus eigenlijk via $f : x \mapsto y = f(x)$ in plaats van $f : x \mapsto f(x)$ een generieke naam y geeft aan het beeld, dan wordt ook y' gebruikt voor de afgeleide. Dat is bijvoorbeeld bij differentiaalvergelijkingen erg gebruikelijk.

  En zoals hierboven x gebruikt werd als naam voor de identieke functie $x : x \mapsto x(x) = x$, kan je dan eigenlijk beter ook de letter y gebruiken in plaats van f voor de naam van de functie:
$$y : x \mapsto y = y(x) \text{ en } \frac{dy}{dx} = y' = y'(x)$$
  Jammer genoeg gebruiken verschillende handboeken en cursussen hier dikwijls ook verschillende notaties en conventies.

- In cursussen fysica schrijft men ook $\dot{y}$ voor de afgeleide van een functie $y = f(t)$ naar de tijd t.

CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Definitie differentiaal

Om technische redenen voeren we hier ook al het begrip *differentiaal* in. Een differentiaal is 'een wiskundig object' waarvan we hier *niet* uitleggen *wat* het precies is. Je kan het dus voorlopig beschouwen als een extra notatie. Later zal het erg handig blijken bij het bestuderen en berekenen van integralen. Ook in de fysica en vele andere toepassingen is het handig om vlot met differentialen te kunnen rekenen.

Definitie 20.3.1 (Pseudo-definitie differentiaal)**.**

De **differentiaal van** x is een nieuw symbool dx.

De **differentiaal van** f, genoteerd df, is het (formeel) product:

$$df \overset{\text{def}}{=} f'(x) \cdot dx$$

Voorbeeld 20.3.1.

$d(x^2+1) = 2x\,dx$ want $(x^2+1)' = 2x$.

Opmerking 20.3.1.

- De *afgeleide functie* van f, genoteerd als f' of $\frac{df}{dx}$, is in elk punt gedefinieerd als een limiet.

  De *differentiaal* van f, genoteerd df, is een nieuw soort object, waarbij het verband met afgeleiden wordt gegeven in de definitie: $df = f'(x)\,dx$.

  Je kan deze formule lezen als 'de differentiaal van f is gelijk aan de afgeleide van f vermenigvuldigd met het *symbool* dx'.

- Dikwijls beschouwt men $\frac{df}{dx}$ gewoon als een andere notatie voor f'. Via het begrip differentiaal kunnen we $\frac{df}{dx}$ echter ook *beschouwen als een breuk of een verhouding*, namelijk een breuk of verhouding van *differentialen*: in de definitie $df \overset{\text{def}}{=} f'(x) \cdot dx$ beide leden formeel delen door dx levert de gekende gelijkheid $\dfrac{df}{dx} = f'(x)$.

  De afgeleide is dus de *verhouding* van de twee *differentialen* df en dx. En deze verhouding is blijkbaar een functie in x, en wel precies de *afgeleide functie* van f. Als je differentialen zou interpreteren als 'verandering', dan geeft de afgeleide het verband tussen de verandering df van de functie f ten gevolge van een verandering dx in de onafhankelijke variabele x.

- Merk op dat sommige handboeken en cursussen *andere afspraken* maken, en dat volgens die afspraken $\frac{df}{dx}$ mogelijk *geen breuk is*. Dit is meestal het geval omdat die handboeken niet spreken over *differentialen*.

- De gekende rekenregels werken voor differentialen: $dx + dx = 2\,dx$, $dx - dx = 0$ en $0\,dx = 0$. Voorlopig *vermenigvuldigen* we wel geen differentialen met elkaar: $dx \cdot dx$ heeft *geen betekenis*.

- Merk op dat dx dus een totaal ander symbool is dan ax: bij dx denk je direct aan differentiaal, bij ax, kx en rx denk je direct aan een product van a, k of r met x. Uitzonderlijk kan d toch een getal voorstellen en dan is dx dus toch d keer x.

Voorbeeld 20.3.2. In de fysica worden functies dikwijls genoteerd als $y = y(x)$. Als de snelheid v een functie is van de tijd t schrijft men dat als $v = v(t)$. De differentiaal dt wordt in de fysica beschouwd als een oneindig kleine verandering van de tijd t, en dv als de (ook oneindig kleine) verandering van de snelheid. De *verhouding* tussen die oneindig kleine veranderingen is precies de afgeleide (en dus

CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Definitie differentiaal

versnelling):

$$v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.4 Begintest berekening afgeleiden

Als je volgende oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je dit deel over afgeleiden verder overslaan. Als dat niet of moeilijk lukt, bestudeer je eerst de theorie of maak je extra oefeningen. De regel van de l'Hôpital wordt hier nog niet behandeld.

Oefening 20.4.1. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^2) =$ ……

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) =$ ……

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) =$ ……

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x \cdot \sin x) =$ ……

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln x}{\sin x} =$ ……

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2 - 7) =$ ……

Oefening 20.4.2.

1. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie $f(x) = \ln g(x)$ in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

$f'(x) =$ ……

2. Bereken de tweede afgeleide: $\frac{d^2}{dx^2}(\mathrm{bgsin}\, x + x) =$ ……

3. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1.

Oplossing: ……

CC BY-NC-SA 4.0

20.5 Basisregels

De basisregels voor afgeleiden behandelen het afleiden van machten, sommen en scalaire veelvouden. Deze basisregels worden later aangevuld met de regels voor producten en quotiënten en voor samenstellingen.

We geven telkens drie versies van de basisregels: eerst met de notatie f', en vervolgens met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ en met differentialen. Het is belangrijk om na verloop van tijd met elke notatie vertrouwd te worden. Bij het begin van je studie kan je *zelf kiezen* welke notatie voor jou het meest duidelijk is. We vermelden hier niet de notatie Df die in vele handboeken van het secundair onderwijs voorkomt, maar als je er vertrouwd mee bent kan je die natuurlijk ook nog toevoegen.

Eigenschap 20.5.1 (Basisregels voor machten)**.**

De afgeleiden van de constante functie $x \mapsto c$ en de machtsfunctie $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn

	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(c)' = 0$
Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$
en met differentialen:	$\mathrm{d}x^r = rx^{r-1}\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}c = 0$

Merk op dat de machtregel voor *alle* reële exponenten geldt, en niet alleen voor natuurlijke getallen.

Voorbeeld 20.5.1.

1. $(1)' = 0$
2. $(\pi^2)' = 0$
3. $(x)' = 1$
4. $(x^2)' = 2x$
5. $(x^3)' = 3x^2$
6. $(x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
7. $(x^{-1/2})' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$
8. $(x^{n+42})' = (n+42)x^{n+41}$
9. $(x^\pi)' = \pi x^{\pi-1}$

Opmerking 20.5.1.

De afgeleide van een **constante functie** $x \mapsto c$ is de nulfunctie $x \mapsto 0$: $\left(\sqrt{2}\right)' = 0$

De afgeleide van de **identieke functie** $x \mapsto x$ is de constante functie $x \mapsto 1$: $x' = 1$.
Inderdaad, dit volgt uit de formule $(x^r)' = rx^{r-1}$ voor $r = 1$: $x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$.

De afgeleide van een macht brengt een **kopie van de exponent naar voor** en **vermindert de exponent met** 1: $(x^5)' = 5x^4$ en $(x^{-2})' = -2x^{-3}$.

Oefening 20.5.1. Bereken volgende afgeleiden:

1. $(x^{3/2})' = \ldots\ldots$
2. $(x^{2/3})' = \ldots\ldots$
3. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \ldots\ldots$

Er zijn ook eenvoudige regels voor de som en scalaire veelvouden:

Eigenschap 20.5.2 (Basisregels voor som en scalair veelvoud)**.**

De afgeleiden van som $f + g$ en scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g en $c \in \mathbb{R}$ zijn

CC BY-NC-SA 4.0

20.5 Basisregels

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$

en met differentialen: $\mathrm{d}(cf) = c\mathrm{d}f \qquad \mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$

Oefening 20.5.2.

1. $(7x)' = \ldots\ldots$
2. $(7x^2)' = \ldots\ldots$
3. $(7x+1)' = \ldots\ldots$
4. $(7x^2+7x)' = \ldots\ldots$
5. $(2(x+1))' = \ldots\ldots$
6. $(x(x+1))' = \ldots\ldots$

Opmerking 20.5.2.

De afgeleide van een scalair veelvoud is het scalair veelvoud van de afgeleide: $(5x)' = 5x' = 5$.
of ook: **bij afleiden mag je constanten buiten brengen**: $(cf)' = cf'$.

De afgeleide van een som is de som van de afgeleiden: $(7+5x)' = 7' + (5x)' = 0 + 5 = 5$.
of ook: **afgeleiden mag je term per term berekenen**: $(f+g)' = f' + g'$.

Deze twee regels zijn samen equivalent met volgende regel:

$$(af+bg)' = af' + bg' \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af+bg) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g \qquad \mathrm{d}(af+bg) = a\mathrm{d}f + b\mathrm{d}g$$

of: **de afgeleide van een lineaire combinatie is de lineaire combinatie van de afgeleiden**.

Met deze beperkte set van regels kunnen de afgeleiden van *alle* veeltermen berekend worden.

Oefening 20.5.3. Bereken volgende afgeleiden van veeltermen:

1. $\left(1+x+x^2\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(1+x+x^2+x^3\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(x+2x^2+3x^3+4x^4\right)' = \ldots\ldots$
5. $\left(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)' = \ldots\ldots$
6. $\left(\sqrt{\pi}+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 20.5.4. Bereken volgende afgeleiden

1. $\left(4x^2+8x+9\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(4x^2+8x+3^2\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left((2x)^2+8x+3^2\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(4x(x+2)+3^2\right)' = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.6 Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen (met $a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$).

Eigenschap 20.6.1 (Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies)**.**

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\ln x)' = 1/x \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \ln a$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}e^x = e^x \,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}a^x = a^x \ln a \,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x} = x^{-1}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\log_a x) = \frac{\mathrm{d}x}{x \ln a}$$

Opmerking 20.6.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van e^x is terug e^x. Dit is een erg handige en belangrijke eigenschap van de functie e^x en ze kan beschouwd worden als de *definitie* van het getal e. Er is een unieke exponentiële functie $x \mapsto a^x$ waarvoor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x$. Het grondtal van deze functie is per definitie e.
- de afgeleide van $\ln x$ is $1/x$. Het lijkt wat merkwaardig dat in de mooie reeks van afgeleiden-van-een-macht-is-terug-een-macht (namelijk $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^r = r x^{r-1}$) ineens een vreemde eend opduikt: ook de afgeleide van $\ln x$ blijkt een macht te zijn (namelijk x^{-1}).
- de afgeleide van *willekeurige* exponentiële of logaritmische functies is een *herschaling* (met een factor $\ln a$) van de afgeleide van e^x en $\ln x$.

Voorbeeld 20.6.1.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = 7^x \ln 7$. Verwar dit niet met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) = 7x^6$

Oefening 20.6.1. Bereken de afgeleiden van volgende exponentiële en logaritmische functies.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^x) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25 \cdot 7^x) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((a+7)^x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^2) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^r) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.7 Afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen.

Eigenschap 20.7.1 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies).

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(\text{bgsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgcos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgtan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

Eigenschap 20.7.2 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\text{bgsin } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\text{bgcos } x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\text{bgtan } x = \frac{1}{1+x^2}$$

of met differentialen:

Eigenschap 20.7.3 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies).

$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\tan x) = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \qquad \mathrm{d}(\cot x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$$

$$\mathrm{d}(\text{bgsin } x) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\text{bgcos } x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\text{bgtan } x) = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Opmerking 20.7.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van de sinus is de cosinus en de afgeleide van de cosinus is *min* de sinus.
- omdat $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ kan men ook schrijven dat

  $$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

  en dat is soms handig omdat het de afgeleide van de tangens terug schrijft in functie van een tangens.
- we zullen verder zien hoe de formules voor tangens en cotangens kunnen worden berekend

CC BY-NC-SA 4.0

20.8 Product- en quotiëntregel

We tonen hoe je *producten en quotiënten* van functies kan afleiden. Later volgt nog een regel over de *samenstelling* van functies. Met deze technieken kunnen dan de afgeleiden van ongeveer alle afleidbare functies die in de praktijk voorkomen worden berekend. We geven de regels in de drie notaties.

Eigenschap 20.8.1 (Productregel en quotiëntregel)**.**

De afgeleide van het product $f \cdot g$ en het quotiënt $\frac{f}{g}$ van twee afleidbare functies f en g wordt gegeven door:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \textbf{(productregel)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \quad \textbf{(productregel)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}(f \cdot g) = (\mathrm{d}f) \cdot g + f \cdot (\mathrm{d}g) \quad \textbf{(productregel)} \qquad \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\mathrm{d}f) \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Voorbeeld 20.8.1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x^4 \ln x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x^4 en $\ln x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4 \cdot \ln x\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4\right) \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) \\ &= 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = x^3(4 \ln x + 1)\,.\end{aligned}$$

Voorbeeld 20.8.2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{2x+3}{4x+5}$.

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $2x+3$ en $4x+5$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x+3}{4x+5} &= \frac{2(4x+5) - 4(2x+3)}{(4x+5)^2} \\ &= \frac{8x + 10 - 8x - 12}{(4x+5)^2} = \frac{-2}{(4x+5)^2}\end{aligned}$$

Voorbeeld 20.8.3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{\ln x}{\sin x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

20.8 Product- en quotiëntregel

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln x}{\sin x}\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)\cdot \sin x - \ln x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\frac{\sin x}{x} - \ln x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{x\,\sin x} - \frac{\ln x\,\cos x}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Oefening 20.8.1.

1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (x^3+27)(x^4-1)$
2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$
3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (x^{42}+x^{13}+1)(x^{2020}-1)$

Opmerking 20.8.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- om de afgeleide van een *product* te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de eerste factor, en je vermenigvuldigt die afgeleide met de tweede factor. Daarbij tel je de afgeleide van de tweede factor vermenigvuldigd met de eerste factor op.

  Dus: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\cdot \sin x) = (2x)\cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x = x(2\sin x + x\cos x)$

- om de afgeleide van een *quotiënt* te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de teller, en vermenigvuldigt die afgeleide met de noemer. Daarvan trek je de afgeleide van noemer vermenigvuldigd met de teller af. Vervolgens deel je het verschil door het kwadraat van de noemer.

  Dus: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{x^2}{\sin x} = \dfrac{(2x)\cdot \sin x - x^2\cdot(\cos x)}{\sin^2 x} = \dfrac{x(2\sin x - x\cos x)}{\sin^2 x}$

- de formule voor product kan je naar keuze schrijven en begrijpen als:

  $$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad \text{of} \quad (f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f$$

  Dus:

  (*afgeleide* eerste factor) maal (tweede factor) plus (eerste factor) maal (*afgeleide* tweede factor)
  dan wel
  (*afgeleide* eerste factor) maal (tweede factor) plus (*afgeleide* tweede factor) maal (eerste factor)

Eigenschap 20.8.2. De formule voor product kan je veralgemenen naar een product van meerdere factoren:

$$\begin{aligned}(f\cdot g\cdot h)' &= (f\cdot(g\cdot h))' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g\cdot h)' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g'\cdot h + g\cdot h') \\ &= f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.8 Product- en quotiëntregel

Dus: leid *elke* factor af, vermenigvuldig die afgeleide met de andere factoren en tel al de producten op.

Voorbeeld 20.8.4. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x \cdot \ln x \cdot \sin x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x,$\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x \cdot \sin x) &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x)(\ln x \cdot \sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x)(x \cdot \sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x)(x \cdot \ln x) \\ &= \ln x \sin x + \sin x + x \ln x \cos x.\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.9 Kettingregel

De zogenaamde *kettingregel* laat toe om de afgeleide te berekenen van *samengestelde* functies.

Eigenschap 20.9.1 (Kettingregel)**.**

De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is gelijk aan:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

Dezelfde kettingregel kan ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

of met differentialen:

$$d(f(g(x))) = f'(g(x))\, dg(x) = f'(g(x))\, g'(x)\, dx \quad \textbf{(kettingregel)}.$$

Opmerking 20.9.1. We hebben in de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie de afgeleide van f toch genoteerd als f' om de notatie eenvoudig te houden. De kettingregel kan ook geformuleerd worden als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}(f(g)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$$

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 20.9.1.

(a) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (5x+2)^2$:

Merk allereerst op dat je in dit voorbeeld de kettingregel niet *moet* gebruiken. Je kan ook het kwadraat eerst uitrekenen:

$$((5x+2)^2)' = (25x^2 + 20x + 4)' = 50x + 20$$

Je *mag* de kettingregel wel gebruiken en je vindt uiteraard hetzelfde resultaat.

We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (5x+2)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto 5x+2$$

dan is $f(g(x)) = f(5x+2) = (5x+2)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto 5$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{5x+2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{5}^{g'(x)} = 10(5x+2) = 50x+20$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.9 Kettingregel

waarbij $f'(g(x)) = f'(5x+2) = 2(5x+2)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((5x+2)^2)' = 2(5x+2)\cdot 5 = 10(5x+2)$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 2(5x+2)\cdot 5.$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(5x+2)^2 = 2(5x+2)\,d(5x+2) = 2(5x+2)5\,dx = 10(5x+2)\,dx$$

(b) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin^2 x$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder het kwadraat met haakjes: $x \mapsto (\sin x)^2$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (\sin x)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sin x$$

dan is $f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto \cos x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{\sin x}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{\sin x}^{g(x)})}_{f'(g(x))}\cdot \overbrace{\cos x}^{g'(x)} = 2\sin x\cos x$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(\sin x) = 2(\sin x)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((\sin x)^2)' = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^2 = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x)^2 = 2(\sin x)\,d(\sin x) = 2(\sin x)\cos x\,dx = 2\sin x\cos x\,dx$$

(c) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin x^2$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder haakjes rond het kwadraat: $x \mapsto \sin(x^2)$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

20.9 Kettingregel

- De functie $x \mapsto \sin(x^2)$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto \sin x$$
$$g : x \mapsto x^2$$

dan is $f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$. Omdat

$$f' : x \mapsto \cos x$$
$$g' : x \mapsto 2x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{\sin(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f(g(x))} \Big)' = \underbrace{\cos(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{2x}^{g'(x)} = 2x\cos x^2$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(x^2) = \cos(x^2)$

Je *moet* de samenstellende functies geen namen geven. Je kan ook sneller rekenen als volgt:

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Je kan ook de notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken, dat geeft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x^2) = \cos x^2 d(x^2) = \cos x^2\, 2x dx$$

Oefening 20.9.1.

1. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5^{x^2} = \ldots\ldots$

2. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie

$$f(x) = \ln g(x)$$

in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

Opmerking 20.9.2. We begrijpen deze kettingregel als volgt:

- Om de afgeleide van een samenstelling $f(g(x))$ te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de *buitenste* functie f en die evalueer je in de enige waarde waar dat betekenis heeft: de functiewaarde van de binnenste functie g. Vervolgens vermenigvuldig je dat resultaat met de afgeleide van de binnenste functie. Dus: afleiden doe je *van buiten naar binnen*, stap per stap, en je vermenigvuldigt de tussenresultaten met elkaar.
- Indien je nog niet zo vertrouwd bent met de kettingregel kan je de samenstellende functies f en g expliciet opschrijven, of je kan werken met extra variabelen (*substitutie*). We geven een

CC BY-NC-SA 4.0

20.9 Kettingregel

voorbeeld met extra variabelen in de notatie met differentialen:

$$\mathrm{d}\sin(x^2) \overset{x^2=u}{=} \mathrm{d}\sin(u) = \cos(u)\mathrm{d}u \overset{u=x^2}{=} \cos(x^2)\mathrm{d}x^2 = \cos(x^2)\cdot 2x\mathrm{d}x = 2x\cos x^2\mathrm{d}x$$

en

$$\mathrm{d}(\sin^2 x) = \mathrm{d}(\sin x)^2 \overset{\sin x=v}{=} \mathrm{d}v^2 = 2v\,\mathrm{d}v \overset{v=\sin x}{=} 2\sin x\cdot \mathrm{d}\sin x = 2\sin x\cos x\mathrm{d}x$$

Zodra je vertrouwd bent met de kettingregel is het niet meer nodig om de extra variabele expliciet op te schrijven.

Eigenschap 20.9.2. De *ketting*regel berekent de afgeleide van een ketting of *keten* van samenstellingen:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

Dus je leidt de samenstellende functies af *van buiten naar binnen* en vermenigvuldigt de afgeleiden.

Voorbeeld 20.9.2. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2-7)$.

We gebruiken weer de kettingregel, maar nu hebben we een samenstelling van drie functies: $f(x)=x^3$, $g(x)=\cos x$ en $h(x)=4x^2-7$.

$$f(g(h(x))) = f(g(4x^2-7)) = f(\cos(4x^2-7)) = \cos^3(4x^2-7)$$

In de eerste stap van de berekening gebruiken we:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x)))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(g(h(x)))]$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^3\left(4x^2-7\right)\right] &= 3\left(\cos\left(4x^2-7\right)\right)^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos\left(4x^2-7\right)\right]\\ &= 3\cos^2\left(4x^2-7\right)\left(-\sin\left(4x^2-7\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x^2-7\right]\right)\\ &= -3\cos^2\left(4x^2-7\right)\sin\left(4x^2-7\right)\cdot 8x\\ &= -24x\sin\left(4x^2-7\right)\cos^2\left(4x^2-7\right).\end{aligned}$$

Oefening 20.9.2.

1. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\sin^3(e^{x^2})} = \ldots\ldots$

Opmerking 20.9.3.

De Leibniz notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ is bijzonder handig als x op zijn beurt afhankelijk wordt van een andere variabele (bijvoorbeeld van de tijd, of bij een substitutie) en wordt dan ook vaak gebruikt in de fysica.

Stel dat bij een functie $x\mapsto f(x)$ blijkt dat x eigenlijk afhangt van t. Dan is x dus zelf een functie van t, dus $x : t\mapsto x(t)$. Dan wordt natuurlijk ook f een functie van t, namelijk $t\mapsto f(x(t))$. We

CC BY-NC-SA 4.0

20.9 Kettingregel

krijgen dan volgende functies:

$$f : x \mapsto f(x)$$
$$x : t \mapsto x(t)$$
$$f \circ x : t \mapsto f(x(t))$$

en die functies hebben respectievelijk als afgeleide

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f : x \mapsto f'(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x : t \mapsto x'(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ x) : t \mapsto (f \circ x)'(t) \overset{\text{kettingregel}}{=} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

Een concreet voorbeeld: je rijdt met de auto van $A_{ntwerpen}$ naar B_{russel}. Je schrijft de afgelegde afstand in kilometer als x en je noemt $f(x)$ het aantal liter benzine in je tank na x km. Veronderstel dat je vertrekt met een volle tank van 50 liter en je auto 5 liter verbruikt per honderd kilometer, dan is

$$f(x) = 50 - \frac{5}{100}x.$$

Veronderstel dat je aan een constante snelheid van 75 km/u rijdt, dan is de afgelegde weg x na t uur dus $x(t) = 75 \cdot t$ km. De samengestelde functie $f(x(t))$ is dan

$$f(x(t)) = 50 - \frac{5}{100}x(t) = 50 - \frac{5}{100} \cdot 75 \cdot t = 50 - \frac{75 \cdot 5}{100}t$$

en die formule drukt uit hoeveel benzine je nog hebt na t uur, in plaats van na x kilometer.

De kettingregel zegt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = f'(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$

of anders geschreven:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)}$$

Als we schrijven dat $x = x(t)$ en $y = f(x)$, dus ook $y = f(x(t))$ wordt dat soms korter genoteerd als:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

We kunnen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$$

ook met gebruik van andere letters formuleren. Bijvoorbeeld met functie $u(x)$ in plaats van $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(u(x))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(u(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)$$

of met de functies u en v in plaats van f en x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(v(x))) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}(v(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x)$$

maar het betekent natuurlijk allemaal hetzelfde.

CC BY-NC-SA 4.0

20.9 Kettingregel

Opmerking 20.9.4.

Je kan de regels voor het afleiden van producten, quotiënten en samenstellingen als volgt samenvatten:

- je *begint* altijd direct de eerste of buitenste functie af te leiden
- daarna werk je als volgt verder:
  - bij de *vermenigvuldiging* $(f \cdot g)'$
    - je maakt het product $f' \cdot g$ van de afgeleide van de eerste factor met de andere factor(en),
    - je doet vervolgens hetzelfde voor de andere factor(en), dus $g' \cdot f$,
    - en je maakt de *som* van al die resultaten: $f' \cdot g + g' \cdot f$
  - bij de *deling* $\left(\frac{f}{g}\right)'$
    - je maakt het product $f' \cdot g$ van de afgeleide van de teller met de noemer,
    - je doet vervolgens hetzelfde voor noemer (dus afgeleide noemer maal teller, of $g' \cdot f$),
    - maar je maakt het *verschil* van die twee resultaten: $f' \cdot g - g' \cdot f$
    - en je deelt alles door het *kwadraat van de noemer*: $\frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
  - bij de *samenstelling* $(f \circ g)'$
    - je evalueert de afgeleide van de buitenste functie in het correcte punt: $f'(g(x))$,
    - je doet vervolgens hetzelfde voor binnenste functie(s): $g'(x)$,
    - en je maakt het *product* van al die resultaten: $f'(g(x)) \cdot g'(x)$

De productregel en kettingregel kunnen op die manier ook erg eenvoudig worden begrepen voor meerdere functies:

- $(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + g' \cdot f \cdot h + h' \cdot f \cdot g$
- $(f \circ g \circ h)' = f'(g(h)) \cdot g'(h) \cdot h'$
- $(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$
- $(f(g(h(k(x)))))' = f'(g(h(k(x)))) \cdot g'(h(k(x))) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x)$

CC BY-NC-SA 4.0

20.9.A Basisoefeningen afgeleiden

Oefening 20.9.3. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\left(x^{1/3}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(x^{-1/3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(x^4\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(9x^9\right)' = \ldots\ldots$
5. $(x^4 - 4x)' = \ldots\ldots$
6. $(x + \sin x)' = \ldots\ldots$
7. $(x - \cos x)' = \ldots\ldots$
8. $(7e^x)' = \ldots\ldots$
9. $(e^{7x})' = \ldots\ldots$
10. $(\sin x + e^x)' = \ldots\ldots$

Oefening 20.9.4. Bereken de afgeleide van volgende functies op twee manieren:

1. $(x^2 \cdot x^2)' = \ldots\ldots$
2. $(3x + 5)^{2\prime} = \ldots\ldots$

Oefening 20.9.5. Bereken de afgeleide van volgende rationale functies.

1. $\left(\dfrac{x-4}{x}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(\dfrac{x}{x+3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(\dfrac{1}{x+5}\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(\dfrac{4-x}{3-x}\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 20.9.6. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 \cos t) = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{-1}{t^2}\right) = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{3t-1}{2t+2}\right) = \ldots\ldots$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(4x+5) = \ldots\ldots$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \ldots\ldots$
7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{4x^3+1}{3x} = \ldots\ldots$
8. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$
9. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(-8x^2-1) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.9.A Basisoefeningen afgeleiden

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3(3x) = \ldots\ldots$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-7x+8} = \ldots\ldots$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t\,\sin(t^2)) = \ldots\ldots$

13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t^2) = \ldots\ldots$

14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2+3)^4} = \ldots\ldots$

Oefening 20.9.7. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $(2e^x)' = \ldots\ldots$

2. $(2e^{-x})' = \ldots\ldots$

3. $(e^{2x})' = \ldots\ldots$

4. $(e^{x+2})' = \ldots\ldots$

5. $(e^{2x+2})' = \ldots\ldots$

6. $(e^{x^2})' = \ldots\ldots$

7. $(e^{2x^2+3})' = \ldots\ldots$

8. $(e^{x^2+2x+3})' = \ldots\ldots e^{x^2+2x+3}$

9. $(e^{1-x^2})' = \ldots\ldots$

10. $(2e^{\sqrt{x}})' = \ldots\ldots$

Oefening 20.9.8. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{-2} = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3-2\sqrt{x}+5x-2) = \ldots\ldots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5-x^4) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2x^{-n} = \ldots\ldots$

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1+x)(x+2)\big) = \ldots\ldots$

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((x+2)^3e^x\big) = \ldots\ldots$

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t^{-3}(t+5)^7\big) = \ldots\ldots$

8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sin t^2} = \ldots\ldots$

9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{4}{1+2\cos\theta}\right) = \ldots\ldots$

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^{\sin x+2x} = \ldots\ldots$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sqrt{1-2\theta} = \ldots\ldots$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+\tan x} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.9.A Basisoefeningen afgeleiden

13. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \ldots\ldots$

14. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(2\theta^{1/2} + \dfrac{3}{2}\theta^{2/3} + \dfrac{4}{3}\theta^{3/4}\right) = \ldots\ldots$

15. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin(3x)\cdot\cos(2x)\big) = \ldots\ldots$

16. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{2x-1} = \ldots\ldots$

Oefening 20.9.9. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie f in termen van g en van de afgeleide van de functie g voor volgende functies f:

1. Als $f(x) = 2g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

2. Als $f(x) = (g(x))^2$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

3. Als $f(x) = g(x^2)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

4. Als $f(x) = \operatorname{bgtan} g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

5. Als $f(x) = g(3x) + 3g(x) + (g(x))^3 + g(x) + g(3) + xg(3) + g(3^x) + 3^{g(x)}$,
dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 20.9.10. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ constanten. Bepaal dan de afgeleide van onderstaande functies.

1. Als $s(t) = a + b\sin(bt - c)$, dan is $s'(t) = \ldots\ldots$

2. Als $s(\theta) = ab\theta + c\theta^2$, dan is $s'(\theta) = \ldots\ldots$

3. Als $s(x) = b[1 - \cos(a^2x)]$, dan is $s'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 20.9.11. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het gegeven punt.

1. $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1. $\ldots\ldots$

2. $f(x) = 1 - \cos x$ in het punt met als x-coördinaat $\dfrac{\pi}{2}$. $\ldots\ldots$

3. $f(x) = 1 - x^2$ in het punt met als x-coördinaat 2. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.10 Hogere orde afgeleiden

Omdat de afgeleide van een functie $f : x \mapsto f(x)$ opnieuw een functie $f' : x \mapsto f'(x)$ is, houdt niets ons tegen om te proberen ook f' af te leiden.

Definitie 20.10.1 (Hogere orde afgeleiden)**.**

Als voor een afleidbare reële functie f ook de afgeleide functie f' opnieuw afleidbaar is, dan is de **tweede afgeleide** van f, genoteerd $f'' = \dfrac{d^2 f}{dx^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)$ de afgeleide van de afgeleide functie f'.

Opmerking 20.10.1.

Analoog kan je ook de n-de afgeleide ($n \in \mathbb{N}_0$) van een functie f definiëren. Die noteren we als $f^{(n)}$ of $\dfrac{d^n f}{dx^n}$. Merk op dat de haakjes *niet* mogen worden weggelaten in $f^{(2)}$, want anders zou voor bijvoorbeeld de sinus verwarring mogelijk zijn tussen het kwadraat $\sin^2(x)$ en de tweede afgeleide $\sin^{(2)}(x)$.

Voorbeeld 20.10.1.

Bereken de tweede afgeleide $\dfrac{d^2}{dx^2}(\mathrm{bgsin}\, x + x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathrm{bgsin}\, x + x\right] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\mathrm{bgsin}\, x + x\right]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right] + \frac{d}{dx}[1] \\
&= -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-3/2} \cdot \frac{d}{dx}\left[1-x^2\right] + 0 \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,(-2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.
\end{aligned}$$

Oefening 20.10.1.

1. Bereken de derde afgeleide van $f(x) = 2\,e^{x^2-1} - \sin 3x + \dfrac{x^3}{2} + 4x^2 - 6x - \dfrac{12}{5}$.

Oplossing: … …

CC BY-NC-SA 4.0

20.10.A Oefeningen hogere orde afgeleiden

Oefening 20.10.2. Bereken de tweede afgeleide van volgende functies:

(a) $f(x) = \ln(x^2)$. $f''(x) = \ldots\ldots$

(b) $f(\theta) = \theta\cos\theta$ $f''(\theta) = \ldots\ldots$

(c) $f(t) = \sin(t^4)$ $f''(t) = \ldots\ldots$

Oefening 20.10.3. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{d^2}{dx^2}x^3 = \ldots\ldots$
2. $\frac{d^3}{dx^3}6x^3 = \ldots\ldots$
3. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}(314x^9 + x^5 + \frac{\pi}{2}) = \ldots\ldots$
4. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}314^{15} = \ldots\ldots$
5. $\frac{d}{dx}\sin x = \ldots\ldots$
6. $\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \ldots\ldots$
7. $\frac{d^3}{dx^3}\sin x = \ldots\ldots$
8. $\frac{d^4}{dx^4}\sin x = \ldots\ldots$
9. $\frac{d^{12}}{dx^{12}}\sin x = \ldots\ldots$
10. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}\sin x = \ldots\ldots$
11. $\frac{d^{120}}{dx^{120}}\sin x = \ldots\ldots$
12. $\frac{d^n}{dx^n}x^n = \ldots\ldots$
13. $\frac{d}{dx}x^{n+1} = \ldots\ldots$
14. $\frac{d^n}{dx^n}x^{n+1} = \ldots\ldots$
15. $\frac{d}{dx}x^{n!} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.11 Afgeleide van de inverse functie

Voor een inverteerbare functie f geldt voor elke x in het domein dat

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

De functies $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ en $x \mapsto x$ zijn dus gelijk, en dus zijn ook hun afgeleiden aan elkaar gelijk:

$$(f^{-1}(f(x)))' = x'$$

Uit de kettingregel volgt dan (omdat $x' = 1$)

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \text{ en dus } (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = (f'(x))^{-1}$$

en dit verklaart volgende eigenschap:

Eigenschap 20.11.1.

De inverse van een inverteerbare afleidbare functie f met $f'(x) \neq 0$ is afleidbaar in het punt $y = f(x)$, met afgeleide gelijk aan de omgekeerde van de afgeleide van f in x:

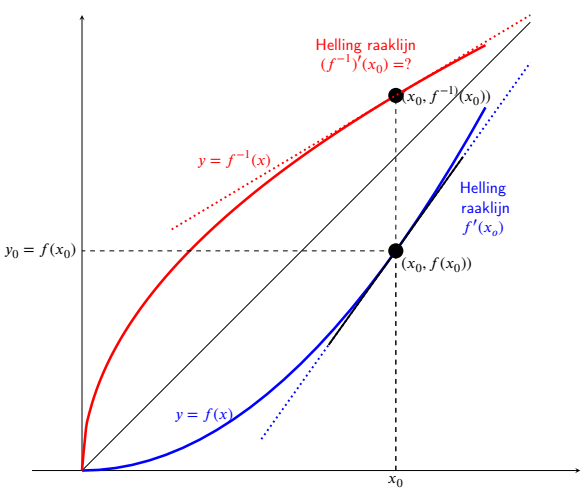
$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{en dus} \quad \boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}} \quad \textbf{(afgeleide inverse)}$$

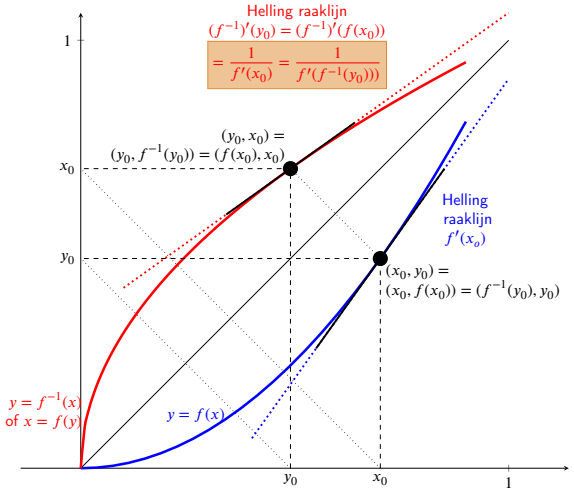
waarbij $y = f(x)$, en dus ook $x = f^{-1}(y)$.

Opmerking 20.11.1. Je zou deze formule kunnen schrijven als $(f^{-1})'(y) = \left(f'(f^{-1}(y))\right)^{-1}$ waarbij de exponent $^{-1}$ echter twee verschillende betekenissen heeft:

$f^{-1}(x)$	$= y$	$\iff$	$x = f(y)$	de inverse van een **functie**
$(f(x))^{-1}$	$= y$	$\iff$	$\frac{1}{f(x)} = y$	het omgekeerde van een **getal**

Er is *geen duidelijk verband* tussen de raaklijnen van f en f^{-1} boven het punt x_0, maar wel tussen
enerzijds de raaklijn aan f in het punt $(x_0, f(x_0))$ en
anderzijds de raaklijn aan de *gespiegelde grafiek* f^{-1} boven het *gespiegelde punt* $(f(x_0), x_0)$.
Die raaklijnen zijn ook elkaars spiegelbeeld, en gespiegelde rechten hebben omgekeerde hellingen.





CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

20.11 Afgeleide van de inverse functie

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 20.11.1. De afgeleide van de inverse van $f : x \mapsto 2x$

De inverse van de functie $f : x \mapsto 2x$ is de functie $f^{-1} : y \mapsto y/2$. De afgeleide van f is de constante functie $f' : x \mapsto 2$, en de afgeleide van f^{-1} is de constante functie $(f^{-1})' : y \mapsto 1/2$ en er geldt inderdaad dat $(f^{-1})'(y) = 1/2 = 2^{-1} = (f'(x))^{-1}$.

Bovenstaand voorbeeld is echter bedrieglijk eenvoudig omdat de afgeleide een *constante* functie is.

Voorbeeld 20.11.2. De afgeleide van de inverse van $f : x \mapsto x^2$

De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ is niet inverteerbaar: er is geen inverse op het hele domein $\mathbb{R}$.

De functie $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ heeft als inverse $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$ en de functie $f_2 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ heeft als inverse $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$. In een punt x_0 is de afgeleide van zowel f_1 als f_2 gelijk aan $2x_0$, en de raaklijn in $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2)$ heeft dus helling $2x_0$.

In het punt $y_0 = x_0^2$ is de afgeleide van $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : y \mapsto \sqrt{y}$ gelijk aan

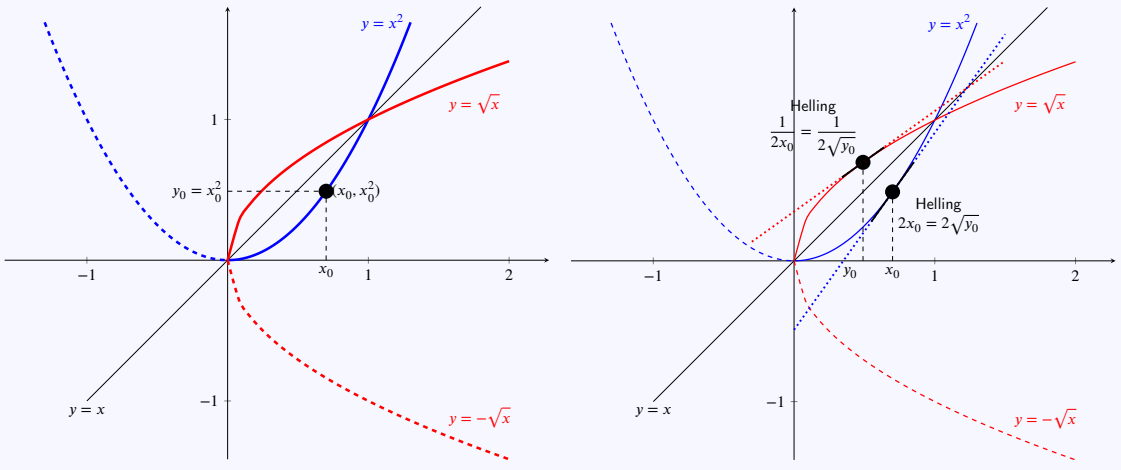
$$(f_1^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f_1'(\sqrt{y_0})} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}},$$

en de raaklijn in $(y_0, \sqrt{y_0}) = (x_0^2, x_0)$ heeft dus een helling $\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}} = \dfrac{1}{2x_0}$.

In het punt $y_0 = x_0^2$ is de afgeleide van $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : y \mapsto -\sqrt{y}$ gelijk aan

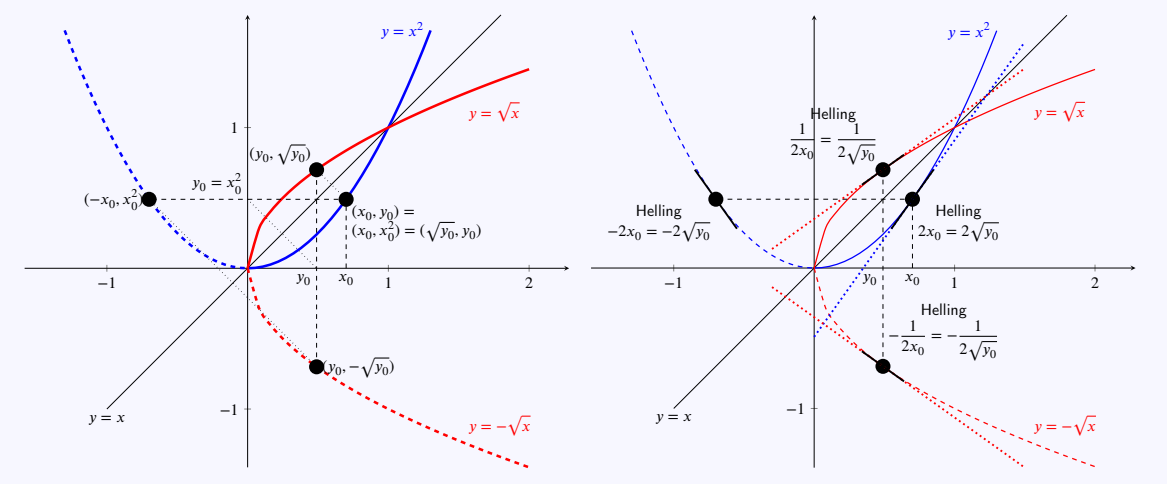
$$(f_2^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f_2'(f_2^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f_2'(-\sqrt{y_0})} = -\frac{1}{2\sqrt{y_0}},$$

en de raaklijn in $(y_0, -\sqrt{y_0}) = (x_0^2, -x_0)$ heeft dus een helling $-\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}} = -\dfrac{1}{2x_0}$.



CC BY-NC-SA 4.0

20.11 Afgeleide van de inverse functie

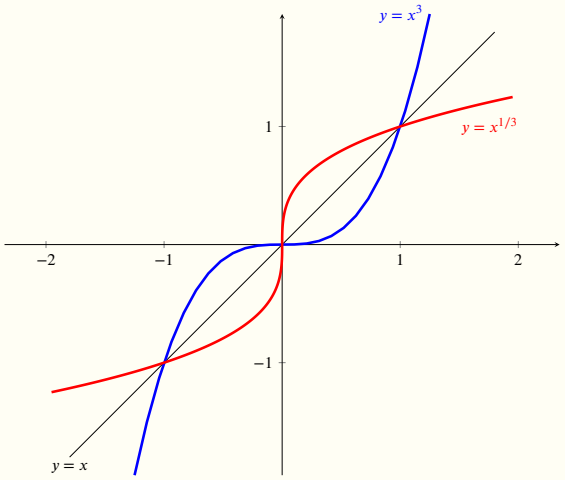


Opmerking 20.11.2.

- De raaklijn in $(x_0, f(x_0))$ aan graf f is de spiegeling ten opzichte van de eerste bissectrice van de raaklijn in $(f(x_0), x_0)$ aan graf f^{-1}. Dit is evident, omdat de grafieken van inverse fucnctie elkaars spiegelbeeld zijn, en dus geldt dat ook voor de *raaklijnen* aan de grafieken.
- Als $f'(x_0) = 0$, dan is de inverse functie in het punt $f(x_0)$ niet afleidbaar (want de afgeleide zou gelijk moeten zijn aan $\frac{1}{f'(x_0)}$). Dat komt overeen met het feit dat de spiegeling van een horizontale rechte (helling 'nul') een verticale rechte is (helling 'oneindig').

  Neem als voorbeeld $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ en $x_0 = 0$. In dit geval is $f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$. De inverse functie is $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{1/3}$.

  Deze inverse is niet *afleidbaar* in 0: de afgeleide van $x \mapsto x^{1/3}$ is $x \mapsto \frac{1}{3}x^{-2/3}$, en dat wordt 'oneindig groot' in $x = 0$. Dus, $x \mapsto x^{1/3}$ is niet afleidbaar in de oorsprong omdat de raaklijn er verticaal is.



CC BY-NC-SA 4.0

20.11.A Basisoefeningen afgeleiden

Oefening 20.11.1. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\left(x^{1/3}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(x^{-1/3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(x^4\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(9x^9\right)' = \ldots\ldots$
5. $(x^4 - 4x)' = \ldots\ldots$
6. $(x + \sin x)' = \ldots\ldots$
7. $(x - \cos x)' = \ldots\ldots$
8. $(7e^x)' = \ldots\ldots$
9. $(e^{7x})' = \ldots\ldots$
10. $(\sin x + e^x)' = \ldots\ldots$

Oefening 20.11.2. Bereken de afgeleide van volgende functies op twee manieren:

1. $(x^2 \cdot x^2)' = \ldots\ldots$
2. $(3x + 5)^{2\prime} = \ldots\ldots$

Oefening 20.11.3. Bereken de afgeleide van volgende rationale functies.

1. $\left(\dfrac{x-4}{x}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(\dfrac{x}{x+3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(\dfrac{1}{x+5}\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(\dfrac{4-x}{3-x}\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 20.11.4. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 \cos t) = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{-1}{t^2}\right) = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{3t-1}{2t+2}\right) = \ldots\ldots$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(4x+5) = \ldots\ldots$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \ldots\ldots$
7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{4x^3+1}{3x} = \ldots\ldots$
8. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$
9. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(-8x^2-1) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.11.A Basisoefeningen afgeleiden

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3(3x) = \ldots\ldots$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-7x+8} = \ldots\ldots$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t\,\sin(t^2)) = \ldots\ldots$

13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t^2) = \ldots\ldots$

14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2+3)^4} = \ldots\ldots$

Oefening 20.11.5. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $(2e^x)' = \ldots\ldots$

2. $(2e^{-x})' = \ldots\ldots$

3. $(e^{2x})' = \ldots\ldots$

4. $(e^{x+2})' = \ldots\ldots$

5. $(e^{2x+2})' = \ldots\ldots$

6. $(e^{x^2})' = \ldots\ldots$

7. $(e^{2x^2+3})' = \ldots\ldots$

8. $(e^{x^2+2x+3})' = \ldots\ldots e^{x^2+2x+3}$

9. $(e^{1-x^2})' = \ldots\ldots$

10. $(2e^{\sqrt{x}})' = \ldots\ldots$

Oefening 20.11.6. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{-2} = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3-2\sqrt{x}+5x-2) = \ldots\ldots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5-x^4) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2x^{-n} = \ldots\ldots$

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1+x)(x+2)\big) = \ldots\ldots$

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((x+2)^3e^x\big) = \ldots\ldots$

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t^{-3}(t+5)^7\big) = \ldots\ldots$

8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sin t^2} = \ldots\ldots$

9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{4}{1+2\cos\theta}\right) = \ldots\ldots$

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^{\sin x+2x} = \ldots\ldots$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sqrt{1-2\theta} = \ldots\ldots$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+\tan x} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.11.A Basisoefeningen afgeleiden

13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \ldots\ldots$

14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(2\theta^{1/2} + \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}\right) = \ldots\ldots$

15. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin(3x)\cdot\cos(2x)\big) = \ldots\ldots$

16. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{2x-1} = \ldots\ldots$

Oefening 20.11.7. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie f in termen van g en van de afgeleide van de functie g voor volgende functies f:

1. Als $f(x) = 2g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

2. Als $f(x) = (g(x))^2$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

3. Als $f(x) = g(x^2)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

4. Als $f(x) = \operatorname{bgtan} g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

5. Als $f(x) = g(3x) + 3g(x) + (g(x))^3 + g(x) + g(3) + xg(3) + g(3^x) + 3^{g(x)}$,
dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 20.11.8. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ constanten. Bepaal dan de afgeleide van onderstaande functies.

1. Als $s(t) = a + b\sin(bt - c)$, dan is $s'(t) = \ldots\ldots$

2. Als $s(\theta) = ab\theta + c\theta^2$, dan is $s'(\theta) = \ldots\ldots$

3. Als $s(x) = b[1 - \cos(a^2x)]$, dan is $s'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 20.11.9. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het gegeven punt.

1. $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1. $\ldots\ldots$

2. $f(x) = 1 - \cos x$ in het punt met als x-coördinaat $\frac{\pi}{2}$. $\ldots\ldots$

3. $f(x) = 1 - x^2$ in het punt met als x-coördinaat 2. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

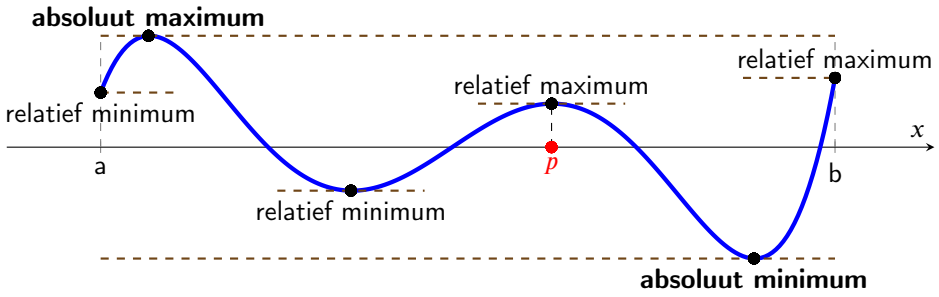
20.12 Minimum-Maximumproblemen

Wetenschappelijke problemen gaan dikwijls over het *maximum* of het *minimum* van een zekere grootheid. Deze grootheid kan van wiskundige, fysische, economische of andere aard zijn, bijvoorbeeld een maximale of minimale inhoud, oppervlakte of afstand, minimale kosten of maximale winst. Dergelijke minimum-maximumproblemen worden ook wel optimalisatieproblemen genoemd, en *afgeleiden* spelen een belangrijke rol bij het vinden van de oplossingen. De onderstaande definitie over relatieve en absolute maxima en minima is vrij evident.

Definitie 20.12.1. Een reële functie bereikt in een punt p van haar domein een

een	**absoluut (of globaal) maximum**	als $f(p)$ maximaal is voor het ganse domein,
een	**absoluut (of globaal) minimum**	als $f(p)$ minimaal is voor het ganse domein,
een	**relatief (of lokaal) maximum**	als $f(p)$ maximaal is in de buurt van p, en
een	**relatief (of lokaal) minimum**	als $f(p)$ minimaal is in de buurt van p.

Een **extremum** is ofwel een maximum ofwel een minimum.



Extra: de begrippen absoluut en relatief minimum en maximum met formules.

Definitie20.12.2. Een reële functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bereikt in een punt $p \in A$

een **absoluut maximum**	als voor elke $x \in A$ geldt:	$f(x) \leq f(p)$.
een **absoluut minimum**	als voor elke $x \in A$ geldt:	$f(p) \leq f(x)$.
een **relatief maximum**	als een interval I rond p bestaat zodat voor elke $x \in I \cap A$ geldt:	$f(x) \leq f(p)$.
een **relatief minimum**	als een interval I rond p bestaat zodate voor elke $x \in I \cap A$ geldt:	$f(p) \leq f(x)$.

Opmerking 20.12.1.

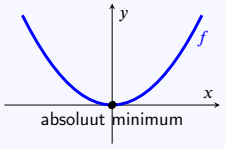
- Let bij extrema op het onderscheid tussen *de plaats waar het extremum wordt bereikt* (één of meerdere x-waarden) en *het extremum zelf* (een functiewaarde en dus een y-waarde).
- Een (absoluut of relatief) maximum kan worden bereikt in meerdere x-waarden. Zo bereikt de cosinusfunctie haar absoluut maximum oneindig dikwijls, namelijk in de punten $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Of een relatief maximum al dan niet absoluut is hangt of van het *domein* van de functie: door het domein voldoende klein te maken wordt elk relatief maximum absoluut, en door het domein te vergroten blijft een absoluut maximum mogelijk geen absoluut maximum.

Voorbeeld 20.12.1. De functie $f : x \mapsto x^2$ bereikt in $x = 0$ een globaal (en dus ook lokaal) minimum.

CC BY-NC-SA 4.0

20.12 Minimum-Maximumproblemen

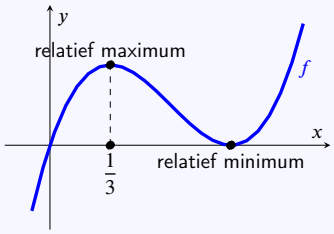
Inderdaad, want voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $0 \leq x^2$ (en dus $0 = f(0) \leq f(x)$).



Voorbeeld 20.12.2. De functie $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x$ bereikt een lokaal minimum in 1 en een lokaal maximum in $1/3$.

Inderdaad, voor x in de buurt van 1 geldt dat $f(1) = 0 \leq f(x)$ want $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 \geq 0$ *voor x in de buurt van* 1. De ongelijkheid $x(x-1)^2 \geq 0$ geldt niet voor negatieve x, maar voor een *lokaal* minimum in $x = 1$ volstaat het dat ze geldt voor x *voldoende dicht bij* 1.

In $x = \frac{1}{3}$ bereikt f een lokaal maximum. Geen van beide lokale extrema zijn ook globale extrema.



Op de figuur blijkt duidelijk volgend verband tussen de extrema en **het stijgen en dalen van een functie**:

Eigenschap 20.12.1. Een reële functie bereikt

een **relatief maximum**	bij *een overgang van stijgen naar dalen*	of in een randpunt,
een **relatief minimum**	bij *een overgang van dalen naar stijgen*	of in een randpunt.

En het stijgen en dalen van functies is gerelateerd aan **het teken van de afgeleide**:

Eigenschap 20.12.2.

	stijgt	waar de afgeleide positief is,
Een afleidbare functie	daalt	waar de afgeleide negatief is,
	heeft een horizontale raaklijn	waar de afgeleide nul is.

Extra: het teken van de afgeleide en stijgen en dalen met formules.

Een wat meer nauwkeurige formulering gaat als volgt:

Eigenschap20.12.3. Voor een continue functie f op $[a, b]$ die afleidbaar is op $]a, b[$ geldt:

als $f'(x) > 0$ voor elke $x \in]a, b[$,	dan is f *strikt stijgend* in $[a, b]$
als $f'(x) < 0$ voor elke $x \in]a, b[$,	dan is f *strikt dalend* in $[a, b]$
als $f'(c) = 0$ voor een $c \in]a, b[$,	dan heeft de grafiek van f in $(c, f(c))$ een *horizontale raaklijn*.

De enigszins subtiele formulering met open en gesloten intervallen kan nuttig zijn bij een functie zoals de vierkantswortel, die continu is op $[0, +\infty[$, maar enkel afleidbaar op $]0, +\infty[$.

CC BY-NC-SA 4.0

20.12 Minimum-Maximumproblemen

Opmerking 20.12.2.

- Voor afleidbare functies komen extrema dus enkel voor in *nulpunten van de afgeleide* of in randpunten van het domein. Een *tekenonderzoek van de afgeleide* bepaalt dus de lokale extrema.
- Pas op: niet elk nulpunt van de afgeleide leidt tot een extremum: voor $x \mapsto x^3$ heeft de afgeleide $x \mapsto 3x^2$ een nulpunt in $x = 0$, maar x^3 heeft daar *geen extremum*, enkel een buigpunt.
- Voor functies die niet afleidbaar zijn in sommige punten van hun domein, moet je op een andere manier de extrema onderzoeken, bijvoorbeeld via de grafiek.
- Een nulpunt van de afgeleide f' noemt men soms ook een *kritiek punt* van f, maar wij zullen de naam kritiek punt niet gebruiken.

Voorbeeld 20.12.3. Bepaal de extrema van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Uitwerking:

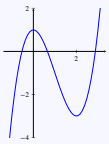
Bereken de *afgeleide* van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$

en bepaal daarvan de *nulpunten*: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 2$.

Maak vervolgens een *tekentabel* (ook *tekenverloop*) met

- op de eerste lijn: de *nulpunten van de afgeleide* f' van klein naar groot
- op de tweede lijn: het *tekenverloop van* f' met een 0 onder de nulpunten en ertussen plustekens of mintekens naargelang het teken van f'.
- op de derde lijn: *het verloop van de grafiek van* f met een $\nearrow$ waar $f'(x)$ positief is en f dus stijgt, en een $\searrow$ waar $f'(x)$ negatief is en f dus daalt .
- er is dan een relatief maximum waar de functie overgaat van stijgend naar dalend, en een relatief minimum waar ze overgaat van dalend naar stijgend.

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	relatief maximum	$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$



De functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ heeft geen absoluut minimum omdat $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ en geen absoluut maximum omdat $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Voor functies op een begrensd interval neem je ook de randpunten op in de tabel.

Met afgeleiden worden *relatieve* extrema bepaald, maar in toepassingen zoeken we soms *absolute* extrema.

Algoritme 20.12.5 (Algoritme voor absolute extrema)**.**

Een continue functie op een gesloten interval bereikt steeds haar extrema die je vindt door

de *relatieve extrema* te bepalen (via nulpunten en tekenverloop van de afgeleide)
de *functiewaarde* te berekenen in elk relatief extremum *en in de randpunten*
de *grootste* van die functiewaarden is het absolute maximum, de *kleinste* is het absolute minimum.

Functies op een open interval bereiken niet noodzakelijk hun extrema (bv $x \mapsto 1/x$).

Voor begrensde functies is het absolute maximum het grootste van alle relatieve maxima,
het absolute minimum is het kleinste van alle relatieve minima.

CC BY-NC-SA 4.0

20.12 Minimum-Maximumproblemen

Extra: relatief/absoluut hangt af van het beschouwde domein.

CC BY-NC-SA 4.0

20.12 Minimum-Maximumproblemen

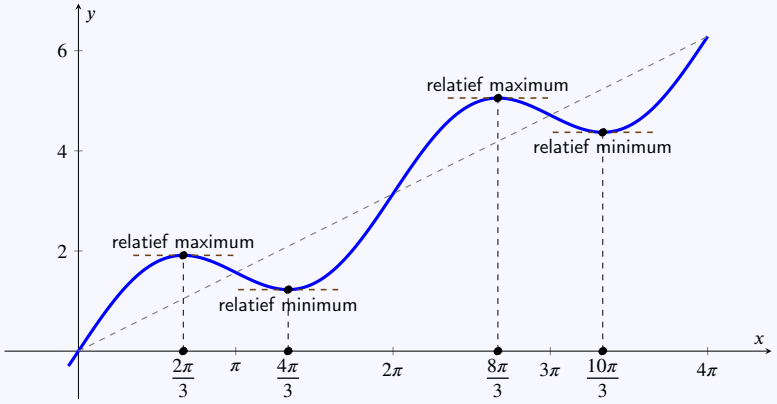
Voorbeeld20.12.4. Bepaal de extrema van de functie $f : x \mapsto \frac{x}{2} + \sin x$.

Uitwerking: Bereken eerst de afgeleide: $f'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$,

en de nulpunten $f'(x) = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2(3k \pm 1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$,

en tekentabel (voor x tussen 0 en 4π)

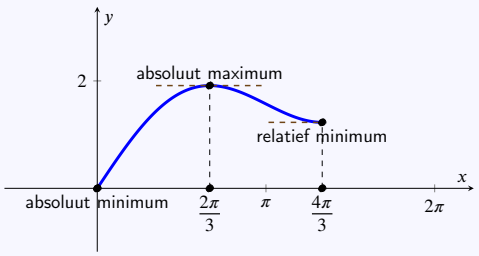
x		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{8\pi}{3}$		$\frac{10\pi}{3}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	rel. max	↘	rel. min	↗	rel. max	↘	rel. min	↗

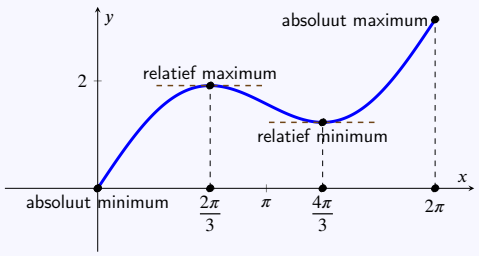


Deze functie heeft dus oneindig veel relatieve minima, oneindig veel relatieve maxima, maar geen absolute minima of maxima.

Merk op dat de situatie verandert als het domein van de functie wordt beperkt:

domein	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\mathbb{R}$	-	rel. max	rel. min	-
$[0, 4\pi/3]$	abs. min	abs. max	rel. min	-
$[0, 2\pi]$	abs. min	rel. max	rel. min	abs.max





Een *relatief* extremum is een *lokaal* begrip want het hangt enkel af van het gedrag van de functie in een (willekeurig kleine) omgeving van dat punt.

Een *absoluut* extremum is een *globaal* begrip: het hangt af van het gedrag op *het gehele domein*.

CC BY-NC-SA 4.0

20.12 Minimum-Maximumproblemen

Volgende voorbeelden illustreren extrema bij *vraagstukken*. Bepaal daarbij eerst de *veranderlijken*, en daarna de *functie* die minimaal of maximaal moet zijn. Leg ook het *domein* van deze functie vast. Soms zijn meerdere keuzes mogelijk.

Voorbeeld 20.12.5.

Toon aan: van alle rechthoeken met een gegeven oppervlakte heeft het vierkant de kleinste omtrek.

Uitwerking:

- **Kies veranderlijken**: noem de lengtes van de zijden van de rechthoek x en y, en de oppervlakte S.
- **Bepaal het domein**: omdat x en y lengtes voorstellen en $S \neq 0$ moet $x > 0$ en $y > 0$.
- **Bepaal de functie** die minimaal moet zijn:
  - Je zoekt het minimum van de omtrek, dus van $2x + 2y$. Deze uitdrukking bevat echter *twee* veranderlijken. We proberen één van de veranderlijken uit te drukken in termen van de andere.
  - Uit het gegeven halen we dat $S = x \cdot y$ dus $y = \dfrac{S}{x}$, en dus een **verband tussen de twee variabelen**.
  - Schrijf de omtrek als een functie van één variabele $f(x)$ (via het verband tussen beide variabelen):

$$f(x) = 2x + 2\frac{S}{x} = 2\left(x + \frac{S}{x}\right) \text{ met } x > 0$$

- **Zoek het (absolute) minimum van deze functie** f:
  - $f'(x) = 2\left(1 - \dfrac{S}{x^2}\right)$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{S}$
  - Omdat $x > 0$ behoud je alleen $\sqrt{S}$.
  - Met behulp van het tekenverloop onderzoek je of dit een (absoluut) minimum is.

x		$\sqrt{S}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$

  Nemen we $x > \sqrt{S}$, dan is $x^2 > S$, dus $1 > \dfrac{S}{x^2}$, dus $1 - \dfrac{S}{x^2} > 0$ en dus is f' groter dan 0. Vandaar het plusteken bij het tekenverloop van f'. Met een analoge redenering vind je het minteken voor $x < \sqrt{S}$.
  Omdat de functie $f(x)$ daalt tot $\sqrt{S}$ en dan stijgt, bereikt de omtrek f een *relatief minimum* in $x = \sqrt{S}$. Uit het functieverloop van $f(x)$ blijkt dat $x = \sqrt{S}$ ook het absolute minimum is.
- **Besluit**: Als $x = \sqrt{S}$ dan is ook $y = \sqrt{S}$, en de gezochte rechthoek is dus een vierkant.

Voorbeeld 20.12.6.

Een draad van 4 meter wordt in 2 stukken geknipt. Met één stuk wordt een vierkant gemaakt, met het andere een cirkel. We willen de ingesloten oppervlakte voor beide figuren samen maximaliseren. Hoeveel draad gebruik je best voor de cirkel?

Uitwerking:

- **Kies veranderlijken**: We noteren met x de omtrek van de cirkel, dan is $4-x$ de omtrek van het vierkant.
- **Domein:** Uit de opgave volgt dat $x \in [0, 4]$.
- **Bepaal de functie** die maximaal moet zijn:

CC BY-NC-SA 4.0

20.12 Minimum-Maximumproblemen

– De oppervlakte van een vierkant is het kwadraat van de zijde, en de omtrek is vier keer zijde. De oppervlakte van het vierkant is dus $\frac{(4-x)^2}{4^2} = \frac{(4-x)^2}{16}$

– De oppervlakte van een cirkel is π maal de straal in het kwadraat, de omtrek is 2π maal de straal. De straal is dus $\frac{x}{2\pi}$ en bijgevolg is de oppervlakte van de cirkel $\frac{x^2}{4\pi}$

We zoeken bijgevolg het maximum van $f(x) = \frac{(4-x)^2}{16} + \frac{x^2}{4\pi}$ met $x \in [0,4]$

- **Zoek het (absolute) maximum van deze functie** f:
  - $f'(x) = -\frac{2(4-x)}{16} + \frac{2x}{4\pi} = -\frac{1}{2} + (\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi})x$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{\pi+4}$
  - Hieruit mogen we niet meteen besluiten dat $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$ het gezochte maximum is:

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$	

Dus bereikt f een relatief *minimum* in $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$, en dit is bijgevolg **niet** het gezochte punt.

  - Uit het tekenverloop hierboven volgt dat de maxima van f te vinden zijn in de *randpunten van het domein* $[0,4]$. We berekenen de functiewaarden in deze randpunten om te weten waar het absolute maximum zich bevindt.

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$	$\frac{4}{\pi}$

- **Besluit:** We vinden het maximum van f in 4. De omtrek van de cirkel is dus 4 meter, deze van het vierkant 0. De ingesloten oppervlakte is maximaal als de draad *volledig voor de cirkel* gebruikt wordt.

Extra oefening.

Oefening20.12.1. De som van twee positieve getallen a en b is 100, waarbij $a \leq b$. Zoek deze getallen als

1. hun product maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

2. de som van hun kwadraten minimaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

3. de som van hun kwadraten maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

4. het product van het kwadraat van een getal met de derde macht van het andere getal maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

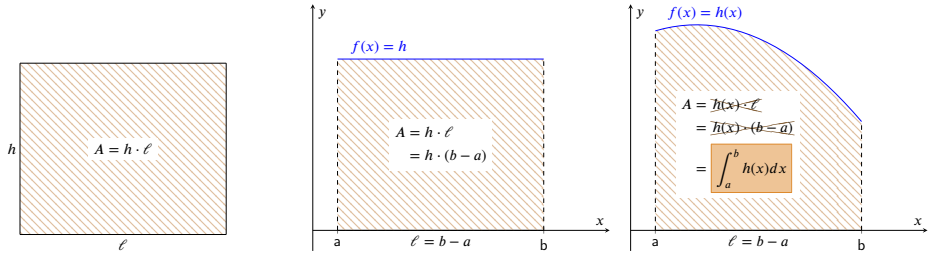
Module 21
Integralen (basisversie)

(Versie 2026/08/25H.51)

21.1 Definitie van integralen

Het rekenen met *integralen* is absoluut fundamenteel in vele wetenschappen. De uitvinding van de integraalrekening in de zeventiende eeuw heeft mee de basis gelegd van de wetenschappelijke en industriële revolutie die het leven op aarde de voorbije drie eeuwen enorm heeft veranderd. Het is niet overdreven te stellen dat zonder integralen mechanica, relativiteitstheorie, chemie, economie, Google, Facebook en Twitter allemaal ondenkbaar zouden zijn. U heeft het enorme voorrecht er zo dadelijk mee kennis te maken. Voor sommigen is dat herhaling, maar voor anderen is dit een volledig nieuw concept.

In zijn meest eenvoudige vorm is de integraalrekening een directe veralgemening van de formule voor de *oppervlakte van een rechthoek*. De formule $h \cdot \ell$ berekent de oppervlakte van een rechthoek met lengte ℓ en hoogte h. Integralen berekenen de oppervlakte van 'rechthoeken met een variërende hoogte':



De integraal $\int_a^b h(x)dx$ drukt dus de oppervlakte uit van de 'rechthoek' met bovenkant de functie $h(x)$. Wat wiskundiger uitgedrukt: de integraal is *de oppervlakte onder de grafiek* van een functie:

Definitie 21.1.1 (Bepaalde integraal)**.**

De **bepaalde integraal** van een continue, *positieve* functie f over een interval $[a, b]$, genoteerd als

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

is de *oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de grenzen $x = a$ en $x = b$.

We noemen a en b de **integratiegrenzen** en $[a, b]$ het **integratie-interval**.

Merk op dat deze bepaalde integraal dus enkel een naam en een notatie is voor een oppervlakte, en ons dus geenszins vooruit helpt om die oppervlakte ook te *berekenen*.

Gelukkig zijn wiskundigen er in geslaagd om een op het eerste zicht erg merkwaardig verband te leggen met de *omgekeerde bewerking van afleiden*. Dat leidt tot de zogenaamde **onbepaalde integralen** en is wat abstracter en minder motiverend dan oppervlaktes berekenen, maar het levert onmiddellijk krachtige rekenmethodes op.

De 'verzameling van alle functies die als afgeleide de functie f hebben' noemen we de **onbepaalde integraal** van de functie f en een wat formele maar niet zo erg belangrijke definitie gaat als volgt:

Definitie 21.1.2 (Onbepaalde integraal)**.**

De **onbepaalde integraal** van een functie $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, genoteerd $\int f(x)\,dx$, is de *verzameling van alle functies met als afgeleide* f. Deze functies zijn allemaal elkaar gelijk op een constante na en noteren we als

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{notatie}}{=} F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{met } F \text{ zodanig dat } F' = f.$$

CC BY-NC-SA 4.0

21.1 Definitie van integralen

We noemen $f(x)$ de **integrand**, x de **integratievariabele** en c de **integratieconstante**.
Het berekenen van een F zodat $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ noemt men het **integreren** van $f(x)$.
Een functie F zodat $F' = f$ noemt men ook een **primitieve functie** van f.

We zullen verder rekenregels bespreken om functies te integreren.

Omwille van de prachtige en erg krachtige **Hoofdstelling van de integraalrekening** is dat een zinvolle bezigheid, want daardoor kunnen we *bepaalde integralen effectief berekenen*:

de *bepaalde integraal* $\int_a^b f(x)dx$
(*interessant*, want de oppervlakte of meer algemeen
een product-met-een-verandererende-grootheid)
kan *berekend* worden door
een *onbepaalde integraal* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ met $F(x) = \int f(x)dx$
(*saai*, want wat abstract omgekeerde-van-afleiden maar wel *berekenbaar*).

Eigenschap 21.1.1 (Hoofdstelling van de integraalrekening)**.**

Als $\int f(x)dx = F(x) + c$ op een interval $[a, b]$ dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a) \qquad \overset{\text{notatie}}{=} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Met deze formule kan je een *bepaalde* integraal berekenen door de overeenkomende *onbepaalde* integraal te berekenen en dan de integratiegrenzen in te vullen.

Deze stelling en de rekenregels voor onbepaalde integralen laten spectaculaire berekeningen toe: de afgelegde weg bij variërende snelheden, de winst bij variërende verkoopprijzen, het aantal corona-slachtoffers bij variërende omstandigheden.

Voorbeeld 21.1.1. Bereken de afstand die een auto heeft afgelegd na 10 seconden als hij aan een constant snelheid van 90 km/u rijdt.

Uitwerking: In één uur zitten 3600 seconden (want 60 minuten van elk 60 seconden), en dus legt die auto in één seconde 90/3600 km af, of 90000/3600 = 900/36 = 25 m. Na 10 seconden heeft die auto dus 280 meter afgelegd.

Voorbeeld 21.1.2. Bereken de afstand die een auto heeft afgelegd na 10 seconden als hij in die 10 seconden optrekt van stilstand tot 100 km/u. Neem aan dat de versnelling lineair verloopt, dus na 1 seconde 10 km/u, na 2 seconden 20 km/u, na 3 sec 30 km/u en zo verder tot 100 km/u na 10 sec.

Uitwerking: De auto legt nu elke seconde een *verschillende* afstand af, en een eenvoudige toepassing van de regel van drie werkt nu niet meer om de totale afstand te berekenen. Het is duidelijk dat een optrekkende wagen aanzienlijk minder ver zal raken dan een wagen met de constante maximumsnelheid.

Na t seconden is de snelheid $10 \cdot t$ km/u, en je kan de afgelegde weg dan schrijven als

$$\int_0^{10} (10 \cdot t)dt$$

CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Basisintegralen

De onbepaalde integraal van een functie f is per definitie $\int f(x)dx = F(x)+c$ met $F' = f$. Dit betekent dat integreren en differentiëren elkaars inverse zijn. Voor een aantal functies is het zeer gemakkelijk om de onbepaalde integraal te vinden: namelijk voor de uitkomsten van de basisafgeleiden. Inderdaad, neem als voorbeeld $(\sin x)' = \cos x$. Stel dat je een functie F zoekt waarvan de afgeleide gelijk is aan het rechterlid, dus gelijk aan $f(x) = \cos x$. De formule voor de afgeleide zegt dan dat $F(x) = \sin x$ als afgeleide $f(x) = \cos x$ heeft. Het volstaat dus om de reeks basis*afgeleiden* van *rechts naar links* te lezen om een hele reeks basis*integralen* te vinden. In onderstaand overzicht is de afgeleide van het rechterlid steeds de integrand in het linkerlid.

Eigenschap 21.2.1 (Basisintegralen)**.** (met $c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}, r \neq -1, a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$)

$$\begin{array}{lcllcl}
\displaystyle\int 0\,dx & = & c & \displaystyle\int dx & = & x+c \\
\displaystyle\int x^r\,dx & = & \dfrac{1}{r+1}x^{r+1}+c & \displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x|+c \\
\displaystyle\int e^x\,dx & = & e^x+c & \displaystyle\int a^x\,dx & = & \dfrac{a^x}{\ln a}+c \\
\displaystyle\int \sin x\,dx & = & -\cos x+c & \displaystyle\int \cos x\,dx & = & \sin x+c \\
\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx & = & \tan x+c & \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx & = & -\cot x+c \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx & = & \mathrm{bgsin}\,x+c & \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx & = & \mathrm{bgtan}\,x+c
\end{array}$$

Opmerking 21.2.1.

Een *basisintegraal* uitrekenen is eenvoudig want die zoek je op in de tabel. Merk op dat je dus wel snel moet kunnen herkennen *of* een bepaalde integraal al dan niet een basisintegraal is. Je moet bijvoorbeeld geen berekeningsmethode zoeken voor $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$, want deze integraal staat in de tabel.

Voorbeeld 21.2.1. Basisintegralen:

(a) $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+c$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

(c) $\displaystyle\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2}+c = -\frac{1}{2x^2}+c$

(d) $\displaystyle\int 7^x\,dx = \frac{7^x}{\ln 7}+c$

De rekenregels voor som en scalaire veelvouden zijn analoog aan deze voor afgeleiden:

Eigenschap 21.2.2. Voor integreerbare functies f en g en $a, b \in \mathbb{R}$ gelden volgende formules:

$$\begin{array}{lcll}
\displaystyle\int af(x)\,dx & = & \displaystyle a\int f(x)\,dx & \text{(veelvoud)} \\
\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx & = & \displaystyle\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx & \text{(som)} \\
\displaystyle\int (af(x)+bg(x))\,dx & = & \displaystyle a\int f(x)\,dx+b\int g(x)\,dx & \text{(lineaire combinatie)}
\end{array}$$

De rekenregel voor de som noemt men ook *integratie door splitsing*.

CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Basisintegralen

Voorbeeld 21.2.2. $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$, met $c \in \mathbb{R}$.

Als we de uitwerking heel nauwkeurig zouden noteren krijgen we:

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\left(\int x\,dx\right) = 2\left(\frac{x^2}{2} + c\right) = x^2 + 2c = x^2 + c', \text{ met } c' \in \mathbb{R}.$$

We noteren dit echter korter, zonder expliciet $c' = 2c$ te stellen: $\int 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

We veralgemenen vorig voorbeeld: Als F een primitieve functie is van f, dan is

$$2\int f(x)\,dx = 2(F(x) + c) = 2F(x) + 2c, \quad c \in \mathbb{R}$$

We stellen $2c = c'$. Als c een willekeurige constante is, dan is $c' = 2c$ ook een willekeurige constante.

$$2\int f(x)\,dx = 2F(x) + c', \quad c' \in \mathbb{R}$$

Omdat zowel c als c' willekeurige constanten voorstellen kunnen we ook noteren dat

$$2\int f(x)\,dx = 2F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Opmerking 21.2.2.

Als in de functie f meerdere letters voorkomen (bijvoorbeeld zowel de letter t als x), dan is steeds één letter de integratieveranderlijke, en beschouwen we de andere letter(s) als constanten of parameters. Welke letter de integratieveranderlijke is wordt aangeduid door het symbool dx of dt:

$$\int (tx^2)\,dx \neq \int (tx^2)\,dt.$$

Immers, $\int (tx^2)\,dx = t\int x^2\,dx = \frac{tx^3}{3} + c$ en $\int (tx^2)\,dt = x^2\int t\,dt = \frac{x^2t^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Oefening 21.2.1. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\int x^{-2}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Basisintegraal $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ voor $r = -2$

2. $\int e^x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Dit is een basisintegraal.

3. $\int 8^x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Dit is een basisintegraal.

4. $\int x^3 \cdot \sqrt{x}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Basisintegralen

5. $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = 3$ en $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{bgtan}\,x + c$ is een basisintegraal.

6. $\int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = \frac{1}{2}$ en $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$ is een basisintegraal.

7. $\int 2^8 x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = 2^8$ en $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$.

8. $\int 2y\,dy = \ldots\ldots$

Uitwerking: We hebben hier enkel de letter x vervangen door y.

9. $\int ax\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is a een constante en $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met a een constante.

10. $\int tx\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is t is een constante.

11. $\int tx\,dt = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is t de integratievariabele en x dus een constante.

12. $\int \cos y\,dy = \ldots\ldots$

Uitwerking: Want $(\sin y)' = \cos y$. Dit is een basisintegraal.

13. $\int \sin t\,dt = \ldots\ldots$

Uitwerking: Want $(\cos t)' = -\sin t$. Dit is een basisintegraal.

14. $\int 2^{3x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Gebruik $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$. Dit kan ook met substitutie (zie verder).

15. $\int e^{2x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Gebruik $e^{2x} = (e^2)^x$ en $\ln(e^2) = 2$. Dit kan ook met substitutie (zie verder).

Merk op dat je ook kan schrijven $e^{2x} = (e^x)^2$, maar dan kan je toch nog *niet* de formule voor $\int x^2 dx$ toepassen.

CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Basisintegralen

Oefening 21.2.2. Bereken volgende onbepaalde integralen door splitsing:

1. $\int \left(3x^2 + 2x + 1\right)\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int \left(3x^2 + 2x + \cos x + 7^x\right)\, dx = \ldots\ldots$
3. $\int \dfrac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + 21}{x^3}\, dx = \ldots\ldots$

Soms moet je een beetje creatief zijn om door splitsing een integraal te schrijven als een som van basisintegralen:

Oefening 21.2.3. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int 1\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \ldots\ldots$

Waarschuwing 21.2.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- De onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen WEL:

  som $\displaystyle\int (\cos x + x^2)\, dx = \int \cos x\, dx + \int x^2\, dx = \sin x + \frac{x^3}{3} + c$

  constante factor $\displaystyle\int 3x^2\, dx = 3\int x^2\, dx = 3\,\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$

- Een onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen NIET:

  integraal van *product* $\displaystyle\int \cos x \cdot x^2\, dx = \cancel{\int \cos x\, dx \cdot \int x^2\, dx}$

  integraal van *samenstelling* $\displaystyle\cancel{\int (\cos x)^2\, dx = \frac{(\cos x)^3}{3} + c}$

  Er bestaan *geen algemene regels*, maar wel een aantal *technieken* die we verder zullen bespreken.

Oefening 21.2.4. Zijn volgende gelijkheden juist of fout? Verklaar.

1. Juist | Fout $\displaystyle\int (x \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int x dx\right) \cdot \left(\int x\, dx\right)$
2. Juist | Fout $\displaystyle\int (2 \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int 2 dx\right) \cdot \left(\int x\, dx\right)$
3. Juist | Fout $\displaystyle\int (2 \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} 2 \cdot \left(\int x\, dx\right)$
4. Juist | Fout $\displaystyle\int x^2\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int x\, dx\right)^2$

CC BY-NC-SA 4.0

21.3 Integratie door substitutie

Voorbeeld 21.3.1. Berekening van de integraal $\int (2x+5)^7\,dx$.

Uitwerking: De integraal $\int (2x+5)^7\,dx$ kan in principe berekend worden door de zevende macht uit te rekenen, ofwel met distributiviteit via $(2x+5)^7 = (2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)$, ofwel met het Binomium van Newton, en dan term per term te integreren. Dat kan, maar het is wel erg veel rekenwerk.

Je kan met wat nadenken in dit geval het uitwerken van de macht vermijden, door op te merken dat de integrand een 7-de macht is, en dus een klein beetje lijkt op de basisintegraal

$$\int u^7\,du = \frac{u^8}{8} + c, \text{ met } u = 2x+5.$$

Als we in $u^7\,du$ de u vervangen door $2x+5$, krijgen we

$$u^7\,du = (2x+5)^7\,d(2x+5) = (2x+5)^7\cdot 2\,dx,$$

waar we gebruik maakten van de eigenschap $df = f'(x)dx$ en dus $d(2x+5) = 2dx + 0 = 2dx$. De gelijkheid $u^7\,du = (2x+5)^7\cdot 2\,dx$ integreren geeft

$$\int u^7\,du = \int (2x+5)^7\cdot 2\,dx.$$

Hierbij lijkt het rechterlid erg op de gezochte integraal, en het linkerlid is eenvoudig uit te rekenen. Dus:

$$\int (2x+5)^7\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+5)^7\,2dx \overset{\frac{d}{dx}(2x+5)=2}{=} \frac{1}{2}\int (2x+5)^7\,d(2x+5) \overset{2x+5=u}{=} \frac{1}{2}\int u^7\,du = \frac{1}{2}\frac{u^8}{8}+c \overset{u=2x+5}{=} \frac{(2x+5)^8}{16}+c$$

We hebben dus - met wat geluk weliswaar - de integraal $\int (2x+5)^7\,dx$ uitgerekend *zonder* de zevende macht van $2x+5$ te berekenen.

De uitkomst is al direct ontbonden in factoren, dat is veel bondiger en duidelijker dan wanneer we de zevende macht hadden uitgerekend en de resulterende veelterm van graad 7 term per term hadden geïntegreerd. Als je ook zou geïnteresseerd zijn in nulpunten van de uitkomst is deze ontbinding in factoren bijzonder nuttig.

Bovenstaand voorbeeld leidt onmiddellijk tot volgende meer algemene regel

Eigenschap 21.3.1 (Substitutieregel)**.**

Omdat $\frac{d}{dx}(ax+b) = a$ en dus $d(ax+b) = a\,dx$ of ook $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$ geldt dat

$$\boxed{\int (ax+b)^n\,dx} = \frac{1}{a}\int (ax+b)^n\,d(ax+b) \boxed{= \frac{1}{a}\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}}$$

Dus: als je een macht van $ax+b$ integreert, komt er een extra factor $\frac{1}{a}$ in de uitkomst.

Oefening 21.3.1. Bereken volgende integralen:

1. $\int (5x+7)^6\,dx = \ldots\ldots$ **2.** $\int (7x+6)^5\,dx = \ldots\ldots$

Merk op dat dezelfde techniek ook kan worden toegepast voor moeilijkere integralen:

CC BY-NC-SA 4.0

21.3 Integratie door substitutie

Voorbeeld 21.3.2. Uitdaging: bereken de integraal $\int \sin(x)\cos(x)dx$.

Uitwerking:

Omdat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x)$, en dus $d\sin(x) = \cos(x)\,dx$ kan je met $u = \sin(x)$ schrijven

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = \int \sin(x)\,d\sin(x) = \int u\,du = \frac{1}{2}v^2 + c = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$$

Sommige slimmeriken zullen opmerken dat je even goed $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x)$ had kunnen gebruiken om dan met $v = \cos(x)$ te schrijven

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = -\int \cos(x)\,d\cos(x) = -\int u\,du = -\frac{1}{2}u^2 + c = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + c$$

wat *een andere uitkomst* lijkt te geven.

Andere slimmeriken herkennen de formule $\sin 2x = 2\sin(x)\cos(x)$, en rekenen als volgt:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(x)dx &= \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \sin(2x)\,d(2x) \\ &= \frac{1}{4}\int \sin(u)\,du \\ &= -\frac{1}{4}\cos(u) + c \\ &= -\frac{1}{4}\cos(2x) + c\end{aligned}$$

wat *nog een andere uitkomst* geeft.

Dit lijkt een ernstig probleem: afhankelijk *hoe* je iets berekent krijg je *een andere uitkomst*.

Gelukkig moet je echter maar even nadenken om vast te stellen dat wegens $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ en dus $\cos^2(x) = -\sin^2(x) + 1$ de eerste uitkomsten omwille van de willekeurige constante c eigenlijk toch gelijk zijn!

En gelukkig is ook $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$, en dus is

$$-\frac{1}{4}\cos(2x) + c = -\frac{1}{4}(2\cos^2(x) - 1) + c = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + (c + \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + c_1$$

Iedereen kan hier dus vaststellen dat de wiskunde goed en mooi in elkaar zit: er zijn hier drie manieren om hetzelfde te berekenen, maar op het eerste gezicht geven die een verschillend resultaat. Dank zij de goniometrische formules en het gelukkige feit dat we voldoende voorzichtig zijn geweest om de integraal maar 'op een constante na' vast te leggen, komt alles toch in orde.

CC BY-NC-SA 4.0

21.4 Partiële integratie

De *productregel voor afgeleiden* leidt tot de interessante methode van '*partiële integratie*'.

Volgend inleidend voorbeeld berekent de integraal van een speciaal gekozen product:

Voorbeeld 21.4.1. Bereken de integraal $\int xe^x\,dx$.

Uitwerking: De productregel voor afgeleiden toepassen op het product $x \cdot e^x$ geeft

$$\begin{aligned} d(x \cdot e^x) &= (dx) \cdot e^x + x(de^x) \\ &= e^x dx + xe^x dx \end{aligned}$$

en de gelijkheid $d(x \cdot e^x) = e^x dx + xe^x dx$ integreren levert

$$\int d(x \cdot e^x) = \int e^x dx + \int xe^x dx.$$

De eerste twee integralen zijn direct te berekenen en wat overblijft is de gezochte integraal:

$$xe^x + c = e^x + \int xe^x dx$$

en bijgevolg is

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$$

We hebben dus - met wat geluk weliswaar - de integraal $\int xe^x\,dx$ uitgerekend.

De techniek van partiële integratie veralgemeent dit voorbeeld.

De regel voor partiële integratie volgt onmiddellijk uit de regel voor de afgeleide van het product van twee functies f en u.

$$(f(x) \cdot u(x))' = f'(x) \cdot u(x) + f(x) \cdot u'(x)$$

Inderdaad, als we beide leden integreren krijgen we

$$\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = \int f'(x) \cdot u(x)\,dx + \int f(x) \cdot u'(x)\,dx.$$

Na termen van lid veranderen krijgen we

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = \int (f(x) \cdot u(x))'\,dx - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Omdat $\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = f(x) \cdot u(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ wordt dit

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x) \cdot u(x) - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Dit is de formule voor partiële integratie, zo genoemd omdat de integraal $\int f(x) \cdot u'(x)\,dx$ gedeeltelijk, dus partieel, is geïntegreerd: we hebben al een deel van de primitieve functie, namelijk $f(x) \cdot u(x)$, en er blijft nog een ander - hopelijk eenvoudiger te berekenen - deel over, namelijk $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$. We hebben $f(x) \cdot u(x)$ genoteerd en niet $f(x) \cdot u(x) + c$, omdat het resultaat van de berekening van de tweede term van het rechterlid, $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$, ook slechts op een constante na bepaald is.

CC BY-NC-SA 4.0

21.4 Partiële integratie

Eigenschap 21.4.1 (Partiële integratie).

Omdat $d(u \cdot f) = u \cdot df + f \cdot du$ (kettingregel), en dus $\int d(u \cdot f) = \int u \cdot df + \int f \cdot du$ kan de integraal van het product $\int f(x)u'(x)\,dx$ worden geschreven als

$$\int f(x)u'(x)\,dx = u(x) \cdot f(x) - \int u(x) \cdot f'(x)\,dx$$

of korter genoteerd:

$$\int f\,du = f \cdot u - \int u\,df\,.$$

In oefeningen wordt dikwijls $\overset{P.I.}{=}$ geschreven om het gebruik van partiële integratie aan te duiden.

Opmerking 21.4.1. Men schrijft de regel voor partiële integratie ook dikwijls met functies f en g:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

of met functies u en v waarbij $du = u'(x)dx$ en $dv = v'(x)dx$:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

De uitdaging bij partiële integratie is de integrand te schrijven als een product $f(x) \cdot w(x)$ zodat

- de factor $w(x)$ makkelijk kan worden geïntegreerd. Je vindt $W(x)$ zodat
$$\int w(x)\,dx = W(x) + c$$
- ook $f'(x) \cdot W(x)$ kan worden geïntegreerd. Je vindt $H(x)$ zodat
$$\int W(x)f'(x)\,dx = H(x) + c.$$

In dat geval is de integraal $\int f(x)w(x)\,dx$ berekend:

$$\int f(x)w(x)\,dx = f(x) \cdot W(x) - H(x) + c.$$

Voorbeeld 21.4.2. Bereken $\int xe^x\,dx$.

Gebruik de formule $\int f\,du = f \cdot u - \int u\,df$ met $f(x) = x$ en $du = u'(x)\,dx = e^x\,dx$. Dan geldt

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x\,dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{d(e^x)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{e^x}_{u(x)}\underbrace{dx}_{df}$$
$$= xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

21.4 Partiële integratie

De keuze van f en u ligt niet vast. Stel dat we hier een andere keuze hadden gemaakt voor f en u, namelijk $f(x) = e^x$ en $u'(x) = x$. Dan is $f'(x) = e^x$ en $u(x) = \frac{x^2}{2}$. Partiële integratie geeft dan

$$\int xe^x \, dx \overset{P.I.}{=} e^x \, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 e^x \, dx.$$

In de tweede integraal is de macht van x *verhoogd* van 1 naar 2. Dus de x in de eerste integraal wordt een x^2 in de tweede integraal. Met deze keuze van f en u wordt de nieuwe integraal *nog ingewikkelder dan de oorspronkelijke*. Hoewel de gelijkheid correct is, helpt ze niet. *Een goede keuze* voor f en u is dus erg belangrijk.

Voorbeeld 21.4.3. Bereken $\int x \sin x \, dx$.

Uitwerking: Gebruik de formule $\int f \, du = f \cdot u - \int u \, df$ met $f(x) = x$ en $du = u'(x) \, dx = \sin x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x \, dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{d(-\cos x)}_{du} &\overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} \underbrace{dx}_{df} \\
&= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\
&= -x \cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 22
Integralen

(Versie 2026/08/25H.51)

22.1 Definitie onbepaalde integraal

We zetten een volgende stap in de wiskundige processie van *definieer-iets-nieuws* gevolgd door *en-keer-het-proces-om*. We leerden optellen, en kort daarna aftrekken. We leerden vermenigvuldigen, en kort daarna delen. Hetzelfde voor kwadrateren gevolgd door vierkantswortel trekken, en exponentiële functies gevolgd door logaritmische functies. Nu zullen we leren het proces van afgeleiden berekenen *omkeren*: we zoeken niet de afgeleide f' van een functie f, we zoeken van welke functie F deze functie f de afgeleide *is*.

Gegeven een functie f, zoeken we dus (alle) functies F zodat $F' = f$. Later zullen we uitleggen *waarom* deze omkering-van-de-afgeleide een erg belangrijk begrip is in de wiskunde en in alle wetenschappen.

Voorbeeld 22.1.1.

Geef voor volgende functies f telkens één of meerdere functies F zodat $F' = f$.

1. Een functie met als afgeleide functie $f : x \mapsto e^x$ is $F : x \mapsto e^x$

Uitwerking: Inderdaad, want $(e^x)' = e^x$. Merk op dat ook $(e^x + 7)' = e^x$. De afgeleide van elke functie $F_c : x \mapsto F_c(x) = e^x + c$, met $c \in \mathbb{R}$ is telkens gelijk aan $f : x \mapsto f(x) = e^x$.

2. Een functie met als afgeleide functie $f : x \mapsto x$ is $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

Uitwerking: Inderdaad, want $(\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}2x = x$. Merk op dat ook $(\frac{1}{2}x^2 + 3)' = x$. De afgeleide van elke functie $F_c : x \mapsto F_c(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$, met $c \in \mathbb{R}$ is telkens gelijk aan $f : x \mapsto f(x) = x$.

We hebben een nieuwe naam nodig voor 'een functie waarvan de afgeleide f is'. We noemen dergelijke functie een *primitieve* functie van f, waarbij het woord primitief gebruikt wordt in de betekenis van *oorspronkelijk*. Een primitieve functie is dus een *oorspronkelijke* functie waarvan je vertrokken bent bij het afleiden.

Definitie 22.1.1 (Primitieve functie)**.**

Een **primitieve functie** van een functie f is een functie F waarvoor geldt dat

$$F' = f.$$

Voorbeeld 22.1.2.

1. $x \mapsto e^x$ is een primitieve functie van $x \mapsto e^x$

2. $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ is een primitieve functie van $x \mapsto x$

3. $x \mapsto x^3$ is een primitieve functie van $x \mapsto 3x^2$

4. $x \mapsto 42x$ is een primitieve functie van $x \mapsto 42$

Opmerking 22.1.1.

Volgens deze definitie kunnen we ook zeggen dat een afleidbare functie f een primitieve functie is van f'. Bijvoorbeeld $f(x) = x^3$ is een primitieve functie van $f'(x) = 3x^2$.

We moeten er rekening mee houden dat een functie meerdere primitieve functies kan hebben. Uit de rekenregels van afgeleiden volgt dat twee functies die op een constante na gelijk zijn aan elkaar dezelfde afgeleide hebben: $(F + c)' = F' + c' = F'$. Als F een primitieve functie is van f, dus als $F' = f$, dan geldt ook $(F + c)' = F' = f$. Bijgevolg zijn ook de functies $F + c$ allemaal primitieve functies van f. Zijn dit *alle* primitieve functies van f? Het antwoord is ja, zoals blijkt uit volgende eigenschap:

CC BY-NC-SA 4.0

22.1 Definitie onbepaalde integraal

Eigenschap 22.1.1 (Functies met gelijke afgeleiden zijn gelijk op een constante na)**.**

Twee afleidbare functies F_1 en F_2 op een interval I met *gelijke afgeleiden*

$$F_1'(x) = F_2'(x) \quad \text{voor alle } x \in I,$$

zijn *gelijk op een constante na*. Dat betekent dat er een constante c bestaat zodat

$$F_1(x) = F_2(x) + c \quad \text{voor alle } x \in I.$$

Met *één* primitieve functie F van f kennen we dus *alle* primitieve functies van f: ze zijn allemaal van de vorm $F + c$, met $c \in \mathbb{R}$. Omdat er geen *unieke* primitieve functie is van f, spreken we over de *verzameling* van alle primitieve functies van f:

Definitie 22.1.2 (Onbepaalde integraal)**.**

De **onbepaalde integraal** van een functie f, genoteerd $\int f(x)\,dx$, is de *verzameling van alle primitieve functies* van f. Omdat alle primitieve functies van f aan elkaar gelijk zijn op een constante noteren we ook

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{notatie}}{=} F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

met F een (willekeurige) primitieve functie van f.

We noemen $f(x)$ de **integrand**, x de **integratievariabele** en c de **integratieconstante**.

Het zoeken (of 'berekenen') van $\int f(x)\,dx$ noemt men het **primitiveren** of **integreren** van $f(x)$.

Voorbeeld 22.1.3.

1. $\int e^x\,dx = e^x + c$
2. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$
3. $\int 3x^2\,dx = x^3 + c$
4. $\int 42\,dx = 42x + c$

Voorbeeld 22.1.4.

De integratievariabele wordt niet steeds met de letter x genoteerd, we kunnen ook schrijven dat

- $\int e^\theta\,d\theta = e^\theta + c$
- $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + c$
- $\int 3t^2\,dt = t^3 + c$
- $\int 42\,dR = 42R + c$

Opmerking 22.1.2.

Een primitieve functie is dus maar bepaald op een constante na. Via een trucje wordt dat probleem hier omzeild door de onbepaalde integraal de *verzameling* te noemen van al deze primitieve functies. In de praktijk denkt iedereen over de onbepaalde integraal als 'een functie die slechts op een constante na bepaald is', of 'een functie waar je steeds een willekeurige constante bij kan optellen'.

Afleiden en integreren heffen elkaar op.

Inderdaad, als we een functie f eerst afleiden en deze afgeleide dan integreren krijgen we (op een constante

CC BY-NC-SA 4.0

22.1 Definitie onbepaalde integraal

na) terug f:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

omdat f een primitieve functie is van f'.

Als we f eerst integreren

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \text{ met } F \text{ een primitieve functie van } f, \quad c \in \mathbb{R}$$

en dan het resultaat weer afleiden, krijgen we terug f :

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x).$$

Dit vatten we samen in volgende eigenschap:

Eigenschap 22.1.2 (Afleiden en integreren heffen elkaar op)**.**

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,dx = f(x)$$

We bekijken deze eigenschap ook in de notatie met differentialen:

Opmerking 22.1.3 (Werken met differentialen)**.**

De uitdrukking dx (of dt etc.) wordt in sommige cursussen en handboeken beschouwd als een symbool zonder "echte betekenis", dat enkel de naam van de integratievariabele aangeeft.

Men kan het echter ook beschouwen als een *differentiaal*. Eén van de vele mogelijke definities zegt dat dx een 'basisdifferentiaal' is, en dat per definitie voor een afleidbare functie f de differentiaal van f gelijk is aan

$$df \overset{\text{def}}{=} f'(x)dx.$$

Dit begrip, of deze notatie, leidt tot een kortere formulering van de eigenschappen van integralen. Bij de studie van de *bepaalde* integraal, zal de differentiaal ook een concretere betekenis krijgen.

Door beide leden van $df \overset{\text{def}}{=} f'(x)dx$ te integreren, krijgen we de gelijkheid

$$\int df = \int f'(x)dx$$

en omdat $\int f'(x)dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$ volgt dat

$$\int df = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.1 Definitie onbepaalde integraal

Bijgevolg heft de integraal de differentiaal dus op, op een integratieconstante na.

Omgekeerd, links en rechts de differentiaal nemen in de formule $\int f(x)dx = F(x) + c$ geeft:

$$d\int f(x)dx = d(F(x)+c) = dF = F'(x)dx = f(x)dx$$

en dus

$$\boxed{d\int f(x)dx = f(x)dx}$$

Bijgevolg heft de differentiaal de integraal op (waarbij geen integratieconstante optreedt).

Opmerking 22.1.4.

We kunnen dit process grafisch voorstellen (waarbij we de integratieconstante negeren):

$$\underset{\text{(integraal)}}{\int f(x)dx} \underset{\text{integreren}}{\overset{\text{afleiden}}{\rightleftarrows}} \underset{\text{(functie)}}{f} \underset{\text{integreren}}{\overset{\text{afleiden}}{\rightleftarrows}} \underset{\text{(afgeleide functie)}}{f'}$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.2 Basisintegralen

De onbepaalde integraal van een functie f is per definitie $\int f(x)dx = F(x)+c$ met $F' = f$. Dit betekent dat integreren en differentiëren elkaars inverse zijn. Voor een aantal functies is het zeer gemakkelijk om de onbepaalde integraal te vinden: namelijk voor de uitkomsten van de basisafgeleiden. Inderdaad, neem als voorbeeld $(\sin x)' = \cos x$. Stel dat je een functie F zoekt waarvan de afgeleide gelijk is aan het rechterlid, dus gelijk aan $f(x) = \cos x$. De formule voor de afgeleide zegt dan dat $F(x) = \sin x$ als afgeleide $f(x) = \cos x$ heeft. Het volstaat dus om de reeks basis*afgeleiden* van *rechts naar links* te lezen om een hele reeks basis*integralen* te vinden. In onderstaand overzicht is de afgeleide van het rechterlid steeds de integrand in het linkerlid.

Eigenschap 22.2.1 (Basisintegralen)**.** (met $c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}, r \neq -1, a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$)

$$\begin{aligned}
\int 0\,dx &= c & \int dx &= x + c \\
\int x^r\,dx &= \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c & \int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + c \\
\int e^x\,dx &= e^x + c & \int a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + c & \int \cos x\,dx &= \sin x + c \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x + c & \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx &= -\cot x + c \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \text{bgsin}\, x + c & \int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \text{bgtan}\, x + c
\end{aligned}$$

Opmerking 22.2.1.

Een *basisintegraal* uitrekenen is eenvoudig want die zoek je op in de tabel. Merk op dat je dus wel snel moet kunnen herkennen *of* een bepaalde integraal al dan niet een basisintegraal is. Je moet bijvoorbeeld geen berekeningsmethode zoeken voor $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$, want deze integraal staat in de tabel.

Voorbeeld 22.2.1. Basisintegralen:

(a) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

(b) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

(c) $\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$

(d) $\int 7^x\,dx = \frac{7^x}{\ln 7} + c$

De rekenregels voor som en scalaire veelvouden zijn analoog aan deze voor afgeleiden:

Eigenschap 22.2.2. Voor integreerbare functies f en g en $a, b \in \mathbb{R}$ gelden volgende formules:

$$\begin{aligned}
\int af(x)\,dx &= a\int f(x)\,dx && \text{(veelvoud)} \\
\int (f(x)+g(x))\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx && \text{(som)} \\
\int (af(x)+bg(x))\,dx &= a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx && \text{(lineaire combinatie)}
\end{aligned}$$

De rekenregel voor de som noemt men ook *integratie door splitsing*.

CC BY-NC-SA 4.0

22.2 Basisintegralen

Voorbeeld 22.2.2. $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$, met $c \in \mathbb{R}$.

Als we de uitwerking heel nauwkeurig zouden noteren krijgen we:

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\left(\int x\,dx\right) = 2\left(\frac{x^2}{2} + c\right) = x^2 + 2c = x^2 + c', \text{ met } c' \in \mathbb{R}.$$

We noteren dit echter korter, zonder expliciet $c' = 2c$ te stellen: $\int 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

We veralgemenen vorig voorbeeld: Als F een primitieve functie is van f, dan is

$$2\int f(x)\,dx = 2(F(x) + c) = 2F(x) + 2c, \quad c \in \mathbb{R}$$

We stellen $2c = c'$. Als c een willekeurige constante is, dan is $c' = 2c$ ook een willekeurige constante.

$$2\int f(x)\,dx = 2F(x) + c', \quad c' \in \mathbb{R}$$

Omdat zowel c als c' willekeurige constanten voorstellen kunnen we ook noteren dat

$$2\int f(x)\,dx = 2F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Opmerking 22.2.2.

Als in de functie f meerdere letters voorkomen (bijvoorbeeld zowel de letter t als x), dan is steeds één letter de integratieveranderlijke, en beschouwen we de andere letter(s) als constanten of parameters. Welke letter de integratieveranderlijke is wordt aangeduid door het symbool dx of dt:

$$\int (tx^2)\,dx \neq \int (tx^2)\,dt.$$

Immers, $\int (tx^2)\,dx = t\int x^2\,dx = \frac{tx^3}{3} + c$ en $\int (tx^2)\,dt = x^2\int t\,dt = \frac{x^2t^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Oefening 22.2.1. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\int x^{-2}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Basisintegraal $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ voor $r = -2$

2. $\int e^x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Dit is een basisintegraal.

3. $\int 8^x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Dit is een basisintegraal.

4. $\int x^3 \cdot \sqrt{x}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

22.2 Basisintegralen

5. $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = 3$ en $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{bgtan}\,x + c$ is een basisintegraal.

6. $\int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = \frac{1}{2}$ en $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$ is een basisintegraal.

7. $\int 2^8 x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = 2^8$ en $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$.

8. $\int 2y\,dy = \ldots\ldots$

Uitwerking: We hebben hier enkel de letter x vervangen door y.

9. $\int ax\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is a een constante en $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met a een constante.

10. $\int tx\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is t is een constante.

11. $\int tx\,dt = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is t de integratievariabele en x dus een constante.

12. $\int \cos y\,dy = \ldots\ldots$

Uitwerking: Want $(\sin y)' = \cos y$. Dit is een basisintegraal.

13. $\int \sin t\,dt = \ldots\ldots$

Uitwerking: Want $(\cos t)' = -\sin t$. Dit is een basisintegraal.

14. $\int 2^{3x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Gebruik $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$. Dit kan ook met substitutie (zie verder).

15. $\int e^{2x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Gebruik $e^{2x} = (e^2)^x$ en $\ln(e^2) = 2$. Dit kan ook met substitutie (zie verder).

Merk op dat je ook kan schrijven $e^{2x} = (e^x)^2$, maar dan kan je toch nog *niet* de formule voor $\int x^2 dx$ toepassen.

CC BY-NC-SA 4.0

22.2 Basisintegralen

Oefening 22.2.2. Bereken volgende onbepaalde integralen door splitsing:

1. $\int \left(3x^2 + 2x + 1\right)\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int \left(3x^2 + 2x + \cos x + 7^x\right)\, dx = \ldots\ldots$
3. $\int \dfrac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + 21}{x^3}\, dx = \ldots\ldots$

Soms moet je een beetje creatief zijn om door splitsing een integraal te schrijven als een som van basisintegralen:

Oefening 22.2.3. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int 1\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \ldots\ldots$

Waarschuwing 22.2.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- De onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen WEL:

  som $\displaystyle\int (\cos x + x^2)\, dx = \int \cos x\, dx + \int x^2\, dx = \sin x + \frac{x^3}{3} + c$

  constante factor $\displaystyle\int 3x^2\, dx = 3\int x^2\, dx = 3\,\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$

- Een onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen NIET:

  integraal van *product* $\displaystyle\int \cos x \cdot x^2\, dx = \int \cos x\, dx \cdot \int x^2\, dx$

  integraal van *samenstelling* $\displaystyle\int (\cos x)^2\, dx = \frac{(\cos x)^3}{3} + c$

  Er bestaan *geen algemene regels*, maar wel een aantal *technieken* die we verder zullen bespreken.

Oefening 22.2.4. Zijn volgende gelijkheden juist of fout? Verklaar.

1. Juist | Fout $\displaystyle\int (x \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int x dx\right) \cdot \left(\int x\, dx\right)$
2. Juist | Fout $\displaystyle\int (2 \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int 2 dx\right) \cdot \left(\int x\, dx\right)$
3. Juist | Fout $\displaystyle\int (2 \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} 2 \cdot \left(\int x\, dx\right)$
4. Juist | Fout $\displaystyle\int x^2\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int x\, dx\right)^2$

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Integratie door substitutie

We leggen in de voorbeelden die volgen integratie door substitutie telkens uit aan de hand van twee verschillende schrijfwijzes. De eerste schrijfwijze is eenvoudiger om toe te passen. Het volstaat dat je deze schrijfwijze kan gebruiken. Indien je echter gewoon bent om de tweede schrijfwijze te gebruiken, dan kan je deze telkens ook nalezen in de voorbeelden.

Voorbeeld 22.3.1. Berekening van de integraal $\int \cos 3x \, dx$.

We weten dat $\int \cos x \, dx = \sin x + c$, want $(\sin x)' = \cos x$. We stellen ons nu de vraag waaraan $\int \cos 3x \, dx$ gelijk is.

- Merk op dat we de 3 *niet* uit de cosinus kunnen halen, want $\cos 3x \neq 3 \cos x$.
- We kunnen ook niet gewoon x vervangen door $3x$ in $\int \cos x \, dx = \sin x + c$, want $\int \cos 3x \, dx \neq \sin 3x + c$. Volgens de kettingregel is de afgeleide van $\sin 3x$ immers gelijk aan $3 \cos 3x$, en dus niet gelijk aan $\cos 3x$.

Om deze onbepaalde integraal correct uit te rekenen gaan we niet x maar $3x$ als integratievariabele nemen, om over te gaan tot een basisintegraal. Dit wordt de substitutiemethode genoemd. In de eerste schrijfwijze wordt expliciet de substitutie $u = 3x$ uitgevoerd. In de tweede schrijfwijze wordt er geen nieuwe naam gegeven aan $3x$, maar wordt de integratievariabele achter de d herschreven, wat mogelijk is omdat $dx = \frac{1}{3} \, d(3x)$.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = 3x$, dan is $du = d(3x) = 3 \, dx$ (want $df = f'(x)dx$), dus $dx = \frac{1}{3} \, du$. Substitueer $u = 3x$ en $dx = \frac{1}{3} \, du$ in $\int \cos 3x \, dx$, dan vind je

$$\int \cos 3x \, dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{3} \, du = \frac{1}{3} \int \cos u \, du = \frac{1}{3} \sin u + c = \frac{1}{3} \sin 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Door het uitvoeren van deze substitutie hebben we $\int \cos 3x \, dx$ herschreven als de basisintegraal $\frac{1}{3} \int \cos u \, du$.

Schrijfwijze 2:

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x \, d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

We kunnen dit veralgemenen tot $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$, met $a \in \mathbb{R}_0$.

In het vorige voorbeeld hebben we een eenvoudige substitutie uitgevoerd van de vorm $u = ax$. In het volgende voorbeeld bekijken we een substitutie van de vorm $u = ax + b$.

Voorbeeld 22.3.2. Berekening van de integraal $\int (2x + 5)^7 \, dx$.

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Integratie door substitutie

De integraal $\int (2x+5)^7\,dx$ kan in principe berekend worden door de zevende macht uit te rekenen, ofwel met distributiviteit via $(2x+5)^7 = (2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)$, ofwel met het Binomium van Newton, en dan term per term te integreren. Dat kan, maar het is wel erg veel rekenwerk.

Je kan het uitwerken van de macht vermijden, door op te merken dat de integrand een beetje lijkt op de basisintegraal

$$\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + c$$

Het is fout om in bovenstaande uitdrukking x gewoon te vervangen door $2x+5$, want $\int (2x+5)^7\,dx \neq \frac{(2x+5)^8}{8} + c$. Volgens de kettingregel is de afgeleide van $\frac{(2x+5)^8}{8}$ immers gelijk aan $2(2x+5)^7$, en dus niet gelijk aan $(2x+5)^7$.

Om rekening te houden met de kettingregel gaan we $u = 2x+5$ als integratievariabele nemen en voeren we deze substitutie uit als volgt:

Schrijfwijze 1:

Stel $u = 2x+5$, dan is $du = d(2x+5) = 2dx$, dus $dx = \frac{1}{2}du$. Dit substitueren we in $\int (2x+5)^7\,dx$:

$$\int (2x+5)^7\,dx = \int u^7\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^7\,du = \frac{1}{2}\frac{u^8}{8} + c = \frac{1}{16}(2x+5)^8 + c$$

Schrijfwijze 2:

$$\int (2x+5)^7\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+5)^7\,d(2x+5) = \frac{1}{2}\frac{(2x+5)^8}{8} + c = \frac{1}{16}(2x+5)^8 + c$$

De uitkomst is al direct ontbonden in factoren, dat is veel bondiger en duidelijker dan wanneer we de zevende macht hadden uitgerekend en de resulterende veelterm van graad 7 term per term hadden geïntegreerd. Als je ook zou geïnteresseerd zijn in nulpunten van de uitkomst is deze ontbinding in factoren zeker nuttig.

In volgende oefening kan je telkens de integraal berekenen met een eenvoudige substitutie van de vorm $u = ax$ of $u = ax + b$.

Oefening 22.3.1. Bereken volgende integralen:

1. $\int e^{2x}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int 2^{3x}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{4}{2x-3}\,dx = \ldots\ldots$

We kijken nu naar de algemene regel voor *integratie door substitutie*, die steunt op de *kettingregel voor afgeleiden*.

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Integratie door substitutie

Eigenschap 22.3.1 (Substitutieregel)**.**

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* (dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$)

van een *samengestelde* functie (dus $h_1(x) = f(u(x))$)

met de *afgeleide* van de *binnenste* functie (dus $h_2(x) = u'(x)$),

dan kunnen we de integraal reduceren tot

de *integraal van de buitenste functie* (dus $\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$).

In een formule: voor reële, afleidbare functies f en u waarvoor $f \circ u$ bestaat geldt

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))\,du(x) = \int f(u)\,du.$$

Het begrip 'substitutie' betekent 'vervanging' (denk aan het Frans: *substituer* of het Engels: *to substitute*) en duidt aan dat we de integratievariabele (vaak x) **vervangen** door een *nieuwe* 'variabele' (zeg u, die dus zelf een functie is van de *oorspronkelijke* variabele x: $u = u(x)$).

In een weliswaar tamelijk specifiek geval laat de substitutieregel dus toe om *een product in de integrand* weg te werken: namelijk op voorwaarde dat we het product kunnen beschouwen als het product van een samengestelde functie en van een afgeleide van de juiste functie (dus van de binnenste functie van de samenstelling). Dit proces is bovendien enkel zinvol als we vervolgens de resulterende integraal $\int f(u)\,du$ kunnen berekenen, bijvoorbeeld omdat het een basisintegraal is. We zullen ook voorbeelden tegenkomen waar de substitutieregel gebruikt wordt wanneer de integrand het quotiënt van 2 functies is. Een quotiënt kan je immers schrijven als een product: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Om de substitutieregel in de praktijk te kunnen toepassen, is het erg belangrijk om enerzijds gemakkelijk samengestelde functies te kunnen herkennen, en bovendien ook gemakkelijk de afgeleiden van mogelijke *binnenste* functies te herkennen in de overblijvende factor.

Ter herhaling bestudeer je volgend voorbeeld:

Voorbeeld 22.3.3. Herken volgende uitdrukkingen als samenstellingen van twee functies:

1. $\sin x^2 = f(g(x))$ met $f(x) = \sin x$ en $g(x) = x^2$

2. $\sin^2 x = f(g(x))$ met $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sin x$

3. $(x+2)^2 = f(g(x))$ met $f(x) = x^2$ en $g(x) = x + 2$

4. $x^2 + 2 = f(g(x))$ met $f(x) = x + 2$ en $g(x) = x^2$

Merk op dat niet *alle* uitdrukkingen als samenstellingen moeten beschouwd worden:

(a) $\sin x \cos x$

(b) $x^2 \sin x$

(c) $\sin x + \cos x$

(d) $\cos^2 x + \sin^2 x$

zijn eerder *sommen* of *producten* dan samenstellingen.

Merk op dat (d) een ingewikkelde schrijfwijze is voor het getal 1.

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Integratie door substitutie

Volgend voorbeeld legt in detail de methode van substitutie uit:

Voorbeeld 22.3.4. Bereken $\int e^{x^2} 2x\, dx$.

Merk eerst op dat $e^{x^2} = e^{(x^2)}$ en $e^{x^2} \neq (e^x)^2 = e^{2x}$.

We herkennen de functie x^2 en haar afgeleide $2x$ in de integrand. Het ligt dus voor de hand de substitutie $u(x) = x^2$ te proberen, want van de functie $u(x)$ komen zowel de functie als de afgeleide voor in de formule van de substitutieregel. De enige mogelijkheid voor f is dan $f(u) = e^u$, want dan is $f(u(x)) = e^{x^2}$. We passen de substitutieregel toe:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int f(u(x))u'(x)\, dx \\
&= \int f(u(x))\, d(u(x)) \\
&= \int f(u)\, du \\
&= \int e^u\, du \\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Het gebruik van de substitutieregel wordt meestal korter genoteerd. We beschrijven twee mogelijkheden, schrijfwijze 1 met een *expliciete* nieuwe variabele u, en een nog kortere schrijfwijze 2 waar de subsitutie *impliciet* blijft en er geen nieuwe variabele expliciet wordt opgeschreven.

Schrijfwijze 1:

We schrijven niet expliciet $u(x) = x^2$ zoals hierboven, maar noteren korter $u = x^2$. Dan is $du = dx^2 = 2x dx$.
Deze beide uitdrukkingen *substitueer* je in $\int e^{x^2} 2x\, dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int e^u\, du && \text{(want } x^2 = u \text{ en } 2x\, dx = du\text{)} \\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(basisintegraal)} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(terug als functie van } x\text{).}
\end{aligned}$$

Schrijfwijze 2:

Je geeft de binnenste functie *geen expliciete naam*, maar brengt ze achter de differentiaal:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int e^{x^2}\, dx^2 && \text{(want } dx^2 = 2x\, dx\text{)} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(want } \int e^u\, du = e^u\text{)}
\end{aligned}$$

Bestudeer ook volgende kleine variaties:

De integraal $\int e^{x^2} x\, dx$ kan je ook berekenen met substitutie:

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Integratie door substitutie

stel opnieuw $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\,dx$. Hieruit haal je dat $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

Dit *substitueer* je in $\int e^{x^2} x\,dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} x\,dx &= \int e^u\,\frac{1}{2}du && \text{(want } x^2 = u \text{ en } x\,dx = \tfrac{1}{2}\,du\text{)}\\
&= \frac{1}{2}\int e^u\,du && \text{(}\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\text{)}\\
&= \frac{1}{2}e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(basisintegraal)}\\
&= \frac{1}{2}e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(terug als functie van } x\text{)}
\end{aligned}$$

Op analoge wijze kan je ook $\int 3e^{x^2} x\,dx$ berekenen.

De integralen $\int e^{x^2}\,dx$ en $\int 2e^{x^2}\,dx$ kan je *niet* berekenen met substitutie.

Besluit: Omdat de afgeleide van x^2 gelijk is aan $2x$ is het nodig dat de factor x in de integrand voorkomt, anders kan je substitutie niet toegepassen, maar de constante factor mag willekeurig zijn.

We geven nog enkele voorbeelden van de substitutieregel.

Voorbeeld 22.3.5. Bereken $\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx$

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x^3 + 5$, dan is $du = d(x^3+5) = 3x^2\,dx$. Dit *substitueren* we in $\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx$:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx = \int u^7\,du = \frac{u^8}{8} + c = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx = \int (x^3+5)^7\,d(x^3+5) = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld 22.3.6. Bereken $\int 2x\cos(x^2)\,dx$

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\,dx$. Dit *substitueren* we in $\int 2x\cos(x^2)\,dx$:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos(u)\,du = \sin(u) + c = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos(x^2)\,dx^2 = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Integratie door substitutie

Voorbeeld 22.3.7. Bereken $\int 2\sin x\cos x\,dx$

In het inleidend voorbeeld is er eigenlijk met de substitutie $u(x) = \sin^2(x)$ gewerkt. Bij sommige integralen, zoals deze, zijn er meerdere goede keuzes voor de functie $u(x)$. We kunnen hier ook $u(x) = \sin x$ of $u(x) = \cos x$ gebruiken. We geven al deze mogelijkheden als voorbeeld:

Schrijfwijze 1:

a) Kies $u = \sin x$, dan is $du = d\sin x = \cos x\,dx$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2u\,du = u^2 + c = (\sin x)^2 + c = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) Kies $u = \cos x$, dan is $du = d\cos x = -\sin x\,dx$, dus $\sin x\,dx = -du$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = -\int 2u\,du = -u^2 + c = -(\cos x)^2 + c = -\cos^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Merk op dat beide oplossingen aan elkaar gelijk zijn want $\sin^2 x + c = 1 - \cos^2 x + c = -\cos^2 x + c'$, met $c' = 1 + c$ een andere (willekeurige) constante.

c) Kies $u = \sin^2 x$, dan is $du = d\sin^2 x = 2\sin\cos x\,dx$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int du = u + c = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

a) Schrijf met $d\sin x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2\sin x\,d\sin x = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

b) Schrijf met $d\cos x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = -\int 2\cos x\,d\cos x = -\cos^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

c) Schrijf met $d\sin^2 x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = \int d\sin^2 x = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Volgende voorbeelden berekenen enkele integralen die in sommige boeken en cursussen in de lijst van basisintegralen staan. We hebben er hier voor gekozen om te werken met een eenvoudige lijst basisintegralen, omdat onderstaande integralen met de substitutieregel gemakkelijk berekend kunnen worden.

Voorbeeld 22.3.8. Bereken volgende integralen (met $a \in \mathbb{R}_0$)

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{bgsin}\frac{x}{a} + c$ met $a > 0$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$. Ditmaal is niet de integratievariabele x vermenigvuldigd met een constante factor, maar is de constante 1 gewijzigd in de constante a^2. Toch willen we overgaan naar deze basisintegraal door de substitutieregel te gebruiken. Hiervoor moeten we de integraal eerst herschrijven zodat onder de wortel terug de constante 1 staat in plaats van a^2. Als $a > 0$ geldt dat $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Integratie door substitutie

Zo blijkt dat we de substitutie $u = \frac{x}{a}$ kunnen proberen om de integraal verder uit te rekenen.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = \frac{x}{a}$, dan is $du = \frac{1}{a}\,dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \operatorname{bgsin} u + c = \operatorname{bgsin} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\frac{x}{a} = \operatorname{bgsin} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} \frac{x}{a} + c$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$. De constante 1 is gewijzigd in de constante a^2. Toch willen we overgaan naar deze basisintegraal door de substitutieregel te gebruiken. Hiervoor moeten we de integraal eerst herschrijven zodat er terug de constante 1 staat in plaats van a^2:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx$$

Zo blijkt dat we de substitutie $u = \frac{x}{a}$ kunnen proberen om de integraal verder uit te rekenen.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = \frac{x}{a}$, dan is $du = \frac{1}{a}\,dx$, dus $dx = a\,du$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx &= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+u^2} \cdot a\,du \\ &= \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,d\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c$

Deze integraal kan berekend worden met substitutie, maar het vinden van de substitutie is niet voor de hand liggend. Daarom wordt deze integraal soms tot de basisintegralen gerekend.

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Integratie door substitutie

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x + \sqrt{x^2+a}$, dan is $du = (1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}})\,dx = \dfrac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$.

Bijgevolg is $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \dfrac{1}{u}\,du$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Schrijfwijze 2: wegens de complexe formule voor u werkt de tweede schrijfwijze hier niet.

(d) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

Het enige startpunt om $\displaystyle\int \tan x\,dx$ te kunnen berekenen lijkt het toepassen van de definitie:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

Twee kandidaat substituties zijn dan $u(x) = \sin x$ en $u(x) = \cos x$. Nemen we $u(x) = \sin x$, dan is $du = \cos x\,dx$. In de teller staat echter $\sin x\,dx$. Daarom kiezen we voor $u(x) = \cos x$:

Schrijfwijze 1:
Stel $u = \cos x$, dan is $du = d\cos x = -\sin x\,dx$, dus $\sin x\,dx = -du$.
Dit *substitueren* we in $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\cos x = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Merk op dat we de substitutieregel $\displaystyle\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ hebben toegepast met $f(u) = \dfrac{1}{u}$. Dan wordt de substitutieregel $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$. Dit is een voorbeeld waar de substitutieregel gebruikt wordt om de integraal van een quotiënt van 2 functies te berekenen.

Wanneer en welke substitutie moet uitgevoerd worden is niet altijd even duidelijk. Hier geldt de regel "Oefening baart kunst". Volgende oefeningen behandelen enkele typische situaties.

Oefening 22.3.2.

1. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int (x^2+2)\sqrt{x-2}\,dx = \ldots\ldots$

We geven nog een wat merkwaardig voorbeeld van substitutie. Dit type integraal is ook belangrijk bij het berekenen van integralen van rationale functies, wat we hier niet verder behandelen.

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Integratie door substitutie

Voorbeeld 22.3.9. Bereken $\int \frac{1}{p\,x^2+q\,x+r}\,dx$ met $D = q^2 - 4pr < 0$.

De discriminant van de noemer is $D = q^2 - 4pr < 0$. We eisen dat deze discriminant negatief is zodat de noemer nergens nul wordt en de integrand bijgevolg overal gedefinieerd is.

Deze integraal kan door substitutie worden herleid tot de basisintegraal $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{bgtan} u + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Herschrijf hiervoor $p\,x^2 + q\,x + r$ als $a(1+u^2)$.

We illustreren dit met een concreet voorbeeld:

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8}\,dx$$

De discriminant van de noemer is $16 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16 < 0$.

$$x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4 = (x-2)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 1\right)$$

Stel $u = \frac{x-2}{2}$, dan is $du = \frac{1}{2}\,dx$ zodat

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8}\,dx = \int \frac{1}{4(u^2+1)} \cdot 2du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\operatorname{bgtan}\frac{x-2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Opmerking 22.3.1. Integralen van het type $\int \frac{1}{p\,x^2+q\,x+r}\,dx$:

- met $D = q^2 - 4pr < 0$: zie bovenstaand voorbeeld
- met $D = q^2 - 4pr = 0$: noemer ontbinden in 2 identieke factoren en verder uitrekenen met substitutie
- met $D = q^2 - 4pr > 0$: noemer ontbinden in 2 verschillende factoren en splitsing in partieelbreuken. De methode van splitsen in partieelbreuken behandelen we hier niet.

CC BY-NC-SA 4.0

22.3.A Oefeningen substitutie

Oefening 22.3.3. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{1}{3-x}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{x}{3-x}\,dx = \ldots\ldots$

Oefening 22.3.4. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int (3x+5)\sqrt{3x+4}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int 4x\sqrt{x-1}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \cos x \sin^2 x\,dx = \ldots\ldots$
4. $\int \cos 2x \sin^3 2x\,dx = \ldots\ldots$
5. $\int \frac{\sin x \cos x}{2-\cos x}\,dx = \ldots\ldots$
6. $\int \frac{1}{2x^2+1}\,dx = \ldots\ldots$
7. $\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \ldots\ldots$
8. $\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \ldots\ldots$
9. $\int \frac{3t}{1+t^2}\,dt = \ldots\ldots$
10. $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \ldots\ldots$
11. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \ldots\ldots$
12. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dx = \ldots\ldots$
13. $\int \frac{2R}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR = \ldots\ldots$
14. $\int \frac{R^3}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

22.3.A Oefeningen substitutie

Oefening 22.3.5. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \ldots\ldots$
4. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Partiële integratie

De *productregel voor afgeleiden* leidt tot de interessante methode van '*partiële integratie*'.
Volgend inleidend voorbeeld berekent de integraal van een speciaal gekozen product:

Voorbeeld 22.4.1. Berekening van de integraal $\int xe^x\,dx$.

De productregel voor afgeleiden toepassen op het product $x \cdot e^x$ geeft

$$\begin{aligned} d(x \cdot e^x) &= (dx) \cdot e^x + x(de^x) \\ &= e^x dx + xe^x dx \end{aligned}$$

en de gelijkheid $d(x \cdot e^x) = e^x dx + xe^x dx$ integreren levert

$$\int d(x \cdot e^x) = \int e^x dx + \int xe^x dx.$$

De eerste twee integralen zijn direct te berekenen en wat overblijft is de gezochte integraal:

$$xe^x + c = e^x + \int xe^x dx$$

en bijgevolg is

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$$

We hebben dus - met wat geluk weliswaar - de integraal $\int xe^x\,dx$ uitgerekend.

De techniek van partiële integratie veralgemeent dit voorbeeld.

De regel voor partiële integratie volgt onmiddellijk uit de regel voor de afgeleide van het product van twee functies f en u.

$$(f(x) \cdot u(x))' = f'(x) \cdot u(x) + f(x) \cdot u'(x)$$

Inderdaad, als we beide leden integreren krijgen we

$$\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = \int f'(x) \cdot u(x)\,dx + \int f(x) \cdot u'(x)\,dx.$$

Na termen van lid veranderen krijgen we

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = \int (f(x) \cdot u(x))'\,dx - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Omdat $\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = f(x) \cdot u(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ wordt dit

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x) \cdot u(x) - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Dit is de formule voor partiële integratie, zo genoemd omdat de integraal $\int f(x) \cdot u'(x)\,dx$ gedeeltelijk, dus partieel, is geïntegreerd: we hebben al een deel van de primitieve functie, namelijk $f(x) \cdot u(x)$, en er blijft nog een ander - hopelijk eenvoudiger te berekenen - deel over, namelijk $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$. We hebben $f(x) \cdot u(x)$ genoteerd en niet $f(x) \cdot u(x) + c$, omdat het resultaat van de berekening van de tweede term van het rechterlid, $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$, ook slechts op een constante na bepaald is.

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Partiële integratie

Eigenschap 22.4.1 (Partiële integratie).

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* (dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$)

van een functie $f(x)$ (dus $h_1(x) = f(x)$)

en van de *afgeleide* van een functie $u(x)$ (dus $h_2(x) = u'(x)$),

dan kunnen we de integraal schrijven als

$$\int f(x)u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx.$$

Dus voor reële, afleidbare functies f en u geldt

$$\boxed{\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx},$$

of korter genoteerd:

$$\int f \cdot u'\,dx = f \cdot u - \int f' \cdot u\,dx,$$

of met differentialen genoteerd:

$$\boxed{\int f\,du = f \cdot u - \int u\,df}.$$

In oefeningen wordt dikwijls $\overset{P.I.}{=}$ geschreven om het gebruik van partiële integratie aan te duiden.

Men schrijft de regel voor partiële integratie dikwijls met functies f en g (in plaats van f en u zoals hierboven):

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

of met functies u en v:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

We hebben de eigenschap geformuleerd met f en u omwille van de parallel met de substitutieregel

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))du(x) = \int f(u)du \qquad \text{(substitutie)},$$

waar de rol van f en u minder symmetrisch is. Voor partiële integratie is de rol van beide factoren wel symmetrisch, en is de notatie met f en g, ofwel u en v ook gebruikelijk. Het is belangrijk dat je met elke versie van deze formules kan werken, onafhankelijk van de letters die gebruikt worden.

Voorbeeld 22.4.2. Bereken $\int xe^x\,dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx$

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Partiële integratie

Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = e^x$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u'(x)}\, dx,$$

dan is $f'(x) = 1$ en $u(x)$ kunnen we vinden door $u'(x)$ te integreren: $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int e^x\, dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
Er zijn dus oneindig veel mogelijke functies u, maar we nemen deze met $c = 0$.
Partiële integratie geeft dan

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u'(x)}\, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)}\, dx = xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df$

  Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\, dx = e^x\, dx$. Dan geldt

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x\, dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{d(e^x)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{dx}_{df}$$
$$= xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De keuze van f en u ligt niet vast. Stel dat we hier een andere keuze hadden gemaakt voor f en u, namelijk $f(x) = e^x$ en $u'(x) = x$. Dan is $f'(x) = e^x$ en $u(x) = \frac{x^2}{2}$. Partiële integratie geeft dan

$$\int xe^x\, dx \overset{P.I.}{=} e^x\, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 e^x\, dx.$$

In de tweede integraal is de macht van x *verhoogd* van 1 naar 2. Dus de x in de eerste integraal wordt een x^2 in de tweede integraal. Met deze keuze van f en u wordt de nieuwe integraal *nog ingewikkelder dan de oorspronkelijke*. Hoewel de gelijkheid correct is, helpt ze niet. *Een goede keuze* voor f en u is dus erg belangrijk.

Voorbeeld 22.4.3. Bereken $\int x \sin x\, dx$.

- **Schrijfwijze 1**: $\int f(x) \cdot u'(x)\, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\, dx$

  Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = \sin x$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u'(x)}\, dx,$$

  dan is $f'(x) = 1$ en $u(x)$ kunnen we vinden door $u'(x)$ te integreren: $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int \sin x\, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
  We kiezen de primitieve functie met $c = 0$. Partiële integratie geeft dan

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Partiële integratie

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u'(x)}\, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)}\, dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2**: $\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df$

  Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\, dx = \sin x\, dx$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x\, dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{d(-\cos x)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} \underbrace{dx}_{df}$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

In de volgende oefeningen moet je partiële integratie combineren met een eenvoudige substitutie.

Oefening 22.4.1.

1. $\int xe^{2x}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int xe^{-3x}\, dx = \ldots\ldots$

We hebben in de voorbeelden en oefeningen tot nu toe telkens het product van de veelterm x met een exponentiële of goniometrische functie geïntegreerd. Wanneer deze veelterm van een hogere graad is moeten we herhaaldelijk partieel integreren om tot de oplossing te komen. Bij elke stap daalt de graad van de veelterm met één.

Voorbeeld 22.4.4. Bereken $\int 4x^2 e^{2x} dx$.

Om deze integraal te berekenen moet je *meerdere keren partieel integreren*. De methode wordt uitgelegd in onderstaand filmpje, en ook bij het volgende voorbeeld. YouTube link: https://www.youtube.com/embed/c450HbCytQE

Voorbeeld 22.4.5. Bereken $\int (2x^2 - 4x)e^{2x}\, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x)\, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\, dx$

  Stel $f(x) = 2x^2 - 4x$ en $u'(x) = e^{2x}$, dan is $f'(x) = 4x - 4$ en $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Partiële integratie

$$\int \underbrace{(2x^2-4x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{u'(x)}\,dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{(2x^2-4x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} - \int \underbrace{(4x-4)}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)}\,dx$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - \int (2x-2)e^{2x}\,dx$$

We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $f(x)=2x-2$ en $u'(x)=e^{2x}$, dan is $f'(x)=2$ en $u(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$.

$$(x^2-2x)\,e^{2x} - \int \underbrace{(2x-2)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{u'(x)}\,dx$$
$$\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)\,e^{2x} - \left(\underbrace{(2x-2)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} - \int \underbrace{2}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)}\,dx\right)$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \int e^{2x}\,dx$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{2x} + c$$
$$= (x^2-2x-x+1+\frac{1}{2})\,e^{2x} + c$$
$$= (x^2-3x+\frac{3}{2})\,e^{2x} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

$$\begin{aligned}
\int (2x^2-4x)e^{2x}\,dx &= \int (x^2-2x)\,de^{2x} \\
&\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)e^{2x} - \int e^{2x}(2x-2)\,dx \\
&= (x^2-2x)\,e^{2x} - \int (x-1)\,de^{2x} \\
&\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)\,e^{2x} - \left[(x-1)\,e^{2x} - \int e^{2x}\,dx\right] \\
&= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{2x} + c \\
&= (x^2-2x-x+1+\frac{1}{2})\,e^{2x} + c \\
&= (x^2-3x+\frac{3}{2})\,e^{2x} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Als de integrand het product is van een veelterm en een andere functie zoals een sinus, cosinus of exponentiële functie, kiezen we voor $f(x)$ de veelterm. Door partiële integratie toe te passen daalt dan immers de graad van de veelterm. In het volgende voorbeeld, het product van een veelterm met $\ln x$, doen we het andersom, omdat we $\ln x$ eenvoudig kunnen afleiden, maar nog niet integreren. Hoe we $\ln x$ kunnen integreren is één van de volgende voorbeelden.

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Partiële integratie

Voorbeeld 22.4.6. Bereken $\int 9x^2 \ln x \, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $u'(x) = 9x^2$

  $$\int \underbrace{9x^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx,$$

  dan is $f'(x) = 1/x$ en $u(x) = \int u'(x) \, dx = \int 9x^2 \, dx = 3x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

  $$\int \underbrace{9x^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} - \int \underbrace{1/x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} \, dx$$
  $$= 3x^3 \ln x - \int 3x^2 \, dx = 3x^3 \ln x - x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f \, du = f \cdot u - \int u \, df$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $du = u'(x) \, dx = 9x^2 \, dx$

  $$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{9x^2 \, dx}_{du} = \int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \underbrace{d(3x^3)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} - \int \underbrace{3x^3}_{u(x)} \underbrace{d(\ln x)}_{df}$$
  $$= 3x^3 \ln x - \int \frac{3x^3}{x} \, dx = 3x^3 \ln x - x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Om partiële integratie te kunnen toepassen moet de integrand het product zijn van 2 functies. Maar ook als de integrand bestaat uit slechts 1 functie kunnen we partiële integratie toepassen door deze functie te vermenigvuldigen met 1.

Voorbeeld 22.4.7. Bereken $\int \ln x \, dx$.

Om partiële integratie te kunnen toepassen beschouwen we $\ln x$ als een product $\ln x \cdot 1$.

- Schrijfwijze 1: $\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $u'(x) = 1$, dan is $f'(x) = 1/x$ en $u(x) = \int u'(x) \, dx = \int 1 \, dx = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

  $$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{u'(x)} \, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} - \int \underbrace{1/x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} \, dx$$
  $$= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Partiële integratie

- Schrijfwijze 2: $\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

$$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)}\underbrace{dx}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)}\cdot\underbrace{x}_{u(x)} - \int \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{d\ln x}_{df} = x\ln x - \int \frac{x}{x}\,dx$$
$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Soms bekom je na (herhaald) partieel integreren opnieuw de *oorspronkelijke* integraal. Onderstaand voorbeeld legt uit welke techniek je dan kan toepassen.

Voorbeeld 22.4.8. Bereken $\int \sin x\, e^x\,dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x)\cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx$

  We stellen $I = \int \sin x\, e^x\,dx$ voor de verdere berekening. Welke keuze we maken voor $f(x)$ en $u'(x)$ is niet zo belangrijk in deze oefening. We maken de keuze $f(x)=\sin x$ en $u'(x)=e^x$, dan is $f'(x)=\cos x$ en $u(x)=e^x$. Maak deze oefening opnieuw met de andere keuze.

$$I = \int \sin x\cdot e^x\,dx = \sin x\cdot e^x - \int \cos x\cdot e^x\,dx$$

  We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $f(x)=\cos x$ en $u'(x)=e^x$, dan is $f'(x)=-\sin x$ en $u(x)=e^x$.

$$I = \sin x\cdot e^x - \left(\cos x\cdot e^x - \int(-\sin x)\cdot e^x\,dx\right) = (\sin x - \cos x)e^x - \int \sin x\cdot e^x\,dx$$

  In het rechterlid staat nu terug de oorspronkelijke integraal I.

$$I = (\sin x - \cos x)e^x - I$$

  We brengen I naar het linkerlid en bekomen:

$$2\,I = e^x\,(\sin x - \cos x) + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

  Dus

$$I = \frac{1}{2}\,e^x\,(\sin x - \cos x) + c_1, \quad c_1\in\mathbb{R}\ (\text{Stel } c_1 = c/2).$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

  Hier hebben we de andere keuze gemaakt: we stellen $f(x)=e^x$ en $du = u'(x)\,dx = \sin x\,dx$

$$\begin{aligned} I = \int \sin x\, e^x\,dx &= -\int e^x\,d\cos x \\ &\overset{P.I.}{=} -e^x\cos x + \int \cos x\,de^x \\ &= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx \\ &= -e^x\cos x + \int e^x\,d\sin x \\ &\overset{P.I.}{=} -e^x\cos x + e^x\sin x - \int \sin x\,de^x \\ &= -e^x\cos x + e^x\sin x - \underbrace{\int \sin x\, e^x\,dx}_{I}. \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Partiële integratie

We brengen I naar het linkerlid en bekomen:

$$2\ I = e^x\ (\sin x - \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dus

$$I = \frac{1}{2}\ e^x\ (\sin x - \cos x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}\ (\text{Stel } c_1 = c/2).$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

22.4.A Oefeningen partiële integratie

Oefening 22.4.2. Bereken volgende onbepaalde integralen via partiële integratie:

1. $\int (3x + x^2)\, e^x \, dx = \ldots\ldots$

2. $\int \operatorname{bgtan} x \, dx = \ldots\ldots$

3. $\int \operatorname{bgsin} \theta \, d\theta = \ldots\ldots$

4. $\int \ln \sqrt{x} \, dx = \ldots\ldots$

5. $\int e^x \cos 3x \, dx = \ldots\ldots$

6. $\int \frac{\ln t}{t^2} \, dt = \ldots\ldots$

Oefening 22.4.3.

1. Bereken $\int \operatorname{bgtan} 5x \, dx$.

Meerkeuze:

(a) $x \operatorname{bgtan} 5x - \frac{1}{10} \ln|1 + 25x^2| + c$

(b) $x \operatorname{bgtan} 5x - \frac{1}{12} \ln|1 + 25x^2| + c$

(c) $x \operatorname{bgtan} 5x - \frac{1}{14} \ln|1 + 25x^2| + c$

(d) $x \operatorname{bgtan} 5x + \frac{1}{10} \ln|1 + 25x^2| + c$

(e) $x \operatorname{bgtan} 5x + \frac{1}{12} \ln|1 + 25x^2| + c$

(f) $x \operatorname{bgtan} 5x + \frac{1}{14} \ln|1 + 25x^2| + c$

2. Bereken $\int e^{3x} \cos 5x \, dx$.

Meerkeuze:

(a) $\frac{e^{3x}(2\cos 5x + 5\sin 5x)}{29} + c$

(b) $\frac{e^{3x}(3\cos 5x + 5\sin 5x)}{34} + c$

(c) $\frac{e^{3x}(\cos 5x + 3\sin 5x)}{20} + c$

(d) $\frac{e^{3x}(\cos 5x + 2\sin 5x)}{15} + c$

(e) $\frac{e^{3x}(2\cos 5x + 7\sin 5x)}{53} + c$

(f) $\frac{e^{3x}(3\cos 5x + 7\sin 5x)}{58} + c$

Bron: https://github.com/ptgressman/math104 (MIT License Copyright (c) 2019 Philip Gressman)

CC BY-NC-SA 4.0

22.5 Andere integratietechnieken

Je moet niet steeds ofwel de substitutieregel ofwel partiële integratie toepassen om een integraal uit te rekenen. Om integralen uit te rekenen van goniometrische functies kan het soms nuttig zijn om eerst een goniometrische formule toe te passen om zo van een product van functies over te gaan op een som. We herhalen hiervoor enkele goniometrische formules:

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\
2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \\
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \\
-2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

Uit bovenstaande formules volgt ook dat

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha &= \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \\
\sin^2\alpha &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)
\end{aligned}$$

Met deze formules kunnen we sommige integralen herschrijven tot basisintegralen of integralen die verder uit te rekenen zijn met andere integratietechnieken.

Oefening 22.5.1.

1. $\displaystyle\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos x)\,dx = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\,dx = \int \frac{1}{2}(\cos(-2x) - \cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

22.5.A Oefeningen onbepaalde integralen

Oefening 22.5.2. Bereken volgende onbepaalde integralen

1. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{2x^2+3}{2x^2+1}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{\ln x}{x\ln x - x}\,dx = \ldots\ldots$
4. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \ldots\ldots$
5. $\int x\ \mathrm{bgtan}\, x\,dx = \ldots\ldots$
6. $\int \frac{1}{5^{2x}}\,dx = \ldots\ldots$
7. $\int e^{-x}\cos 3x\,dx = \ldots\ldots$
8. $\int (\ln x)^3\,dx = \ldots\ldots$
9. $\int \sin 2x\cdot\sin 4x\,dx = \ldots\ldots$
10. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \ldots\ldots$
11. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = \ldots\ldots$
12. $\int x(1+x)^{3/2}\,dx = \ldots\ldots$
13. $\int \sin^2 x\,dx = \ldots\ldots$

Oefening 22.5.3. Bereken volgende onbepaalde integralen

1. $\int \frac{e^x}{5(e^x-1)}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{3x}{(x^2-1)^{3/2}}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int e^{-2t}\sin t\,dt = \ldots\ldots$

Oefening 22.5.4. Bereken volgende onbepaalde integralen

1. $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

22.5.A Oefeningen onbepaalde integralen

2. $\int x^3 e^{x^2}\, dx = \ldots\ldots$
3. $\int \sin(\ln x)\, dx = \ldots\ldots$

Oefening 22.5.5. Bereken volgende onbepaalde integralen

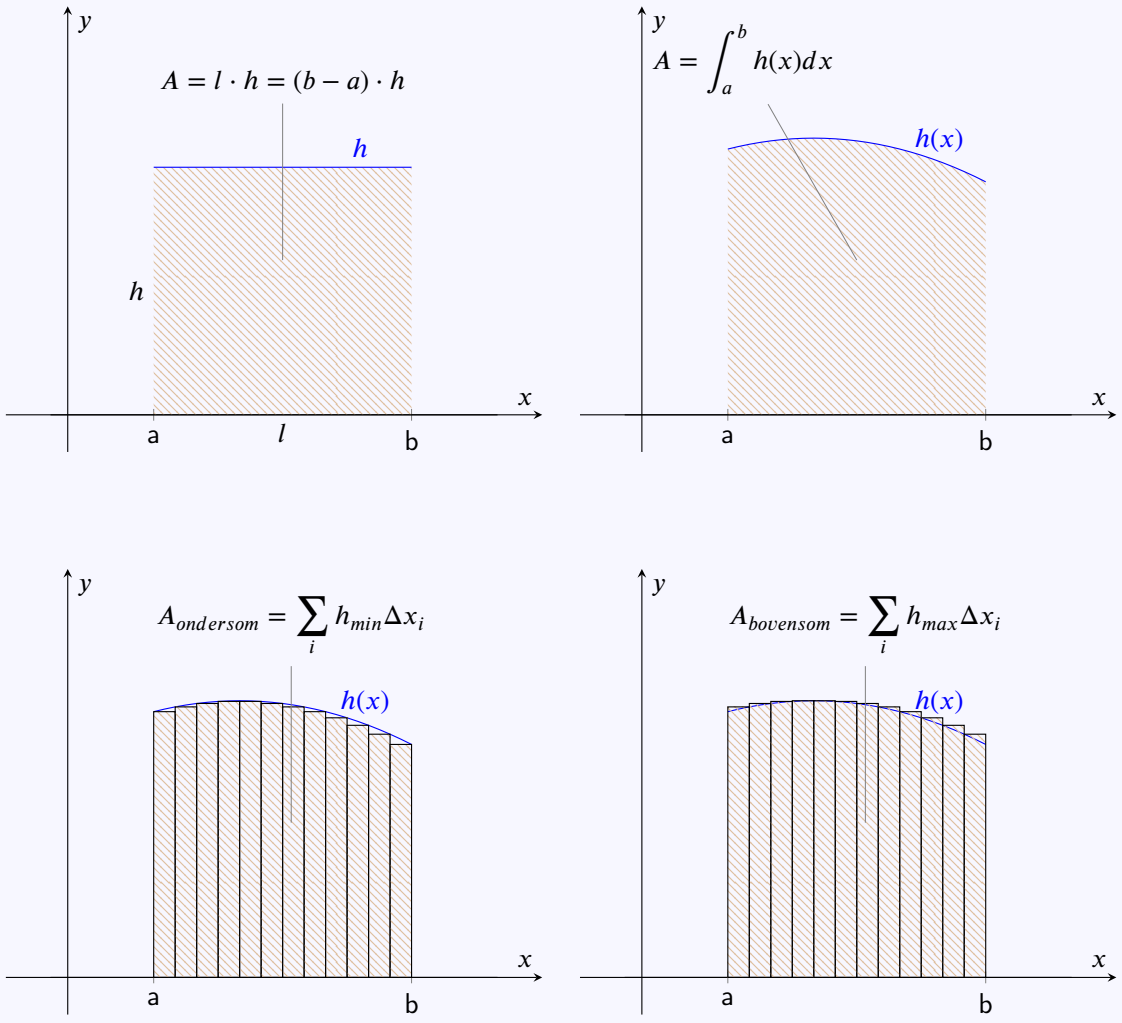
1. $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 1}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{4}{x^2 - 4x + 4}\, dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{3t + 1}{1 + t^2}\, dt = \ldots\ldots$
4. $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 7}\, dx = \ldots\ldots$
5. $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\, dx = \ldots\ldots$
6. $\int \frac{3x + 3}{x^2 + 2x + 1}\, dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

22.6 Bepaalde integralen

22.6.1 Definitie bepaalde integraal

Voorbeeld 22.6.1 (Oppervlakte)**.** Voor een rechthoek met lengte l en hoogte h kent iedereen de formule voor de oppervlakte: $A = l \cdot h$. De bepaalde integraal is in zekere zin een veralgemening van deze formule, waarbij de bovenzijde van de rechthoek niet meer 'recht' is, maar ook een kromme kan zijn. We kunnen dan niet meer vermenigvuldigen met de vaste hoogte h, maar we moeten vermenigvuldigen met een 'variërende hoogte' $h(x)$. De notatie en de berekening daarvan gaat via de zogenaamde *bepaalde integraal*, die kan worden gedefinieerd als een limiet van een som van kleine rechthoekjes.



We geven kort de meetkundige (pseudo-)definitie van een bepaalde integraal:

Definitie 22.6.1 (Bepaalde integraal)**.**

Zij f een continue, *positieve* functie op een interval $[a, b]$.

22.6 Bepaalde integralen

De **bepaalde integraal** van f over het interval $[a,b]$, genoteerd als

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

is per definitie gelijk aan de *oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x=a$ en $x=b$.

We noemen a en b de **integratiegrenzen** en $[a,b]$ het **integratie-interval**, en we **integreren over** dat interval.

22.6.2 Verband met de onbepaalde integraal

Volgende belangrijke stelling zegt dat we de bepaalde integraal (dus een oppervlakte, of meer algemeen een oneindige-som-van-oneindig-kleine-dingen) kunnen berekenen met behulp van de onbepaalde integraal.

Eigenschap 22.6.1 (Verband tussen bepaalde en onbepaalde integralen)**.**

Zij f een continue functie op een interval $[a,b]$ en F een primitieve functie van f (dus $\int f(x)\,dx = F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$). Dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b)-F(a) \qquad \overset{\text{notatie}}{=} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Deze formule laat toe om het berekenen van een *bepaalde* integraal te reduceren tot het berekenen van de *onbepaalde* integraal, en dan de integratiegrenzen in te vullen.

Merk op dat het hierbij geen probleem is dat een primitieve functie slechts op een constante na bepaald is:

$$\big(F(b)+c\big)-\big(F(a)+c\big)=F(b)-F(a).$$

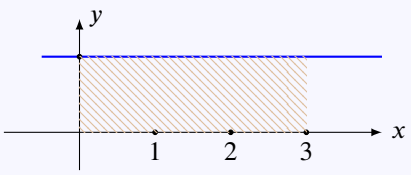
Elke primitieve functie F van f is dus geschikt om de bepaalde integraal uit te rekenen.

Hierbij is $\Big[F(x)\Big]_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b)-F(a)$ een handige notatie. Soms gebruikt men ook $F(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b)-F(a)$.

Voorbeeld 22.6.2. Eenvoudige bepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int_0^3 1\,dx = \Big[x\Big]_0^3 = 3-0=3$

De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de rechte $y=1$ (dit is de grafiek van $f(x)=1$), de x-as en de verticale rechten $x=0$ en $x=3$.

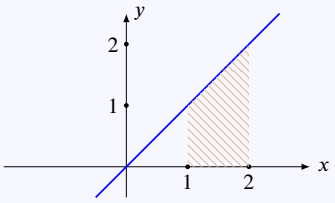


2. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(2^2-1^2)=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$

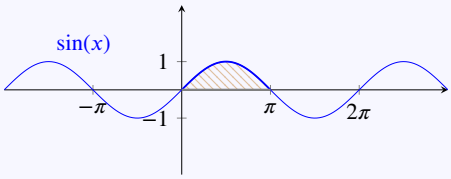
De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de rechte $y=x$ (dit is de grafiek van $f(x)=x$), de x-as en de verticale rechten $x=1$ en $x=2$.

CC BY-NC-SA 4.0

22.6 Bepaalde integralen



3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$



Uit de formule $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$ volgen onmiddellijk de basiseigenschappen:

Eigenschap 22.6.2.

Zij F en G functies gedefinieerd op een interval $[a,b]$, $c \in [a,b]$ en $k, l \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\begin{aligned}
\big[F(x)\big]_a^a &= F(a) - F(a) = 0 \\
\big[kF(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x) + G(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^b + \big[G(x)\big]_a^b \\
\big[kF(x) + lG(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b + l\big[G(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_b^a &= -\big[F(x)\big]_a^b = \big[-F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^c + \big[F(x)\big]_c^b
\end{aligned}$$

Uit deze eigenschappen van het symbool $\big[F(x)\big]_a^b$ volgt dan onmiddellijk:

Eigenschap 22.6.3 (Eigenschappen van de bepaalde integraal)**.**

Zij f een functie gedefinieerd op $[a,b]$ en $c \in [a,b]$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int_a^a f(t)\,dt &= 0 && \text{(integreren over een leeg interval)} \\
\int_b^a f(t)\,dt &= -\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (-f(t))\,dt && \text{(integreren in omgekeerde richting)} \\
\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt && \text{(integratie-interval opsplitsen)}
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.6 Bepaalde integralen

Voorbeeld 22.6.3.

1. $\int_4^8 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^8 = \frac{1}{2}(8^2-4^2) = \frac{1}{2}(64-16) = 24$

2. $\int_8^4 x\,dx = -\int_4^8 x\,dx = -24,$

of anders berekend $\int_8^4 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_8^4 = \frac{1}{2}(4^2-8^2) = \frac{1}{2}(16-64) = -24$

3.

$$\int_4^8 x\,dx = \int_4^6 x\,dx + \int_6^8 x\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^6 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_6^8 = \frac{1}{2}(6^2-4^2) + \frac{1}{2}(8^2-6^2) = \frac{1}{2}(36-16+64-36) = 24$$

Opmerking 22.6.1 (Interpretatie bepaalde integraal)**.**

De bepaalde integraal wordt meestal ingevoerd als een manier om oppervlaktes te berekenen. Maar je kan de bepaalde integraal ook zien als een methode om *producten te berekenen van variërende grootheden*. We willen bijvoorbeeld het product berekenen van tijd en snelheid, of tijd en gewicht, of tijd en afstand, waarbij telkens de snelheid, gewicht of afstand *niet* noodzakelijk constant is. Dat is precies wat de bepaalde integraal doet.

Voorbeeld: bij constante snelheid is de afgelegde weg s na tijd t gelijk aan de snelheid v maal de tijd t:

$$s = v \cdot t\,.$$

Bij een constante snelheid van $v = 120$ km/u leg je in een tijd van $t = 2$ uur precies $2 \cdot 120 = 240$ km af.

Maar, als de snelheid *afhangt van de tijd*, dus als $v = v(t)$, dan is het product $v(2)\cdot 2$ *niet* de afgelegde weg na 2 uur. Inderdaad, stel dat de snelheid na tijd t gelijk is aan $v(t) = 60\cdot t$. Dat betekent: tamelijk traag versnellen, beginnend van stilstand. Na een half uur is de snelheid $v(1/2) = 60 \cdot 1/2 = 30$ km/u, en na twee uur is ze $v(2) = 2 \cdot 60 = 120$km/u. De afgelegde weg na 2 uur is dan *niet* $s(2) = v(2) \cdot 2 = 240$km (want zo ver geraak je enkel als je constant 120km/u rijdt). In dit scenario haal je die snelheid pas helemaal op het einde.

Dankzij de techniek van de bepaalde integraal kunnen we wel schrijven dat de afgelegde weg na 2 uur is:

$$s(2) = \int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (60 \cdot t)dt$$

22.6.3 Georiënteerde oppervlakte

In de definitie van de bepaalde integraal hebben we de functie f positief verondersteld.

Als f niet noodzakelijk positief is, moeten we voorzichtiger zijn met wat we precies verstaan onder 'oppervlakte'. We geven een nieuwe definitie:

Definitie 22.6.2 (Georiënteerde oppervlakte en bepaalde integraal)**.**

De **georiënteerde oppervlakte** telt per definitie de oppervlakte van een gebied dat boven de x-as ligt *positief* en telt de oppervlakte van een gebied dat onder de x-as ligt *negatief*.

Als f een continue functie is op een interval $[a, b]$, dan is de bepaalde integraal

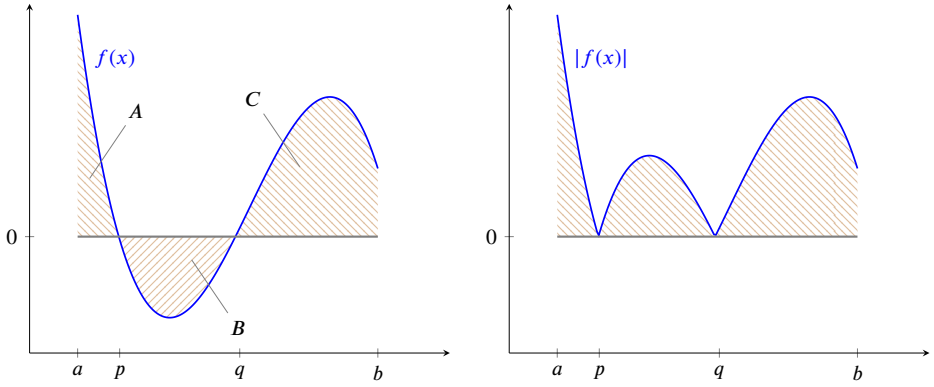
CC BY-NC-SA 4.0

22.6 Bepaalde integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

gelijk aan de *georiënteerde oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.

Dus als de functie f negatief is, telt de bepaalde integraal die oppervlakte ook als negatief. In de meeste gevallen is dat gelukkig precies wat we willen (negatieve snelheid betekent achteruit rijden, en de overeenstemmende afstand moeten we dus redelijkerwijze meestal ook van de totale afgelegde weg aftrekken).

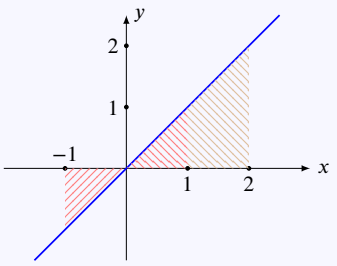


De bepaalde integraal van de functie f over het interval $[a, b]$ in de linkse figuur is dus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx = \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

Voorbeeld 22.6.4.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(2^2 - (-1)^2) = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$



Oefening 22.6.1. Bereken volgende bepaalde integralen en duid aan op een figuur wat je berekend hebt.

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = \ldots\ldots$

2. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

22.6 Bepaalde integralen

Indien het echter de bedoeling is om $\text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C$ te berekenen, dan moet de bepaalde integraal van $|f(x)|$ berekend worden, zoals in de rechtse figuur geïllustreerd werd.

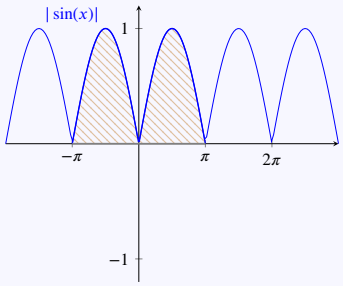
$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C$$

Om $\int_a^b |f(x)|\,dx$ te berekenen moet je het integratie-interval $[a,b]$ opsplitsen in stukken waarop f ofwel positief, ofwel negatief is. Hiervoor moet je al de nulpunten van f zoeken. Op elk van deze stukken is $|f(x)|$ dan ofwel gelijk aan $f(x)$, ofwel gelijk aan $-f(x)$.

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\,dx &= \int_a^p |f(x)|\,dx + \int_p^q |f(x)|\,dx + \int_q^b |f(x)|\,dx \\ &= \int_a^p f(x)\,dx - \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx \\ &= \text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\end{aligned}$$

Voorbeeld 22.6.5.

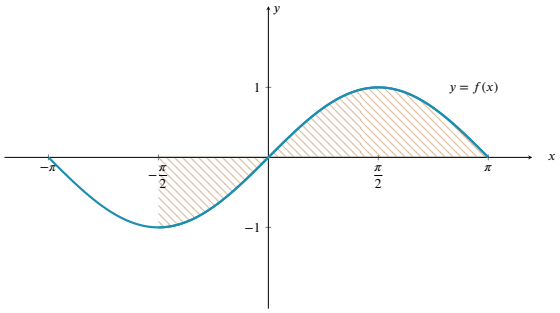
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx &= \int_{-\pi}^{0} |\sin x|\,dx + \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{0} -\sin x\,dx + \int_0^{\pi} \sin x\,dx \\ &= \Big[\cos x\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} \\ &= \cos(0) - \cos(-\pi) + (-\cos\pi) - (-\cos 0) \\ &= 1 - (-1) + (-(-1)) - (-1) = 1+1+1+1 = 4\end{aligned}$$



Oefening 22.6.2. Waaraan is de oppervlakte van het gearceerde gebied op de figuur gelijk?

CC BY-NC-SA 4.0

22.6 Bepaalde integralen



Meerkeuze:

(a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{\pi} f(x)dx$

(b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$

(c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$

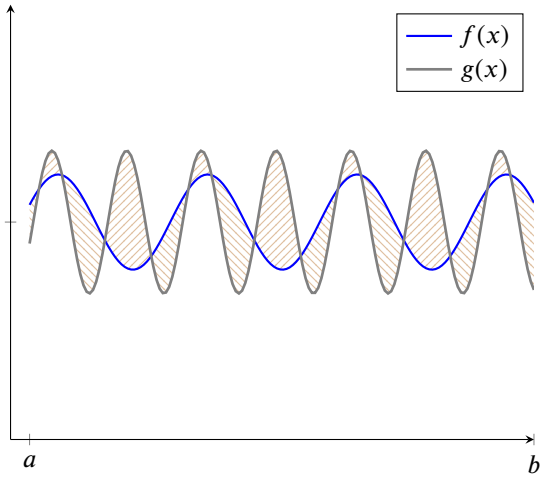
(d) $-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$

Merk op dat zodra f zowel positieve als negatieve waarden aanneemt op het interval $[a, b]$ in het algemeen niet geldt dat

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| .$$

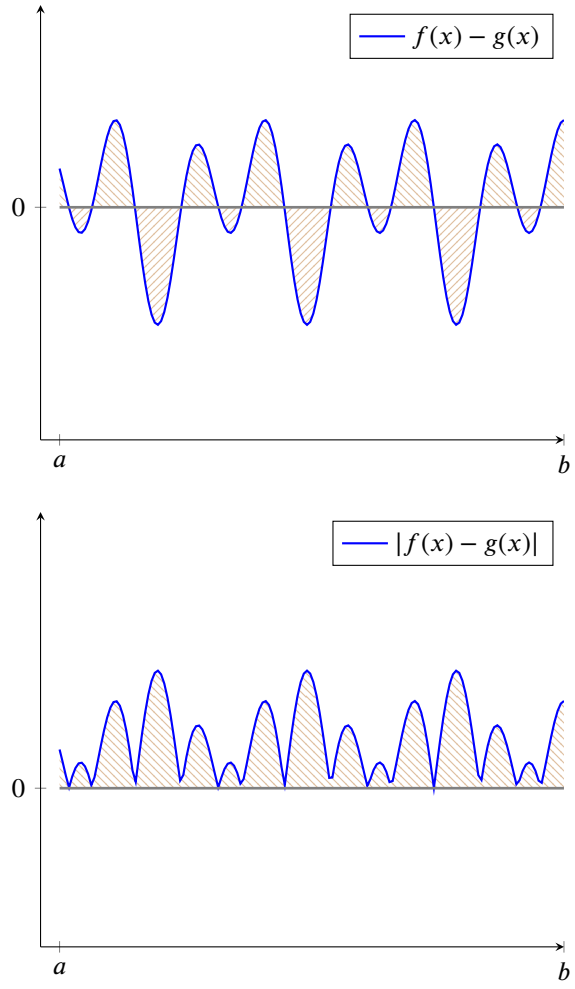
Om de oppervlakte **tussen twee krommen** te berekenen, berekenen we de bepaalde integraal van de absolute waarde van het verschil van beide functies:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

22.6 Bepaalde integralen



De ligging van de x-as heeft geen belang heeft bij het berekenen van de oppervlakte tussen twee krommen, want $|f(x) - g(x)|$ is de waarde van de bovenliggende kromme min die van de onderliggende kromme. De oppervlakte is dus de som van de integralen tussen twee opeenvolgende snijpunten met als integrand het voorschrift van de *bovenliggende kromme* min die van de *onderliggende kromme*, ongeacht of die krommen boven of onder de x-as liggen.

22.6.4 Substitutie bij bepaalde integralen

Bij het berekenen van *bepaalde* integralen met substitutie moeten voor de *nieuwe* substitutie-variabele ook de integratiegrenzen worden aangepast. Er zijn twee oplossingsmethodes: ofwel bereken en gebruik je inderdaad de nieuwe integratiegrenzen, ofwel bereken je eerst de *onbepaalde* integraal, en vul je in de uitkomst de oorspronkelijke grenzen in.

Voorbeeld 22.6.6. Bereken $\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx$

- **Schrijfwijze 1:** We illustreren beide methodes:
  - *Methode 1:* **Integratiegrenzen aanpassen**: Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x dx$. Als $x = 1$ dan is $u = 1$, als $x = 2$ dan is $u = 4$

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^4 e^u \, du = \left[e^u\right]_1^4 = e^4 - e$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.6 Bepaalde integralen

– *Methode 2:* **Eerst de onbepaalde integraal berekenen** met de substitutie $u = x^2$;

$$\int e^{x^2} 2x \, dx = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R},$$

en dan $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ toepassen:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e.$$

- **Schrijfwijze 2:**

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^2 e^{x^2} \, dx^2 = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

Opmerking 22.6.2.

De tweede methode, dus eerst de onbepaalde integraal uitrekenen en dan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

toepassen, heeft als voordeel dat je dan de nieuwe grenzen niet moet zoeken.

Waarschuwing 22.6.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- De grenzen van x gebruiken als grenzen voor u:

$$\cancel{\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^2 e^u \, du}$$

- Tijdens de berekening van de bepaalde integraal de grenzen niet aanpassen, ook al geeft dit een correct resultaat:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx \neq \int_1^2 e^u \, du \neq \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

22.6.5 Partiële integratie bij bepaalde integralen

Voorbeeld 22.6.7. Bereken $\int_0^1 xe^x \, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = e^x$, dan is $f'(x) = 1$ en $u(x) = e^x$.
  Partiële integratie geeft dan

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot e^x \, dx &\overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1;\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.6 Bepaalde integralen

- **Schrijfwijze 2:** Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\,dx = e^x\,dx$;

$$\int_0^1 x \cdot e^x\,dx = \int_0^1 x d(e^x) \overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$
$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1$$

Voorbeeld 22.6.8. Bereken $\int_1^e \ln x\,dx$.

Dit voorbeeld wordt in onderstaande video opgelost door $v = x$ te kiezen in de formule $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (volgens Schrijfwijze 2). Het antwoord is $1 - \ln 1$.

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/x9m15nsOl_o

CC BY-NC-SA 4.0

22.6.A Oefeningen bepaalde integralen

Oefening 22.6.3. Bereken volgende bepaalde integralen:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \ldots\ldots$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta = \ldots\ldots$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \sin x \, dx = \ldots\ldots$
4. $\int_0^{1} xe^{2x} \, dx = \ldots\ldots$
5. $\int_0^{1} \frac{x}{(4+x^2)^2} \, dx = \ldots\ldots$
6. $\int_0^{2} \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}} \, dx = \ldots\ldots$
7. $\int_0^{\pi} \cos^2 t \, dt = \ldots\ldots$
8. $\int_0^{\pi} x^2 \cos 3x \, dx = \ldots\ldots$
9. $\int_0^{4} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx = \ldots\ldots$
10. $\int_0^{1} x^3 e^{-x^2} \, dx = \ldots\ldots$

Oefening 22.6.4. Bron: https://github.com/ptgressman/math104

MIT License Copyright (c) 2019 Philip Gressman

1. Bereken $\int_1^4 e^{3x}(x+1) \, dx$.

Meerkeuze:

(a) $\frac{14}{9}e^{12} - \frac{5}{9}e^3$

(b) $\frac{17}{9}e^{12} - \frac{5}{9}e^3$

(c) $\frac{17}{9}e^{12} - \frac{8}{9}e^3$

(d) $\frac{20}{9}e^{12} - \frac{8}{9}e^3$

(e) $\frac{20}{9}e^{12} - \frac{11}{9}e^3$

(f) $\frac{23}{9}e^{12} - \frac{11}{9}e^3$

2. Bereken $\int_\pi^{2\pi} x \sin 4x \, dx$.

Meerkeuze:

22.6.A Oefeningen bepaalde integralen

(a) 0

(b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $-\frac{\pi}{4}$

(d) $\frac{3\pi}{4}$

(e) $-\frac{3\pi}{4}$

(f) $\frac{7\pi}{4}$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 23
Vectoren en matrices

(Versie 2026/08/25H.51)

23.1 Intro lineaire algebra

De volgende drie delen behandelen enkele topics uit de zogenaamde *lineaire algebra*, met de theorie van vectoren en matrices die de technische basis vormen bij de studie van enerzijds stelsels en anderzijds rechten en vlakken in de ruimte.

De toepassingen reiken verder dan eenvoudige meetkunde, bijvoorbeeld ook tot systeemgedrag, geavanceerde fysica, big data, en tal van andere domeinen.

(a) Vectoren en matrices
Eerst beschouwen we een vector puur als een stel getallen. We definiëren bewerkingen op vectoren en laten je vertrouwd geraken met definities, eigenschappen en formules. Ook matrices komen op dezelfde manier aan bod.

(b) Stelsels
Daarna leren we stelsels lineaire vergelijkingen oplossen. De vectoren en matrices komen tot leven, maar nog steeds onder de vorm van formules. Onderweg werpen we wel een eerste blik op meetkundige interpretaties.

(c) Rechten en vlakken
Vectoren spelen een hoofdrol in verschillende beschrijvingen van rechten en vlakken. Terwijl we het meetkundige verhaal uitrollen, komen de formules van vectoren en matrices terug in de spotlight. Ook de stelsels spelen een belangrijke rol.
De formules helpen ons om de meetkunde begrijpen. De meetkunde helpt ons om de formules begrijpen. Inzicht in rechten en vlakken vormt de basis voor intu"ıtief inzicht in de rest van de lineaire algebra.

Lineair betekent in deze context 'van de eerste graad', maar de benaming weerspiegelt het intuïtieve idee dat we praten over zaken die op een bepaalde manier 'recht' zijn of vlak, in de realiteit of in grafische voorstellingen.

'Lineair' staat ook vaak gelijk met 'handelbaar' of 'begrijpbaar': Moeilijkere concepten zijn te begrijpen met de lineaire algebra als opstapje. Moeilijkere problemen worden opgelost met lineaire benaderingen.

CC BY-NC-SA 4.0

23.2 Intro vectoren en matrices

Een **matrix** is een rechthoekig rooster van getallen, bijvoorbeeld $\begin{bmatrix} 1.2 & -3 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & -3.14 \end{bmatrix}$, waarbij de getallen verschillende zaken kunnen voorstellen: een stelsel, een stel vectoren, een assenstelsel, een lineaire afbeelding,... De lijst is heel veel langer.

Een **vector** kan je beschouwen als een stel getallen, die je naast of onder elkaar weergeeft, bijvoorbeeld $(-2, 1, 7)$ of $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Ook een vector kan tal van zaken voorstellen: een krachtvector, een verschuivingsoperatie, een punt in de ruimte, een punt in een grafiek, een stap, en nog veel meer.
Maar let op: de voorgestelde zaken worden zelf ook vaak 'vector' genoemd. 'Vector' is een woord met meerdere betekenissen, die we verder geleidelijk aan bod laten komen.

In wat volgt hebben we de leerstof over vectoren en matrices als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) De definitie en basiseigenschappen van vectoren als elementen van $\mathbb{R}^n$

(3) Een korte inleiding tot de belangrijke begrippen lineaire combinatie en inwendig product die we zullen nodig hebben bij stelsels en rechten en vlakken.

(4) De definitie en basiseigenschappen van matrices als elementen van $\mathbb{R}^{m\times n}$

Deze drie topics vectoren, lineaire combinaties en matrices volstaan als voorbereiding om de belangrijkste aspecten van stelsels en rechten en vlakken te begrijpen.

(5) Matrices kan je ook vermenigvuldigen en transponeren.

(6) Voor *vierkante* matrices is er de erg belangrijke determinant die onder meer bepaald of de matrix inverteerbaar is.

(7) Voor *vectoren* is er niet alleen het inwendig product, maar in $\mathbb{R}^3$ (en enkel daar!) bestaat er ook een belangrijk vectorproduct.

CC BY-NC-SA 4.0

23.3 Vectoren

We gebruiken het begrip *vector* hier als een andere naam voor een *n-tal van reële getallen*. Dergelijke vectoren veralgemenen de koppels (x, y), en dus punten of vectoren in het vlak, en de drietallen (x, y, z) en dus punten of vectoren in de driedimensionale ruimte. De *meetkundige* betekenis in een n-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^n$ wordt elders besproken, hier beperken we ons tot wat nuttig is bij de studie van stelsels van vergelijkingen .

Voorbeeld 23.3.1 (Voorbeelden van vectoren)**.**

Volgende reeksen van getallen kunnen worden voorgesteld als een vector:

(a) maximumtemperaturen per dag in Ukkel tijden de eerste week van maart 2021:

$$(11.8 , 17.2 , 16.3 , 8.7 , 6.4 , 7.3 , 6.2)$$

(b) veilingprijzen (€/kg) van aardbeien, appelen, braambessen, frambozen en peren op 15/3/2021:

$$(8.307 , 0.570 , 6.660 , 0.909 , 0.480)$$

(c) het verschil van die veilingprijzen ten opzicht van de vorige dag:

$$(-1.805 , -0.040 , +0.308 , +0.272 , -0.007)$$

Merk op dat het niet abstract of exotisch is vectoren te bestuderen met meer dan 2 of 3 componenten. Klimaatwetenschappers gebruiken vectoren met 10.000, 1.000.000 of nog veel meer componenten, afhankelijk van de nauwkeurigheid waarmee ze de evolutie van gemiddelde jaartemperaturen willen bestuderen.

Definitie 23.3.1 (Vector als n-tal)**.**

Een **vector a** is een geordend n-tal reële getallen en $\mathbb{R}^n$ is de verzameling van al die vectoren:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Men noemt een vector in $\mathbb{R}^n$ soms een n-**vector**, en n de **dimensie** van de vector.

De getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ zijn de **componenten** (of ook **coördinaten**) van de vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Vectoren zijn *gelijk* als ze *dezelfde componenten* hebben *in dezelfde volgorde*: $(0.5, 1) = (\frac{1}{2}, 1)$ en $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Voorbeeld 23.3.2.

$(1, 2)$	is een vector in $\mathbb{R}^2$	$(\sqrt{2}, 0, -1, \pi)$	is een vector in $\mathbb{R}^4$
$(1, -2, \frac{1}{2})$	is een vector in $\mathbb{R}^3$	$(1, 1, \dots, 1)$	is een vector in $\mathbb{R}^n$

Opmerking 23.3.1.

- In andere contexten worden andere definities gegeven van vectoren: vectoren komen onder verschillende gedaantes voor in de meetkunde, in de fysica en in de lineaire algebra.
- Men noteert een vector $\mathbf{a}$ soms ook met een pijltje als $\vec{a}$ of gewoon als a. Uiteraard kunnen er ook andere letters gebruikt worden zoals $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ of $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.

De belangrijkste bewerkingen op vectoren zijn de *som* en het *scalair veelvoud*. Met behulp van de som

CC BY-NC-SA 4.0

23.3 Vectoren

kunnen we onmiddellijk ook *verschil* en *tegengestelde* definiëren.

Definitie 23.3.2 (Rekenen met vectoren)**.**

Voor twee vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ en een getal $r \in \mathbb{R}$ definiëren we:

som	$\mathbf{a}+\mathbf{b}$	$=$	$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$
scalair veelvoud	$r\mathbf{a}$	$=$	$r \cdot \mathbf{a} = r(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$
nulvector	$\mathbf{0_n}$			$\overset{\text{def}}{=}$	$(0, \dots, 0)$
tegengestelde	$-\mathbf{a}$	$=$	$-(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$
verschil	$\mathbf{a}-\mathbf{b}$	$\overset{\text{def}}{=}$	$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$	$=$	$(a_1-b_1, a_2-b_2, \dots, a_n-b_n)$

Voorbeeld 23.3.3.

$$(1,2)+(3,4) = (1+3, 2+4) = (4,6) \qquad (4,3)-(2,1) = (4-2, 3-1) = (2,2) = 2\cdot(1,1)$$
$$-(1,2,3) = (-1,-2,-3) \qquad (1,-1.5,3)+(2.2,-1,0) = (3.2,-2.5,3)$$
$$3\cdot(1,2) = (3,6) \qquad 3\cdot(1,-1,0.5) = (3,-3,1.5)$$

Opmerking 23.3.2.

- De som en het verschil van vectoren worden 'component per component' berekend. Bijgevolg zijn som en verschil enkel gedefinieerd voor vectoren *van hetzelfde formaat*: de som ~~$(1,2)+(3,4,5,6)$~~ is *niet gedefinieerd*.
- Indien het formaat duidelijk is uit de context wordt de index n van de nulvector meestal weggelaten: $\mathbf{0} = \mathbf{0_n}$. Als er geen verwarring mogelijk is wordt zelfs niet altijd onderscheid gemaakt tussen het getal 0 en de vector $\mathbf{0}$ en schrijft men ook $\mathbf{a}+0$ in plaats van $\mathbf{a}+\mathbf{0_n}$.
- Net zoals voor de vermenigvuldiging van getallen schrijft men het punt voor de scalaire vermenigvuldiging soms wel en soms niet: $r \cdot \mathbf{a} = r\mathbf{a}$.
- Het scalair veelvoud is het resultaat van de ('scalaire') vermenigvuldiging van een *scalar* r (dus een reëel getal) met een *vector* $\mathbf{a}$. Het resultaat is zelf dus een *herschaalde vector* $r\mathbf{a}$. Per uitzondering noemen we hier het resultaat van een vermenigvuldiging geen *product*, maar een *veelvoud*. Het is redelijk om $r\mathbf{a}$ '*scalair*' *veelvoud* te noemen, want $r\mathbf{a}$ is inderdaad een r *keer* her*schaal*de vector $\mathbf{a}$.
- Pas op: er bestaat ook een scalair *product* van vectoren, en dat is iets totaal anders dan het scalair *veelvoud*. Bij het scalair *product* worden *twee vectoren* vermenigvuldigd waarbij het resultaat een *scalar* is, dus een reëel getal.

Volgende rekenregels volgen onmiddellijk uit de definitie van de optelling en het scalair veelvoud:

Eigenschap 23.3.1. Voor elke vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en elk getal $r \in \mathbb{R}$ geldt

$$\mathbf{a}+\mathbf{0_n} = \mathbf{a} \qquad 1\mathbf{a} = \mathbf{a} \qquad (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$$
$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0_n} \qquad 0\mathbf{a} = \mathbf{0_n} \qquad r\mathbf{0_n} = \mathbf{0_n}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

23.4 Lineaire combinaties

Met vectoren worden in de praktijk dikwijls zogenaamde *lineaire combinaties* gevormd:

Definitie 23.4.1 (Lineaire combinatie)**.**

Een **lineaire combinatie van vectoren** is *een som van (scalaire) veelvouden* van die vectoren.

Als $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$ en $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, dan is de vector

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \ldots + a_m\mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$$

een **lineaire combinatie** van de vectoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ met **coëfficiënten** of **gewichten** a_i.

Voorbeeld 23.4.1. Als $\mathbf{e}$ staat voor één ei, $\mathbf{b}$ voor één gram bloem en $\mathbf{m}$ voor één milliliter melk, dan leren terzake gespecialiseerde websites dat

$$2\mathbf{e} + 250\mathbf{b} + 500\mathbf{m} = 8\mathbf{p}$$

waarbij $\mathbf{p}$ staat voor één pannenkoek, en dat een geschikte lineaire combinatie van eieren, bloem en melk dus acht pannenkoeken oplevert.

We kunnen in deze context een drietal $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ interpreteren als x eieren, y gram bloem en z milliliter melk. Dan is $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$ inderdaad één ei, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$ één gram bloem en $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ één milliliter melk. In de driedimensionale ruimte met punten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ komt het punt $(2, 250, 500)$ overeen met 8 pannenkoeken, en $(4, 500, 1000)$ met 16 pannenkoeken. Het grootste deel van de ruimte komt echter overeen met 'smurrie'.

Deze eenvoudige modellering houdt ten onrechte ook geen rekening met het nochtans belangrijke bakproces met parameters als temperatuur, baktijd en gebruikte vetstoffen. Een volledige uitwerking van dit voorbeeld hoort thuis in terzake meer gespecialiseerde cursussen, maar we kunnen opmerken dat pannenkoeken bakken een proces is dat plaatsvindt in een ruimte van minstens dimensie 6, met als onafhankelijke grootheden de hoeveelheden eieren, bloem, melk samen met de baktemperatuur, de baktijd en de hoeveelheid vetstof.

Een voor de hand liggend probleem is het bepalen van de deelverzameling van $\mathbb{R}^6$ die effectief *pannenkoeken* oplevert, om vervolgens het punt te zoeken dat de *lekkerste pannenkoeken* oplevert. Als economen ook prijzen toevoegen aan het model kunnen ze op zoek gaan naar de goedkoopste pannenkoeken. Ingenieurs kunnen de verhouding baktijd/baktemperatuur optimaliseren, ofwel naar benodigde tijd, ofwel naar benodigde energie per pannenkoek. Als voedingsdeskundigen bacteriële gegevens toevoegen, kunnen ze de maximale bewaartijd bepalen. En als studenten honger krijgen, kunnen ze nu een pannenkoek gaan eten.

Voorbeeld 23.4.3 (Lineaire combinaties)**.**

$(5,7)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(4,5)$	want $(5,7) = 1(1,2) + 1(4,5)$.
$(1,2)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(4,5)$	want $(1,2) = 1(1,2) + 0(4,5)$.
$(2,4)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(4,5)$	want $(2,4) = 2(1,2) + 0(4,5)$.
$(2,4)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(2,4)$	want $(2,4) = 2(1,2) + 0(2,4)$, of ook $(2,4) = 0(1,2) + 1(2,4)$.
$(5,7)$	is geen	lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(2,4)$	want $(5,7) \neq a(1,2) + b(2,4) = (a+2b)(1,2)$.
$(2,4,0)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$	want $(2,4,0) = 2(1,2,0) + 0(4,5,0)$.
$(2,4,1)$	is geen	lineaire combinatie van $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$	want de derde component is altijd 0.
$(14,19)$	is	een lineaire combinatie van $(1,2)$ en $(4,5)$	want $(14,19) = 2(1,2) + 3(4,5)$

CC BY-NC-SA 4.0

23.5 Inwendig product of inproduct

Met twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ wordt ook één getal geassocieerd: zogenaamde het *inwendig of scalair product*.

Definitie 23.5.1.

Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ is het reëel getal

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 23.5.1.

$$(1,2) \cdot (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11 \quad \text{en} \quad (3,-2,1) \cdot (2,2,-2) = 6 - 4 - 2 = 0.$$

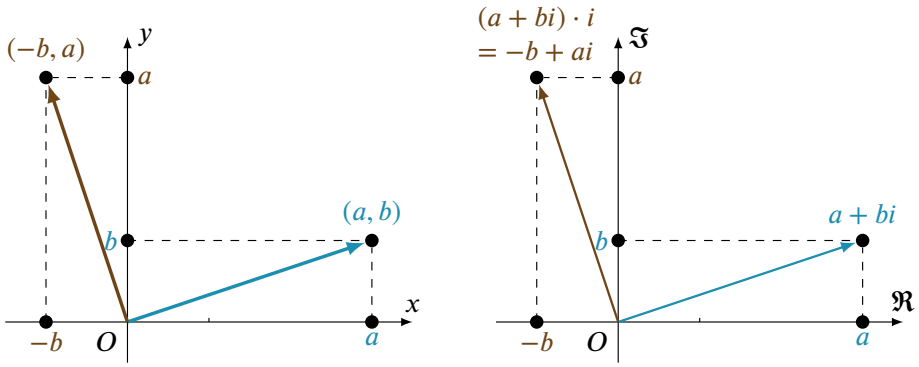
Dit inwendig product levert informatie over de onderlinge ligging van beide vectoren, in het bijzonder:

Eigenschap 23.5.1. Voor twee vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

In $\mathbb{R}^2$ kan je deze eigenschap als volgt begrijpen: een kwartdraai van het vlak in tegenwijzerzin brengt de positieve x-as naar de positieve y-as en de positieve y-as naar de negatieve x-as. Een punt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ komt bij een kwartdraai dus terecht op het punt $(-b,a)$, en na een kwartdraai staat de vector $(-b,a)$ dus loodrecht op de oorspronkelijke vector (a,b):

$$(a,b) \perp (-b,a) \quad \text{en} \quad (a,b) \cdot (-b,a) = a(-b) + ba = 0.$$



Wie vertrouwd is met complexe getallen, kan opmerken dat het koppel (a,b) kan geschreven worden als $a+bi$, dat 'vermenigvuldigen met i' overeenkomt met een kwartdraai, en dat $(a+bi) \cdot i = ai + bi^2 = -b + ai$ dus inderdaad overeenkomt met het punt $(-b,a)$.

Volgend filmpje legt dit uit in 15 seconden (van tijd 2:51 tot 3:05):

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/FvdrGuCfAhk?start=175&end=185&autostart=1&rel=0&

CC BY-NC-SA 4.0

23.6 Matrices

Net zoals een vector een manier is om *veel getallen* bij te houden, kan je een *matrix* beschouwen als een manier om *veel vectoren* (van dezelfde dimensie) bij te houden. Matrices zijn dus *rechthoeken van getallen*, en ze zijn bijvoorbeeld erg nuttig bij de studie van stelsels van vergelijkingen maar komen ook voor in andere contexten.

Voorbeeld 23.6.1. Examenresultaten voor verschillende vakken kan je bijhouden in een tabel:

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

Je kan dezelfde gegevens ook in volgende (punten)matrix $\mathbf{A}$ opschrijven

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}.$$

In deze voorstelling staan de punten van een bepaalde leerling in een rij, en de punten van een bepaald vak in een kolom. We noemen $\mathbf{A}$ een 5×4-matrix met 5 *rijen* en 4 *kolommen*. Het getal op rij 3 en kolom 2 zijn de punten van Chris voor Nederlands, en noteren we met indices als $(\mathbf{A})_{32} = 65$.

Definitie 23.6.1 (Matrix)**.**

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

- Met $\mathbb{R}^{m \times n}$ noteren we de verzameling van alle $m \times n$ matrices van reële getallen.
- De **matrixelementen** (of soms ook *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{1,1}, \ldots a_{i,j}, \ldots, a_{m,n}$.
  Soms noteert men de matrixelementen als $(\mathbf{A})_{i,j} \overset{\text{def}}{=} a_{i,j} \in \mathbb{R}$, en
  de matrix A als $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ of $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (dus met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij .
- De **diagonaal** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ bestaat uit de elementen $a_{i,i}$ die we de **diagonaalelementen** van de matrix noemen. Voor een vierkante matrix vormen ze inderdaad de diagonaal

CC BY-NC-SA 4.0

23.6 Matrices

van de matrix. In volgende voorbeelden zijn de diagonaalelementen blauw gekleurd:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 23.6.2.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is een 2×2 matrix met $(\mathbf{A})_{1,1} = 1, (\mathbf{A})_{2,1} = 3, (\mathbf{A})_{1,2} = 2$ en $(\mathbf{A})_{2,2} = 4$

  Als je dezelfde matrix $\mathbf{A}$ schrijft als $[a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$, dan is $a_{1,1} = 1$, $a_{2,1} = 3$ etc.
- $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 2×3 matrix en $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 3×2 matrix.
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ is een rijmatrix, en $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ is een kolommatrix.

Opmerking 23.6.1.

- In deze notatie $m \times n$ mag het 'product' $m \times n$ *niet* worden uitgerekend: een 2×3 matrix is niet hetzelfde als een 3×2 matrix of een 6×1 matrix. Een 6-matrix bestaat zelfs niet, maar wel een 6-vector want dat is een andere naam voor een 6-tal.
- De eerste index i geeft het nummer van de *rij* aan, de tweede index j die van de *kolom*.
- De notatie $(\mathbf{A})_{i,j}$ is vooral handig als de elementen van $\mathbf{A}$ nog geen naam hebben. Als $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ (een gelijkheid van twee matrices), dan geldt dus voor alle i en j dat $(\mathbf{A})_{i,j} = a_{i,j}$ (telkens een gelijkheid van twee getallen).
- Voor elke i en j is $(\mathbf{A})_{i,j}$ een reëel getal, namelijk het element van $\mathbf{A}$ op rij i en kolom j. De uitdrukking $[a_{i,j}]$ daarentegen staat voor de ganse matrix, en i en j zijn daarin *geen vooraf gegeven concrete getallen*, maar *indices* die lopen over de rijen respectievelijk de kolommen:

$$\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
$$\forall i, j : \quad (\mathbf{A})_{i,j} \in \mathbb{R}$$

  en je kan dus ook schrijven $\mathbf{A} = [(\mathbf{A})_{i,j}] = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $(\mathbf{A})_{i,j} = a_{i,j} \in \mathbb{R}$
- In sommige cursussen gebruikt men ronde haakjes in plaats van rechte haakjes: $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, en men laat meestal de komma's tussen de indices weg: $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ of $\mathbf{A} = (a_{ij})$.
- In het geval $n = m = 1$ wordt in de praktijk bijna nooit onderscheid gemaakt tussen een 1×1 matrix $[a]$, een vector met 1 component (a) en een getal a.
- Het geval $n = 1$ of $m = 1$ is subtieler: er wordt in de praktijk soms geen onderscheid gemaakt tussen een vector $(a_1, \ldots, a_n)$ en een $1 \times n$ matrix $[a_1, \ldots, a_n]$ of tussen een vector $(a_1, \ldots, a_n)$ en de gelijkaardige kolommatrix. Maar het onderscheid tussen kolommatrices enerzijds en rijmatrices anderzijds is dikwijls *toch belangrijk*.

CC BY-NC-SA 4.0

23.6 Matrices

Zowel een n-tal, een kolommatrix als een rijmatrix kan je beschouwen als schrijfwijzen voor een reële *vector*:

$$(1,-2,3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

maar het belang van het onderscheid tussen de schrijfwijzen hangt erg af van de context. En afhankelijk van die context wordt al dan niet onderscheid gemaakt tussen $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$ en $\mathbb{R}^{1\times n}$.

Als we rij- of kolommatrices beschouwen als *vectoren* dan noteren we ze meestal met kleine letters $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \ldots$, terwijl willekeurige matrices een hoofdletter $\mathbf{A}, \mathbf{X}, \ldots$ krijgen.

In ieder geval zijn strikt wiskundig vectoren, rijmatrices en kolommatrices *verschillend*. Dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \neq (1,3,-2),$$

maar als de betekenis voldoende duidelijk is uit de context worden ze toch door elkaar gebruikt.

Een matrix is per definitie een rechthoekig rooster van getallen, maar we beschouwen dergelijk rooster soms ook als een aantal onder elkaar geplaatste rijen of als een aantal naast elkaar geplaatste kolommen:

Definitie 23.6.2. We schrijven een matrix ook als een collectie van rijen of kolommen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \cdots \quad a_{1,n} \\ \hline a_{2,1} \quad a_{2,2} \quad \cdots \quad a_{2,n} \\ \hline \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ \hline a_{m,1} \quad a_{m,2} \quad \cdots \quad a_{m,n} \end{array}\right]$$

en

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{k_1} & \mathbf{k_2} & \cdots & \mathbf{k_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \\ \vdots \\ \mathbf{r_m} \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{k_i} = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{r_i} = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{bmatrix}$$

De lijnen hebben in deze schrijfwijze geen betekenis en dienen enkel om de kolommen of rijen aan te duiden.

Voorbeeld 23.6.3.

We kunnen de matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ beschouwen als

twee naast elkaar geplaatste kolomvectoren $\mathbf{k_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{k_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{k_1} & \mathbf{k_2} \end{bmatrix}$

of als twee onder elkaar geplaatste rijvectoren $\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \end{bmatrix}$.

CC BY-NC-SA 4.0

23.7 Som en veelvoud van matrices

De **optelling** en de **scalaire vermenigvuldiging** van matrices wordt gedefinieerd zoals bij vectoren: element-per-element. Voor de optelling moeten beide matrices dezelfde afmetingen hebben, allebei even-veel rijen en evenveel kolommen.

Definitie 23.7.1 (Optelling en scalair veelvoud van matrices).

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$r \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{1,1} & ra_{1,2} & \cdots & ra_{1,n} \\ ra_{2,1} & ra_{2,2} & \cdots & ra_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m,1} & ra_{m,2} & \cdots & ra_{m,n} \end{bmatrix}$$

Met de schrijfwijze $\mathbf{A} = [a_{i,j}], \mathbf{B} = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m\times n}, r \in \mathbb{R}$ wordt dit:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{i,j} + b_{i,j}]$$
$$r\mathbf{A} = [ra_{i,j}]$$

of nog $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ $\quad (r\mathbf{A})_{i,j} = ra_{i,j}$ of ook $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{i,j} = (\mathbf{A})_{i,j} + (\mathbf{B})_{i,j}$ $\quad (r\mathbf{A})_{i,j} = r(A)_{i,j}$

Ook het **verschil** van matrices en de **tegengestelde** matrix worden gedefinieerd zoals voor vectoren, net zoals de **nulmatrix** $\mathbf{O}_{m,n} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. Als de context het toelaat schrijven we korter $\mathbf{O} = \mathbf{O}_{m,n}$.

Voorbeeld 23.7.1 (Som, verschil, tegengestelde en scalair veelvoud van matrices).

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 36 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 44 \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

maar de sommen $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 40 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 10 & 200 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ bestaan niet.

CC BY-NC-SA 4.0

23.8 Product van een matrix met een kolomvector

Hoewel ook direct een algemene formule kan gegeven worden voor het product van matrices, behandelen we hier eerst het belangrijke speciale geval van het product van een matrix met een *kolomvector*:

Definitie 23.8.1. Het **product** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$, genoteerd $\mathbf{Ab}$, is een gewogen som van de kolommen van $\mathbf{A}$ met als gewichten de componenten van $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \ldots b_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Het resultaat van dit product is dus een kolomvector, namelijk de som van de kolommen van $\mathbf{A}$ met als coëfficiënten – of 'gewichten' – de componenten van $\mathbf{b}$.

Door de som in het rechterlid uit te rekenen volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

Eigenschap 23.8.1 (Matrix-vector-product)**.**

Het product van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de $m \times 1$ kolomvector

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 a_{1,1} + b_2 a_{1,2} + \ldots + b_n a_{1,n} \\ b_1 a_{2,1} + b_2 a_{2,2} + \ldots + b_n a_{2,n} \\ \\ \vdots \\ \\ b_1 a_{m,1} + b_2 a_{m,2} + \ldots + b_n a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} b_k a_{1,k} \\ \sum_{k=1}^{n} b_k a_{2,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} b_k a_{m,k} \end{bmatrix}.$$

Opmerking 23.8.1.

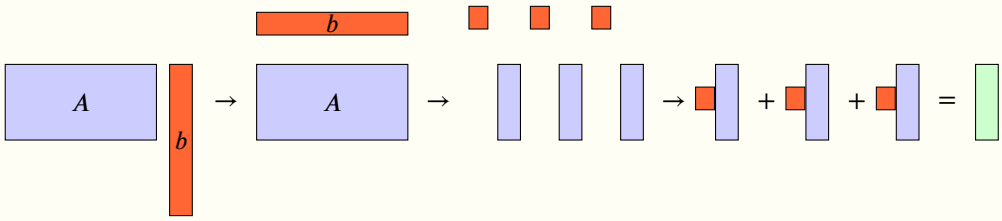
(a) Je kan in gedachten de kolomvector kantelen en boven de matrixkolommen leggen, en dan kolom per kolom vermenigvuldigen en alles optellen:

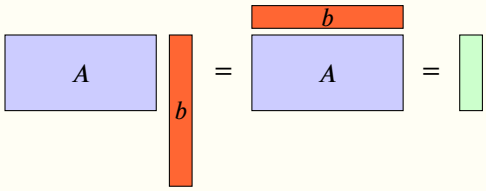
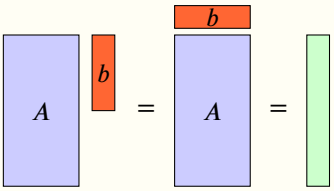
$$\begin{array}{rl} & \begin{bmatrix} b_1 & & b_2 & & \cdots & b_n \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \\ \cdots \\ \\ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Ab} = \quad + \quad + \quad + \ \ldots \ + \\ \hline = \quad b_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} \ \ldots \ + b_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} b_1 a_{1,1} \\ b_1 a_{2,1} \\ \vdots \\ b_1 a_{m,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 a_{1,2} \\ b_2 a_{2,2} \\ \vdots \\ b_2 a_{m,2} \end{bmatrix} + \ \ldots \ + \begin{bmatrix} b_n a_{1,n} \\ b_n a_{2,n} \\ \vdots \\ b_n a_{m,n} \end{bmatrix} \end{array}$$

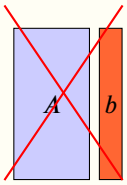
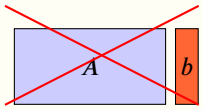
Grafisch kan je dat als volgt voorstellen:

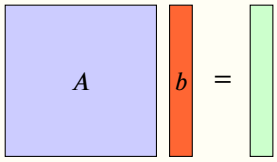
CC BY-NC-SA 4.0

23.8 Product van een matrix met een kolomvector



of  en 

Volgende producten zijn onmogelijk:  en .

Enkel voor een *vierkante* matrix $\mathbf{A}$ heeft $\mathbf{Ab}$ dezelfde lengte als $\mathbf{b}$: 

(b) Zoals gebruikelijk bij producten schrijft men soms ook een punt: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{Ab}$. Bij matrices wordt de punt echter meestal weggelaten.

(c) Als $\mathbf{A}$ een *rij*vector is schrijven we die soms ook met een kleine letter $\mathbf{a}$, en dan is het product

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \quad \in \mathbb{R}.$$

en dit komt neer op het *scalair product* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ dat elders uitvoeriger wordt behandeld.

Voorbeeld 23.8.1.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 7 = 19$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\cdot 5 + 4\cdot 7 = 43.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 1\cdot 6 + 2\cdot 8 = 22$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 3\cdot 6 + 4\cdot 8 = 50.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$ of ook $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$.

CC BY-NC-SA 4.0

23.8 Product van een matrix met een kolomvector

(d) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 6+2\cdot 8\\ 3\cdot 6+4\cdot 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\ 50\end{bmatrix}$ of ook $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 8\end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\ 50\end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 1+4\cdot 2\\ 3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 1+6\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+6+3+8\\ 6+12+5+12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19\\ 35\end{bmatrix}$.

Voorbeeld 23.8.2. In het voorbeeld over examenresultaten levert de vermenigvuldiging met geschikte kolomvectoren interessante gegevens.

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

$$A = \begin{bmatrix}80 & 80 & 40 & 20\\ 72 & 62 & 23 & 11\\ 74 & 65 & 38 & 10\\ 73 & 70 & 29 & 17\\ 75 & 71 & 30 & 15\end{bmatrix}$$

We vinden de punten voor Nederlands, het gemiddelde, en een totaal aantal punten waarbij elk vak wordt omgezet naar honderd:

$$\begin{bmatrix}80 & 80 & 40 & 20\\ 72 & 62 & 23 & 11\\ 74 & 65 & 38 & 10\\ 73 & 70 & 29 & 17\\ 75 & 71 & 30 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80\\ 62\\ 65\\ 70\\ 71\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}80 & 80 & 40 & 20\\ 72 & 62 & 23 & 11\\ 74 & 65 & 38 & 10\\ 73 & 70 & 29 & 17\\ 75 & 71 & 30 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/4\\ 1/4\\ 1/4\\ 1/4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dots\\ \dots\\ \dots\\ \dots\\ \dots\end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix}80 & 80 & 40 & 20\\ 72 & 62 & 23 & 11\\ 74 & 65 & 38 & 10\\ 73 & 70 & 29 & 17\\ 75 & 71 & 30 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dots\\ \dots\\ \dots\\ \dots\\ \dots\end{bmatrix}$$

waarbij we veronderstelden dat de punten voor Wiskunde en Nederlands al op honderd waren, Engels op 50, en Duits op 20. De kolomvector waarmee wordt vermenigvuldigd bevat dus inderdaad de gewichten voor de verschillende kolommen in de matrix. In het bijzonder *selecteert* een kolommatrix met allemaal 0 behalve één keer 1 precies één kolom uit een matrix.

Merk op dat we met het matrix-vector-product bijvoorbeeld nog niet het gemiddelde voor Wiskunde kunnen opschrijven, maar ook dat kan met matrices worden berekend.

Samengevat: we kunnen een matrix $\mathbf{A}$ nu vermenigvuldigen met een kolomvector met evenveel rijen als het aantal kolommen van $\mathbf{A}$. Het product is een *kolomvector* met evenveel rijen als $\mathbf{A}$, en is de lineaire combinatie van de kolommen van $\mathbf{A}$ met gewichten $\mathbf{b}$.

CC BY-NC-SA 4.0

23.9 Product van matrices

Het product $\mathbf{Ab}$ van een matrix $\mathbf{A}$ met een *kolommatrix* $\mathbf{b}$ is een manier om lineaire combinaties te nemen van de kolommen van $\mathbf{A}$ met gewichten uit $\mathbf{b}$. Het komt in concrete toepassingen regelmatig voor dat de vector $\mathbf{b}$ zelf ook werd bekomen als een lineaire combinatie van kolommen uit een matrix $\mathbf{B}$ met gewichten $\mathbf{c}$, dus $\mathbf{b} = \mathbf{Bc}$. Dan wordt $\mathbf{Ab} = \mathbf{A}(\mathbf{Bc})$, en het zou bijzonder handig zijn als je dat resultaat in één keer kon berekenen. Dat blijkt mogelijk door op een geschikte wijze een product van de matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ te definiëren, zodat geldt

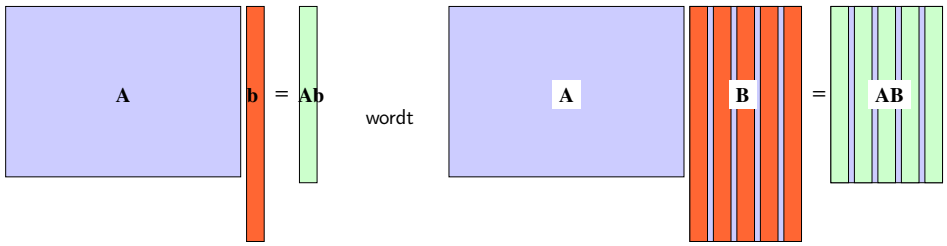
$$\mathbf{A}(\mathbf{Bc}) = (\mathbf{AB})\mathbf{c}$$

De definitie van het product van matrices moet dan wel wat ingewikkelder worden dan gewoon component per component te vermenigvuldigen. De correcte definitie beschouwt $\mathbf{B}$ als een rijtje kolommen, en vermenigvuldigt met elke kolom:

Definitie 23.9.1. Het **product** van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is de $m \times n$ matrix met kolommen de producten van $\mathbf{A}$ met de kolommen van $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ab_1} & \mathbf{Ab_2} & \dots & \mathbf{Ab_n} \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \dots & \mathbf{b_n} \end{bmatrix}$$

Grafisch wordt dit:



met $\mathbf{A}$ even *breed* als $\mathbf{B}$ *hoog* is (anders is er geen product van een *rij* van $\mathbf{A}$ met een *kolom* van $\mathbf{B}$).

Voorbeeld 23.9.1.

Omdat $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 18 \end{bmatrix}$

en gelijkaardig $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 31 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 36 \end{bmatrix}$

is dus $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 19 & 22 \\ 18 & 31 & 36 \end{bmatrix}$.

Omdat $(\mathbf{Ab_j})_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ geldt volgende expliciete formule voor het product van twee matrices:

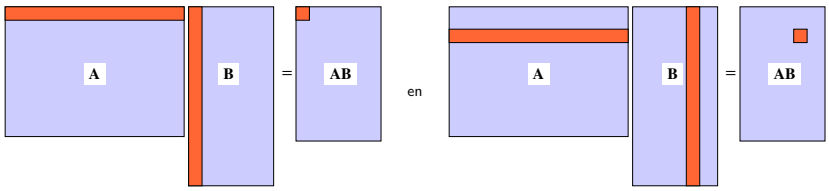
Eigenschap 23.9.1. Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{i,j} \end{bmatrix}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{i,j} \end{bmatrix}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{i,j} \end{bmatrix}$ waarbij het element $c_{i,j}$ op de i-de rij en de j-de kolom gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{i,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \dots + a_{i,p} b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Grafisch wordt dit:

CC BY-NC-SA 4.0

23.9 Product van matrices



Je kan het product ook als volgt opschrijven:

Eigenschap 23.9.2. Het product van een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is de $m \times n$ matrix

$$\mathbf{AB} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}\right]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,n} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2,k} b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{2,k} b_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{m,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{m,k} b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{m,k} b_{k,n} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times n \text{ matrix)}$$

Bijgevolg is een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ maal een $p \times 1$ kolommatrix $\mathbf{b}$ een $m \times 1$ kolommatrix:

$$\mathbf{Ab} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k}\right]_{1 \le i \le m} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2,k} b_{k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{m,k} b_{k} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times 1 \text{ kolomvector)}$$

en een $1 \times p$ rijmatrix $\mathbf{a}$ maal een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ een $1 \times n$ rijmatrix:

$$\mathbf{aB} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{k} b_{k,j}\right]_{1 \le j \le n} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{k} b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{k} b_{k,n} \end{bmatrix} \quad \text{(een } 1 \times n \text{ rijvector)}$$

Voorbeeld 23.9.2. Volledig uitgeschreven wordt dit

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} + a_{1,4}b_{4,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} + a_{1,4}b_{4,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} + a_{2,4}b_{4,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2} + a_{2,4}b_{4,2} \\ a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{2,1} + a_{3,3}b_{3,1} + a_{3,4}b_{4,1} & a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} + a_{3,3}b_{3,2} + a_{3,4}b_{4,2} \end{bmatrix}.$$

Opmerking 23.9.1.

- Mnemotechnisch hulpje: het product van een $m \times p$ met een $p \times n$ matrix is een $m \times n$ matrix, waarbij de middelste factoren p wegvallen, en p is precies de dimensie die wordt weggesommeerd

CC BY-NC-SA 4.0

23.9 Product van matrices

in elke component $c_{i,j}$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

- Optellen van twee matrices werkt enkel als ze dezelfde vorm hebben: evenveel rijen en evenveel kolommen. De vermenigvuldiging daarentegen werkt enkel voor $m \times p$ met $p \times n$ matrices, dus als het aantal *kolommen* van de eerste matrix gelijk is aan het aantal *rijen* van de tweede. Het product van een 5×3 matrix $\mathbf{A}$ en een 3×2 matrix $\mathbf{B}$ is de 5×2 matrix $\mathbf{AB}$. Maar een matrix $\mathbf{BA}$ *bestaat dan niet*. Het product $\mathbf{BA}$ is in dit geval *niet gedefinieerd*! Dit toont al meteen aan dat in het algemeen matrixvermenigvuldiging niet commutatief kan zijn: er geldt niet altijd dat ~~$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$~~.
- Een 1×100 matrix maal een 100×1 matrix is dus een getal (namelijk de som van honderd producten van telkens twee getallen), maar een 100×1 matrix maal een 1×100 matrix is een 100×100 matrix (met 10.000 keer een product van twee getallen).

We zullen verder zien hoe deze definitie onder meer nuttig is bij het compact voorstellen en manipuleren van stelsels lineaire vergelijkingen, en bij het samenstellen van lineaire afbeeldingen.

Samengevat kan je het product van matrices op volgende equivalente manieren begrijpen:

Eigenschap 23.9.3. Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is de $m \times n$ matrix zodat

- het i,j-de element gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met de j-de kolom $\mathbf{B}$.
- de j-de kolom gelijk is aan het product van matrix $\mathbf{A}$ met de j-de kolom van $\mathbf{B}$.
- de i-de rij gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met matrix $\mathbf{B}$.

Elke *kolom* in $\mathbf{AB}$ is dus een lineaire combinaties van de *kolommen* van $\mathbf{A}$, met coëfficiënten telkens uit een kolom van $\mathbf{B}$,
en elke *rij* in $\mathbf{AB}$ is een lineaire combinaties van de *rijen* van $\mathbf{B}$, met coëfficiënten telkens uit een rij van $\mathbf{A}$.

Of nog: als je een matrix bekijkt als een collectie kolommen, is $\mathbf{AB}$ te beschouwen als een combinatie van de kolommen van $\mathbf{B}$, gewogen met gewichten in de kolommen van $\mathbf{A}$.
Als je een matrix bekijkt als een collectie rijen, is $\mathbf{AB}$ te beschouwen als een combinatie van de rijen van $\mathbf{A}$ met gewogen met gewichten in de rijen van $\mathbf{B}$.

Voorbeeld 23.9.3.

1. Als $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ dan kan je het product

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 1 + 0 & 0 + 6\cdot 2 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 1 + 0 & 0 + 6\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 1 & 12 \\ 43 & 3 & 24 \end{bmatrix}.$$

interpreteren als

- lineaire combinaties van de kolommen van $\mathbf{A}$ met gewichten telkens in de kolommen van $\mathbf{B}$:
  de eerste kolom $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ levert $\begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$ als eerste kolom van het product $\mathbf{AB}$ want dat is 5 keer de eerste kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$ plus 7 keer de tweede kolom $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.
  Op dezelfde manier selecteert de tweede kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ de eerste kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$,

CC BY-NC-SA 4.0

23.9 Product van matrices

en vermenigvuldigt de derde kolom $\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ de tweede kolom $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$ met 6.

- lineaire combinaties van de rijen van $\mathbf{B}$ met gewichten telkens in de rijen van $\mathbf{A}$:
  de eerste rij $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$ levert $\begin{bmatrix}19 & 1 & 10\end{bmatrix}$ als eerste rij van het product $\mathbf{AB}$ want dat is 1 keer de eerste rij $\begin{bmatrix}5 & 1 & 0\end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ plus 2 keer de tweede rij $\begin{bmatrix}7 & 0 & 6\end{bmatrix}$.
  De tweede rij van $\mathbf{AB}$ is op dezelfde manier 3 keer de eerste rij plus 4 keer de tweede rij van $\mathbf{B}$.

2. Het product $\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\cdot 1 & 5\cdot 2\\7\cdot 1 & 7\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 10\\7 & 14\end{bmatrix}$ kan je

- op basis van rij $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ lezen als: 1 keer kolom $\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$ gevolgd door 2 keer die kolom, of
- op basis van kolom $\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$ lezen als: 5 keer rij $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ gevolgd door 7 keer diezelfde rij.

3. Het product $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\cdot 1 + 7\cdot 2\end{bmatrix} = 19$ is een 1×1 matrix, of dus een getal.

Extra: links vermenigvuldigen met een rijmatrix. Als oefening kan je volgende interpretatie van het product van *rij*matrix **a** met matrix **B** bestuderen als lineaire combinatie van de *rijen* van **B** met *gewichten* **a**:

Eigenschap23.9.4. Het product van een $1\times n$ rijvector met een $n\times m$ matrix is de $1\times m$ rijvector

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m}\\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,m}\end{bmatrix} = \left\{\begin{array}{lllll} & a_1 & \begin{bmatrix}b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m}\end{bmatrix}\\ + & a_2 & \begin{bmatrix}b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m}\end{bmatrix}\\ + & \cdots & \\ + & a_n & \begin{bmatrix}b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,m}\end{bmatrix}\end{array}\right.$$

$$= \begin{bmatrix}a_1b_{1,1} + a_2b_{2,1} + \ldots + a_nb_{n,1} & \ldots & a_1b_{1,m} + a_2b_{2,m} + \ldots + a_nb_{n,m}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n} a_kb_{k,1} & \sum_{k=1}^{n} a_kb_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_kb_{k,m}\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld23.9.4.

(a) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19 & 22\end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}43 & 50\end{bmatrix}$ of ook

$\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}43 & 50\end{bmatrix}$.

CC BY-NC-SA 4.0

23.10 Eigenschappen van het product van matrices

Men kan bewijzen dat het product van matrices associatief is:

Eigenschap 23.10.1. Voor vermenigvuldigbare matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ geldt dat:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \qquad \text{(associativiteit)}.$$

Het bijzonder geval met $\mathbf{C}$ een kolomvector $\mathbf{x}$ verdient speciale aandacht. De associativiteit $\mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = (\mathbf{AB})\mathbf{x}$ zegt dan dat de vector $\mathbf{x}$ met een matrix $\mathbf{B}$ vermenigvuldigen en de bekomen vector $\mathbf{Bx}$ nog eens (links) met een matrix $\mathbf{A}$ vermenigvuldigen, hetzelfde resultaat oplevert als de vector $\mathbf{x}$ (links) met het product van $\mathbf{AB}$ te vermenigvuldigen.

Enkele speciale types van matrices krijgen een eigen naam:

Definitie 23.10.1 (Speciale vierkante matrices)**.** Een $n \times n$ matrix is

de	**nulmatrix $\mathbf{O}_n$**	als	alle elementen 0 zijn.
de	**eenheidsmatrix $\mathbf{I}_n$**	als	alle elementen *op* de diagonaal 1 zijn en alle elementen *buiten* de diagonaal 0 zijn.
een	**diagonaalmatrix**	als	alle elementen *buiten* de diagonaal 0 zijn. (en dus willekeurige getallen *op* de diagonaal)
een	**bovendriehoeksmatrix**	als	alle elementen *onder* de diagonaal 0 zijn. (en dus willekeurige getallen *op en boven* de diagonaal)
een	**onderdriehoeksmatrix**	als	alle elementen *boven* de diagonaal 0 zijn. (en dus willekeurige getallen *op en onder* de diagonaal)

Voorbeeld 23.10.1. Een eenheidsmatrix, een diagonaalmatrix en een bovendriehoeksmatrix:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

De index bij $\mathbf{I_n}$ wordt vaak weggelaten als het formaat duidelijk is uit de context.

De eenheidsmatrix is een neutraal element voor de vermenigvuldiging, zoals je zelf kan verifiëren:

Eigenschap 23.10.2 (Eenheidsmatrix is neutraal element)**.**

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{en} \quad \mathbf{AI}_n = \mathbf{A} \quad \text{met } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Analoog aan het inverse of omgekeerde van getallen (a^{-1} is het unieke getal b zodat $ab = 1$) definiëren we voor matrices:

Definitie 23.10.2 (Inverse matrix)**.** Twee matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn elkaars **inverse** als

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

Als voor een gegeven $\mathbf{A}$ dergelijke $\mathbf{B}$ bestaat dan is die uniek, en we noteren die als $\mathbf{A}^{-1}$. Er geldt dus

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Merk op dat bijvoorbeeld de matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *geen* inverse heeft, en dat in het algemeen uit $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ *niet*

CC BY-NC-SA 4.0

23.10 Eigenschappen van het product van matrices

volgt dat ook $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$.

Het optellen en vermenigvuldigen van matrices voldoet aan een aantal verwachte eigenschappen die het optellen en vermenigvuldigen van reële getallen veralgemenen:

Eigenschap 23.10.3 (Eigenschappen matrixbewerkingen)**.** Voor reële getallen a,b en c en reële matrices $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ gelden volgende eigenschappen zodra ze betekenis hebben (dat betekent: zodra de matrices het correcte formaat hebben om de optellingen en vermenigvuldigingen te kunnen uitvoeren):

(a) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$ (optelling is commutatief)

(b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (optelling is associatief)

(c) $\mathbf{A}+\mathbf{O} = \mathbf{A}$ (nulmatrix is neutraal element voor de optelling)

(d) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ ($-A$ is het tegengestelde van $\mathbf{A}$ voor de optelling)

(e) $a(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$ (scalaire vermenigvuldiging is distributief t.o.v. optelling van matrixes)

(f) $(a+b)\mathbf{A} = a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$ (scalaire vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling van getallen)

(g) $a(b\mathbf{A}) = (ab)\mathbf{A}$ (scalaire vermenigvuldiging is gemengd associatief)

(h) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ (scalaire vermenigvuldiging met 1)

(i) $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$ (scalaire vermenigvuldiging met 0)

(j) $\mathbf{OA} = \mathbf{O}$ (matrixvermenigvuldiging met nulmatrix)

(k) $a\mathbf{O} = \mathbf{O}$ (nulmatrix scalair vermenigvuldigen)

(l) $(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ (scalaire vermenigvuldiging met -1)

(m) $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ en $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$ (eenheidsmatrix is neutraal element voor de vermenigvuldiging),

(n) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (matrixvermenigvuldiging is associatief)

(o) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ (matrixvermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling)

Let wel op dat met matrices niet *alles* mag wat voor getallen geldt:

Eigenschap 23.10.4 (Belangrijke niet-eigenschappen van matrices)**.**

Volgende eigenschappen *gelden niet altijd* voor matrices $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$:

~~$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$~~ (matrixvermenigvuldiging is niet (altijd) commutatief)

~~$\mathbf{AB} = \mathbf{O} \implies \mathbf{A} = \mathbf{O}$ of $\mathbf{B} = \mathbf{O}$~~ (matrixvermenigvuldiging heeft (soms) nuldelers)

~~$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \implies \mathbf{B} = \mathbf{C}$~~ (matrixvermenigvuldiging mag je niet (altijd) vereenvoudigen)

Voorbeeld 23.10.2. De vermenigvuldiging van matrices is niet commutatief:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

maar

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

23.10 Eigenschappen van het product van matrices

Voorbeeld 23.10.3. Voor sommige matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ geldt toch $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 23.10.4. Een product kan nul zijn zonder dat één van de factoren nul is:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \text{ en ook } \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 23.10.5. Uit $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ volgt niet altijd dat $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

Voor reële getallen geldt: als $ab = ac$ dan is $b = c$, tenminste als $a \neq 0$. Dit komt omdat we de factor a dan kunnen 'wegdelen' door linkerlid en rechterlid te vermenigvuldigen met het getal $a^{-1} = 1/a$ (het *inverse van* a: $a^{-1} \cdot a = 1$): als $ab = ac$, dan is zeker ook $a^{-1} \cdot ab = a^{-1} \cdot ac$ en dus $b = c$.

Ook bij matrices kunnen we vereenvoudigen als $\mathbf{A}$ inverteerbaar is: we kunnen dan ook beide leden van $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ links vermenigvuldigen met $\mathbf{A}^{-1}$. **Maar pas op:** in tegenstelling tot bij de reële getallen, heeft niet elke matrix verschillend van de nulmatrix een inverse!

Als $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ met $\mathbf{A}$ inverteerbaar, dan volgt door $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ links te vermenigvuldigen met $\mathbf{A}^{-1}$ dat ook

$$\begin{array}{lrcll} & \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) & = & \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AC}) & \\ \text{en dus} & (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} & = & (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{C} & \\ \text{en dus} & \mathbf{IB} & = & \mathbf{IC} & \text{omdat } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \\ \text{en dus} & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} & \end{array}$$

Merk op dat uit $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ wel altijd volgt dat $\mathbf{AB} - \mathbf{AC} = \mathbf{O}$, en dus ook dat $\mathbf{A}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) = \mathbf{O}$.

Maar we weten al dat daaruit *niet* volgt dat $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ of $\mathbf{B} - \mathbf{C} = \mathbf{O}$

CC BY-NC-SA 4.0

23.11 Transponeren van matrices

Een matrix *transponeren* is een veelgebruikte operatie die geen equivalent heeft voor getallen, namelijk zijn *kolommen* schrijven als *rijen*. Dat komt neer op het *spiegelen* van de matrix rond de diagonaal, of het *verwisselen van rijen met kolommen*. In het bijzonder is de getransponeerde van een kolomvector een rijvector en omgekeerd.

Definitie 23.11.1 (Transponeren)**.**

De **getransponeerde matrix** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ is de $n \times m$ matrix $\mathbf{A}^T = [a_{j,i}]$. Dus:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \cdots & a_{m,3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Met de verkorte notatie betekent dit het omwisselen van de indices: $(\mathbf{A}^T)_{i,j} = (\mathbf{A})_{j,i}$ of $[a_{i,j}]^T = [a_{j,i}]$

Opmerking 23.11.1. De getransponeerde $\mathbf{A}^T$ van een gegeven matrix A bepaal je door de rijen van $\mathbf{A}$ als kolommen te nemen van $\mathbf{A}^T$: de eerste *rij* van de matrix $\mathbf{A}$ is de eerste *kolom* van de matrix $\mathbf{A}^T$, de tweede rij van de matrix $\mathbf{A}$ de tweede kolom van de matrix $\mathbf{A}^T$ en zo verder.

De getransponeerde van de 2×3 matrix is een 3×2 matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Je kan ook de *kolommen* van de matrix $\mathbf{A}$ schrijven als de *rijen* van de matrix $\mathbf{A}^T$: dat geeft hetzelfde resultaat. En dat is ook hetzelfde als de matrix 'spiegelen' ten opzichte van de diagonaal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \implies \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 23.11.1. Getransponeerde matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 99 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 99 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 99 \\ 99 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 99 \\ 99 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Volgende eigenschappen van transponeren kan je zelf eenvoudig nagaan (enkel de laatste vraagt nogal wat rekenwerk):

CC BY-NC-SA 4.0

23.11 Transponeren van matrices

Eigenschap 23.11.1 (Eigenschappen van transponeren)**.**

$\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$ (getransponeerde van de identieke matrix is de identieke matrix)

$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ (getransponeerde van de getransponeerde is terug de matrix zelf)

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ (getransponeerde van de som is som van de getransponeerden)

$(r\mathbf{A})^T = r\mathbf{A}^T$ (getransponeerde van scalair veelvoud is scalair veelvoud van getransponeerde)

$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (getransponeerde van product is product van getransponeerden **in omgekeerde volgorde**)

- Merk op: als het matrixproduct $\mathbf{AB}$ goed gedefinieerd is (t.t.z. compatibele matrixdimensies), dan is ook $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ goed gedefinieerd (omdat transponeren de matrixdimensies omdraait).

Opmerking 23.11.2. Indien $\mathbf{A}$ inverteerbaar is, dan is ook $\mathbf{A}^T$ inverteerbaar. Immers, als er een matrix $\mathbf{A}^{-1}$ bestaat zodat $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = I = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$, dan is

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = I^t = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T$$

dus

$$(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = \mathbf{I} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T$$

zodat $(\mathbf{A}^{-1})^T$ de inverse van $\mathbf{A}^T$ is.

CC BY-NC-SA 4.0

23.12 Determinanten

De *determinant* van een *vierkante* matrix is *een getal* dat enkele belangrijke eigenschappen van die matrix weergeeft, in de eerste plaats of de matrix al dan niet *inverteerbaar* is.

Definitie 23.12.1.

De **determinant** van matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ is $\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\text{notatie}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} ad - bc \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 23.12.1. $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = -2 - 6 = -8.$

Als $ad - bc = 0$, dan is ook $ad = bc$, en als $ad = bc \neq 0$ geldt dat ook $\frac{ad}{bc} = 1 = \frac{bc}{ad}$ en $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Als $ad = bc \neq 0$ kunnen we als volgt (a, b) proberen omvormen in (c, d):

$$(a,b) = (a \cdot \underbrace{\frac{bc}{ad}}_{=1}, b \cdot \underbrace{\frac{ad}{bc}}_{=1}) = (c \cdot \frac{b}{d}, d \cdot \frac{a}{c}) \underset{\frac{b}{d}=\frac{a}{c}}{=} \frac{a}{c} \cdot (c,d)$$

Dit betekent precies dat (a, b) en (c, d) lineair afhankelijk zijn. Als $ad = bc = 0$ is de redenering eenvoudiger.

Deze berekening impliceert dat de determinant beslist over de *lineaire afhankelijkheid van de rijen*, maar ook van de kolommen en over de inverteerbaarheid van de matrix:

Eigenschap 23.12.1. Voor een matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ geldt:

$\det \mathbf{A} \neq 0$	als en slechts als	de matrix $\mathbf{A}$	is *inverteerbaar*.
	als en slechts als	de *kolommen* van $\mathbf{A}$	zijn lineair onafhankelijk.
	als en slechts als	de *rijen* van $\mathbf{A}$	zijn lineair onafhankelijk.

Door de beweringen te negeren geldt natuurlijk ook:

$\det \mathbf{A} = 0$	als en slechts als	$\mathbf{A}$ is niet inverteerbaar.
	als en slechts als	de kolommen van $\mathbf{A}$ zijn lineair afhankelijk.
	als en slechts als	de rijen van $\mathbf{A}$ zijn lineair afhankelijk.

Voorbeeld 23.12.2.

- De determinant van matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ is $2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

  Matrix $\mathbf{A}$ is inverteerbaar, en heeft lineair onafhankelijke rijen en lineair onafhankelijke kolommen.

- De matrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft determinant $2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$.

  Deze matrix $\mathbf{B}$ is *niet* inverteerbaar, heeft lineair *af*hankelijke rijen (de eerste rij is 2 maal de tweede) en lineair *af*hankelijke kolommen (de tweede kolom is 3 maal de eerste).

Opmerking 23.12.1.

- Rechte haken betekenen 'matrix' terwijl verticale strepen betekenen 'determinant', en dus 'getal'.

CC BY-NC-SA 4.0

23.12 Determinanten

- Je kan de determinant ook begrijpen als een operatie die voor 2 koppels bepaalt of ze al dan niet lineair afhankelijk zijn: (a,b) en (c,d) zijn lineaire afhankelijk als en slechts als $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.
- Als b en d verschillend zijn van 0, kan je de uitdrukking $ad - bc = 0$ delen door $b \cdot d$, en krijg je

$$\det \mathbf{A} = 0 \iff ad - bc = 0 \iff ad = bc \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

  en dat betekent precies dat de eerste rij (a,b) evenredig is met de tweede rij (c,d).
- Met een andere notatie voor de elementen van de matrix wordt de formule

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (= a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

  die je kan lezen als: 'schrijf telkens de letters a, b van de rijen in de oorspronkelijke volgorde a, b, en schrijf de indices $1, 2$ van de kolommen eerste in de juiste volgorde (dus $a_1 b_2$), en daarna in de omgekeerde volgorde met een minteken (dus $-a_2 b_1$). Deze enigszins gekke manier van lezen zal dadelijk nuttig blijken bij de veralgemening naar determinanten van 3×3 matrices.

  Met een nog algemenere schrijfwijze voor de elementen wordt dezelfde formule ook:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \quad (= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

Er bestaat ook een definitie voor grotere vierkante matrices, maar de formules worden snel erg ingewikkeld. Voor een 3×3 matrix geldt het volgende:

Definitie 23.12.2. De determinant van de matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ is het getal

$$\det \mathbf{A} \overset{\text{notatie}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{matrix} a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 \\ -a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 \end{matrix}.$$

Merk op dat de letters steeds in de volgorde a,b,c staan en de coëfficiënten alle permutaties zijn van de indices: de even permutaties $_{123}$, $_{231}$ en $_{312}$ met plusteken, en de oneven permutaties $_{132}$, $_{213}$ en $_{321}$ met een minteken.

Opmerking 23.12.2.

(a) Dezelfde formule kan ook met ander letters worden geschreven:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

of

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ -a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{matrix}$$

of

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \\ -c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 \end{matrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

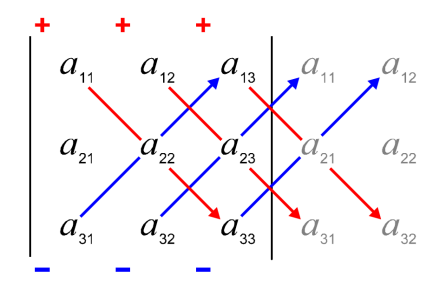
23.12 Determinanten

(b) Dezelfde formule kan ook geschreven worden met 2×2 determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

waarbij de coëfficiënten telkens uit de eerste rij komen en de bijhorende 2×2 determinanten steeds bekomen worden door de eerste rij en de kolom van de betreffende coëfficiënt te schrappen.
In deze vormen kan de definitie van determinant ook worden veralgemeend voor grotere matrices.

(c) Enkel voor 3×3 determinanten bestaat er bovendien de *regel van Sarrus*, waarbij je de twee eerste kolommen achter de matrix overschrijft, en dan de producten van de diagonalen optelt en daarvan de producten van de nevendiagonalen aftrekt:



en dat geeft inderdaad $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$.

(d) Steeds blijft gelden dat $\det \mathbf{A} = 0$ equivalent is met lineair afhankelijkheid van de kolommen van $\mathbf{A}$, en ook met de lineair afhankelijkheid van de rijen van $\mathbf{A}$ en met de niet-inverteerbaarheid van $\mathbf{A}$.

(e) Determinanten kunnen in verband gebracht worden met meetkundige grootheden zoals oppervlaktes en volumes, maar dat behandelen we hier niet.

(f) Er is een jammere inconsistentie in de wiskundige notatie voor de determinant van een 1×1 matrix: de notaties voor absolute waarde en determinant overlappen hoewel ze niet hetzelfde betekenen. Er geldt altijd $|-2| = 2$, hoewel de determinant van de 1×1 matrix $[-2]$ toch -2 is. In de praktijk komen 1×1 matrices erg zelden voor, en er is dus meestal geen reden tot verwarring.

(g) Het met de hand berekenen van determinanten is een tijdsrovende bezigheid, en erg gevoelig voor rekenfouten. Elke nul in de matrix vereenvoudigt wel het rekenwerk want alle termen met de nulcomponent vallen onmiddellijk weg. Meer gevorderde cursussen leren om in goede gevallen voldoende nullen te creëren in een matrix om de determinant toch relatief eenvoudig te berekenen.

De determinant heeft volgende eigenschappen (voor $n = 2$ en $n = 3$; de eigenschap geldt ook algemeen):

CC BY-NC-SA 4.0

23.12 Determinanten

Eigenschap 23.12.2. Voor een matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geldt:

$$\begin{array}{rcl} \det \mathbf{A} \neq 0 & \Longleftrightarrow & \mathbf{A} \text{ inverteerbaar} \\ \det \mathbf{A}^{\mathbf{T}} & = & \det \mathbf{A} \\ \det(\mathbf{AB}) & = & \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} \\ \det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) & \neq & \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} \quad \text{(in het algemeen)} \end{array}$$

CC BY-NC-SA 4.0

23.13 Inwendig product van vectoren

Het *inwendig product* van twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ is een reëel getal dat makkelijk te berekenen is en belangrijke informatie levert over de *onderlinge ligging* van die twee vectoren:

Definitie 23.13.1. Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ is het reëel getal

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 23.13.1. $(1,2)\cdot(3,4) = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = 3+8 = 11$ en $(3,-2,1)\cdot(2,2,-2) = 6-4-2 = 0.$

Opmerking 23.13.1.

(a) Verwar dit inwendig of scalair *product* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ tussen twee vectoren niet met het scalair *veelvoud* $r \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ van een reëel getal met een vector.

(b) In principe laten we de punt bij het scalair product nooit weg: we schrijven $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ en niet $\mathbf{uv}$.

(c) Dit inwendig product komt overeen met een matrixproduct op voorwaarde dat we de eerste vector schrijven als rijvector en de tweede als kolomvector:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

De eerste uitdrukking is een inwendig product van vectoren, de tweede een matrixproduct.

Het resultaat is een getal.

(d) Deze definitie van inwendig product gebruikt essentieel dat vectoren n-tallen zijn. In de wiskunde, fysica en andere wetenschappen komen echter ook meer algemene vectoren voor, en voor die meer algemene vectoren is het definiëren van een inwendig product wat subtieler.

Volgende eigenschappen kan je makkelijk verifiëren:

Eigenschap 23.13.1. Voor $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ en $a, b \in \mathbb{R}$ geldt:

(a) $\mathbf{u} \cdot (a\,\mathbf{v} + b\,\mathbf{w}) = a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + b\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ en $(a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + b\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ (bilineair)

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (symmetrisch)

(c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ (positief)

(d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (positief definiet)

Uit de stelling van Pythagoras volgt dat je met behulp van dit inwendig product ook *lengtes* kan berekenen. Wiskundigen gebruiken meestal het woord *norm* voor de lengte van een vector:

Definitie 23.13.2. De **norm** of **lengte** van een vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ is

$$\|\mathbf{u}\| = \|(u_1, u_2, \ldots, u_n)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

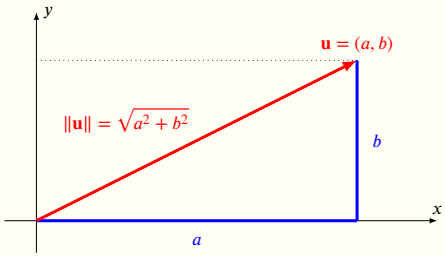
Een **eenheidsvector** (soms ook **genormeerde vector**) is een vector met norm 1.

CC BY-NC-SA 4.0

23.13 Inwendig product van vectoren

Opmerking 23.13.2.

(a) Voor $n = 2$ volgt het feit dat $c = \|\mathbf{u}\|$ inderdaad de lengte is van $\mathbf{u} = (a, b)$ direct uit de stelling van Pythagoras:



Ook voor grotere n kan men aantonen dat deze formule een zinvol begrip 'lengte' geeft.

(b) Sommige berekeningen worden eenvoudiger als het volstaat het *kwadraat* van de norm te berekenen, want dan valt de vervelende vierkantswortel weg:

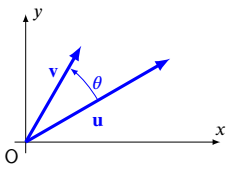
$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2.$$

Er geldt volgend enigszins merkwaardig verband met de *cosinus van de hoek tussen de vectoren*:

Eigenschap 23.13.2.

Voor twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta)$ of equivalent $\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \cos(\theta)$

met θ de hoek $\angle(u, v)$ tussen de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$.



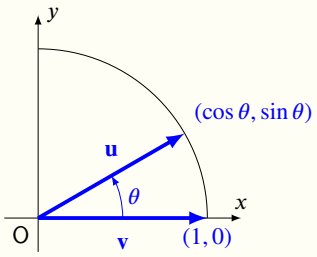
Het scalair product is een *getal* en geen vector, en kan dus niet onmiddellijk op een tekening worden weergegeven.

Opmerking 23.13.3.

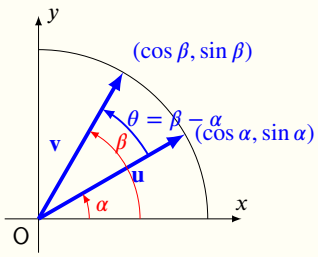
- We bewijzen deze eigenschap hier niet, maar geven verder wel enkele verklaringen. In sommige curusssen wordt bovenstaande formule zelfs gebruikt om de cosinus van een hoek te *definiëren*.
- Wie vertrouwd is met goniometrie herkent enkele eigenschappen van de cosinus:

CC BY-NC-SA 4.0

23.13 Inwendig product van vectoren

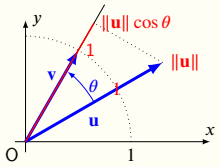


$\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$
$\mathbf{v} = (1, 0)$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (1, 0)$
$= \cos\theta + 0 = \cos\theta$



$(\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (\cos\beta, \sin\beta)$
$= (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$
$= (\cos(\beta - \alpha)$
$= \cos\theta$

- Als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ eenheidsvectoren zijn ($\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$) wordt deze formule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos(\theta)$.
  Met het scalair product van *eenheids*vectoren kan je dus de *cosinus van hun hoek* berekenen.
- Als $\mathbf{v}$ een eenheidsvector ($\|\mathbf{v}\| = 1$) is, dan wordt deze formule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cos(\theta)$.
  Met het scalair product kan je dus de grootte $\|\mathbf{u}\| \cos(\theta)$ van de projectie van de vector $\mathbf{u}$ op de drager van de eenheidsvector $\mathbf{v}$ berekenen.



- Het inwendig product van twee willekeurige vectoren kan geïnterpreteerd worden als
  - de norm van $\mathbf{u}$ maal de grootte van de projectie van $\mathbf{v}$ op $\mathbf{u}$,
  - de norm van $\mathbf{v}$ maal de grootte van de projectie van $\mathbf{u}$ op $\mathbf{v}$,
  - de norm van $\mathbf{u}$ maal de norm van $\mathbf{v}$ maal de cosinus van hun hoek:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta) = \|\mathbf{u}\|\Big(\|\mathbf{v}\| \cos(\theta)\Big) = \|\mathbf{v}\|\Big(\|\mathbf{u}\| \cos(\theta)\Big).$$

Omdat de cosinus enkel nul is voor rechte hoeken volgt uit vorige eigenschap onmiddellijk:

Eigenschap 23.13.3. Voor twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

Met het inwendig product kan je dus makkelijk de *loodrechte stand van vectoren* nagaan.

Opmerking 23.13.4.

- Wie vertrouwd is met cartesiaanse vergelijkingen ziet dat de homogene vergelijking

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

  nu kan geschreven worden als

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

23.13 Inwendig product van vectoren

wat je kan interpreteren als voorwaarde opdat de onbekende vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *loodrecht staat* op de gegeven vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ of } \mathbf{a} \perp \mathbf{x}.$$

- Meer algemeen geldt volgende interpretatie van homogene stelsels:

  De oplossingenverzameling van een homogene stelsel $\mathbf{Ax} = 0$ bestaat uit
  alle vectoren die loodrecht staan op de rijen van $\mathbf{A}$ (geïnterpreteerd als vectoren).

CC BY-NC-SA 4.0

23.14 Vectorieel product

Het *vectorieel product* van twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$ is een nieuwe vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$ die loodrecht staat op zowel $\mathbf{u}$ als $\mathbf{v}$. Dit vectorieel product speelt een belangrijke rol in meetkundige en fysische problemen in $\mathbb{R}^3$, en kan ofwel gedefinieerd worden met een directe formule, ofwel met 2×2 determinanten:

Definitie 23.14.1 (Vectorieel product in $\mathbb{R}^3$)**.**

Het **vectorieel product** (of **vectorproduct**) van $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in $\mathbb{R}^3$, genoteerd als

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) \qquad (\text{ of soms ook } (u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3))$$

wordt gedefinieerd door

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &\overset{\text{def}}{=} (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \quad \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Voorbeeld 23.14.1.

$(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6, 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = (-3, 6, -3)$

$(1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ en $(0, 1, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, -1)$

Het vectorieel product kan ook formeel worden geschreven als een 3×3 determinant:

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

met $\mathbf{e_x} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e_y} = (0, 1, 0)$ en $\mathbf{e_z} = (0, 0, 1)$ de drie basisvectoren van $\mathbb{R}^3$, want

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} (1, 0, 0) - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} (0, 1, 0) + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} (0, 0, 1) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Door invullen vind je dat $(x, y, z) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$ voldoet aan de vergelijkingen

$$\begin{cases} u_1x + u_2y + u_3z = 0 \\ v_1x + v_2y + v_3z = 0 \end{cases}$$

Deze vergelijkingen kunnen geïnterpreteerd worden als voorwaarde dat (x, y, z) loodrecht staat op (u_1, u_2, u_3) en op (v_1, v_2, v_3), en dus volgt dat de vector $(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3)$ loodrecht staat op (u_1, u_2, u_3) en (v_1, v_2, v_3).

We bekomen dus volgende eigenschap, die drie keer in een ander vorm precies hetzelfde beweert:

Eigenschap 23.14.1.

(a) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ staat *loodrecht* op $\mathbf{u}$ en op $\mathbf{v}$: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ en $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$.

(b) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ is een *oplossing* van het stelsel $\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 \end{cases}$.

(c) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ voldoet aan de *identiteiten* $\begin{cases} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \end{cases}$.

CC BY-NC-SA 4.0

23.14 Vectorieel product

Merk op dat (c) zegt dat $\mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ voldoet aan (b). Het vectorieel product heeft ook een interessante meetkundige betekenis in verband met oppervlakten en oriëntaties, maar dat aspect behandelen we hier niet.

Merk ook op dat het vectorproduct niet commutatief is, want $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. Hieruit volgt dat $\mathbf{u} \times k\mathbf{u} = 0, k \in \mathbb{R}$.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 24
Stelsels

(Versie 2026/08/25H.51)

24.1 Intro stelsels

Het oplossen van wetenschappelijke problemen wordt veelal herleid tot het oplossen van wiskundige vergelijkingen. We hebben al lineaire, kwadratische, goniometrische en exponentiële vergelijkingen besproken. In de praktijk komen dergelijke vergelijkingen echter zelden geïsoleerd voor: bijna altijd zijn er *meerdere* vergelijkingen met *meerdere onbekenden* waaraan de onbekenden *tegelijk* moeten voldoen. Dergelijke sets van vergelijkingen die tegelijk moeten worden voldaan noemen we stelsels van vergelijkingen. In het algemeen is het veelal onmogelijk om dergelijke stelsels op te lossen, of zelfs om na te gaan *of* er oplossingen zijn. Maar als alle vergelijkingen *lineair* zijn is er wel een erg handige en krachtige wiskundige techniek. Dat is wat we in dit deel behandelen.

In wat volgt hebben we de leerstof over lineaire stelsels als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Een inleidend voorbeeld en definitie van een lineair stelsel

(3) Een korte bespreking van enkele interpretaties of toepassingen van stelsels.

(4) Wat betekent het precies een stelsel op te lossen ?

(5) Een reeks belangrijke voorbeelden van stelsels die direct oplosbaar zijn, zonder verdere theorie of technieken.

(6) Het algoritme van Gauss of de echelonvorm om een willekeurig stelsel te herleiden tot één dat direct oplosbaar is.

(7) In de praktijk hebben stelesel veelal parameters

(8) Als toepassing kunnen we een inverse matrix berekenen.

CC BY-NC-SA 4.0

24.2 Stelsels: inleiding

Een *stelsel van lineaire vergelijkingen* is letterlijk gewoon een 'stel lineaire vergelijkingen':

- een **vergelijking** is een voorwaarde waaraan onbekende grootheden $(x, y, z \ldots)$ moeten voldoen,
- een vergelijking is **lineair** als de onbekende grootheden enkel voorkomen *zonder machten* of meer ingewikkelde uitdrukkingen als wortels of sinussen,
- en **stelsel** betekent dat er een 'stel' of 'collectie' van vergelijkingen (dus voorwaarden) is waaraan de onbekende grootheden *tegelijk* moeten voldoen.

Een stelsel van lineaire vergelijkingen is dus iets van de vorm

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = \sin \pi/7 \end{cases} \qquad \text{maar niet} \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = \pi \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} + y = 5 \\ \sin(x) + e^y = 1 \end{cases}$$

Het concreet vinden van de *onbekende grootheden* (afstanden, prijzen, gewichten, tijden, ...) die moeten voldoen aan *lineaire* voorwaarden is het **oplossen** van een lineair stelsel van vergelijkingen. Dergelijke lineaire stelsels komen dus erg vaak voor in de wiskunde, fysica, scheikunde, economie,... Ze hebben de bijzonder aangename eigenschap dat ze altijd wiskundig op te lossen zijn: er is een relatief eenvoudige procedure om *alle oplossingen* te vinden. Het is belangrijk de basisprincipes van deze methode en de structuur van de oplossingen grondig te beheersen, hoewel het oplossen van stelsels in de praktijk veel weliswaar eenvoudig rekenwerk vraagt dat dan ook wordt uitbesteed aan computers.

Voorbeeld 24.2.1. Geef twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan in dit geval de gezochte getallen snel vinden door te *proberen*: de som moet 5 zijn, dus als we ons beperken tot natuurlijke getallen zijn de mogelijkheden $0+5$, $1+4$ of $2+3$. Enkel voor $2+3$ is het verschil 1, dus de oplossing is 2 en 3.
  In dit eenvoudige geval is het niet echt nuttig om onbekenden en stelsels op te schrijven. Maar zodra de voorwaarden wat ingewikkelder zijn, wordt *proberen* snel moeilijk en is *uitrekenen* meestal sneller.
- Als je toch een stelsel opschrijft, kan je in dit eenvoudige geval dat stelsel ook makkelijk oplossen. Als $x+y=5$, dan is dus $y=5-x$. Door nu y te vervangen door $5-x$ (want er geldt toch dat $y=5-x$) in de tweede vergelijking $x-y=1$ wordt die tweede vergelijking $x-(5-x)=1$, en dus $2x=6$ of $x=3$. En dus is $y=5-x=5-3=2$.
  Eén van de methodes om stelsels op te lossen is een veralgemening van dit eenvoudig trucje.
- Je kan dit stelsel ook anders aanpakken. Inderdaad, als $x+y=5$ en $x-y=1$ dan is ook de som van de linkerleden gelijk aan de som van de rechterleden: $(x+y)+(x-y)=5+1$. In deze laatste uitdrukking valt de onbekende y echter weg, want ze wordt $2x=6$ en dus $x=3$. Invullen dat $x=3$ in de eerste vergelijking $x+y=5$ levert $3+y=5$ of $y=2$.
  Een alternatieve methode om stelsels op te lossen is een veralgemening van dit eenvoudig trucje.
- Je kan dit stelsel ook opschrijven met matrices:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \cdot x + 1 \cdot y = 5 \\ 1 \cdot x + (-1) \cdot y = 1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

24.2 Stelsels: inleiding

Voorbeeld 24.2.2. Geef twee getallen waarvan de som 3,1415 is en het verschil 1,2345.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen opnieuw x en y. Dan kennen we weer de som $x+y=3,1415$ en het verschil $x-y=1,2345$, en we zoeken dus de oplossing van het stelsel $\begin{cases} x+y=3,1415 \\ x-y=1,2345 \end{cases}$

Merk op:

- Je kan de getallen x en y nu veel minder makkelijk vinden door *proberen*.
- Je kan in dit eenvoudige geval het stelsel toch makkelijk oplossen met dezelfde methodes als hiervoor: Omdat $x+y=3,1415$ moet dus $y=3,1415-x$. Maar dan wordt $x-y=1,2345$ nu $x-(3,1415-x)=1,2345$, en dus $2x=1,2345+3,1415=4,376$ of $x=2,188$. En dus $y=3,1415-x=3,1415-4,376=,19535$.
- Ook de tweede methode werkt hier: als $x+y=3.1415$ en $x-y=1.2345$ dan moet natuurlijk ook $(x+y)+(x-y)=3.1415+1.2345=4.3760$. Deze vergelijking reduceert zich tot $2x=4.376$ en dus $x=2.188$. Invullen van $x=2.188$ in de eerste vergelijking geeft $2.188+y=3.1415$ of $y=3.1415-2.188=1.9535$.
- Je kan ook dit stelsel schrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1415 \\ 1.2345 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 24.2.3. Geef drie getallen waarvan het grootste dubbel zo groot is als het kleinste, het middelste de helft is van de som van de twee anderen, en het gemiddelde 42 is.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen, geordend van groot naar klein, x, y en z. Dan weten we dat $x=2z$, $y=\dfrac{x+z}{2}$ en $\dfrac{x+y+z}{3}=42$, en zoeken dus de oplossing van het stelsel $\begin{cases} x-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y+z=126 \end{cases}$ Je kan ongetwijfeld met wat nadenken en proberen die drie getallen vinden, maar verder leggen we een algemene oplossingsmethode uit die je kan 'toepassen', wat dus maakt dat je niet meer moet 'nadenken' zodra je de oplossingsmethode kent. Liefhebbers van matrices merken op dat je het stelsel kan schrijven als

$$\begin{cases} x-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y+z=126 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 126 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

24.3 Stelsels: definitie

Definitie 24.3.1 (Lineair stelsel)**.**

Een **lineair stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden** is een stel van m lineaire vergelijkingen met in totaal n onbekenden. Dergelijk lineair stelsel noteren we als

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

met S de naam van het stelsel, a_{ij} de **coëfficiënten**, $x_1, \ldots, x_n$ de **onbekenden** en b_i de **rechterleden** of **constante termen**.

Een lineair stelsel is **homogeen** als alle constante termen nul zijn, dus alle $b_i = 0$.
Het aan S **geassocieerde homogene stelsel** is het stelsel waarbij de b_i vervangen zijn door 0.

Merk op: de term *rechterlid* is gebruikelijk in de wiskunde, en komt in veel cursussen voor, maar is eigenlijk verwarrend of zelfs misleidend: een vergelijking $x + y = 2$ kan natuurlijk ook geschreven worden als $x + y - 2 = 0$, maar $x + y - 2 = 0$ is *geen* homogene vergelijking, en volgens bovenstaande definitie is het 'rechterlid' gelijk aan 2. Het begrip 'rechterlid' slaat dus op vergelijkingen in standaardvorm: alle onbekenden in het linkerlid en de constante term rechts.

Voorbeeld 24.3.1. Het stelsel

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{cases}$$

is een lineair stelsel met twee vergelijkingen in drie onbekenden x_1, x_2, x_3, en heeft als geassocieerd homogeen stelsel

$$S_o : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

De belangrijkste uitdaging bij dergelijke stelsels is om de letters x_i te vervangen door geschikte reële getallen zodat alle gelijkheden opgaan. We noemen dat het *oplossen van het stelsel* en de gevonden reële getallen zijn dan *oplossingen van het stelsel*.

We associëren met elk stelsel twee erg verwante matrices: de *coëfficiëntenmatrix* en de *uitgebreide* matrix:

Eigenschap 24.3.1 (Matrixvorm van een lineair stelsel)**.**

Elk lineair stelsel kan in **matrixvorm** worden geschreven als $\mathbf{Ax = b}$ waarbij

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

met

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$	de $m \times n$ **coëfficiëntenmatrix** van het stelsel bestaande uit reële getallen,
$\mathbf{x}$	de **onbekende** (een *kolomvector* met n *letters* (of onbekenden) $x_1, \ldots, x_n$) en
$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$	het **rechterlid** of de *constante term(en)* (een *kolomvector* met m *getallen*).

CC BY-NC-SA 4.0

24.3 Stelsels: definitie

De **uitgebreide matrix** van het stelsel is de $m \times (n+1)$ matrix met de constante termen toegevoegd:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Een stelsel is **homogeen** als $\mathbf{b} = 0$, dus als het van de vorm $\mathbf{Ax} = 0$ is.

Om verwarring te voorkomen is de verticale lijn in de uitgebreide matrix belangrijk.

Voorbeeld 24.3.2.

Het stelsel S $\quad \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$

heeft als coëfficiëntenmatrix $\mathbf{A} =$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

en als uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] =$ $\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$

We kunnen het stelsel dus schrijven als $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Het geassocieerde homogene stelsel S_o $\quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

heeft dezelfde coëfficiëntenmatrix $\mathbf{A}$, en uitgebreide matrix $\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$

We bespreken een wat uitgebreider voorbeeld van een lineair stelsel:

Voorbeeld 24.3.3. Bepaal alle reële getallen s, t, u, v, w waarvoor

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$$

Dit is een *lineair stelsel van drie vergelijkingen in vijf onbekenden*.

- Dit is de wiskundige weergave van een probleem waarbij we weten dat er tussen de vijf onbekende grootheden s, t, u, v, w drie lineaire verbanden bestaan. De uitdaging is *alle waarden* te vinden voor de onbekende grootheden die aan *alle* (lineaire) verbanden voldoen.
- Een eerste technische herformulering bestaat erin om één *vector* te zoeken in plaats van vijf *getallen*: in plaats van 'zoek alle reële getallen s, t, u, v, w', zeggen we 'zoek alle vectoren $(s, t, u, v, w) \in \mathbb{R}^5$.
- Met matrices en vectoren kunnen we het stelsel eenvoudiger schrijven: de vijf onbekenden (s, t, u, v, w) worden een 5×1 kolomvector $\mathbf{x}$, de coëfficiënten van de vergelijkingen vormen de

CC BY-NC-SA 4.0

24.3 Stelsels: definitie

3×5 *coëfficiëntenmatrix* $\mathbf{A}$ en de rechterleden zetten we in een 3×1 kolomvector $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel kan nu geschreven worden als $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ of

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De uitgebreide matrix, die dus alle gegevens van het stelsel bevat, is

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

Oefening 24.3.1. Welke van de volgende stelsels zijn lineair in de onbekenden u en v? Geef voor de lineaire stelsels ook een matrixvoorstelling.

1. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 4u + 2v = 1 \end{cases}$$

2. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 4u + 2v = u \end{cases}$$

3. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} 2u = 5 \\ 2v = 1 \end{cases}$$

4. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} (u+2)u - u^2 = 5 \\ 4u + 2v = 1 \end{cases}$$

5. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} \sin(u) + \cos(v) = 1 \\ \sin(u) - 2\cos(v) = 1/2 \end{cases}$$

6. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} u^2 + v = 1 \\ -u^2 - 2v = 2 \end{cases}$$

7. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} au + 2v = 5 \\ 4u + bv = 1 \end{cases} \quad (\text{met } a, b \in \mathbb{R})$$

8. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} x^3 u + \cos(y)v = 5 \\ 4u + x^3 v = 1 \end{cases} \quad (\text{met } x, y \in \mathbb{R})$$

CC BY-NC-SA 4.0

24.4 Stelsels: enkele interpretaties

Een *stelsel van lineaire vergelijkingen* is een stel van lineaire vergelijkingen, en kan altijd in matrixvorm worden geschreven. Een stelsel kan op verschillende manieren worden geïnterpreteerd, en erg uiteenlopende problemen kunnen worden herleid tot het oplossen van een stelsel.

Voorbeeld 24.4.1. Vraagstukken: zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Ook het zoeken van geschikte **lineaire combinaties** leidt tot lineaire stelsels, en omgekeerd kan elk lineair stelsel beschouwd worden als het zoeken van een geschikte lineaire combinatie.

Inderdaad, elke matrix $\mathbf{A}$ kan beschouwd worden als een rij van kolomvectoren $\mathbf{A_i}$, en het matrixproduct $\mathbf{Ax}$ is ook een *kolom*vector, namelijk de lineaire combinatie van de kolommen van $\mathbf{A}$ met (onbekende) coëfficiënten x_i: $\mathbf{A_1}x_1 + \mathbf{A_2}x_2 + \ldots + \mathbf{A_n}x_n$.
Het stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ oplossen betekent dus zoeken naar gepaste coëfficiënten x_i om een gegeven vector $\mathbf{b}$ te schrijven als een lineaire combinatie van een gegeven stel vectoren $\mathbf{A_i}$, namelijk de kolommen van $\mathbf{A}$:

Voorbeeld 24.4.2. Lineaire combinaties: is $(5,1)$ een lineaire combinatie van $(1,1)$ en $(1,-1)$?

We zoeken coëfficiënten x en y zodat $(5,1) = x(1,1) + y(1,-1)$, en dat komt neer op het oplossen van het stelsel

$$x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Merk op dat dit hetzelfde stelsel is als hierboven.

We kunnen het product $\mathbf{Ax}$ beschouwen als een functie die de kolomvector $\mathbf{x}$ afbeeldt op de kolomvector $\mathbf{Ax}$. Dergelijke functies, die in deze context meestal *afbeeldingen* worden genoemd komen vaak voor: het zijn zogenaamde **lineaire afbeeldingen** van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$.
Het stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ oplossen betekent dus zoeken welke vectoren $\mathbf{x}$ door een gegeven matrix $\mathbf{A}$ worden afgebeeld op een gegeven vector $\mathbf{b}$:

Voorbeeld 24.4.3. Lineaire afbeeldingen: welke (x,y) worden door $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ afgebeeld op $(5,1)$?

We zoeken dus de koppels (x,y) waarvoor

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

en dat is precies de matrixvoorstelling van weerom hetzelfde stelsel $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

24.5 Stelsels: oplossingen

Een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *oplossen* betekent *alle* n-tallen reële getallen $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ vinden die we voor de letters $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ kunnen invullen zodat $\mathbf{Ap} \stackrel{!}{=} \mathbf{b}$. Formeel wordt dit:

Definitie 24.5.1 (Oplossingen van stelsels en gelijkwaardige stelsels)**.**

Een **oplossing** van een lineair stelsel $S : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ is een vector $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ die voldoet aan alle vergelijkingen, dus zodat

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{b} \quad \text{of} \quad \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n & = b_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \cdots + a_{mn}p_n & = b_m \end{cases}$$

De **oplossingsverzameling** $\mathrm{Opl}(S)$ van een lineair stelsel S is de verzameling van *alle oplossingen*:

$$\mathrm{Opl}(S) = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\ \}$$

Twee stelsels S_1 en S_2 zijn **gelijkwaardig** als ze *dezelfde* oplossingsverzameling hebben, dus als

$$\mathrm{Opl}(S_1) = \mathrm{Opl}(S_2)$$

Een stelsel dat *geen* oplossingen heeft, dus met $\mathrm{Opl}(S) = \emptyset$, noemen we **strijdig** of **ontaard**. Ook een *vergelijking* die geen oplossingen heeft noemen we **strijdig** of **ontaard**. Een typische *ontaarde vergelijking* is $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$ of dus $0 = 1$.

Een algemene strategie om lineaire stelsels op te lossen is:

Bereken een *gelijkwaardig* stelsel waarvoor de oplossingsverzameling direct af te lezen is.

Het is belangrijk om stelsels te leren oplossen, maar het is ook belangrijk te beseffen dat we in een aantal gevallen niet zozeer geïnteresseerd zullen zijn in de concrete oplossingen, maar wel in allerlei *eigenschappen* van die oplossingen (zijn er oplossingen, hoeveel zijn er, ...)

We geven enkele eenvoudige voorbeelden van stelsels die direct oplosbaar zijn:

Voorbeeld 24.5.1. Los volgende stelsels op:

1. $S_1 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Door enkele getallen te proberen, vinden sommigen al snel dat het koppel $(3, 2)$ een oplossing is. Door de twee vergelijkingen bij elkaar op te tellen, vinden anderen dan weer dat $(x + y) + (x - y) = 5 + 1$ moet zijn, en dus $2x = 6$, of $x = 3$. Door $x = 3$ in te vullen in één van de twee oorspronkelijke vergelijkingen vinden ze dan dat $3 + y = 5$, en dus $y = 2$.

Uit de eerste oplossingsmethode volgt dat $(3, 2)$ *een* oplossing is, en uit de tweede volgt dat $(3, 2)$ *de enige* oplossing is.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_1) = \{(3, 2)\}$, of $x = 3$ en $y = 2$ is de enige oplossing van het stelsel S_1

2. $S_2 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x + y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Het is onmiddellijk duidelijk dat het onmogelijk is dat $x + y$ zowel gelijk is aan 1 als aan 5. Er zijn dus *geen oplossingen*.

CC BY-NC-SA 4.0

24.5 Stelsels: oplossingen

Resultaat: $\text{Opl}(S_2) = \emptyset$

3. $S_3 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 12 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet ook aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$), en is dus een oplossing van het hele stelsel.

Resultaat: $\text{Opl}(S_3) = \{(3, 2)\}$

4. $S_4 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 13 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet niet aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \neq 13$), en er kan dus geen oplossing bestaan voor het hele stelsel.

Resultaat: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$

5. $S_5 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ 2x + 2y & = 10 \end{cases}$

Uitwerking: De tweede vergelijking is eigenlijk dezelfde als de eerste, want als $x+y = 5$, dan is automatisch ook $2x + 2y = 2(x + y) = 2 \cdot 5 = 10$. Dus zodra $y = 5 - x$ (of ook: zodra $x = 5 - y$), hebben we een oplossing. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 5 - x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(5 - y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn natuurlijk twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels. Voorbeelden van oplossingen zijn dus de koppels $(0, 5), (1, 4), (2, 3), (5, 0), (\pi, 5 - \pi), (\pi + 5, -\pi), (5 - \pi, \pi), \ldots$

Resultaat: $\text{Opl}(S_5) = \{(t, 5 - t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(5 - s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -x + 5$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel S_5 is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -x + 5$.

6. $S_6 = \{ \; 2x + y \; = 6 \quad$ (een 'stelsel' met één vergelijking)

Uitwerking: Er is maar één vergelijking, en die zegt dat $x = 3 - \frac{1}{2}y$, of ook dat $y = 6 - 2x$. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 6-2x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(3-\frac{1}{2}y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels.

Resultaat: $\text{Opl}(S_6) = \{(t, 6 - 2t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(3 - \frac{1}{2}s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -2x+6$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel $\{2x+y = 6$ is (als deelverzameling van $\mathbb{R}^2$) dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -2x + 6$.

7. $S_{71} = \begin{cases} 2x + y & = 6 \\ 0x & = 0 \end{cases}$ of $S_{72} = \begin{cases} x + y & = -x + 6 \\ 0 & = 0 \end{cases}$ of $S_{73} = \begin{cases} x + y + 3 & = -x + 9 \\ 1 & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Dit zijn dezelfde stelsels als S_6 hierboven.

8. $S_{81} = \begin{cases} 2x + y & = 6 \\ 0x & = 1 \end{cases}$ of $S_{82} = \begin{cases} x + y & = -x + 6 \\ 0 & = 1 \end{cases}$ of $S_{83} = \begin{cases} x + y + 3 & = -x + 9 \\ 7 & = 8 \end{cases}$

Uitwerking: Deze stelsels hebben een strijdige vergelijking, en hun oplossingsverzameling is dus leeg.

CC BY-NC-SA 4.0

24.6 Stelsels: direct oplosbaar

Er bestaat een erg algemene maar soms verrassend efficiënte strategie om moeilijke problemen op te lossen: bedenk eerst een *eenvoudigere versie* van het probleem, en probeer dan alvast die eenvoudige versie op te lossen. Dat creëert enerzijds vertrouwdheid met het probleem, kan eventueel inspiratie opleveren voor een algemene oplossing en geeft mogelijk ook zelfvertrouwen om het moeilijke probleem steeds verder te doorgronden. In het ideale geval kan je het moeilijke probleem *reduceren* tot het eenvoudige geval.

Voor het oplossen van lineaire stelsels blijkt deze strategie bijzonder geschikt te zijn. We zullen eerst allerlei eenvoudige stelsels oplossen door 'puur nadenken'. Later zullen we dan een beroep doen op de Geniale Gauss die een techniek heeft gevonden om *elk* stelsel te vervangen door één waarvan wij eenvoudige stervelingen dan door eenvoudig 'puur nadenken' de oplossingen kunnen vinden.

Voorbeeld 24.6.1.

Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in vorm van een matrixproduct:

1. $S_1 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_1) = \{\ (2,4,6)\ \}$ via gewoon aflezen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

2. $S_2 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 1 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_2) = \{\ (2,2,1)\ \}$ via aflezen met een kleine berekening: $4/2 = 2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $S_3 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 0 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_3) = \{\ (2,2,0)\ \}$ via gewoon aflezen, waarbij we $z = 0$ krijgen, maar dat is niets speciaal.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $S_4 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 1 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$ via gewoon aflezen, want de laatste vergelijking is duidelijk strijdig: voor geen enkel getal z kan $0z = 1$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

24.6 Stelsels: direct oplosbaar

5. $S_5 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_5) = \{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$, waarbij de laatste vergelijking $0z = 0$ voor alle getallen z voldaan is . Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die we naar keuze kunnen schrijven als $\{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,z) \mid z \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,x) \mid x \in \mathbb{R}\ \}$. De laatste schrijfwijze is wiskundig correct, maar verwarrend omdat de letter x hier niets te maken heeft met de eerste coördinaat die meestal ook x noemt. Dikwijls worden als zogenaamde *parameters* letters gekozen uit het rijtje $t, s, k, l, \alpha, \beta, \ldots$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. $S_6 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\ \}$. Enkel de eerste vergelijking is een echte vergelijking. Als $x = 2$, mogen y en z willekeurig zijn. Er zijn dus 'twee keer oneindig' veel oplossingen omdat er twee parameters nodig zijn om *alle* oplossingen te bekomen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. $S_7 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,t,3) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$. Weer oneindig veel oplossingen, nu met één parameter.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

Voorbeeld 24.6.2 (Achterwaartse substitutie)**.** Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in matrixvorm:

1. $S_{21} = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y+ & 1z & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{21}) = \{\ (2,-2,6)\ \}$

We beginnen met de laatste vergelijking: $z = 6$. We vullen die waarde voor z in in de tweede vergelijking, en bekomen $y+6 = 4$, dus $y = -2$. De eerste vergelijking zegt dat $x = 2$. Dus, de oplossing is $(x,y,z) = (2,-2,6)$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

24.6 Stelsels: direct oplosbaar

2. $S_{22} = \left\{ \begin{array}{rrcl} x & +y & +z & = & 2 \\ & +y & +z & = & 4 \\ & & +z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{22}) = \{\ (-2,-2,6)\ \}$

Opnieuw van beneden naar boven invullen (achterwaarts, vandaar *achterwaartse substitutie*). $z = 6$, dus $y + 6 = 4$ en dus $y = -2$. Tenslotte is $x + (-2) + 6 = 2$, of $x = -2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

3. $S_{23} = \left\{ \begin{array}{rrcl} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & +5y & +3z & = & 4 \\ & & +2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{23}) = \{\ (1/6,-1,3)\ \}$

Opnieuw aan de hand van achterwaartse substitutie eerst z, vervolgens y en dan x berekenen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

4. $S_{24} = \left\{ \begin{array}{rrcl} 6x & +z & = & 2 \\ & +2z & = & 4 \\ & +3z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: Merk op dat de tweede en derde vergelijking in feite dezelfde zijn. Een gelijkwaardig stelsel is dus

$$S_{24} = \left\{ \begin{array}{rrcl} 6x & +z & = & 2 \\ & +2z & = & 4 \end{array} \right.$$

In matrixvorm schrijf je dit stelsel

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hieruit vinden we aan de hand van achterwaartse substitutie dat $(0,2)$ de enige oplossing is van het stelsel.

Merk op dat er geen onbekende y in het stelsel voorkomt, en we dus kunnen aannemen dat er twee onbekenden zijn, die toevallig x en z noemen in plaats van x en y. Je hebt dus een vector met twee componenten nodig om het stelsel op te lossen. De oplossingsverzameling is dan $\text{Opl}(S_{24}) = \{(0,2)\}$.

Stel dat in een vraagstuk toch sprake zou zijn van een onbekende y, maar waarbij die toch niet voorkomt in je stelsel. Dat betekent dan dat je stelsel geen voorwaarden oplegt aan y, en dat dus y willekeurige waarden mag aannemen. Dan beschrijf je best je oplossingen als $\text{Opl}(S_{24}) = \{(0,t,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Het bijhorende matrixproduct is dan $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

5. $S_{25} = \left\{ \begin{array}{rrcl} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & & +2z & = & 4 \\ & & +0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

24.6 Stelsels: direct oplosbaar

$\text{Opl}(S_{25}) = \{\ (t, -3t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$

De tweede vergelijking heeft als oplossing $z = 2$. De eerste vergelijking wordt dan $6x + 2y = 0$. De oplossingsverzameling heeft één parameter: stel bijvoorbeeld dat $x = t$ voor een $t \in \mathbb{R}$. Dan is aan deze vergelijking voldaan als $2y = -6t$ of dus $y = -3t$.

We kunnen dit samenvatten in volgende eigenschap:

Eigenschap 24.6.1 (Oplossen van 'eenvoudige' stelsels met aflezen of achterwaartse substitutie)**.**

- Stelsels met een *diagonaalmatrix* zijn zeer eenvoudig oplosbaar via *aflezen*.
- Stelsels met een *bovendriehoeksmatrix* zijn eenvoudig oplosbaar via *achterwaartse substitutie*.
- Nulrijen, nulkolommen of nullen op verkeerde plaatsen nopen tot enige voorzichtigheid:
  - een nulrij betekent: er waren 'dubbele' (en dus overbodige) vergelijkingen.
  - een nulkolom betekent: een variabele komt niet echt voor.
  - een nulrij-met-achteraan-een-1 betekent $0x + 0y + 0z = 1$ en geeft dus een *strijdig* stelsel.
- Stelsels met *minder vergelijkingen dan onbekenden* hebben typisch *oneindig veel* oplossingen, en de oplossingsverzameling bevat dus *parameters*.
- Stelsels met *evenveel vergelijkingen als onbekenden* hebben typisch een *unieke* oplossing. Maar:
  - er kunnen 'dubbele' vergelijkingen zijn waardoor er toch oneindig veel oplossingen zijn.
  - als het stelsel homogeen is, is de unieke oplossing noodzakelijk de (meestal niet interessante) nul-oplossing.
- Stelsels met *meer vergelijkingen dan onbekenden* hebben typisch een *geen* oplossingen. Maar:
  - er kunnen 'dubbele' vergelijkingen zijn waardoor er toch oplossingen zijn, zoals in $\begin{cases} 6x & +2y & = & 2 \\ 3x & +y & = & 1 \\ 9x & +3y & = & 3 \end{cases} \iff$

    $\begin{cases} 3x + y = 1 \end{cases}$ met oplossingsverzameling $\{\ (t, 1 - 3t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$

Met deze technieken kunnen alleen erg eenvoudige stelsels worden opgelost, maar met de methode van Gauss kan je *een willekeurig stelsel* herleiden naar één van deze eenvoudige gevallen.

Het is dus *erg belangrijk* deze eenvoudige gevallen erg vlot te kunnen oplossen voordat je aan de moeilijkere stelsels begint.

CC BY-NC-SA 4.0

24.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

De *eliminatiemethode van Gauss* is een algemene methode om *elk lineair stelsel* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ op te lossen. Het toepassen van geschikte zogenaamde *elementaire operaties* op de vergelijkingen van het stelsel (in de praktijk op de uitgebreide matrix van het stelsel) leidt tot een gelijkwaardig maar eenvoudiger stelsel in trapvorm (de zogenaamde *echelonvorm*). Van een stelsel in echelonvorm kan de oplossingsverzameling direct worden afgelezen. Een andere naam voor de methode is 'rijherleiden', en een variant is gekend onder de naam 'spilmethode'.

24.7.1 Elementaire rijoperaties

Volgende drie operaties op vergelijkingen van stelsels *veranderen de oplossingsverzameling van het stelsel niet*:

(a) ***Herschaling* van een vergelijking:** een vergelijking vermenigvuldigen met een reëel getal verschillend van nul.
Een voorbeeld maakt meteen duidelijk waarom dit de oplossingsverzameling niet verandert: de vergelijking $x-2y=5$ heeft immers precies dezelfde oplossingen (x,y) als de vergelijkingen $3x-6y=15$ en $-2x+4y=-10$. Pas wel op: vermenigvuldigen *met nul* mag natuurlijk niet, want dat zou de vergelijking doen verdwijnen en de oplossingsverzameling dus erg vergroten.

(b) **Twee vergelijkingen van plaats *verwisselen*:**
Het is duidelijk dat de volgorde van de vergelijkingen geen invloed heeft op de oplossingen.

(c) **Bij een vergelijking een veelvoud van een andere vergelijking *optellen*:**
We tonen eerst aan waarom een veelvoud van een andere vergelijking optellen geen oplossingen kan doen verdwijnen. Daarna tonen we aan dat er dan ook geen oplossingen kunnen bijkomen.

(i) Als (x_0, y_0) een oplossing is van $\begin{cases} x-2y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$
en we tellen bij de eerste vergelijking bijvoorbeeld twee keer de tweede op:

$$(x-2y)+2(x+y)=5+2\cdot 1 \text{ of dus } 3x+0y=7$$

dan is (x_0, y_0) ook een oplossing van $\begin{cases} 3x+0y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$
Dus elke oplossing van het oorspronkelijke stelsel is ook oplossing van het nieuwe stelsel.

(ii) Maar is ook elke oplossing van het nieuwe stelsel een oplossing van het oorspronkelijke stelsel?
Ja, want de weg terug heeft volledig dezelfde structuur: als we van de nieuwe eerste rij de tweede rij (die ongewijzigd gebleven is) twee keer aftrekken bekomen we terug het oorspronkelijke stelsel.
De redenering van hierboven toont dus dat alle oplossingen behouden blijven.

Deze *operaties op vergelijkingen* van een stelsel komen overeen met zogenaamde *elementaire rijoperaties op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix* van het stelsel:

Definitie 24.7.1. Volgende operaties op de rijen van matrices noemen we **elementaire rijoperaties**:

Herschaling	Vermenigvuldigen een rij met een getal verschillend van nul	$R_i \to aR_i, a \neq 0$
Verwisseling	Verwissel twee rijen van plaats	$R_i \leftrightarrow R_j$
Combinatie	Tel bij een rij een veelvoud van een andere rij op	$R_i \to R_i + aR_j$

Uit bovenstaande uitleg blijkt dus volgende eigenschap:

CC BY-NC-SA 4.0

24.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Eigenschap 24.7.1. Het toepassen van elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix van een stelsel verandert de oplossingsverzameling van het stelsel niet.

Opmerking 24.7.1.

(a) Door een herschaling en een combinatie na elkaar uit te voeren kan je een rij ook vervangen door een niet-nul veelvoud van die rij waarbij een veelvoud van een andere rij wordt opgeteld: $R_i \to aR_i + bR_j, a \neq 0$. Men noemt deze operatie soms ook een (niet-elementaire) rijoperatie.

(b) Soms gebruikt men voor de rijoperaties eerder de omgekeerde pijl $R_i \leftarrow aR_i$. Die notatie geeft duidelijker aan dat de inhoud van rij R_i vervangen wordt door nieuwe getallen aR_i.

Omdat rijoperaties de oplossingsverzameling niet veranderen, kunnen we proberen de matrix – en dus het stelsel – te vereenvoudigen tot een vorm waarop die oplossingsverzameling direct kan worden afgelezen.

Voorbeeld 24.7.1. Beschouw het stelsel $S : \begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$

met als uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

We vereenvoudigen nu de matrix, en dus het stelsel, via een adhoc toepassing van de rijoperaties. Later leggen we een systematische methode uit, maar de strategie is steeds om nullen te creëren in de matrix.

De tweede rij met drie vermenigvuldigen (een herschaling) geeft

$$\xrightarrow{R_2 \to 3R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 3 & -6 & 6 & 9 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

en dan levert bij de tweede rij de eerste rij optellen (een optelling) extra nullen in de tweede rij:

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Deze twee elementaire operaties samen kunnen beschouwd worden als één (niet elementaire) operatie: vervang rij 2 door 3 maal zichzelf plus rij 1.

Op dezelfde manier levert rij 3 vervangen door 3 maal zichzelf plus 2 maal rij 1:

$$\xrightarrow{R_3 \to 3R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{array}\right]$$

Pas op: je mag *nooit* een rij vervangen door 0 maal zichzelf en een veelvoud van een andere rij, want dan zou je de rij eigenlijk gewoon weggooien.

Tenslotte delen we de tweede rij door 5, en de derde rij door 13:

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_3/13]{R_2 \to R_2/5} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

CC BY-NC-SA 4.0

24.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

en tellen bij de derde rij -1 keer rij 2 op:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

en we bekomen dus het gelijkwaardige maar veel eenvoudigere stelsel

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{array}\right.$$

Dit stelsel is door 'puur nadenken' op te lossen:
voor willekeurige waarden voor t, v en w vinden we de bijhorende u en s als

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & 1 - 2v + 2w \\ -3s & = & 5 - 6t + u - v + 7w = 5 - 6t + 1 - 2v + 2w - v + 7w \end{array}\right.$$

dus

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & 1 - 2v + 2w \\ -3s & = & 6 - 6t - 3v + 9w \end{array}\right. \quad \text{of} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u & = & 1 - 2v + 2w \\ s & = & -2 + 2t + v - 3w \end{array}\right.$$

en dus

$$\mathrm{Opl}(S) = \left\{ (-2 + 2t + v - 3w, t, 1 - 2v + 2w, v, w) \in \mathbb{R}^5 \mid t, v, w \in \mathbb{R} \right\}$$

Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die afhangen van drie parameters t, v en w.

24.7.2 Eliminatiemethode van Gauss

Het doel van de eliminatiemethode van Gauss is om een stelsel om te vormen tot een eenvoudiger gelijkwaardig stelsel, dus zonder iets te veranderen aan de oplossingsverzameling. De meest eenvoudige vorm waarin *elk stelsel* kan worden gebracht is de zogenaamde *rijcanonieke* of *gereduceerde rijechelonvorm*:

Definitie 24.7.2. Een matrix is in **rijcanonieke vorm** of **gereduceerde rijechelonvorm** als:

(a) het eerste niet-nul element in een rij is steeds 1. Dergelijk element noemt een **spil** (Engels: pivot).

(b) boven en onder elke spil staan enkel nullen.

(c) voor elke spil geldt dat de spil van een *lagere* rij steeds verder naar *rechts* staat.

(d) nulrijen staan onderaan staan (als er zijn).

Opmerking 24.7.2.

- Het begrip echelonvorm bestudeer je best aan de hand van voorbeelden. Het is daarbij in het begin nuttig de spilelementen te *omcirkelen*.
- De derde regel leidt tot de kenmerkende (dalende) *trap*- of echelonvorm met de spilelementen.
- Er bestaat ook een (meer algemene, dus niet noodzakelijk *gereduceerde*) *rijechelonvorm*: dan vervalt de voorwaarde dat *boven* de spil nullen moeten staan en (meestal) dat de spillen 1 moeten zijn. Zowel met de gereduceerde als met de niet-gereduceerde vorm kunnen stelsels worden opgelost: de niet-gereduceerde echelonvorm is sneller te berekenen, maar dan vraagt het vinden van de oplossingen nog wat extra rekenwerk. De gereduceerde echelonvorm is initieel wat meer rekenwerk, maar dan zijn de oplossingen direct wel af te lezen.

CC BY-NC-SA 4.0

24.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Voorbeeld 24.7.2. Voorbeelden (met $*$ willekeurige getallen, al dan niet 0) :

Rijcanoniek:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Niet rijcanoniek:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 1 & \textcircled{1} & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{2} & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 7 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oefening 24.7.1. Staan volgende matrices in rijcanonieke vorm (of ook: gereduceerde echelonvorm) ?

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

5. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

6. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

Elke matrix kan je met behulp van elementaire rijoperaties in rijcanonieke vorm brengen.

Voorbeeld 24.7.3. In Voorbeeld 24.7.1 toonden we een adhoc techniek: op één element na worden alle elementen van een *kolom* gelijk gemaakt aan 0. Dit noemen we het *schoonvegen van een kolom*.

In dat voorbeeld werden in de *eerste kolom* alle elementen nul gemaakt behalve het element links boven (dat zelf verschillend was van nul) door de andere rijen te herschalen en een gepast veelvoud van de eerste rij daarvan af te trekken.

CC BY-NC-SA 4.0

24.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Het **algoritme van Gauss** veegt achtereenvolgens verschillende kolommen van de matrix $[\mathbf{A}\ \mathbf{b}]$ schoon. Hiervoor gebruiken we in elke stap een van nul verschillend zogenaamd *spilelement*, dat telkens dezelfde rol zal spelen als het element links boven in voorbeeld 24.7.1.

Het volstaat dan om nog uit te leggen hoe in de volgende stappen telkens een nieuwe spil gekozen moet worden om van deze methode een volwaardig algoritme te maken. Welnu, een nieuwe spil wordt eerst en vooral steeds gezocht in de deelmatrix *onder en rechts* van de vorige spil. Bij het zoeken van de eerste spil is deze deelmatrix de gehele matrix. Als we verder werken op voorbeeld 24.7.1, bekijken we dus de volgende matrix die we bekomen hadden maar dan zonder de eerste rij en de eerste kolom, als volgt:

uit $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$ halen we de deelmatrix $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$

In deze deelmatrix zoeken we *de eerste kolom die niet volledig uit nullen bestaat*. In het voorbeeld is dat de tweede kolom van de 2×5 deelmatrix. We kiezen het bovenste niet-nul element, 5, als spil en vegen daarmee de hele derde kolom van de totale matrix schoon, zowel boven als onder de spil. Hiertoe combineren we zowel de eerste als de derde rij met de tweede om boven en onder de 5 een nul te bekomen als volgt.

We nemen terug de volledige matrix (en niet de deelmatrix, die enkel diende om de nieuwe spil te bepalen):

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Door bij elke rij een geschikt veelvoud op te tellen van de spilrij, kunnen we de spilkolom 'schoonvegen'. Rij 1 vervangen door vijf maal zichzelf plus rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Rij 3 vervangen door 5 maal zichzelf min 13 maal rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Merk op dat bij het schoonvegen van de derde kolom de nullen die we al bekomen hadden in de eerste twee kolommen niet gewijzigd zijn.

De matrix heeft dan de gewenste trapvorm. Via een herschaling van rij 1 en rij 2 zorgen we tenslotte nog dat het eerste element van de niet-nulrijen een 1 is: Dit levert

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze matrix is in rijcanonieke vorm.

Merk op dat in de bovenstaande afleiding geen rijverwisselingen voorkwamen, enkel herschalingen en optellingen. Veronderstel echter dat we volgende deelmatrix hadden gevonden:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Dan is de tweede kolom van de deelmatrix nog steeds de eerste niet-nulkolom. Maar het eerste niet-nulelement, 13, staat dan niet bovenaan. In zo'n geval moet de rij van de nieuwe spil door een verwisseling net onder de rij van de vorige spil gebracht worden om tot een echte trapvorm te komen. Dus zouden we in dit voorbeeld rij 2 met rij 3 moeten verwisselen.

CC BY-NC-SA 4.0

24.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Opmerking 24.7.3. Elementaire rijoperaties kan je best noteren als volgt: teken een pijl naar rechts naar de nieuwe matrix, en schrijf boven die pijl de rijoperatie(s) die je toepast, in de vorm $R_2 \to R_2 + 4R_3$ als je rij 2 vervangt door rij 2 plus 4 keer rij 3. Dus eerst de rij waarop je een operatie toepast, gevolgd door een pijl en de operatie:

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 5R_3} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 65 & 130 & -130 & 65 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 13R_2} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Je kan deze twee operaties ook in één stap doen, om schrijfwerk te besparen: hiervoor zijn er twee mogelijke schrijfwijzes: allereerst kan je de twee operaties apart opschrijven:

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 13R_2]{R_3 \to 5R_3} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Of je kan beide operaties samenvatten in één operatie als volgt. Dit is echter wel geen *elementaire* rijoperatie meer, maar een combinatie van elementaire rijoperaties.

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 5R_3 - 13R_2} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In het algemeen kan voor *elke* matrix een equivalente rijcanonieke matrix worden berekend door van linksboven naar rechtsonder steeds kleinere deelmatrices te beschouwen:

Algoritme 24.7.6 (Gausseliminatie/berekening echelonvorm/spilmethode voor een niet-nul-matrix)**.**

(beginstap)	Noem de gehele matrix de (eerste) *deelmatrix*.
(kies spilkolom)	Noem *spilkolom* de meest linkse niet-volledig-nul-kolom van de *deelmatrix*.
(maak spilelement)	Maak bovenste element van de *deelmatrix* in de *spilkolom* een *spilelement*, dit betekent: verwissel eventueel rijen zodat dat element zeker niet-nul is.
(schoonvegen spilkolom)	Veeg met *het spilelement* de hele *spilkolom* schoon, i.e. maak nullen door rijen te herschalen en er een veelvoud van de spilrij bij op te tellen. Doe dit voor *alle rijen*, en niet alleen voor de rijen van de *deelmatrix*.
(bijna klaar?)	Als je helemaal rechts-onder bent in de oorspronkelijke matrix ga je naar (eindstap)
(nieuwe deelmatrix) (bijna klaar?)	Kies als nieuwe *deelmatrix* alles rechts-onder het huidige *spilelement*. Als de *deelmatrix* volledig uit nullen bestaat, ga je direct naar (eindstap).
(volgende ronde)	Ga met deze nieuwe *deelmatrix* terug naar de stap (kies spilkolom).
(eindstap)	Maak tenslotte alle spilelementen 1 door elke rij met een spil te delen door die spil.

CC BY-NC-SA 4.0

24.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Opmerking 24.7.4.

- Door de verwisselingen in stap (maak spilelement) komen de nulrijen automatisch onderaan terecht.
- Je mag ook andere procedures volgen om tot een echelonvorm te komen. Men kan bewijzen dat je *steeds dezelfde rijcanonieke vorm* bekomt voor een gegeven matrix.
- Merk op dat het algoritme zegt om per spil een volledige kolom 'in één keer' schoon te vegen. Je past dus meerdere rijoperaties in één keer toe. Je moet wel voorzichtig zijn: dat mag hier omdat je alleen maar *veelvouden van de spilkolom* bijtelt.
  Als je ook veelvouden van andere rijen neemt, bekom je mogelijk onzin:

$$\text{Juist: } \begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_3\to R_3-R_1} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&2\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{Fout: } \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_1\to R_1-R_2} \begin{bmatrix}0&-1\\0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2+R_1]{R_1\to -R_1} \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} : \textit{fout!}$$

Bij een uitgebreide matrix in *rijcanonieke vorm* kan je de oplossing van een stelsel direct *aflezen*:

Eigenschap 24.7.2 (Oplossingen van een stelsel in rijcanonieke vorm)**.**

Voor een stelsel S met uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}&\mathbf{b}\end{array}\right]$ *in rijcanonieke vorm* geldt:

- De **spilkolommen** zijn de kolommen die een spil bevatten .
- De **hoofdonbekenden** of **gebonden onbekenden** zijn de onbekenden die horen bij een spilkolom , de andere onbekenden zijn de **nevenonbekenden** of **vrije onbekenden**.
- Het *aantal* oplossingen van het stelsel hangt af van de *plaats* van de spilelementen:
  - *de laatste kolom* bevat een spil: er is **geen oplossing**.
    Inderdaad, het stelsel is *strijdig*, want
    een rij $\begin{bmatrix}0&\dots&0&1\end{bmatrix}$ komt overeen met de strijdige vergelijking $0x_0 + \dots 0x_n = 1$.
  - *elke kolom behalve de laatste* bevat een spil: er is een **unieke oplossing**.
    Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met $b_i \in \mathbb{R}$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&b_1\\0&1&0&b_2\\0&0&1&b_3\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

    en de overeenkomstige vergelijkingen geven dus direct de unieke oplossing: $x_i = b_i$.
  - in alle andere gevallen: er zijn **oneindig veel oplossingen**.
    Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met de b_i en * willekeurige getallen)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}1&*&0&*&0&*&b_1\\0&0&1&*&0&*&b_2\\0&0&0&0&1&*&b_3\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

    Bij elke willekeurige keuze van de *vrije* onbekenden, hoort dan precies één set waarden voor de gebonden variabelen die een oplossing opleveren voor het stelsel. De *vrije onbekenden*

CC BY-NC-SA 4.0

24.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

spelen de rol van *parameters* van de oplossingsverzameling, vandaar hun naam. Het aantal vrije onbekenden noemt men ook het **aantal vrijheidsgraden** of de **dimensie** van de oplossingsverzameling.

Merk op: voor een *homogeen* stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ is een unieke oplossing altijd de nulvector $\mathbf{x} = 0$. Dus, voor een *homogeen* stelsel is een unieke oplossing meestal geen interessante oplossing.

Voorbeeld 24.7.4. [Vervolg van Voorbeeld 24.7.3]

In het vorige voorbeeld berekenden we voor een bepaald stelsel de rijcanonieke vorm

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Voor dit stelsel zijn de *eerste* en de *derde* kolom de *spilkolommen*: s en u zijn dus gebonden onbekenden, en t, v en w vrije onbekenden.

Bij elke willekeurige keuze van vrije onbekenden t, v, w vinden we precies één set van waarden voor de gebonden onbekenden s en u. Als we t, v, w *vrij* kiezen als

$$t = a, \quad v = b, \quad w = c,$$

met a, b, en c willekeurige reële getallen, dan ligt de waarde van de gebonden onbekenden vast om een oplossing te hebben voor het stelsel: de *gebonden variabelen* hebben dus een waarde die *gebonden* is aan de vrije keuzes voor de waarden van de vrije variabelen. De gebonden variabelen zullen dus uitdrukkingen worden in de *parameters* a, b en c. Elk van de vergelijkingen in de rijcanonieke vorm

$$\begin{cases} s & -2t & & -v & +3w & = -2 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{cases}$$

bevat immers precies één van de gebonden onbekenden, die we daar telkens uit kunnen 'berekenen in functie van de vrije onbekenden':

$$\begin{cases} s & = & -2 & +2a & +b & -3c \\ u & = & 1 & & -2b & +2c \end{cases}$$

Samen levert dat de volledige oplossing

$$(s, t, u, v, w) = (-2 + 2a + b - 3c, a, 1 - 2b + 2c, b, c)$$

of

$$(s, t, u, v, w) = (-2, 0, 1, 0, 0) + a(2, 1, 0, 0, 0) + b(1, 0, -2, 1, 0) + c(-3, 0, 2, 0, 1)$$

met a, b en c willekeurige reële getallen. De oplossingsverzameling is dus

$$\mathrm{Opl}(S) = \left\{(-2 + 2a + b - 3c, a, 1 - 2b + 2c, b, c) \in \mathbb{R}^5 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Opmerking 24.7.5. Het is niet strikt nodig om te schrijven dat $t = a, v = b, w = c$ voor willekeurige $a, b, c \in \mathbb{R}$. Het is voldoende te realiseren dat t, v, w vrije onbekenden zijn, en dus eender welke reële waarde kunnen aannemen: je kan dan even goed zeggen dat $t, v, w \in \mathbb{R}$ willekeurig. Let op: voor de gebonden onbekenden geldt ook $s, u \in \mathbb{R}$, maar *niet* willekeurig, aangezien ze afhangen van de vrije variabelen! Je kan de oplossingsverzameling dus ook schrijven als

$$\mathrm{Opl}(S) = \left\{(-2 + 2t + v - 3w, t, 1 - 2v + 2w, v, w) \in \mathbb{R}^5 \mid t, v, w \in \mathbb{R}\right\}.$$

Dikwijls is het echter wel handiger om elke vrije onbekende gelijk te stellen aan een parameter, en

CC BY-NC-SA 4.0

24.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

dus nieuwe letters te kiezen die voor willekeurige reële getallen staan, zoals in voorbeeld 24.7.4. Het aantal vrijheidsgraden in de oplossing wordt dan duidelijker.

We sluiten af met twee voorbeelden.

Voorbeeld 24.7.5. De uitgebreide matrix van het homogene stelsel

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 0 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 0 \end{cases}$$

is $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right]$.

Dit stelsel heeft dus dezelfde matrix $\mathbf{A}$ als voorbeeld 24.7.1, maar het rechterlid is 0. De oplossingsmethode verloopt volledig analoog, alleen bestaat de laatste kolom van de uitgebreide matrix uit nullen. *Dergelijke nulkolom blijft onveranderd doorheen de verschillende rijoperaties!* De rijcanonieke vorm is dan ook dezelfde, op de laatste kolom na. De oplossingen zijn

$$(s,t,u,v,w) = a(2,1,0,0,0) + b(1,0,-2,1,0) + c(-3,0,2,0,1), \text{ met } a,b,c \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld 24.7.6. Het stelsel

$$\begin{cases} u & + & v & = & 5 \\ u & - & v & = & 1 \\ u & - & 2v & = & -1 \end{cases}$$

heeft als uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$ met als rijcanonieke vorm $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Alle kolommen behalve de laatste hebben een spil en er is dus een unieke oplossing die onmiddellijk kan worden afgelezen: $(u,v) = (3,2)$. Het overeenkomstige gereduceerde stelsel is immers

$$\begin{cases} u & & = & 3 \\ & v & = & 2 \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

24.8 Stelsels: met parameters

In veel toepassingen zijn niet alle coëfficiënten van een stelsel concrete getallen, maar komen ook zogenaamde *parameters* voor. De oplossingen van het stelsel hangen dan af van die parameter, en in het bijzonder kan het *aantal* oplossingen afhangen van de parameter.

Een stelsel met parameters bevat behalve onbekenden met typisch letters zoals $x, y, x_1, \ldots$ ook zogenaamde *parameters* met letters zoals $a, b, m, n, \lambda, \ldots$ die een bekende maar variabele grootheid voorstellen. De oplossingen van een stelsel met parameters zijn geen *getallen*, maar *uitdrukkingen waarin de parameters voorkomen*. Pas als je de parameters vervangt door concrete getallen bekom je een concreet stelsel met ook concrete getallen als uitkomst.

Voorbeeld 24.8.1.

1. Zoek getallen x en y waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Dit leidt tot het stelsel $\begin{cases} x+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$ met oplossing $(3,2)$. (Oefening).

2. Zoek getallen x en y waarvan de som 6 is en het verschil 2.

Uitwerking: Dit leidt tot het stelsel $\begin{cases} x+y &= 6 \\ x-y &= 2 \end{cases}$ met oplossing $(4,2)$. (Oefening).

3. Zoek getallen x en y waarvan de som a is en het verschil b.

Uitwerking: Dit leidt tot het stelsel $\begin{cases} x+y &= a \\ x-y &= b \end{cases}$.

Je kan dit stelsel oplossen *alsof* a en b getallen zijn: de tweede vergelijking zegt dat $x = y + b$ en als je de x in de eerste vergelijking vervangt door $y + b$ levert dat $(y + b) + y = a$, of $y = \dfrac{a-b}{2}$. En dus is $x = y + b = \dfrac{a-b}{2} + b = \dfrac{a+b}{2}$.

De oplossing van het stelsel $\begin{cases} x+y &= a \\ x-y &= b \end{cases}$ is dus het koppel $(x, y) = \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right)$.

Merk op dat je de twee vorige opgaven nu kan oplossen door de respectivielijk $(a, b) = (5, 1)$ en $(a, b) = (6, 2)$ in te vullen in de algemene formule $(x, y) = \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right)$.

Het is dikwijls sneller één stelsel met parameters op te lossen dan meerdere individuele stelsels, en soms is het zelfs noodzakelijk om met parameters te kunnen werken. Dikwijls treedt er wel een complicatie op: sommige waarden van de parameters doen vervelend en moeten apart worden beschouwd. Dit leidt tot het zogenaamd *gevalsonderscheid* dat we verder bespreken.

Een stelsel met een parameter a oplossen is alsof je niet één stelsel oplost, maar oneindig veel stelsels tegelijk. Elke concrete keuze voor de parameter a betekent een nieuw stelsel en de parameter a komt dan typisch ook voor in de oplossing.

Voorbeeld 24.8.2. Bepaal de oplossingen van het stelsel $\begin{cases} ax+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$ met $a \in \mathbb{R}$ een parameter.

Uitwerking: Dit eenvoudig stelsel kan direct worden opgelost door de laatste vergelijking te schrijven als $x = 1 + y$, en die uitdrukking te substitueren in de eerste vergelijking: $a(1 + y) + y = 5$, en dus $(a + 1)y = 5 - a$ of $y = \dfrac{5-a}{1+a}$. Deze waarde invullen in de tweede vergelijking levert $x - \dfrac{5-a}{1+a} = 1$, of $x = \dfrac{6}{1+a}$.

CC BY-NC-SA 4.0

24.8 Stelsels: met parameters

We zijn geneigd te concluderen dat het stelsel als unieke oplossing het koppel $(x,y) = \left(\frac{6}{1+a}, \frac{5-a}{1+a}\right)$ heeft.

Dit is bijna juist, maar voor de waarde $a = -1$ stelt zich een ernstig probleem, want dan wordt de noemer nul, en de voorgestelde oplossingen onbepaald of oneindig. We onderzoeken de situatie door expliciet het stelsel op te schrijven voor de vervelende waarde $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rl} -x+y & =5 \\ x-y & =1 \end{array}\right. , \qquad \text{of} \qquad \left\{\begin{array}{rl} x-y & =-5 \\ x-y & =1 \end{array}\right.$$

en zien onmiddellijk wat de oplossing zou moeten zijn: dit stelsel is strijdig, want $x-y$ kan onmogelijk tegelijk gelijk zijn aan -5 en aan 1.

Oplossing: het stelsel $\left\{\begin{array}{rl} ax+y & =5 \\ x-y & =1 \end{array}\right.$ heeft voor elke waarde van a een unieke oplossing, namelijk $(x,y) = \left(\frac{6}{1+a}, \frac{5-a}{1+a}\right)$, *behalve* voor de waarde $a = -1$. Als $a = -1$ geeft het stelsel geen oplossingen.

Concreet krijgen we voor $a = 2$ het stelsel $\left\{\begin{array}{rl} 2x+y & =5 \\ x-y & =1 \end{array}\right.$ en de algemene oplossing $(x,y) = \left(\frac{6}{1+a}, \frac{5-a}{1+a}\right)$ wordt in dat geval $(x,y) = \left(\frac{6}{1+2}, \frac{5-2}{1+2}\right) = (2,1)$.

Conclusie: het oplossen van stelsels met een parameter verloopt erg gelijkaardig als het oplossen van gewone stelsels zonder parameters, maar voor sommige waarden van de parameter(s) kunnen er speciale gevallen optreden. Dit zal bijna steeds leiden tot gevalsonderscheid. Een slimme keuze van de oplossingsmethode kan dergelijke gevalsonderscheid soms erg vereenvoudigen.

Volgende strategie werkt voor lineaire stelsels met parameters, maar kan worden uitgebreid naar meer algemene problemen met parameters:

Beschouw de parameter als een willekeurig getal,
en pas met de nodige voorzichtigheid de gewone oplossingsmethode toe.

De nodige voorzichtigheid betekent onder meer dat je bij een stelsel met gewone getallen onmiddellijk kan zien of een element een kandidaat spil is, maar als het element een parameter bevat moet je eerst nagaan of het element al dan niet nul is. Je mag een rij ook enkel herschalen met een getal als je zeker bent dat dat getal niet nul is, want anders gooi je een vergelijking gewoon weg. In het algemeen moeten bijvoorbeeld ook delen door nul en vierkantswortels of logaritmen van negatieve getallen met de nodige zorg worden vermeden.

Voorbeeld 24.8.3. Welke van volgende matrices staan in (niet noodzakelijk gereduceerde) echelonvorm ?

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & a^4+4 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \textcircled{a^2+1} & * & * \end{bmatrix},$$

altijd echelon

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{\scriptstyle a+1} & * \end{bmatrix},$$

echelon, ander type als $a = -1$

CC BY-NC-SA 4.0

24.8 Stelsels: met parameters

$$\begin{bmatrix} \boxed{a+1} & 0 & * \\ 0 & \boxed{1} & * \end{bmatrix}, \qquad \text{geen echelon als } a = -1$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ a^2-1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{1} & a^2-1 & * & * & 0 & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \end{bmatrix}, \qquad \text{geen echelon als } a \neq \pm 1$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{a^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{a^2-1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \end{bmatrix}, \qquad \text{geen echelon als } a = \pm 1$$

Bij het oplossen denk je dus 'generiek', dit betekent dat al wat je doet moet werken zonder enige voorwaarde op je parameter. Zodra je iets doet dat toch afhangt van de waarde van de parameter, moet je gevalsonderscheid maken en je oplossing opsplitsen over de verschillende relevante gevallen. Je beschouwt vervolgens elk geval apart. Het is best mogelijk dat je verderop opnieuw een gevalsonderscheid moet maken. In het algemeen krijgt je oplossing een boomstructuur. Als je alle gevallen hebt behandeld, vat je ze overzichtelijk samen in je einduitkomst. Soms kan je daarbij aparte paden in je boomstructuur toch weer samennemen.

Wanneer kan je met een parameter zonder meer rekenen alsof het een getal is?

De methode van Gauss bestaat uit de eenvoudige stappen schalen, verwisselen en combineren. In volgende voorbeelden heeft de waarde van de parameter a geen belang: de operatie is steeds geldig:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-3a \end{bmatrix} \text{ of}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^2+1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (a^2+1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a^3-a \end{bmatrix} \text{ of}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - aR_1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a^2 \end{bmatrix}$$

Merk op dat de waarde van a in geen van de gevallen de *geldigheid* van de operatie $R_i \to R_i + \lambda R_j$ bepaalt. In het bijzonder mag $\lambda = 0$. Het *resultaat* hangt natuurlijk wel af van a, en de matrix $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-3a \end{bmatrix}$ heeft een nulrij als $a = \frac{1}{3}$, en echelonvorm $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ voor alle andere waarden van a.

Wanneer moet je gevalsonderscheid maken ?

Soms hangt 'de volgende stap die we willen of mogen zetten' af van de concrete waarde van de parameter:

De operatie $\begin{bmatrix} a-2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{a-2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{a-2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ is ongeldig als $a = 2$, want dan deel je door nul. De keuze voor $a-2$ als spil is ook enkel geldig als $a \neq 2$.

Er zijn twee opties om deze moeilijkheid op te lossen:

CC BY-NC-SA 4.0

24.8 Stelsels: met parameters

Optie 1: maak onmiddellijk gevalsonderscheid $a = 2$ of $a \neq 2$

$$\text{Als } a \neq 2: \quad \begin{bmatrix} a-2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{a-2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{a-2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{a-2} \\ 0 & \frac{3a-8}{a-2} \end{bmatrix}$$

$$\text{- en als ook: } a \neq \tfrac{8}{3} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a-2} \\ 0 & \frac{3a-8}{a-2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - \lambda R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{- en als ook: } a = \tfrac{8}{3} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\frac{8}{3}-2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Als } a = 2: \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hierbij is het geval $a = 2$ blijkbaar niet echt relevant want de echelonvorm is altijd de eenheidsmatrix behalve voor $a = \frac{8}{3}$. Je hebt *twee keer* gevalsonderscheid gemaakt waarbij achteraf de uitkomsten blijken te *overlappen*. Inderdaad, de uitkomsten voor 'Als $a \neq 2$, en als ook $a \neq \frac{8}{3}$' en 'Als $a = 2$' zijn gelijk, en kunnen veel eenvoudiger en begrijpelijker worden uitgedrukt door 'Als $a \neq \frac{8}{3}$'. Deze complexiteit wordt vermeden bij de volgende optie, die in dit geval veel handiger is.

Optie 2: stel het gevalsonderscheid uit door eerst de rijen te wisselen

In dit geval is dat veel sneller:

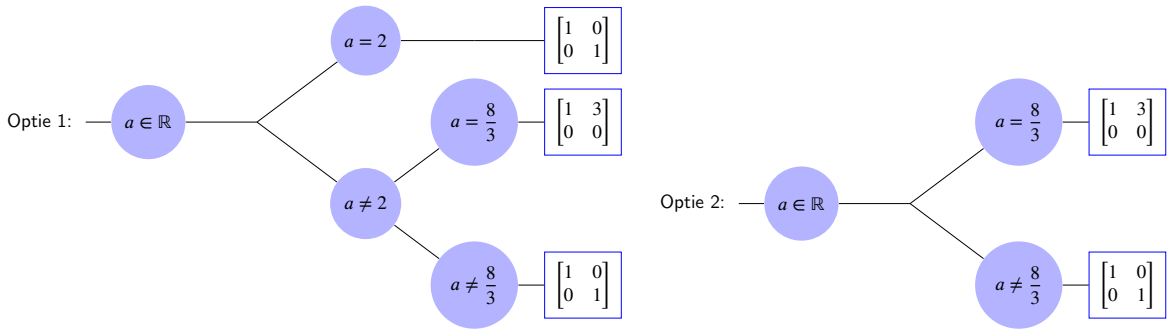
$$\begin{bmatrix} a-2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ a-2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - (a-2)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3a+8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Geval } a \neq \frac{8}{3}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3a+8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - xR_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Geval } a = \frac{8}{3}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3a+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

waarbij nu niet meerdere gevalsonderscheiden moeten worden gemaakt.

Schematisch zien de oplossingsstrategieën er uit als volgt:



en het vraagt wat denkwerk om in te zien dat het eindresultaat van beide schema's identiek is. In oefeningen is het belangrijk je eindresultaat niet onnodig complex weer te geven, en het schema voor optie 1 voldoet dus *niet* als *eind*resultaat.

CC BY-NC-SA 4.0

24.8 Stelsels: met parameters

Opmerking 24.8.1. Aandachtspunten bij stelsels met parameters:

- **Vermijd altijd delen door nul.** Deel enkel door $a-1$ als $a \neq 1$, delen door a^2+1 mag altijd.
- **Vermijd altijd een rij te herschalen met nul.** Nul keer een andere rij optellen mag wel.
- **Probeer gevalsonderscheid uit te stellen.** Je kan bijvoorbeeld slim rijen verwisselen en een spil kiezen waar de parameter niet in voorkomt.
- Let op: soms is het toch nuttig **een speciaal geval onmiddellijk apart te behandelen**. Behandel bijvoorbeeld eerst $a = 2$, en neem dan in het algemene geval steeds aan dat $a \neq 2$.
- Merk op: soms wil je enkel weten voor welke parameterwaarden er meer of minder oplossingen zijn dan 'normaal' en worden de oplossingen zelf niet eens gevraagd.
- Het *oplossen voor het stelsel voor alle waarden van de parameter(s)* noemt men ook het **bespreken van het stelsel**.
- In een zogenaamd *algemeen stelsel* $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ zijn *alle* getallen vervangen door parameters. Je zou een 'algemene oplossing' van zo'n stelsel kunnen opstellen om dan door het invullen van parameters de oplossing te vinden van elk concreet stelsel zonder dat stelsel zelf te moeten oplossen. De prijs die je hiervoor betaalt is echter de complexiteit en de vele gevalsonderscheiden in de 'algemene oplossing', en de methode is hier niet nuttig: je lost toch sneller individuele stelsels op.

  Maar de situatie is anders bij de 'algemene kwadratische vergelijking' $ax^2+bx+c=0$ met één onbekende en drie parameters, waarbij je wel elke 'concrete' kwadratische vergelijking $x^2+2x+3=0$ oplost door de parameters $a=1, b=2, c=3$ in te vullen in de 'algemene oplossing' $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
- Het gebruik van letters $x, y, \ldots$ voor onbekenden en $a, b, k, l, m, n, p, \lambda, \ldots$ is historisch gegroeid, maar niet in steen gebeiteld. In wetenschappelijke problemen kan het voorkomen dat een stelsel zoals $\begin{cases} ax+by=2 \\ x+y=b \end{cases}$ wordt opgesteld als een stelsel in onbekenden x en y, met parameters a en b, maar dat het probleem zelf eigenlijk wordt opgelost door datzelfde stelsel even later te beschouwen als een stelsel $\begin{cases} xa+yb=2 \\ 0a+1b=x+y \end{cases}$ in onbekenden a en b, met parameters x en y.

Oefening 24.8.1. Duid steeds de meest algemene correcte voorwaarde aan.

1. $\begin{cases} x+y=a \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als

$a=0$	$a=1$	$a=\pm1$	$a\neq0$	$a\neq1$	$a\neq\pm1$	$a\neq0,1$	$a=0$ of $a=1$	nooit

2. $\begin{cases} x+y=a^2 \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als

$a=0$	$a=1$	$a=\pm1$	$a\neq0$	$a\neq1$	$a\neq\pm1$	$a\neq0,1$	$a=0$ of $a=1$	nooit

3. $\begin{cases} x+y=a \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft een unieke oplossing als

CC BY-NC-SA 4.0

24.8 Stelsels: met parameters

$a=0$	$a=1$	$a=\pm 1$	$a\neq 0$	$a\neq 1$	$a\neq \pm 1$	$a\neq 0,1$	$a=0$ of $a=1$	nooit

4. $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft een unieke oplossing als

$a=0$	$a=1$	$a=\pm 1$	$a\neq 0$	$a\neq 1$	$a\neq \pm 1$	$a\neq 0,1$	$a=0$ of $a=1$	nooit

5. $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als

$a=0$	$a=1$	$a=\pm 1$	$a\neq 0$	$a\neq 1$	$a\neq \pm 1$	$a\neq 0,1$	$a=0$ of $a=1$	nooit

6. $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft oneindig veel oplossingen als

$a=0$	$a=1$	$a=\pm 1$	$a\neq 0$	$a\neq 1$	$a\neq \pm 1$	$a\neq 0,1$	$a=0$ of $a=1$	nooit

7. $\begin{cases} ax+ay=a \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als

$a=0$	$a=1$	$a=\pm 1$	$a\neq 0$	$a\neq 1$	$a\neq \pm 1$	$a\neq 0,1$	$a=0$ of $a=1$	nooit

Samengevat levert dat volgende strategie op:

Algoritme 24.8.7. Bij het oplossen van stelsels met parameters

- pas je de 'gewone' oplossingsmethode toe, **met de nodige voorzichtigheid**.
- denk je daarbij '**generiek**', dus alsof de parameter(s) *willekeurige* getallen zijn.
- zorg je dat een **kandidaat spil zeer zeker verschillend is van nul**:
  - je kandidaat-element is een niet nul getal
  - je kandidaat-element bevat de parameter, maar kan onmogelijk nul zijn (bv e^a, a^2+1)
  - indien mogelijk verwissel je rijen zodat bovenstaande geldt
  - indien nodig maak je gevalsonderscheid voor bepaalde waarden van de parameter(s).

CC BY-NC-SA 4.0

24.9 Stelsels: inverse matrix via echelon

Als je meerdere stelsels moet oplossen met telkens *dezelfde matrix* $\mathbf{A}$ maar met telkens *verschillende rechterleden* $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots$, dan is het gemakkelijker te werken met een (uitgebreide...!) uitgebreide matrix $[\mathbf{A}|\mathbf{b_1}\ \mathbf{b_2}\ \cdots]$ waarbij je in één keer *alle* rechterleden toegevoegd. Op die manier pas je de rijoperaties die $\mathbf{A}$ in echelonvorm brengen *tegelijk* toe op alle rechterleden, en dat bespaart rekenwerk.

Voorbeeld 24.9.1. Los volgende stelsels op:

$$S_1: \begin{cases} u + v = 4 \\ u - v = 2 \\ u - 2v = 2 \end{cases}, \quad S_2: \begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 1 \\ u - 2v = -1 \end{cases} \text{ en } \quad S_3: \begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 0 \\ u - 2v = 0 \end{cases}$$

We stellen vast dat enkel de constante termen verschillen, en maken daarom één uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{A} & \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \mathbf{b_3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

met echelonvorm

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 6 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Om nu de oplossingenverzamelingen van de drie stelsels af te lezen, volstaat het rechts van de verticale streep enkel rekening houden met de kolom horend bij het juiste stelsel. Om de oplossingen van stelsel S_2 te bepalen kijken we bijvoorbeeld naar de matrix:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

En analoog voor de andere stelsels. We lezen dus af dat $\text{Opl}\, S_1 = \emptyset$, $\text{Opl}(S_2) = \{(3,2)\}$ en $\text{Opl}(S_3) = \emptyset$.

Merk op dat het niet nuttig is kolommen schoon te vegen in het deel met de rechterleden $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$,....

Met deze methode kan je ook de *inverse berekenen* van een inverteerbare matrix. De inverse van een gegeven inverteerbare (en dus vierkante!) matrix $\mathbf{A}$ is een matrix $\mathbf{X}$ zodat

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I} \quad \text{met } \mathbf{I} \text{ de eenheidsmatrix.}$$

Men kan bewijzen dat voor *vierkante* matrices $\mathbf{A}$ een oplossing van $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ automatisch ook voldoet aan $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$.

Omdat de i-de kolom van het matrixproduct $\mathbf{AX}$ gelijk is aan $\mathbf{A}$ maal de i-de kolom van $\mathbf{X}$, kunnen we $\mathbf{X}$ kolom per kolom bepalen door telkens het stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b_i}$ op te lossen met $\mathbf{b_i}$ de i-de kolom van de eenheidsmatrix.

De hierboven beschreven methode levert volgend algoritme voor het bepalen van de inverse matrix:

Eigenschap 24.9.1 (Berekening van de inverse matrix)**.**

Als $\mathbf{A}$ een inverteerbare matrix is, dan is de echelonvorm van de uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array}\right]$ gelijk

CC BY-NC-SA 4.0

24.9 Stelsels: inverse matrix via echelon

aan

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{array}\right]$$

en dit levert dus een algoritme om de *inverse matrix* $\mathbf{A}^{-1}$ van $\mathbf{A}$ te berekenen.

Als de matrix $\mathbf{A}$ een inverteerbare $n \times n$ matrix is, zijn de spilkolommen van $[\,\mathbf{A}\ \mathbf{I}\,]$ de eerste n kolommen. Zodra in één van deze kolommen geen spil kan gevonden worden is de matrix niet inverteerbaar.

Voorbeeld 24.9.2. Een matrix $\begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ zoeken zodat

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

komt neer op het oplossen van volgende stelsels:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

We bepalen de echelonvorm van

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

en dat levert (na enkele stappen)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

De inverse van $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ is dus $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Je kan zelf verifiëren dat inderdaad

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Als $\mathbf{A}$ inverteerbaar is, dan kan de oplossing van een stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ steeds berekend worden via $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Maar in de praktijk is eerst $\mathbf{A}^{-1}$ berekenen en dan $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ meestal meer werk dan de methode van Gauss toepassen. Behalve als je voor dezelfde matrix $\mathbf{A}$ erg veel stelsels met steeds verschillende rechterleden $\mathbf{b}$ moet oplossen. Dan kan het berekenen van de inverse $\mathbf{A}^{-1}$, en dan telkens het matrixproduct $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ toch sneller zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 25
Rechten en vlakken

(Versie 2026/08/25H.51)

25.1 Intro rechten en vlakken

In de vorige module werden stelsels van lineaire vergelijkingen besproken, en dat is precies wat er nodig is om *rechten en vlakken* in de driedimensionale ruimte te beschrijven. We bespreken eerst de veel eenvoudigere situtaie in het tweedimensionale vlak, waar we rechten kunnen beschrijven door ofwel een cartesische vergelijking, ofwel een parametervergelijking. De veralgemening naar drie dimensies is enigszins subtiel:

(a) Een cartesische vergelijking $ax+by=c$ van een rechte in een vlak veralgemeent onmiddellijk tot een *cartesische vergelijking* $ax+by+cz=d$ van een *vlak* in de ruimte.

(b) Een parametervergelijking $(x,y)=(at+p,bt+q)$ van een rechte in een vlak veralgemeent onmiddellijk tot een *parametervergelijking* $(x,y,z)=(at+p,bt+q,ct+r)$ van een *rechte* in de ruimte.

(c) Een parametervergelijking van een vlak in de ruimte heeft *twee parameters* die veelvouden bepalen van twee richtingsvectoren van het vlak.

(d) Een cartesische vergelijking van een rechte in de ruimte bestaat uit een stelsel van *twee vergelijkingen*, namelijk de vergelijkingen van twee vlakken waarvan de rechte de doorsnede is.

In wat volgt hebben we de leerstof over rechten en vlakken als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Een inleidende beschouwing over vectoren en punten in het vlak, waarbij de meetkundige betekenis van vectoren wordt benadrukt.

(3) Nog een andere kijk op vectoren, namelijk als verschuivingen.

(4) Twee manieren om rechten te bepalen in het vlak: eerst met parametervergelijking, en vervolgens ook met een cartesische vergelijking.

(5) Als er twee manieren zijn om rechten te bepalen, willen we weten hoe we die in elkaar kunnen omzetten.

Vervolgens breiden we dit uit tot de driedimensionale ruimte:

(6) Eerst de eenvoudige gevallen van de parametervergelijking van een rechte en de cartesische vergelijking van een vlak.

(7) en dan de wat complexere cartesische vergelijking van een rechte

(8) en de parametervergelijking van een vlak.

(9) Ook in de ruimte willen we die vergelijkingen in elkaar kunnen omzetten,

(10) en tenslotte besteden we aandacht aan de doorsneden van rechten en vlakken.

CC BY-NC-SA 4.0

25.2 Vectoren en punten in het vlak

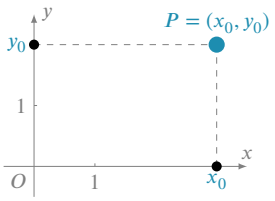
De verzameling koppels van reële getallen $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ kan je meetkundig beschouwen als een *vlak* waarin een x-as en een y-as zijn gekozen: het koppel (x_0, y_0) komt overeen met het punt met coördinaten x_0 en y_0 ten opzichte van deze assen. Omgekeerd kan je aan elk punt in een vlak met behulp van een assenstelsel een koppel getallen associëren. Op deze manier komen 'meetkunde doen' en 'rekenen met koppels van getallen' met elkaar overeen. Dat wordt uitgelegd in het eerste deel van volgend filmpje

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/vFcePhDXMeo

en hieronder verder uitgelegd. (Het filmpje bespreekt verder ook al de verschuivingen met vectoren)

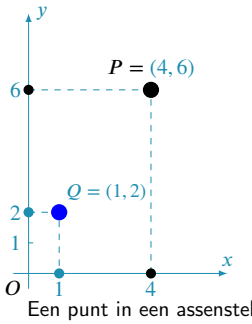


Een punt in een verder leeg vlak

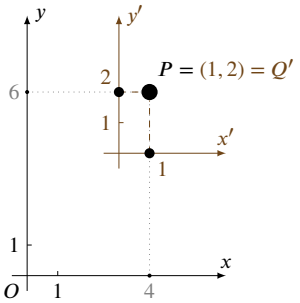


Een punt in een vlak met een assenstelsel

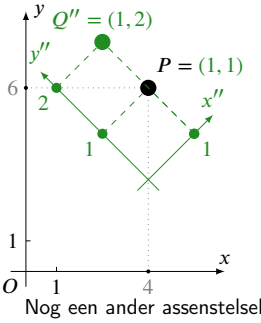
We tekenen het assenstelsel traditioneel met de x-as horizontaal naar rechts en de y-as vertikaal naar boven, maar zullen verder zien dat soms andere keuzen mogelijk en handiger zijn.
Volgende figuren tonen dat de *keuze van het assenstelsel* het verband bepaalt tussen *meetkundige punten en koppels*:
eenzelfde punt P komt overeen met *andere* koppels getallen $(4, 6), (1, 2)$ en $(1, 1)$, en
eenzelfde koppel getallen $(1, 2)$ bepaalt *andere* punten Q, Q' en Q'' in verschillende assenstelsels:



Een punt in een assenstelsel

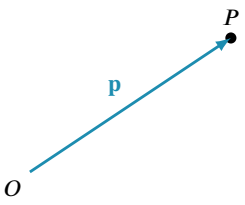


Een ander assenstelsel

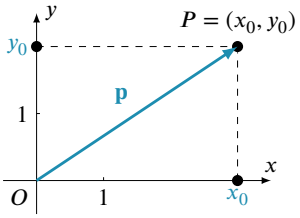


Nog een ander assenstelsel

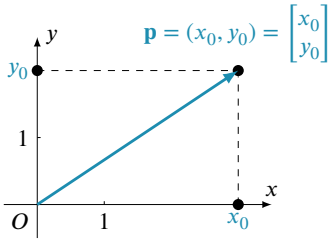
In een vlak met een assenstelsel kan je elk *punt* (x_0, y_0) van $\mathbb{R}^2$ ook beschouwen als een *vector* met beginpunt $(0, 0)$ en eindpunt (x_0, y_0). Je hebt hiervoor zelfs niet het volledige assenstelsel nodig: de oorsprong volstaat. Een vlak waarin een punt als *oorsprong* is aangeduid, noemen we een *gepunt vlak*. Om het vectorkarakter te benadrukken tekenen we een koppel (x_0, y_0) als een pijl vanuit de oorsprong naar dat punt (x_0, y_0). Dat komt bijvoorbeeld vaak voor in de fysica.



Een punt bepaalt een vector in een gepunt vlak



Een punt bepaalt een vector in een assenstelsel

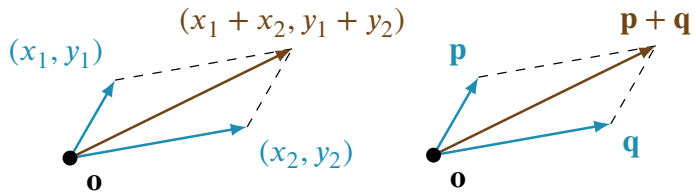


Een vector bepaalt een punt in een assenstelsel

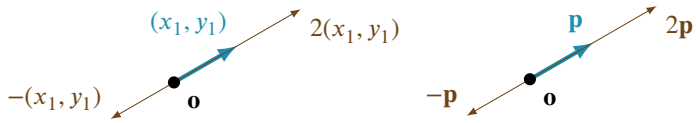
25.2 Vectoren en punten in het vlak

Merk op dat we wel degelijk gebruik maken *van de oorsprong* om met een punt een vector te associëren. We gebruiken in $\mathbb{R}^2$ de termen "koppel", "2-tal", "vector" en "punt" dikwijls als *synoniemen van elkaar*. Als we het punt-karakter willen benadrukken gebruiken we meestal hoofdletters P, Q of A, B en we gebruiken dan kleine, vette letters $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ voor de bijhorende vectoren. We noteren (de coördinaten van) een punt soms als een koppel $P = \mathbf{p} = (x_0, y_0)$, maar soms ook als een kolomvector $P = \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

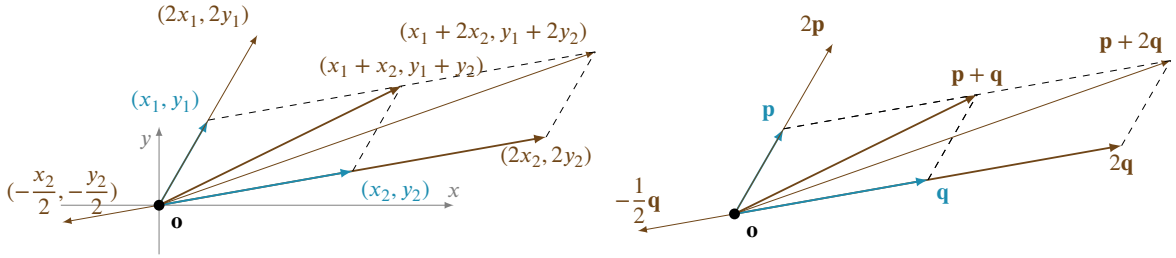
We kunnen zowel koppels als vectoren optellen, en beide operaties geven hetzelfde resultaat. De som van de vectoren $\mathbf{p} = (x_1, y_1)$ en $\mathbf{q} = (x_2, y_2)$ is de vector $\mathbf{p} + \mathbf{q} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ die ook wordt bekomen via de zogenaamde parallellogramregel:



De veelvouden $r\mathbf{p} = r(a, b) = (ra, rb)$ van een vector $\mathbf{p} = (a, b)$ met $(a, b) \neq (0, 0)$) zijn meetkundig *herschalingen* van $\mathbf{p}$, en liggen allemaal op de rechte door $(0, 0)$ en $\mathbf{p}$. Als we *alle* herschalingen $r\mathbf{p}$ beschouwen (met zowel positieve als negatieve r), krijgen we *de rechte* door de punten $\mathbf{O}$ en $\mathbf{p}$.



Een *lineaire combinatie* van de twee vectoren $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ is een *som van veelvouden* van $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$, dus een vector van de vorm $r\mathbf{p} + s\mathbf{q}$, mer $r, s \in \mathbb{R}$. We kunnen *alle* vectoren van het vlak schrijven als een lineaire combinatie van twee willekeurige $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$, *tenzij* $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ op dezelfde rechte liggen door de oorsprong.

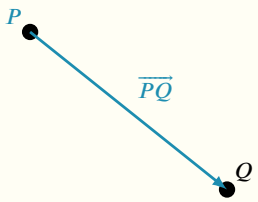


Opmerking 25.2.1. Dit verband tussen punten en vectoren veralgemeent onmiddellijk in de driedimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$, en het geldt ook in willekeurige dimensies $\mathbb{R}^n$.

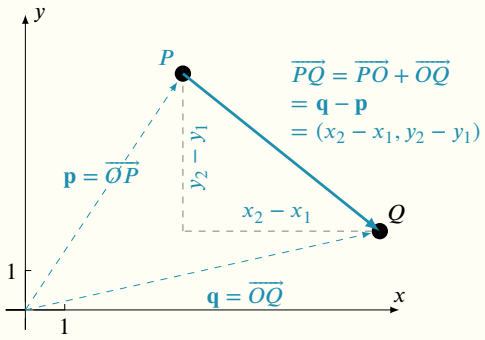
Opmerking 25.2.2. Met twee punten P en Q kan je ook de vector met beginpunt P en eindpunt Q associëren. Dit aspect wordt bij verschuivingen uitgebreider behandeld.

CC BY-NC-SA 4.0

25.2 Vectoren en punten in het vlak



Twee punten P en Q bepalen een vector $\overrightarrow{PQ}$ in een vlak



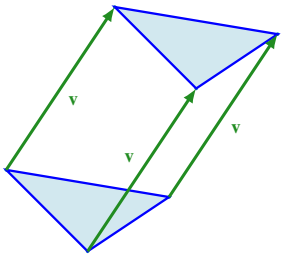
Twee punten P en Q bepalen *drie* vectoren $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{OQ}$ en $\overrightarrow{PQ}$ in een vlak

CC BY-NC-SA 4.0

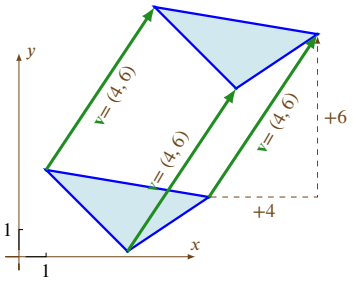
25.3 Vectoren en verschuivingen in het vlak

Vectoren zijn bijzonder nuttig bij het bestuderen van *verschuivingen* in het vlak. Dat wordt uitgelegd in het vervolg van vorig filmpje

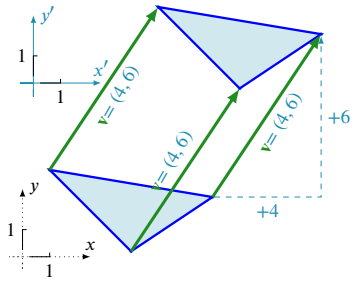
YouTube link: https://www.youtube.com/embed/vFcePhDXMeo?start=50&



Een verschuiving van een driehoek



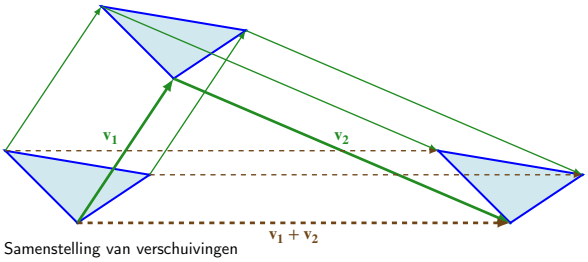
Een verschuiving van een driehoek in een assenstelsel



Een verschuiving van een driehoek in een verschoven assenstelsel

Een *vector* geeft hier aan hoe een figuur wordt *verschoven*. In de linkse figuur wordt de verschuiving van de driehoek aangeduid door de drie groene pijlen $\mathbf{v}$. In de tweede figuur is er een assenstelsel gekozen, en dan kunnen we met de vector $\mathbf{v}$ een koppel getallen associëren, namelijk hoeveel eenheden er wordt verschoven in de x-richting, in dit geval 4 eenheden, en hoeveel eenheden in de y-richting, in dit geval 6 eenheden. Alle groene pijlen hebben dezelfde componenten, en in elk ander assenstelsel met evenwijdige assen en dezelfde schaal behoudt de vector $\mathbf{v}$ dezelfde componenten. Als vectoren gebruikt worden voor verschuivingen noemen we ze soms **vrije vectoren**. We zeggen ook dat een vector dan de **stap** aanduidt waarover iets wordt verschoven of verplaatst. Als vectoren gebruikt worden om punten aan te duiden spreken we over **gebonden vectoren**. Verder zal blijken dat dit onderscheid afhankelijk van de concrete context al dan niet belangrijk is.

Je kan meerdere verschuivingen na elkaar uitvoeren. Dat heet wiskundig het *samenstellen* van de verschuivingen, en komt overeen met het *optellen* van de vectoren:

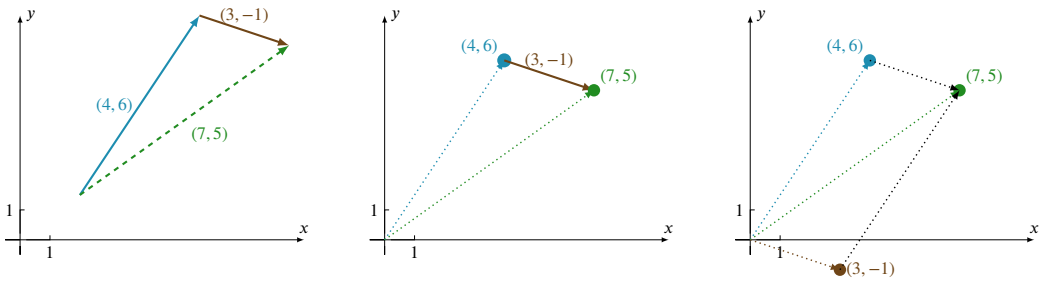


Samenstelling van verschuivingen

We kunnen het optellen van vectoren op verschillende manieren interpreteren, naargelang een vector een punt dan wel een stap of verschuiving voorstelt. Het daarbij steeds om *dezelfde* optelling, enkel de interpretatie en de bijhorende tekening verschilt telkens.

CC BY-NC-SA 4.0

25.3 Vectoren en verschuivingen in het vlak



$$\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+3\\6+(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+3\\6+(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+3\\6+(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$$

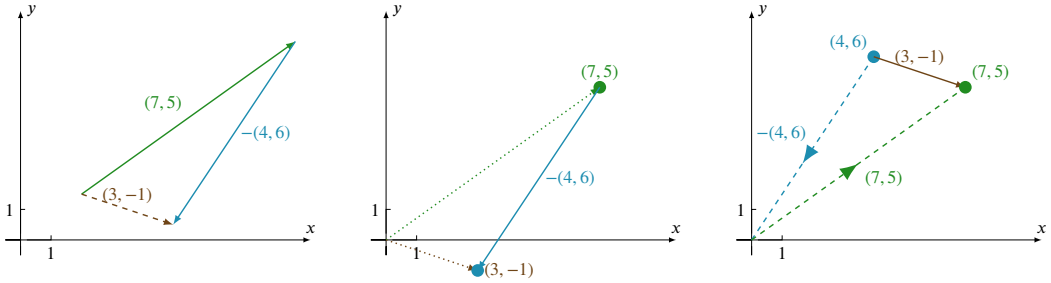
stap + stap = stap *punt + stap = punt* *punt + punt = punt*

Deze interpretaties kunnen worden samengevat in volgende eigenschap:

Eigenschap 25.3.1. De som $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ van vectoren kan op volgende equivalente manieren begrepen worden als:

- het samenstellen van twee verschuivingen, eerst over een afstand $\mathbf{p}$ en dan over $\mathbf{q}$
- het verschuiven van het punt $\mathbf{p}$ over een afstand $\mathbf{q}$
- het optellen van koppels $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ component per component
- het optellen van punten of vectoren $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ via de parallellogramregel

Het *verschil* van vectoren is per definitie de optelling met de tegengestelde vector, maar is meetkundig ook op verschillende manieren te begrijpen:



$$\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

stap − stap = stap *punt − stap = punt* *punt − punt = STAP*

Eigenschap 25.3.2.

Het verschil $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ van vectoren kan op volgende equivalente manieren begrepen worden als:

- het samenstellen van twee verschuivingen, eerst over een afstand $\mathbf{p}$ en dan over $-\mathbf{q}$
- het verschuiven van het punt $\mathbf{p}$ over een afstand $-\mathbf{q}$
- het verschil van koppels $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ component per component
- de verschuiving om van het punt $\mathbf{q}$ naar het punt $\mathbf{p}$ te gaan

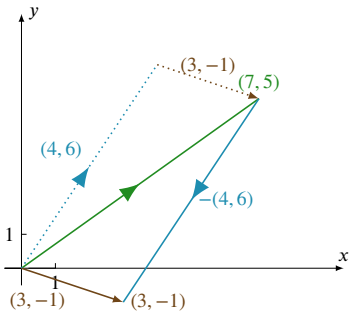
Vooral de laatste karakterisering is erg belangrijk. Je kan ze begrijpen als 'het verschil tussen twee punten

CC BY-NC-SA 4.0

25.3 Vectoren en verschuivingen in het vlak

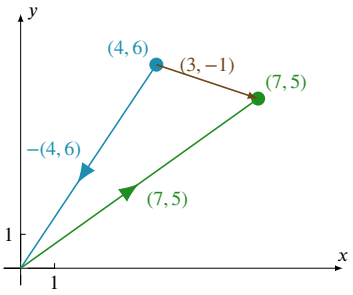
P en Q is de vector om van Q naar P te gaan'. Dat is volledig analoog met het verschil v tussen twee getallen a en b: $a-b=v$ betekent dat v het getal is dat je bij het tweede getal b moet bijtellen om het eerste getal a te bekomen: $a-b=v \iff a=b+v$.
Het $\mathbf{p}-\mathbf{q}=\mathbf{v}$ betekent precies dat $\mathbf{v}$ de vector is die je nodig hebt om van de tweede term $\mathbf{q}$ naar de eerste term $\mathbf{p}$ te gaan: $\mathbf{p}-\mathbf{q}=\mathbf{v} \iff \mathbf{p}=\mathbf{q}+\mathbf{v}$.

Het verschil tussen 6 en 4 is 2, en 2 is precies wat nodig is om van de tweede term 4 de eerste term 6 te maken: $6-4=2 \iff 4+2=6$.
Het verschil tussen $\mathbf{p}=(7,5)$ en $\mathbf{q}=(4,6)$ is $\mathbf{p}-\mathbf{q}=(3,-1)$, en $(3,-1)$ is precies wat je nodig hebt om van de tweede term $\mathbf{q}=(4,6)$ naar de eerste term $\mathbf{p}=(7,5)$ te gaan.



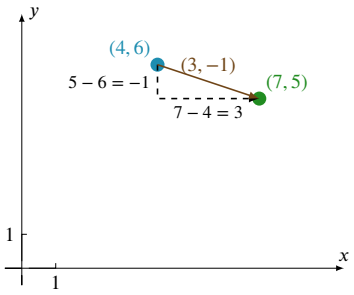
$$\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

stap − stap = stap



$$-\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

−stap + stap = stap



$$\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

punt − punt = stap

De laatste tekening wordt algebraïsch eenvoudiger met de notatie $\overrightarrow{PQ}$ voor de (gebonden) vector met beginpunt P en eindpunt Q, en de afkorting $\overrightarrow{P}$ voor de vector $\overrightarrow{OP}$. Met deze notatie wordt de optelling

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR} \text{ en } \overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{QP}$$

en dan volgt uit

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{Q}-\overrightarrow{P}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$$

volgende belangrijke eigenschap:

Eigenschap 25.3.3 (Verband gebonden en ongebonden vectoren)**.** Voor punten P en Q in het vlak geldt:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{Q}-\overrightarrow{P}$$

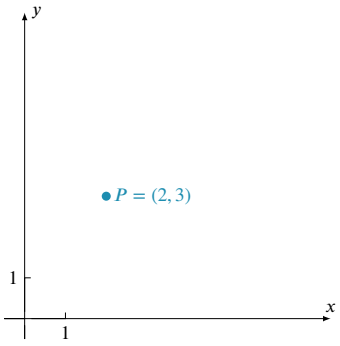
of met een alternatieve notatie:

$$\overrightarrow{pq}=\vec{q}-\vec{p}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$$

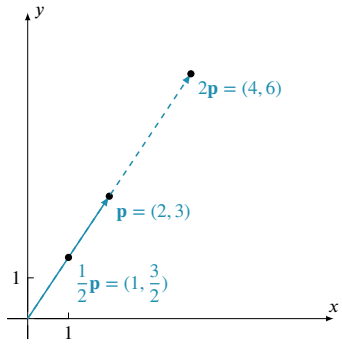
CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

25.4 Parametervergelijking van een rechte

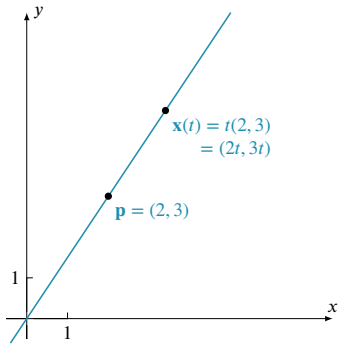
Alle veelvouden van een vector vormen een rechte door de oorsprong:



$$P = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



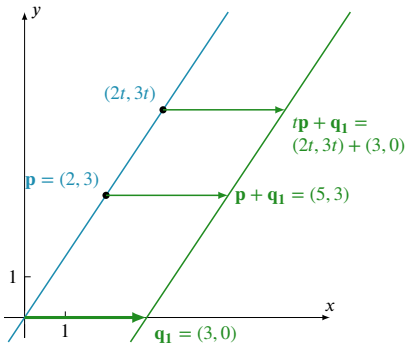
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, 2\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \ldots$$



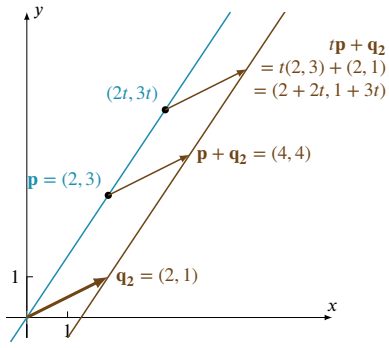
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ of } (x, y) = t(2, 3) \text{ of } \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Alle punten van de rechte door $(0, 0)$ en door het punt $P(x_1, y_1)$ zijn van de vorm $t(x_1, y_1)$, of dus (tx_1, ty_1), met t een willekeurig reëel getal.
Merk op dat deze rechte samenvalt met de rechte door $(2x_1, 2y_1)$ of meer algemeen door (kx_1, ky_1), met $k \in \mathbb{R}_0$.

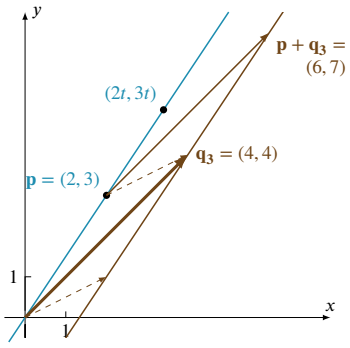
Door een dergelijke rechte te verschuiven bekomen we *evenwijdige rechten*:



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



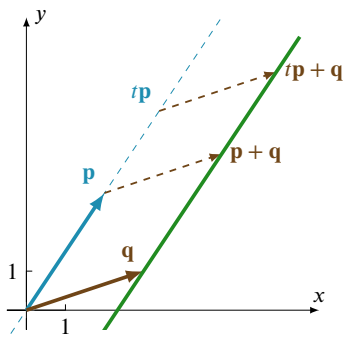
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Merk op dat verschuiven over $\mathbf{q_2} = (2, 1)$ of verschuiven over $\mathbf{q_3} = (4, 4)$ hier *dezelfde* rechte oplevert.

Als de parameter loopt doorheen de reële getallen bekom je *alle punten van een rechte* die door een punt $\mathbf{q}$ gaat en evenwijdig is met een vector $\mathbf{p}$. Op onderstaande tekening is de groene rechte de verschuiving van de blauwe rechte over een afstand $\mathbf{q}$ maar ook de som van alle herschalingen van $\mathbf{p}$ en het punt $\mathbf{q}$:

CC BY-NC-SA 4.0

25.4 Parametervergelijking van een rechte



Definitie 25.4.1 (Parametervergelijkingen van een rechte)**.**

Een **parametervergelijking** van een rechte met **richtingsvector** $\mathbf{p} = (x_1, y_1)$, **positievector** $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ en parameter t is een uitdrukking van de vorm

$$L \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

die we ook kunnen schrijven als

$$L \leftrightarrow \begin{cases} x = tx_1 + q_x \\ y = ty_1 + q_y \end{cases} \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y) = t(x_1, y_1) + (q_x, q_y), \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y) = (tx_1 + q_x, ty_1 + q_y), \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow \mathbf{x} = t\mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

Deze rechte *bevat* de positievector $\mathbf{q}$ en is *evenwijdig* met de richtingsvector $\mathbf{p}$.

Deze rechte is de *verschuiving* van de rechte bepaald door de richtingsvector $\mathbf{p}$ over de positievector $\mathbf{q}$.

Deze rechte is de positievector $\mathbf{q}$ waarbij willekeurige veelvouden van de richtingsvector $\mathbf{p}$ zijn opgeteld.

De **richtingscoëfficiënt** m is de y-coördinaat van de richtingsvector met x-coördinaat 1, en geeft dus aan hoeveel de rechte stijgt of daalt als je één eenheid naar rechts gaat:

$$m = \frac{y_1}{x_1} \text{ want } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ is evenwijdig met } \begin{bmatrix} 1 \\ y_1/x_1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 25.4.1.

De rechte door de oorsprong en het punt $(2, 3)$ heeft als parametervergelijking $L_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

De rechte door $(2, 3)$ evenwijdig met de x-as heeft als parametervergelijking $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, wat ook geschreven kan worden als $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

CC BY-NC-SA 4.0

25.4 Parametervergelijking van een rechte

De rechte door $(3,4)$ evenwijdig met L_1 heeft als parametervergelijking $L_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 3t+4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Opmerking 25.4.1.

- Parametervergelijkingen zijn niet uniek bepaald, een rechte heeft erg veel verschillende parametervergelijkingen:

$$L \leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 3t+4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 4t+3 \\ y = 6t+4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 20t+3 \\ y = 30t+4 \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+5 \\ y = 3t+7 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+23 \\ y = 3t+34 \end{cases}$$

  Inderdaad, de richtingsvector vermenigvuldigen met een getal verschillend van nul, of bij de positievector een willekeurig veelvoud optellen van de richtingsvector verandert de rechte niet.

- Om na te gaan of twee parametervergelijkingen al dan niet dezelfde rechte bepalen, gebruik je de eigenschap dat twee rechten gelijk zijn ofwel zodra ze *twee* punten gemeenschappelijk hebben, ofwel zodra ze één gemeenschappelijk punt en dezelfde richting hebben. Twee rechten zijn evenwijdig als ze *geen* gemeenschappelijke punten hebben.

- Als $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ twee punten zijn van een rechte, dan zijn $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ en $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ beide richtingsvectoren.

- Een parametervergelijking *genereert* punten van een rechte: elke waarde van de parameter levert onmiddellijk een punt op van de rechte, en elk punt van de rechte wordt ook bereikt voor een bepaalde parameterwaarde. Maar, als je van een willekeurig punt van het vlak wil weten of het tot de rechte behoort dan moet je nagaan of er een parameter bestaat waarvoor dat punt bereikt wordt, en dat vraagt meestal rekenwerk, namelijk het oplossen van een stelsel. Merk op dat dit voor de cartesische vergelijkingen precies omgekeerd is: nagaan of een punt tot de rechte behoort is dan eenvoudig, want je moet gewoon de coördinaten invullen. Maar, alle punten van de rechte vinden komt dan neer op het oplossen van een stelsel!

- Parametervergelijkingen van rechten in de ruimte $\mathbb{R}^3$ zijn volledig gelijkaardig: er is enkel een extra coördinaat.

Oefening 25.4.1. Geef een parametervergelijking van volgende rechten:

1. door $(-1,-2)$ en evenwijdig met de vector $(7,8)$

2. door $(-1,-2)$ en evenwijdig met de vector $(7,7)$

3. door $(-1,-2)$ en $(7,8)$

Oefening 25.4.2. Geef telkens drie punten en een richtingsvector van volgende rechten:

1. $L \leftrightarrow \begin{cases} x = 7t-1 \\ y = 8t-2 \end{cases}$

2. $L \leftrightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = 8t-2 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

25.4 Parametervergelijking van een rechte

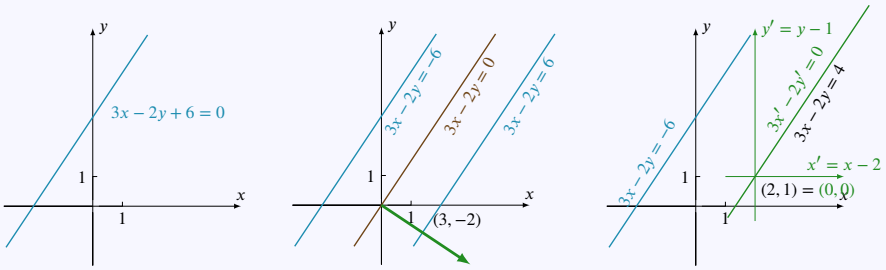
3. $L \leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 8t - 2 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

25.5 2D: Cartesiaanse vergelijkingen

Een lineaire vergelijking in x en y bepaalt een rechte in het vlak.

Voorbeeld 25.5.1. Bestudeer de vergelijking $3x-2y+6=0$. Wie dit voorbeeld onmiddellijk begrijpt, kan het hoofdstukje over cartesiaanse vergelijkingen overslaan.



We kunnen over de vergelijking $3x-2y+6=0$ het volgende opmerken:

- door $x=0$ resp. $y=0$ te kiezen vinden we onmiddellijk twee punten van de rechte: $(0,-3)$ en $(2,0)$. Daarmee is de rechte al volledig bepaald.
- door de vergelijking te herschrijven als $y=\dfrac{3x+6}{2}$ vinden we *voor elke* x een bijhorende y. Op deze manier is de rechte de grafiek van de (lineaire) functie $x \mapsto \dfrac{3x+6}{2}$.
- door de vergelijking te herschrijven als $x=\dfrac{2y-6}{3}$ vinden we *voor elke* y een bijhorende x.
- liefhebbers van *stelsels* kunnen de vergelijking beschouwen als een stelsel van één vergelijking in twee onbekenden. Er is dan één hoofdonbekende, en één nevenonbekende, en de oplossingen van het stelsel zijn

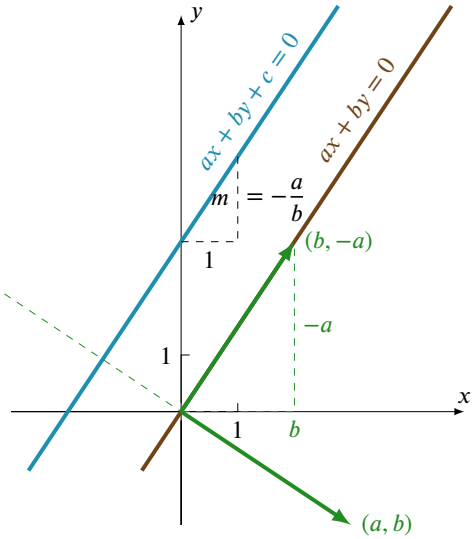
$$\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{3}{2}t+3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{of ook} \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t-2 \\ y=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

  Dit blijken precies de parametervergelijkingen te zijn van de rechte met vergelijking $3x-2y+6=0$.
- de vergelijking $3x-2y+6=0$ is een *voorwaarde* op koppels (x,y). De koppels die voldoen vormen een rechte in het vlak.
- de vergelijking $3x-2y+7=0$ is een *evenwijdige rechte* (want als $3x-2y=-6$, dan kan natuurlijk niet ook $3x-2y=-7$). Dus, de rechten $2x-2y+a=0$ zijn allemaal onderling evenwijdig voor verschillende $a\in\mathbb{R}$. En dergelijke rechte gaat door de oorsprong precies als $a=0$.
- om a te vinden zodat de evenwijdige $3x-2y=a$ door het punt $(2,1)$ gaat volstaat het te eisen dat $(2,1)$ op $3x-2y=a$ ligt, dus dat $3(2)-2(1)=a$. Je vindt dan direct $a=6-2=4$. Een alternatieve manier is om het xy-assenstelsel te verschuiven over de vector $(2,1)$ via $(x',y')=(x-2,y-1)$, en op te merken dat de rechte in $x'y'$-coördinaten door de oorsprong gaat, dus van de vorm $3x'-2y'=0$ moet zijn. Dus moet $3(x-2)-2(y-1)=0$, of $3x-2y-6+2=0$ waaruit ook volgt dat $a=4$.
- liefhebbers van het *scalair product* kunnen opmerken dat $3x+2y=0$ ook kan geschreven worden als $(2,3)\cdot(x,y)=0$, en bijgevolg vaststellen dat de vector $(2,3)$ loodrecht staat op de rechte met vergelijking $3x-2y=0$.

CC BY-NC-SA 4.0

25.5 2D: Cartesiaanse vergelijkingen

- liefhebbers van *analogieën* kunnen opmerken dat de rechte met vergelijking $3x - 2y + 6 = 0$ min of meer *bepaald wordt door de drie getallen* $3, -2, 6$. In de negentiende eeuw hebben wiskundigen haakjes rond die getallen gezet en opgemerkt dat je dergelijk drietal $(3, -2, 6)$ misschien kan beschouwen als *coördinaten van een rechte*, net zoals $(2, 3)$ *coördinaten* zijn van een punt. Dat leidt tot de bijzonder interessante zogenaamde projectieve meetkunde, die we hier echter niet verder zullen behandelen.



Definitie 25.5.1 (Cartesiaanse vergelijkingen van een rechte)**.**

Een **cartesiaanse vergelijking** van een rechte is een uitdrukking van de vorm

$$ax + by + c = 0 \quad (\text{ of ook } ax + by = d)$$

met a en b niet beide nul, en waarbij een punt (x_0, y_0) op de rechte ligt als en slechts als $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Als $b \neq 0$ kan dergelijke vergelijking na delen door b ook worden geschreven in de vorm

$$y = mx + q$$

We noemen $m = -\dfrac{a}{b}$ de **richtingscoëfficiënt** van de rechte.
De richtingscoëfficiënt geeft de stijging of daling van de rechte aan als x met één eenheid toeneemt.

Eigenschap 25.5.1. Voor de rechte met vergelijking $ax + by + c = 0$ geldt:

$a = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de x-as	$\iff$	$y = k$
$b = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de y-as	$\iff$	$x = k$
$c = 0$	$\iff$	de rechte gaat door de oorsprong	$\iff$	$ax + by = 0$ of $y = kx$ of $x = k'y$

Eigenschap 25.5.2 (Evenwijdigheid en loodrechte stand)**.**

- Alle rechten $ax + by = k$, $k \in \mathbb{R}$ zijn onderling *evenwijdig*
  en hoe groter k, hoe verder de rechte verwijderd is van de oorsprong.
- De rechte $ax + by + c = 0$ staat *loodrecht* op de vector (a, b)

CC BY-NC-SA 4.0

25.5 2D: Cartesiaanse vergelijkingen

want $ax + by = (a,b) \cdot (x,y) = 0 \iff (a,b) \perp (x,y)$).

Bij volgende eigenschap volgt elk aspect telkens uit het voorgaande. Behalve het laatste, maar dat is evident.

Eigenschap 25.5.3 (Vergelijking van een rechte)**.**

- De rechte door de oorsprong en punt (x_1, y_1) heeft vergelijking

$$y_1 x - x_1 y = 0 \quad \text{of dus} \quad y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x \quad \text{of} \quad \boxed{y = mx}$$

  met $m = \dfrac{y_1}{x_1}$ de richtingscoëfficient.

- De rechte door punt (x_1, y_1) met richtingscoëfficiënt m heeft (wegens verschuiving van voorgaande) vergelijking

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

- De rechte door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) heeft als richting het verschil tussen beide punten, en dus als richtingscoëfficiënt

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left(= \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} \right),$$

  en dus als vergelijking

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)}$$

- De rechte die de x-as snijdt in $(a,0)$ en de y-as in $(0,b)$ (met a en b beide verschillend van 0) heeft vergelijking

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

  want beide punten $(a,0)$ en $(0,b)$ voldoen duidelijk aan de vergelijking.

Enkel wie over een echt goed geheugen beschikt met bovendien voldoende vrije capaciteit die toch niet voor meer nuttige dingen kan gebruik worden, ofwel wie heel erg fan is van cartesiaanse vergelijkingen moet bovenstaande formules proberen onthouden en van buiten leren. Voor al de anderen volstaat het volgende voorbeelden en oefeningen met de nodige aandacht te maken, en ze zullen de formules sneller kunnen reconstrueren zodra ze ze ergens nodig hebben dan dat de anderen ze zich kunnen herinneren.

Voorbeeld 25.5.2. Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door de oorsprong en $(3,6)$: $\boxed{y = 2x\checkmark}$
2. door $(0,1)$ en $(3,7)$: $\boxed{y = 2x + 1\checkmark}$
3. door de oorsprong en $(-1,-2)$: $\boxed{y = 2x\checkmark}$
4. door $(0,0)$ en $(-1,-1)$: $\boxed{x = y\checkmark}$
5. door $(0,0)$ en $(-1,-2)$: $\boxed{y = 2x\checkmark}$

CC BY-NC-SA 4.0

25.5 2D: Cartesiaanse vergelijkingen

6. door $(0,1)$ en $(-1,-1)$: $y = 2x + 1$✓

7. door $(1,2)$ en $(-1,-2)$: $y = 2x$✓

Oefening 25.5.1. Teken de rechten met volgende vergelijkingen:

1. $y = 3x + 2$

2. $y = 2x + 3$

3. $y = -3x$

4. $y = -2x + 3$

Duidt telkens de snijpunten aan met de assen en de richtingscoëfficiënten.

Oefening 25.5.2. Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door de oorsprong en $(3,6)$

2. door de $(0,1)$ en $(3,7)$

3. door de oorsprong en $(-1,-2)$

4. door de $(0,0)$ en $(-1,-1)$

5. door de $(0,0)$ en $(-1,-2)$

6. door de $(0,1)$ en $(-1,-1)$

7. door de $(1,2)$ en $(-1,-2)$

CC BY-NC-SA 4.0

25.6 2D: omzetten van vergelijkingen

Een rechte in het vlak wordt bepaald door twee punten, één punt en een richting, een parametervergelijking of een cartesiaanse vergelijking. Het is nuttig vlot te kunnen overschakelen tussen deze voorstellingen.

Eigenschap 25.6.1. Eigenschappen en alternatieve karakteriseringen van rechten gegeven door:

punten (a_1, a_2) en (b_1, b_2)

- richtingsvector: $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$
- parametervergelijking: $\begin{cases} x = (a_1 - b_1)t + b_1 \\ y = (a_2 - b_2)t + b_2 \end{cases}$
- cartesiaanse vergelijking: $y - a_2 = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)$

punt (a_1, a_2) en richting (q_1, q_2)

- punten: (a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$
- parametervergelijking: $\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
- cartesiaanse vergelijking: $y - a_2 = \dfrac{q_2}{q_1}(x - a_1)$

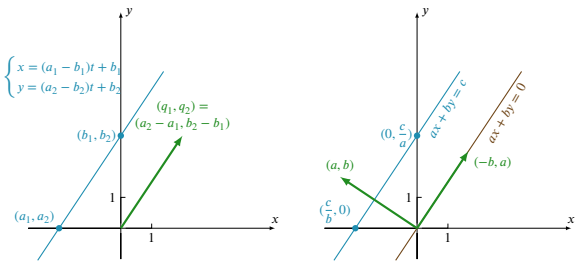
vergelijking $\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}$

- punten: (a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$
- richtingsvector: (q_1, q_2)
- cartesiaanse vergelijking: $y - a_2 = \dfrac{q_2}{q_1}(x - a_1)$

vergelijking $ax + by = c$

- punten: $(0, \frac{c}{b})$ en $(\frac{c}{a}, 0)$
- loodrichting: (a, b)
- richtingsvector: $(-b, a)$
- parametervergelijking: $\begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{a}{b}t + \dfrac{c}{b} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

(Op de volgende bladzijde vind je *hetzelfde* schema met uitleg)



CC BY-NC-SA 4.0

25.6 2D: omzetten van vergelijkingen

punten (a_1, a_2) en (b_1, b_2)

richtingsvector $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

verschil van twee punten; ook $k(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ zijn richtingsvectoren

parametervergelijking $\begin{cases} x = (a_1 - b_1)t + b_1 \\ y = (a_2 - b_2)t + b_2 \end{cases}$

via 'punt + parameter maal richting'; ook $\begin{cases} x = (a_1 - b_1)t + a_1 \\ y = (a_2 - b_2)t + a_2 \end{cases}$,

$\begin{cases} x = (b_1 - a_1)t + a_1 \\ y = (b_2 - a_2)t + a_2 \end{cases}$ en $\begin{cases} x = a_1 t + (1-t)b_1 \\ y = a_2 t + (1-t)b_2 \end{cases}$

zijn parametervergelijkingen van dezelfde rechte

cartesiaanse vergelijking $y - a_2 = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)$

via formule 'rechte door twee punten', of eenvoudiger via

de rechte met helling $m = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ is $y = mx$, en omdat de rechte door (a_1, a_2)

moet gaan passen we de verschuiving $(x, y) \mapsto (x - a_1, y - a_2)$ toe.

Ook $(b_2 - a_2)(x - a_1) - (b_1 - a_1)(y - a_2) = 0$

en $(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y = (b_2 - a_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2$

zijn cartesiaanse vergelijkingen van dezelfde rechte.

punt (a_1, a_2) en richting (q_1, q_2)

punten (a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$

alle $(a + kp, b + kq)$ liggen op de rechte, met $k \in \mathbb{R}$

parametervergelijking $\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

via 'punt + parameter maal richting'

cartesiaanse vergelijking $y - a_2 = \dfrac{q_2}{q_1}(x - a_1)$

$\dfrac{q_2}{q_1}$ is de helling, dan verschuiven over (a_1, a_2);

kan via uitwerken in de vorm $ax + by = c$ worden geschreven.

vergelijking $\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}$

punten (a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$

elke waarde van ty levert een punt op

richtingsvector (q_1, q_2)

via aflezen uit de parametervergelijkingen in standaard vorm

cartesiaanse vergelijking $y - a_2 = \dfrac{q_2}{q_1}(x - a_1)$

ofwel via 'eliminatie van t': bereken uit de eerste vergelijking $t = \dfrac{1}{q_1}(x - a_1)$, en substitueer dat in de tweede vergelijking; ofwel via de formule voor 'punt+richting gegeven', of zelfs voor 'twee punten gegeven'.

vergelijking $ax + by = c$

punten $(0, \dfrac{c}{b})$ en $(\dfrac{c}{a}, 0)$

via invullen $x = 0$, en daarna $y = 0$

loodrichting (a, b)

via aflezen: $ax + by = 0 \iff (a, b) \cdot (x, y) = 0 \iff (a, b) \perp (x, y)$

richtingsvector $(-b, a)$

omdat $(-b, a)$ loofdrecht staat op (a, b) (wegens kwartdraai is $(x, y) \mapsto (-y, x)$)

parametervergelijking $\begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{a}{b}t + \dfrac{c}{b} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

via 'kies $x = t$ en bereken y uit $ax + by = c$'

ook $\begin{cases} x = -\dfrac{b}{a}t + \dfrac{c}{a} \\ y = t \end{cases}$ is een parametervergelijking van dezelfde rechte.

Opmerking 25.6.1. Opmerkingen over cartesiaanse- en parametervergelijkingen in het vlak:

- parametervergelijkingen *genereren* punten: elke waarde van de parameter levert een punt van de rechte. Een bepaald punt (x, y) ligt op de rechte ligt als er een parameter bestaat die precies

CC BY-NC-SA 4.0

25.6 2D: omzetten van vergelijkingen

dat punt (x, y) geeft. Het vinden van die parameter komt neer op het oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen in één onbekende t, met parameters x en y. De oplossingsvoorwaarde voor dat stelsel is precies de cartesiaanse vergelijking. Merk op dat deze techniek de rol van 'parameters' en 'onbekenden' omkeert!

- cartesiaanse vergelijkingen leggen voorwaarden op aan punten: een bepaald punt (x, y) ligt op de rechte als het voldoet aan de vergelijking. Om alle punten te vinden, moet je de éne vergelijking in twee onbekenden oplossen, en die oplossing is precies de parametervergelijking van die rechte.
- dezelfde dualiteit tussen 'genereren' en 'beperken' vind je ook terug in andere contexten: de verzameling van de even natuurlijke getallen kan je schrijven als

  $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ genereren, met parameter n
  $\{n \mid \exists m \in \mathbb{N} : 2m = n\}$ beperken, met oplosbaarheidvoorwaarde voor vergelijking $2x = n$

- omzetten van cartesiaans naar parameter is 'oplossen van een (stelsel van) vergelijkingen'
- omzetten van parameter naar cartesiaans is 'parameter elimineren', of dus het opstellen van een oplosbaarheidsvoorwaarde voor een stelsel.
- een parametervergelijking $\mathbf{x} = \mathbf{q}t + \mathbf{p}$ bevat een **richtvector** $\mathbf{q}$.
- een cartesiaanse vergelijking $ax + by = c$ bevat een **loodvector** (a, b).
- in het vlak is het erg eenvoudig een loodvector te vinden: $(a, b) \perp (-b, a)$.
- de rechte door de oorsprong en
  - met richting $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ bestaat uit de veelvouden van $\mathbf{q}$, en heeft dus parametervergelijking
    $$(x, y) = t(q_1, q_1)$$
    Dit betekent $x = tq_1$ en $y = tq_2$, en door $x = tq_1 \iff t = \frac{x}{q_1}$ in te vullen in $y = tq_2$ bekomen we de cartesiaanse vergelijking
    $$y = \frac{x}{q_1}q_2 \text{ of } y = \frac{q_2}{q_1}x \text{ of } q_1y = q_2x \text{ of } q_2x - q_1y = 0 \text{of } (q_2, -q_1)\cdot(x, y) = 0 \text{ of } (-q_2, q_1) \perp (x, y)$$
  - loodrecht op de vector $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ heeft als cartesiaanse vergelijking
    $$(q_1, q_2)\ cdot(x, y) = 0 \text{ of } q_1x + q_2y = 0$$
    Deze vergelijking oplossen betekent voor een willekeurige $x = t$ de bijhorende y te vinden. Als $q_1x + q_2y = 0$ en $x = t$, dan moet $y = -\frac{q_1}{q2}t$ en dus bekomen we de parametervergelijking
    $$(x, y) = (t, -\frac{q_1}{q2}t)$$
    Als $q_2 \neq 0$ krijg je equivalente maar eenvoudigere formules door de keuze $x = q_2t$:
    $$(x, y) = (q_2t, -q_1t)$$

- met de formule $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ van een 2×2 determinant kunnen we ook schrijven:

  rechte loodrecht op (a, b) : $(a, b) \cdot (x, y) = 0$ of $ax + by = 0$ of $\begin{vmatrix} x & y \\ -b & a \end{vmatrix} = 0$

  rechte met richting (a, b) : $(-b, a) \cdot (x, y) = 0$ of $-bx + ay = 0$ of $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 0$

CC BY-NC-SA 4.0

25.6 2D: omzetten van vergelijkingen

- in het vlak gelden dus volgende eigenschappen van evenwijdigheid en loofrechte stand:

$$\begin{aligned} (a,b)\cdot(c,d) = 0 &\iff (a,b)\perp(c,d) \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 &\iff (a,b)\parallel(c,d) \end{aligned}$$

Opmerking 25.6.2. We zullen deze vergelijkingen verder veralgemenen naar de driedimensionale ruimte. In de driedimensionale ruimte zijn niet alleen rechten van belang, maar ook *vlakken*. We bouwen in wat volgt deze theorie stap voor stap op, maar merken hier als inleiding en voorsmaakje al het volgende op:

- de parametervergelijking van een rechte in het vlak veralgemeent onmiddellijk naar een parametervergelijking van een rechte in de ruimte:

  rechte in het vlak: $(x,y) = (q_1,q_2)t + (p_1,p_2)$
  rechte in de ruimte: $(x,y,z) = (q_1,q_2,q_3)t + (p_1,p_2,p_3)$

- een cartesiaanse vergelijking van een rechte in het vlak veralgemeent onmiddellijk naar een cartesiaanse vergelijking van een **vlak** in de ruimte:

  rechte in het vlak: $ax + by = c$
  vlak in de ruimte: $ax + by + cd = d$

- een parametervergelijking van een vlak heeft **twee parameters**:

  vlak in de ruimte: $(x,y,z) = (q_1,q_2,q_3)t + (r_1,r_2,r_3)s + (p_1,p_2,p_3)$

- een cartesiaanse vergelijking van een rechte in de ruimte is een stelsel van **twee vergelijkingen**:

  rechte in de ruimte: $\begin{cases} ax + by + cz = g \\ dx + ey + fz = h \end{cases}$

Dus parametervergelijkingen van rechten en cartesiaanse vergelijkingen van vlakken zijn eenvoudig, voor parametervergelijkingen van vlakken is er een complicatie dat er meer dan één parameter is, en vooral voor cartesiaanse vergelijkingen van rechten stelt zicht de uitdaging dat er niet langer één vergelijking is, maar een stelsel van meerdere vergelijkingen.

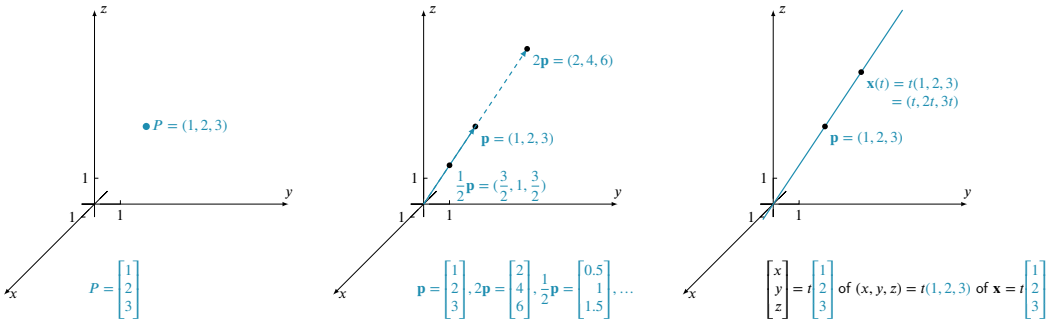
CC BY-NC-SA 4.0

25.7 3D, rechten: parametervergelijkingen

Parametervergelijkingen voor rechten in de driedimensionale ruimte zijn volledig gelijkaardig aan de parametervergelijkingen van rechten in het vlak. Het enige verschil is dat de punten en vectoren nu drie componenten hebben in plaats van twee. Als gevolg daarvan kunnen we wel geen richtings*coëfficiënt* meer definiëren maar zullen we steeds met richtings*vectoren* moeten werken.

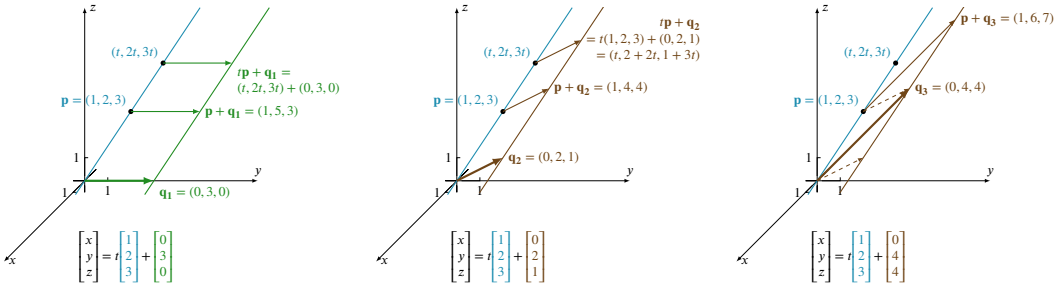
Dit hoofdstuk is volledig analoog opgebouwd als dat over parametervergelijkingen in het *vlak*.

Alle veelvouden van een vector vormen een rechte door de oorsprong:



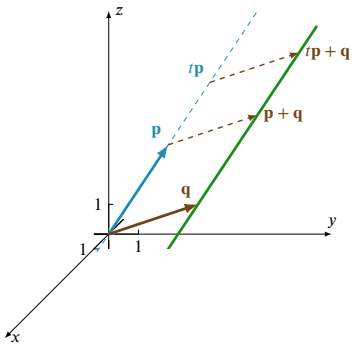
Alle punten van de rechte door $(0,0,0)$ en door het punt $P(x_1, y_1, z_1)$ zijn van de vorm $t(x_1, y_1, z_1)$, of dus (tx_1, ty_1, tz_1), met t een willekeurig reëel getal. Merk op dat deze rechte samenvalt met de rechte door $(2x_1, 2y_1, 2z_1)$ of meer algemeen door (kx_1, ky_1, kz_1), met $k \in \mathbb{R}_0$.

Door dergelijke rechte te verschuiven bekomen we *evenwijdige rechten*:



Merk op dat verschuiven over $\mathbf{q_2} = (0,2,1)$ of verschuiven over $\mathbf{q_3} = (0,4,4)$ hier *dezelfde* rechte oplevert.

Als de parameter loopt doorheen de reële getallen bekom je *alle punten van een rechte* die door een punt $\mathbf{q}$ gaat en evenwijdig is met een vector $\mathbf{p}$. Op onderstaande tekening is de groene rechte de verschuiving van de blauwe rechte over een afstand $\mathbf{q}$ maar ook de som van alle herschalingen van $\mathbf{p}$ en het punt $\mathbf{q}$:



CC BY-NC-SA 4.0

25.7 3D, rechten: parametervergelijkingen

Definitie 25.7.1 (Parametervergelijkingen van een rechte)**.**

Een **parametervergelijking** van een rechte met **richtingsvector** $\mathbf{p} = (x_1, y_1, z_1)$, **steunvector** $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ en parameter t is een uitdrukking van de vorm

$$L \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

die we ook kunnen schrijven als

$$L \leftrightarrow \begin{cases} x = tx_1 + q_x \\ y = ty_1 + q_y \\ z = tz_1 + q_z \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y, z) = t(x_1, y_1, z_1) + (q_x, q_y, q_z), \quad t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y, z) = (tx_1 + q_x, ty_1 + q_y, tz_1 + q_z), \quad t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow \mathbf{x} = t\mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Deze rechte *bevat* de steunvector $\mathbf{q}$ en is *evenwijdig* met de richtingsvector $\mathbf{p}$.

Deze rechte is de *verschuiving* van de rechte bepaald door de richtingsvector $\mathbf{p}$ over de steunvector $\mathbf{q}$.

Deze rechte is de steunvector $\mathbf{q}$ waarbij willekeurige veelvouden van de richtingsvector $\mathbf{p}$ zijn opgeteld.

Voorbeeld 25.7.1.

De rechte door de oorsprong en het punt $(1, 2, 3)$ heeft als parametervergelijking $L_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t, \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

De rechte door $(1, 2, 3)$ evenwijdig met de x-as heeft als parametervergelijking $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, wat ook geschreven kan worden als $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

De rechte door $(3, 4, 5)$ evenwijdig met L_1 heeft als parametervergelijking $L_3 \leftrightarrow \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t + 4 \\ z = 3t + 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

De opmerkingen voor parametervergelijkingen van rechten in het vlak blijven gelden.

CC BY-NC-SA 4.0

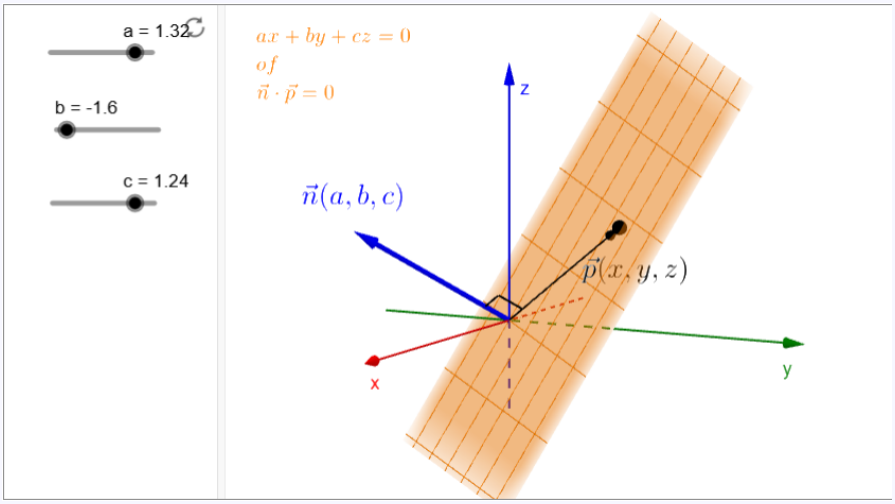
25.8 3D, vlakken: Cartesiaanse vergelijkingen

Cartesiaanse vergelijkingen voor *vlakken* in de driedimensionale ruimte zijn volledig gelijkaardig aan de cartesiaanse vergelijkingen van *rechten* in het vlak. Het enige verschil is dat de punten en vectoren nu drie componenten hebben in plaats van twee. Dit hoofdstuk is dan ook volledig analoog opgebouwd als dat over cartesiaanse vergelijkingen van rechten in het *vlak*.

Een lineaire vergelijking in drie variabelen x, y en z bepaalt een vlak in de ruimte.

Voorbeeld 25.8.1. Bestudeer de vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/kdAmrQZF



We kunnen over de vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$ het volgende opmerken:

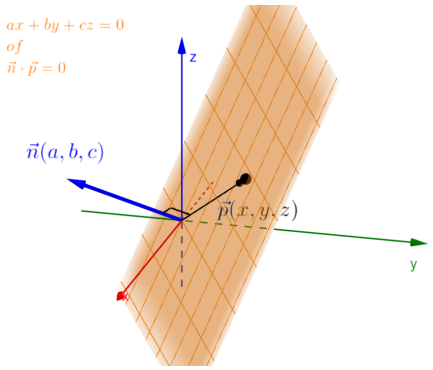
- door telkens twee van x, y en z nul te kiezen vinden we onmiddellijk drie punten van de vlak: $(-2, 0, 0), (0, 3, 0)$ en $(0, 0, 6)$. Daarmee is het vlak al volledig bepaald.
- door de vergelijking te herschrijven als $z = 3x - 2y + 6$ vinden we *voor elke* x *en* y een bijhorende z. Op deze manier kan het vlak beschouwd worden als de grafiek van de (lineaire) functie in twee veranderlijken $(x, y) \mapsto 3x - 2y + 6$.
- door de vergelijking te herschrijven als $x = \dfrac{2y + z - 6}{3}$ vinden we *voor elke* y *en* z een bijhorende x. Analoog voor $y = \dfrac{3x - 3 + 6}{2}$.
- liefhebbers van *stelsels* kunnen de vergelijking beschouwen als een stelsel van één vergelijking in drie onbekenden. Er zijn dan twee hoofdonbekenden, en één nevenonbekende, en de oplossingen van het stelsel zijn
$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 3s - 2t + 6 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$
Dit zullen precies parametervergelijkingen zijn van het vlak met vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$.
- de vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$ is een *voorwaarde* op drietallen (x, y, z). De drietallen die voldoen vormen een vlak in de ruimte.
- de vergelijking $3x - 2y - z + 7 = 0$ is een *evenwijdig vlak* (want als $3x - 2y - z = -6$, dan kan natuurlijk niet ook $3x - 2y - z = -7$). Dus, de vlakken $3x - 2y - z + a = 0$ zijn allemaal

CC BY-NC-SA 4.0

25.8 3D, vlakken: Cartesiaanse vergelijkingen

onderling evenwijdig voor verschillende $a \in \mathbb{R}$. En dergelijk vlak gaat door de oorsprong precies als $a = 0$.

- om a te vinden zodat het evenwijdige valk $3x - 2y - z = a$ door het punt $(2, 1, 1)$ gaat volstaat het te eisen dat $(2, 1, 1)$ op $3x - 2y - z = a$ ligt, dus dat $3(2) - 2(1) - (1) = a$. Je vindt dan direct $a = 6 - 2 - 1 = 3$. Een alternatieve manier is om het xy-assenstelsel te verschuiven over de vector $(2, 1, 1)$ via $(x', y', z') = (x - 2, y - 1, z - 1)$, en op te merken dat het vlak in $x'y'z'$-coördinaten door de oorsprong gaat, dus van de vorm $3x' - 2y' - z' = 0$ moet zijn. Dus moet $3(x - 2) - 2(y - 1) - (z - 1) = 0$, of $3x - 2y - z - 6 + 2 + 1 = 0$ waaruit ook volgt dat $a = 3$.
- liefhebbers van het *scalair product* kunnen opmerken dat $3x + 2y - z = 0$ ook kan geschreven worden als $(2, 3, -1) \cdot (x, y, z) = 0$, en bijgevolg vaststellen dat de vector $(2, 3, -1)$ loodrecht staat op het vlak met vergelijking $3x - 2y - z = 0$.
- liefhebbers van *analogieën* kunnen opmerken dat het vlak met vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$ min of meer *bepaald wordt door de vier getallen* $3, -2, -1, 6$. In de negentiende eeuw hebben wiskundigen haakjes rond die getallen gezet en opgemerkt dat je dergelijk viertal $(3, -2, -1, 6)$ misschien kan beschouwen als *coördinaten van een vlak*, net zoals $(2, 3, 1)$ *coördinaten* zijn van een punt. Dat leidt tot de bijzonder interessante zogenaamde projectieve meetkunde, die we hier echter niet verder zullen behandelen.



Definitie 25.8.1 (Cartesiaanse vergelijkingen van een vlak)**.**

Een **Cartesiaanse vergelijking** van een vlak V is een uitdrukking van de vorm

$$V \leftrightarrow \boxed{ax + by + cz + d = 0} \quad (\text{ of ook } ax + by + cz = f)$$

met a, b en c niet alle drie tegelijk nul.
Een punt (x_0, y_0, z_0) ligt op het vlak V als en slechts als $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

Merk op dat het niet mogelijk is een 'richtingscoëfficiënt' te definiëren van een vlak omdat 'richtingen' in het vlak meer dan één vrijheidsgraad hebben. We werken bij vlakken dus steeds met de richtings*vectoren*.

Eigenschap 25.8.1 (Evenwijdigheid en loodrechte stand)**.**

- Alle vlakken $V_k \leftrightarrow ax + by + cz = k$, $k \in \mathbb{R}$ zijn onderling *evenwijdig* want voor verschillende k zijn hun doorsnedes (natuurlijk) leeg.
- Elk vlak $V_k \leftrightarrow ax + by + cz = k$ staat *loodrecht* op de vector (a, b, c) want $ax + by + cz = (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0 \iff (a, b, c) \perp (x, y, z)$.

CC BY-NC-SA 4.0

25.8 3D, vlakken: Cartesiaanse vergelijkingen

Eigenschap 25.8.2 (Vergelijking van een vlak)**.**

- Een vlak door de oorsprong en loodrecht op (a,b,c) heeft vergelijking

$$ax+by+cz=0$$

- Een vlak door punt (x_1,y_1,z_1) en loodrecht op (a,b,c) heeft vergelijking

$$ax+by+cz=ax_1+by_1+cz_1 \quad \text{of} \quad a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(y-y_1)=0$$

- Het vlak dat de x-as snijdt in $(a,0,0)$, de y-as in $(0,b,0)$ en de z-as in $(0,0,c)$ (met a,b en c verschillend van 0) heeft vergelijking

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

want de drie punten $(a,0,0),(0,b,0)$ en $(0,0,c)$ voldoen duidelijk aan de vergelijking.

Voorbeeld 25.8.2. Geef de vergelijking van volgende vlakken:

1. door de oorsprong, $(3,6,9)$ en $(1,2,9)$: $y=2x$✓

2. door $(0,1,0)$, $(3,7,42)$ en $(1,3,0)$: $y=2x+1$✓

3. door de oorsprong,$(-1,-2,-1)$ en $(-3,-6,9)$: $y=2x$✓

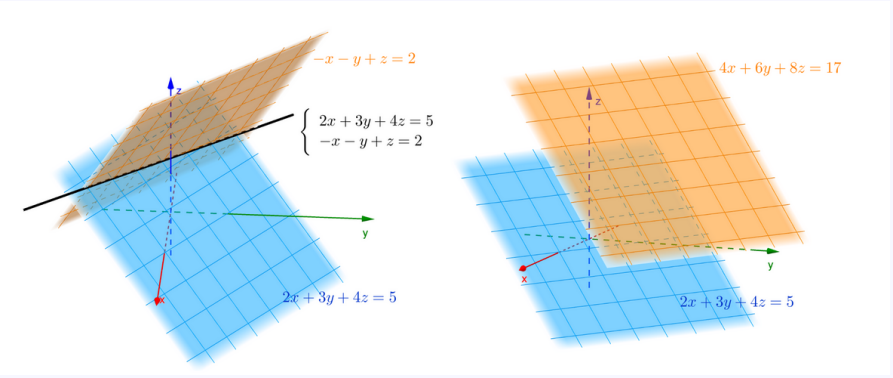
4. door de $(1,0,0),(42,42,42)$ en $(42,0,0)$: $y=z$✓

CC BY-NC-SA 4.0

25.9 3D, rechten: Cartesiaanse vergelijkingen

Een lineaire vergelijking in x, y en z bepaalt een vlak in de ruimte. De *doorsnede* van twee vlakken bepaalt (meestal) een rechte. De cartesiaanse vergelijking van een rechte bestaat uit *twee* vergelijkingen, of dus een stelsel van vergelijkingen.

Voorbeeld 25.9.1. Bestudeer het stelsel $\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ -x-y+z=2 \end{cases}$.



- Dit stelsel beschrijft de punten die zowel aan de eerste als aan de tweede vergelijking voldoen, en dus de *doorsnede* van twee vlakken.
- Om effectief punten te vinden in die doorsnede moet je het *stelsel oplossen*.
- Als de vlakkken *evenwijdig* zijn is de doorsnede *leeg*. Als ze *samenvallen* is de doorsnede een *vlak*.

Definitie 25.9.1. Een **Cartesiaanse vergelijking** van een rechte L is een uitdrukking van de vorm

$$L \leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$$

met $(a_1,b_1,c_1) \neq (0,0,0)$, $(a_2,b_2,c_2) \neq (0,0,0)$ en (a_1,b_1,c_1) geen veelvoud van (a_2,b_2,c_2).
Een punt (x_0,y_0,z_0) ligt op de rechte L ligt als en slechts als het punt voldoet aan beide vergelijkingen.

De cartesiaanse vergelijking van een rechte is niet uniek: elk stel vlakken met die rechte als snijlijn levert er één.

Voorbeeld 25.9.2.

Vergelijking	Beschrijving	Alternatieve vergelijkingen
$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$	de x-as	$\begin{cases} y=0 \\ z=y \end{cases}$
$\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$	de 'hoofddiagonaal' in het xy-vlak	$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ 42x-42y+z=0 \end{cases}$
$\begin{cases} x=y \\ z=y \end{cases}$	de 'hoofddiagonaal' in de ruimte	$\begin{cases} x=y \\ x=z \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

25.9 3D, rechten: Cartesiaanse vergelijkingen

Voorbeeld 25.9.3. Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door $(0,0,1)$ en $(3,6,1)$: $\begin{cases} y = 2x \\ z = 1 \end{cases}$ ✓

2. door $(0,1,1)$ en $(3,7,7)$: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ ✓

3. door de oorsprong en $(-1,-2,1)$: $\begin{cases} y = 2x \\ z = 1 \end{cases}$ ✓

4. door $(0,0,0)$ en $(-1,-1,-1)$: $\begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$ ✓

CC BY-NC-SA 4.0

25.10 3D, vlakken: parametervergelijkingen

Omdat vlakken *twee*dimensionaal zijn bevatten de parametervergelijkingen van een vlak *twee* parameters.

Definitie 25.10.1 (Parametervergelijkingen van een vlak)**.**

Een **parametervergelijking** van een vlak V met **richtingsvectoren** $\mathbf{p_1} = (x_1, y_1, z_1)$ en $\mathbf{p_2} = (x_2, y_2, z_2)$, met **steunvector** $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ en met parameters s en t

is een uitdrukking van de vorm

$$V \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \quad s,t \in \mathbb{R}$$

die als de parameters s, t alle reële waarden doorlopen, alle punten levert van het vlak V.

Dezelfde uitdrukking kan ook geschreven worden als

$$V \leftrightarrow \begin{cases} x = sx_1 + tx_2 + q_x \\ y = sy_1 + ty_2 + q_y \\ z = sz_1 + tz_2 + q_z \end{cases}, \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

of als $V \leftrightarrow (x, y, z) = s(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2) + (q_x, q_y, q_z), \qquad s,t \in \mathbb{R}$

of als $V \leftrightarrow (x, y, z) = (sx_1 + tx_2 + q_x, sy_1 + ty_2 + q_y, sz_1 + tz_2 + q_z), \qquad s,t \in \mathbb{R}$

of als $V \leftrightarrow \mathbf{x} = s\mathbf{p_1} + t\mathbf{p_2} + \mathbf{q}, \qquad s,t \in \mathbb{R}$

Dit vlak V *bevat* de steunvector $\mathbf{q}$ en is *evenwijdig* met de richtingsvectoren $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$.

Dit vlak V is het vlak V_o bepaald door de richtingsvectoren $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ de *verschoven* over de steunvector $\mathbf{q}$.

Dit vlak V bestaat uit de steunvector $\mathbf{q}$ waarbij willekeurige veelvouden van de richtingsvectoren $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ zijn opgeteld.

Terwijl de cartesiaanse vergelijking een voorwaarde geeft opdat een punt (x, y, z) op het vlak ligt, geeft de parametervergelijking een meer constructieve beschrijving: elke invulling van s of t als een reëel getal levert een punt van het vlak.

Voorbeeld 25.10.1.

Vlak	Cartesiaanse vergelijking	Parametervergelijking	
xy-vlak	$z = 0$	$(x, y, z) = (s, t, 0)$,	$s,t \in \mathbb{R}$
$\parallel$ aan xy-vlak	$z = 42$	$(x, y, z) = (s, t, 42)$,	$s,t \in \mathbb{R}$
xz-vlak	$y = 0$	$(x, y, z) = (s, 0, t)$,	$s,t \in \mathbb{R}$
Diagonaalvlak	$x = y$	$(x, y, z) = (s, s, t)$,	$s,t \in \mathbb{R}$
Will. vlak	$2x + 2y - z = 42$	$(x, y, z) = (s, t, 42 + 2x + 2y)$,	$s,t \in \mathbb{R}$
	of ook	$(x, y, z) = (0, 0, 42) + (s, t, 2s + 2t)$,	$s,t \in \mathbb{R}$
	of ook	$(x, y, z) = (21 - s + \frac{t}{2}, s, t)$,	$s,t \in \mathbb{R}$

CC BY-NC-SA 4.0

25.11 3D: omzetten van vergelijkingen

We leggen met enkele voorbeelden uit hoe je parametervergelijkingen en cartesiaanse vergelijkingen voor rechten en vlakken in de driedimensionale ruimte in elkaar kan omzetten. Dat komt neer op het '*oplossen van een stelsel*' of het '*elimineren van de parameter(s)*'.

Omdat parametervergelijkingen worden bepaald door *richtingsvectoren*, terwijl cartesische vergelijkingen worden bepaald door *loodrichtingen*, kan het omzetten dus ook door het vinden van *loodvectoren*.

Voorbeeld 25.11.1. Cartesiaanse vergelijking rechte naar parametervergelijkingen via '**oplossen stelsel**'

		Matrixnotatie:
Cartesiaanse vergelijking rechte:	$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$
Werk term met x weg uit vgl 2: (via $R_2 \to R_2 - 3R_1$)	$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$
Werk term met y weg uit vgl 1: (via $R_1 \to 3R_1 - R_2$)	$\begin{cases} 3x-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$
Kies z willekeurig en los op naar de andere variabelen:	$z=u, \quad x=\frac{1}{3}u, \quad y=\frac{2}{3}u$	
Dit zijn al de parametervergelijkingen, die met een nieuwe parameter $3t=u$ nog eenvoudiger kunnen geschreven worden:	$\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$	of $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
of nog eenvoudiger:	$(x,y,z)=(1,2,3)t, t \in \mathbb{R}$	

Opmerking 25.11.1. Een alternatieve methode gebruikt **loodvectoren**: voor de parametervergelijking hebben we een richtingsvector nodig, de cartesische vergelijking levert twee loodvectoren. De gezocht richting moet dus loodrecht staan op beide loodvectoren, en het vectorieel product levert onmiddellijk zo'n vector:

De richtingsvector moet loodrecht staan op de vectoren $(1,1,-1)$ en $(3,6,-5)$, en dat is het geval voor $(1,1,-1)\times(3,6,-5) = (1(-5)-6(-1), -1(-5)-3(-1), 1\cdot 6 - 3\cdot 1) = (1,2,3)$.

De gezochte parametervergelijking is dus $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Voorbeeld 25.11.2. Parametervergelijking rechte naar cartesiaanse vergelijkingen via '**eliminatie**'

Punt $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ligt op de rechte met parametervergelijking $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ zodra een t bestaat zodat

$$\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}.$$

We beschouwen deze laatste uitdrukking dus als een stelsel in één onbekende t, met parameters x, y, z, en onderzoeken de oplossingsvoorwaarden voor dat stelsel in t, in dit geval door uit elke vergelijking

CC BY-NC-SA 4.0

25.11 3D: omzetten van vergelijkingen

t te berekenen:

$$t = x, t = \frac{1}{2}y, \quad t = \frac{1}{3}z.$$

Dergelijke t kan dus enkele bestaan als de drie uitdrukkingen aan elkaar gelijk zijn, dus als:

$$x = \frac{1}{2}y \quad \text{en} \quad x = \frac{1}{3}z \quad \text{of dus} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

en dit zijn precies cartesiaanse vergelijkingen.

Merk op dat cartesiaanse vergelijkingen niet uniek bepaald zijn: *elke* twee vlakken door een rechte leveren een stel cartesiaanse vergelijkingen op:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 5x - y - z = 0 \end{cases}$$

Opmerking 25.11.2. Ook hier is er een alternatieve methode met **loodvectoren**: we kennen de richtingsvector $(1,2,3)$, en het volstaat twee vectoren te vinden die daar loodrecht op staan.

Uit de formule $(a,b,c) \perp (x,y,z) \iff (a,b,c) \cdot (x,y,z) = 0$ volgt onmiddellijk dat

$$(a,b,c) \perp (0,-c,b) \quad \text{en } (a,b,c) \perp (c,0,-a) \quad \text{en } (a,b,c) \perp (-b,-a,0)$$

Let op: als bijvoorbeeld $b = c = 0$ levert dit maar twee niet-nulvectoren, maar dat volstaat.

Voor $(1,2,3)$ zijn loodvectoren bijvoorbeeld $(2,-1,0), (3,0,-1)$ en $(0,3,-2)$, en cartesiaanse vergelijkingen zijn dus

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} 3x - z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Voorbeeld 25.11.3. Parametervergelijking vlak naar cartesiaanse vergelijkingen via '**eliminatie**'

Punt $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ligt in het vlak met parametervergelijking $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ zodra s en t bestaan zodat

$$\begin{cases} x = s + 2t \\ y = 2s + 3t \\ z = 3s + 4t \end{cases}.$$

We beschouwen deze laatste uitdrukking dus als een stelsel in twee onbekenden s, t, met parameters x, y, z, en onderzoeken de oplossingsvoorwaarden voor dat stelsel, in dit geval door s en t te berekenen uit de eerste twee vergelijkingen, en het resultaat in te vullen in de derde vergelijking:

$$\begin{cases} x = s + 2t \\ y = 2s + 3t \end{cases} \iff \begin{cases} s + 2t = x \\ 2s + 3t = y \end{cases} \iff \begin{cases} s + 2t = x \\ -t = -2x + y \end{cases} \; iff \; \begin{cases} s = -3x + 2y \\ t = 2x - y \end{cases}$$

Dit invullen in de derde vergelijking $z = 3s + 4t$ levert de voorwaarde, en dus cartesiaanse vergelijking

$$z = 3(-3x + 2y) + 4(2x - y) \text{of dus } -x + 2y - z = 0 \text{ of ook } x - 2y + z = 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

25.11 3D: omzetten van vergelijkingen

Opmerking 25.11.3. Ook hier is er een alternatieve methode met **loodvectoren**: we kennen twee richtingsvectoren $(1,2,3)$ en $(2,3,4)$, en het volstaat één vector te vinden die daar loodrecht op staat.

Het vectorieel product levert onmiddellijk zo'n vector:

$$(1,2,3)\times(2,3,4) = (-1,2,-1)$$

en dus is de cartesiaanse vergelijking $-x+2y-z=0$, of dus ook $x-2y+z=0$ (of $2y=x+z$ en dergelijke ...).

CC BY-NC-SA 4.0

25.12 Doorsneden van rechten en vlakken

Doorsneden van rechten en/of vlakken kunnen altijd worden berekend. De techniek is afhankelijk of cartesiaanse dan wel parametervergelijkingen zijn gegeven, en of cartesiaanse dan wel parametervergelijkingen worden gevraagd van de doorsnede. We bespreken hier niet alle gevallen rechte/rechte, rechte/vlak, vlak/vlak, gegeven door parameter- of cartesiaanse vergelijkingen, en snijdend, kruisend, omvattend, evenwijdig,... maar geven op basis van enkele voorbeelden de belangrijkste principes aan.

25.12.1 Twee cartesiaanse vergelijkingen gegeven

Als we *twee cartesiaanse vergelijkingen* gegeven hebben is de situatie het eenvoudigste. Cartesiaanse vergelijkingen bieden een manier om te testen of een willekeurig punt op een rechte of vlak gelegen is. Als we moeten testen of een punt op de doorsnede van twee rechten gelegen is, d.w.z. op de ene én op de andere, dan moeten we gewoon de vergelijkingen van beide rechten samenvoegen. Voor twee rechten vinden we zo een stelsel van 4 vergelijkingen. Bijvoorbeeld voor de rechten

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 4 \\ -2x & & +z & = -1 \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} x & +y & & = 2 \\ x & & -z & = 0 \end{cases}$$

wordt de doorsnede bepaald door het stelsel

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 4 \\ -2x & & +z & = -1 \\ x & +y & & = 2 \\ x & & -z & = 0 \end{cases}$$

De rest van het verhaal is het oplossen van stelsels. Een stelsel van 4 vergelijkingen in 3 onbekenden kan strijdig zijn. We besluiten dan dat de rechten geen punten gemeen hebben. Het kan dan gaan om *evenwijdige* of *kruisende rechten*. (Het onderscheid tussen deze twee gevallen kan gemaakt worden door de richting van beide rechten te vergelijken). Er kan ook een unieke oplossing zijn. De doorsnede bevat één punt en we spreken van *snijdende* rechten. Dit is het geval voor het voorbeeld hierboven. Het snijpunt is $(1, 1, 1)$. Het kan ook zijn dat beide rechten samenvallen. In dat geval vinden we heel de rechte terug als doorsnede.

Voor de doorsnede van een vlak en een rechte bekomen we een stelsel van *drie* vergelijkingen. Voor de doorsnede van twee vlakken bekomen we een stelsel van *twee* vergelijkingen (dat voor twee snijdende vlakken onmiddellijk de cartesiaanse vergelijking van de snijlijn levert). Werk zelf uit.

25.12.2 Een cartesiaanse en een parametervergelijking gegeven

Indien een *cartesiaanse* vergelijking van een rechte of vlak en een *parametervergelijking* van een andere rechte of vlak gegeven is, gaan we als volgt te werk. Parametervergelijkingen bieden een manier om willekeurige punten van een rechte of vlak te vinden door willekeurige waarden voor de parameters te kiezen. Cartesiaanse vergelijkingen bieden een manier om te testen of een gegeven punt op een rechte of vlak gelegen is. Om de doorsnede te bepalen, nemen we daarom een willekeurig punt van de verzameling die beschreven is door een parametervergelijking, en testen of dat punt ook in de andere verzameling ligt, die gegeven wordt door een cartesiaanse vergelijking.

Voor de doorsnede van het vlak met parametervergelijking

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, 1, 1) + l(1, 0, 1) \quad \text{met } k, l \in \mathbb{R}$$

en de rechte met cartesiaanse vergelijking

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 10 \\ -2x & & +z & = 0 \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

25.12 Doorsneden van rechten en vlakken

gaan we dus na of het punt $(1+k+l, 2+k, 3+k+l)$ dat in het vlak ligt ligt, ook op de rechte ligt, of

$$\begin{cases} (1+k+l) & +2(2+k) & +(3+k+l) & = 10 \\ -2(1+k+l) & & +(3+k+l) & = 0 \end{cases}$$

Na wat herschrijven komt dit neer op

$$\begin{cases} 4k & +2l & = 2 \\ -k & -l & = -1 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft als unieke oplossing $(k, l) = (0, 1)$. Het willekeurig punt $(1+k+l, 2+k, 3+k+l)$ van het vlak ligt dus enkel op de rechte als $k = 0$ en $l = 1$. Het gaat dan om het punt $(2, 2, 4)$.

25.12.3 Twee parametervergelijkingen gegeven

Indien de gegeven verzamelingen beschreven worden door *twee parametervergelijkingen* is het vaak het eenvoudigste om minstens één van beide eerst om te zetten in een cartesiaanse vergelijking. We beschouwen toch een eenvoudig voorbeeld van twee snijdende rechten. Om het snijpunt van de rechte met parametervergelijking

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, 0, 1) \quad \text{met } k \in \mathbb{R}$$

en de rechte met parametervergelijking

$$(x, y, z) = (2, 2, 1) + k(-2, 0, 1) \quad \text{met } k \in \mathbb{R}$$

te bepalen, gaan we op zoek naar een punt van de vorm $(1+k, 2, 3+k)$ dat ook te schrijven is in de vorm $(2-2k', 2, 1+k')$. We lossen daartoe het stelsel

$$\begin{cases} 1+k & = 2-2k' \\ 2 & = 2 \\ 3+k & = 1+k' \end{cases}$$

op. We vinden als unieke oplossing $k = -1$ en $k' = 1$. Dit komt overeen met het punt $(0, 2, 2)$.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 26
Formularia

(Versie 2026/08/25H.51)

Wiskundige symbolen en notaties

Logica, verzamelingen en orde

Symbool	Betekenis	Voorbeeld
$=$	is gelijk aan	$1+2=3$
$\neq$	is niet gelijk aan	$1+2\neq 4$
$\approx$	is ongeveer gelijk aan	$1/3\approx 0,33$
$>$	groter dan	$4>2$
$<$	kleiner dan	$2<4$
$\geq$	groter dan of gelijk aan	$4\geq 2,\quad 2\geq 2$
$\leq$	kleiner dan of gelijk aan	$1\leq 2,\quad 2\leq 2$
$\{\ldots\}$	verzameling	$\{1,2\},\ \{-1,1\}$
$\in$	element van	$2\in\{0,1,2,3\}$
$\notin$	geen element van	$5\notin\{0,1,2,3\}$
$\subseteq$ of $\subset$	deelverzameling van	$\{1,2\}\subseteq\{0,1,2,3\}$
$\not\subseteq$ of $\not\subset$	geen deelverzameling van	$\{1,5\}\not\subseteq\{0,1,2,3\}$
$\Longrightarrow$	als ..., dan ...	$x=2 \Longrightarrow x\geq 2$
$\Longleftrightarrow$	als en slechts als	$x=2 \Longleftrightarrow x-2=0$

Getallenverzamelingen

$\mathbb{N}$	$=\{0,1,2,3,\ldots\}$	**natuurlijke**	getallen
$\mathbb{Z}$	$=\{\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots\}$	**gehele**	getallen
$\mathbb{Q}$	$=\left\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\right\}$	**rationale**	getallen (breuken)
$\mathbb{R}$	ook kommagetallen zoals $\sqrt{2}$=1,41... en π=3,14...	**reële**	getallen

Er geldt $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$.

$\mathbb{N}_0$	$=\{1,2,3,\ldots\}$	natuurlijke getallen zonder 0
$\mathbb{R}_0$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$	reële getallen zonder 0
$\mathbb{R}^+$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$	positieve reële getallen
$\mathbb{R}_0^+$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$	strikt positieve reële getallen
$\mathbb{R}^-$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 0\}$	negatieve reële getallen
$\mathbb{R}_0^-$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\}$	strikt negatieve reële getallen

Er zijn gelijkaardige notaties voor $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$.

Voorbeelden

$2\in\mathbb{N}$		$\{2\}\subseteq\mathbb{N},\ \{2,3\}\subseteq\mathbb{N}$
$2\in\mathbb{Z},\ -2\in\mathbb{Z}$	$-2\notin\mathbb{N}$	$\{-3\}\subseteq\mathbb{Z},\ \{-2,3\}\subseteq\mathbb{Z},\ \mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$
$1/2\in\mathbb{Q},\ 0,333\ldots\in\mathbb{Q}$	$1/2\notin\mathbb{Z}$	ook $-2\in\mathbb{Q}$
$\sqrt{2}\approx 1,414$	$\sqrt{2}\in\mathbb{R}$	$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, ook $-2,1/2\in\mathbb{R}$
$\pi\approx 3,14159$	$\pi\in\mathbb{R}$	$\pi\notin\mathbb{Q}$

Terminologie bewerkingen

De	**optelling**	van **termen**	a en b geeft	**som**	$a+b$	
De	**aftrekking**	van **termen**	a en b geeft	**verschil**	$a-b$	
De	**vermenigvuldiging**	van **factoren**	a en b geeft	**product**	$a\cdot b$	(ook ab)
De	**deling**	van **factoren**	a en b geeft	**quotiënt**	$\frac{a}{b}$	(ook a/b of $a:b$, $b\neq 0$)

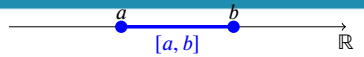
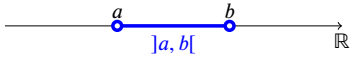
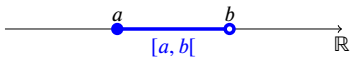
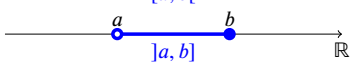
Bij het quotiënt $\frac{a}{b}$ noemen we a ook de **teller** en b de **noemer**.

$a-b$ is ook de som met $-b$, het **tegengestelde** van b : $a-b=a+(-b)$.

$\frac{a}{b}$ is ook het product met b^{-1}, het **inverse** (ook **omgekeerde**) van b: $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}=a\cdot b^{-1}$.

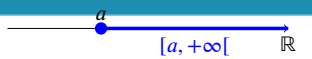
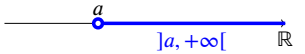
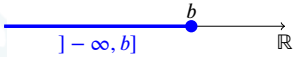
Merk op: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen zijn dus *acties*, en som, verschil, product en quotiënt zijn het *resultaat* van die acties.

Intervallen

$[a,b]$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$	het **gesloten interval** $[a,b]$		
$]a,b[$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	het **open interval** $]a,b[$		
$[a,b[$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$	het **half-open interval** $[a,b[$		
$]a,b]$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$	het **half-open interval** $]a,b]$		

Merk op: een half-open interval wordt soms ook *half-gesloten* genoemd.

Onbegrensde intervallen

$[a,+\infty[$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\}$	de rechter **halfrechte** $[a,+\infty[$	
$]a,+\infty[$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$	de open rechter halfrechte $]a,+\infty[$	
$]-\infty,b]$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$	de linker halfrechte $]-\infty,b]$	
$]-\infty,b[$	$=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$	de open linker halfrechte $]-\infty,b[$	

Er geldt $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$. In Engelstalige teksten gebruikt men meestal $[a,b)$ en (a,b) voor $[a,b[$ en $]a,b[$.

Wetenschappelijke notatie

Erg grote of erg kleine getallen worden dikwijls geschreven in de vorm $a\cdot 10^b$, dus met een macht van 10.

$1=1\cdot 10^0$	$3=3\cdot 10^0$	$123=1,23\cdot 10^{-2}=0,123\cdot 10^{-3}$
$10=1\cdot 10^1$	$30=3\cdot 10^1$	$0,123=1,23\cdot 10^{-1}=123\cdot 10^{-3}$
$100=1\cdot 10^2$	$300=3\cdot 10^2$	$12000=12\cdot 10^3=1,2\cdot 10^4$
$0,1=1\cdot 10^{-1}$	$0,3=3\cdot 10^{-1}$	$0,0012=12\cdot 10^{-4}=1,2\cdot 10^{-3}$
$0,01=1\cdot 10^{-2}$	$0,03=3\cdot 10^{-2}$	$3,14\cdot 10^{12}=3.140.000.000$

De exponent geeft het aantal plaatsten aan dat de komma naar rechts (positief) of links (negatief) schuift.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Taal van de verzamelingen

Basisbegrippen

$A = \{a, b, c\}$ is de **verzameling** met naam A en **elementen** a, b en c.

$a \in A$ betekent 'a is een element van de verzameling A' of ook 'a behoort tot A'.

$A \subseteq B$ betekent 'A is een **deelverzameling** van B', dus elk element van A is ook een element van B.

$\emptyset = \{\}$ is de **lege verzameling**, dus de verzameling *zonder* elementen.

$\#A$ is het aantal elementen in A. Een verzameling A is **eindig** als $\#A$ eindig is.

Concrete verzamelingen worden bepaald via

opsomming:	$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$
omschrijving:	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is even}\}$
constructief:	$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
Venndiagram:	variant van opsomming, zie verder

Een rechte streep | tussen de accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

Een **singleton** $\{a\}$ is een verzameling met één element, een **paar** $\{a, b\}$ heeft twee elementen.

Voorbeeld: $a \in \{a, b, c\}, d \notin \{a, b, c\}$, $\{a, c\} \subseteq \{a, b, c\}$, maar $\{1, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$. $\#\{a, b, c\} = 3$.

Volgorde en herhaling hebben geen belang: $\{a, b, c\} = \{c, b, a\} = \{a, a, a, a, b, b, c\}$.

Eigenschappen

Als A, B en C deelverzamelingen zijn van een universele verzameling U, dan geldt:

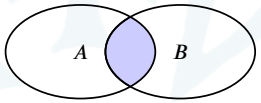
(a)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ en $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(associativiteit)
(b)	$A \cup B = B \cup A$ en $A \cap B = B \cap A$	(commutativiteit)
(c)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ en $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(distributiviteit)
(d)	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ en $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	(wetten van De Morgan)
(e)	$A \cup A^c = U$ en $A \cap A^c = \emptyset$	(complementering)
(f)	$(A^c)^c = A$	(dubbel complement)

Bekende getallenverzamelingen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{N}_0$	strikt positieve getallen	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\}$
$\mathbb{R}^+$	positieve reële getallen	$\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
$\mathbb{R}_0^+$	strikt positieve reële getallen	$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x \neq 0\}$
$]2, 3[$	open interval van 2 tot 3	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$
$[2, 3]$	gesloten interval van 2 tot 3	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$
$]2, 3]$	half-open interval van 2 tot 3	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$

Basisbewerkingen met verzamelingen

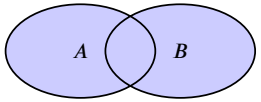
– $A \cap B$, de **doorsnede** van A en B, is de verzameling van elementen die behoren tot A **en** B:



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$

We noemen twee verzamelingen A en B **disjunct** als $A \cap B = \emptyset$.

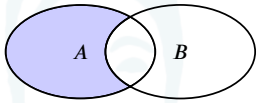
– $A \cup B$, de **unie** of **vereniging** van A en B, is de verzameling van de elementen die behoren tot A **of** B:



$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$

Als $C = A \cup B$ waarbij $A \cap B = \emptyset$, dan noemt men C de **disjuncte unie** van A en B.

– $A \setminus B$, het **verschil** van A en B, is de verzameling van elementen die behoren tot A maar niet tot B:

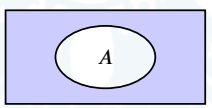


$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$

Merk op dat in het algemeen $A \setminus B \neq B \setminus A$ en

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

– A^c, het **complement** van een deelverzameling A in een universum U is de verzameling van de elementen van U die *niet* tot A behoren. A^c is dus het verschil van U en A:



$A^c = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$

– $A \times B$, het **cartesiaans product** of de **productverzameling** van A en B, is de verzameling van koppels (= geordende tweetallen) (a, b) met $a \in A$ en $b \in B$: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ en } b \in B\}$.

– $P(A)$, de **machtsverzameling** van A is de verzameling van alle deelverzamelingen van A: $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$.

Formules: $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$

$\#P(A) = 2^{\#A}$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Logica

Propositielogica

Een **propositie** is een zinvolle mededelende volzin, die ofwel *waar* (w) ofwel *onwaar* (o) is.

De propositielogica bestudeert de waarheidswaarde van als volgt samengestelde proposities:

p	q	niet p $\neg p$	niet q $\neg q$	p of q $p \vee q$	p en q $p \wedge q$	als p dan q $p \implies q$	p asa q $p \iff q$	contrapositie $\neg q \implies \neg p$	def $\neg p \vee q$
w	w	o	o	w	w	w	w	w	w
w	o	o	w	w	o	o	o	o	o
o	w	w	o	w	o	w	o	w	w
o	o	w	w	o	o	w	w	w	w

Men noemt $p \wedge q$ de **conjunctie**, $p \vee q$ de **disjunctie**, $p \implies q$ de **implicatie**, $p \iff q$ de **equivalentie** van p en q.

Twee equivalente proposities p en q zijn tegelijk waar of vals, en hebben dus dezelfde betekenis.
We lezen $p \iff q$ als 'p als en slechts als q' en korten dat soms af als 'p asa q'.
Men zegt ook dat p **een nodige en voldoende voorwaarde** is voor q.

In $p \implies q$ noemen we p het **antecedens** of de **hypothese**, en q het **consequens** of de **conclusie**.
Men noemt p ook een **voldoende voorwaarde** voor q, en q een **nodige voorwaarde** voor p.

Een **tautologie** is een bewering die altijd waar is, zoals $p \vee \neg p$: ofwel is p waar, ofwel niet.
Een **contradictie** is een bewering die nooit waar is, zoals $p \wedge \neg p$: p is tegelijk waar en niet waar.

Als typisch voorbeeld zijn uitspraken onderling equivalent

Als het regent word ik nat
Als ik niet nat wordt, dan regent het niet
Of regent het niet, of ik word nat,

maar die zijn niet equivalent met

Als het niet regent word ik niet nat (want ik kan aan het zwemmen zijn)
Als ik nat word, dan regent het (wegens datzelfde zwemmen).

De uitspraak 'als het regent, dan word ik nat' *beweert helemaal niets* als het niet regent.

Eigenschappen van proposities

$\neg(\neg p)$	$\Leftrightarrow$	p	*dubbele negatie*
$\neg(p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	*negatiewet van De Morgan voor* $\wedge$
$\neg(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	*negatiewet van De Morgan voor* $\vee$
$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \vee q)$	*definitie van* $\Rightarrow$
$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow \neg p)$	***contrapositie***
$p \wedge (q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	*distributiviteit van* $\wedge$ *t.o.v.* $\vee$
$p \vee (q \wedge r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	*distributiviteit van* $\vee$ *t.o.v.* $\wedge$
q	$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow (p \wedge \neg p))$	***redenering uit het ongerijmde***
$(p \vee q) \Rightarrow r$	$\Leftrightarrow$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	***gevalsonderscheid***
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$	$(p \Rightarrow r)$	*transitiviteit van* $\Rightarrow$

Kwantorenlogica

Een **predicaat** $p(a)$ is een bewering die afhangt van een zogenaamde **vrije variabele** a, die kan gebonden worden door een **universele kwantor** $\forall$, een **existentiële kwantor** $\exists$ of een **uniciteitskwantor** $\exists!$.

$\forall a \in A : p(a)$	*voor elke* a in A geldt $p(a)$
$\exists a \in A : p(a)$	*er bestaat (minstens) eena* in A waarvoor $p(a)$ geldt
$\exists! a \in A : p(a)$	*er bestaat precies ééna* in A waarvoor $p(a)$ geldt

Eigenschappen van kwantoren

$$(n1)\quad \neg(\forall x \in X : p(x)) \iff \exists x \in X : \neg p(x)$$
$$(n2)\quad \neg(\exists x \in X : p(x)) \iff \forall x \in X : \neg p(x)$$

$$(v1)\quad \forall x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) \iff \forall y \in Y : \forall x \in X : p(x,y)$$
$$(v2)\quad \exists x \in X : \exists y \in Y : p(x,y) \iff \exists y \in Y : \exists x \in X : p(x,y)$$
$$(v3)\quad \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) \implies \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y)$$
$$\cancel{(v4)}\quad \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) \not\implies \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y)$$

Voorbeelden

We lezen $\neg\forall x$: gebuisd(x), of equivalent $\exists x$: geslaagd(x) als:

Niet iedereen is gebuisd
Er is iemand die niet gebuisd is
Er is iemand geslaagd

We lezen $\exists x : \neg$geslaagd(x), of equivalent $\neg\forall x$: geslaagd(x) als:

Er is iemand die niet geslaagd is
Er is iemand gebuisd
Het is niet het geval dat iedereen geslaagd is
Niet iedereen is geslaagd

en ook $\forall p \in P, \exists d \in D$: past(p, d):

Voor elk potje is er een dekseltje dat past
Op elk potje past een dekseltje
Voor geen enkel potje zijn alle dekseltjes niet-passend

of ook $\exists d \in D, \forall p \in P$: past(p, d):

Er is een dekseltje dat op elk potje past
Er is een universeel bruikbaar dekseltje

Als een dergelijk universeel dekseltje bestaat, bijvoorbeeld van rubber, dan is er zeker ook voor elke potje een dekseltje dat past, namelijk dat universeel-passend dekseltje!

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0 KU Leuven (2026/08/25H.51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Bewijstechnieken

Direct bewijs

Begin bij het gegeven, reken/vereenvoudig/redeneer tot aan het te bewijzen.

Toon aan dat: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Bewijs: $(a+b)^2 \overset{\text{def. macht}}{=} (a+b)(a+b) \overset{\text{distrib.}}{=} a(a+b)+b(a+b) \overset{\text{distrib.}}{=} a^2+ab+ba+b^2 \overset{\text{commut.}}{=} a^2+2ab+b^2$. ■

Er zijn geen vaste procedures voor een 'direct bewijs', dikwijls is er wat ceativiteit nodig.

Ook 'bewijs per keten van gelijkheden', vgl 'keten van implicaties/equivalenties' infra.

'∃' of '¬∀': bewijs per (tegen-)voorbeeld

Toon aan dat: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$ *Bewijs*: Neem $x = 2 \in \mathbb{R}$. ■

Toon aan dat: $\neg\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ *Bewijs*: Neem $0 \in \mathbb{R}$ en $0^2 = 0 \not> 0$. ■

Merk op: '∀' of '¬∃' kan je **niet** bewijzen per voorbeeld.

'∀': bewijs per generiek element

De bewering $\forall a \in A : p(a)$ kan je bewijzen door $a \in A \implies p(a)$ aan te tonen.

Toon aan dat: $\forall x \in \mathbb{Q}_0^+ : \exists y \in \mathbb{Q} : (0 < y < x))$

Bewijs: Kies $x \in \mathbb{Q}_0^+$ willekeurig. Dan is $0 < \frac{x}{2} < x$. ■

Bewijs per gevalsonderscheid

Soms is het nuttig of nodig een bewijs op te splitsen in verschillende gevallen.

Toon aan dat: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

Bewijs: Kies $x \in \mathbb{R}$. Er zijn drie mogelijkheden, die we alledrie behandelen:

1) $x = 0$: dan is inderdaad $0^2 = 0 \geq 0$.
2) $x > 0$: dan behoudt vermenigvuldigen met x de orde, en dus is ook $x \cdot x > x \cdot 0$, en dus $x^2 > 0$, en dus $x^2 \geq 0$.
3) $0 > x$: dan keert vermenigvuldigen met x de orde om, en dus is $0 \cdot x < x \cdot x$, en dus $x^2 > 0$, en dus $x^2 \geq 0$.

Omdat dus in alle gevallen het te bewijzen volgt, beeindigt dit het bewijs. ■

$p \iff q$: Bewijs per keten van equivalenties

Via $p \iff p_1 \iff p_2 \iff \ldots \iff p_n \iff q$, met verklaring voor alle equivalenties.

$p \implies q$: Bewijs door extra gegeven p

Implicatie $p \implies q$: voeg p toe als extra gegeven.

Toon aan dat: $x > 1 \implies x^2 > x$ voor $x \in \mathbb{R}$.

Bewijs: Kies $x \in \mathbb{R}$ met $x > 1$. Dan is x zeker positief, en wordt de orde behouden bij vermenigvuldigen met x in linkerlid en rechterlid van de uitdrukking $x > 1$.
Dus is $x \cdot x > 1 \cdot x$, of dus $x^2 > x$. ■

$p \implies q$: Bewijs door contrapositie ($\neg q \implies \neg p$)

Toon aan dat: $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ even $\implies n$ even.

Bewijs via contrapositie, nl. n oneven $\implies n^2$ oneven. Een oneven n is van de vorm $2m+1$, en dan is $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 2m + 1 = 2(2m^2+m)+1$ ook oneven. ■.

Bewijs uit het ongerijmde ($(\neg p \implies (q \wedge \neg q)) \implies p$)

Als uit $\neg p$ een contradictie volgt, dan kan $\neg p$ niet waar zijn, en dus geldt p.
Toon aan dat: $\forall m, n \in \mathbb{N} : 8n - 6m \neq 101$.

Bewijs: Stel dat er toch $m, n \in \mathbb{N}$ bestaan zodat $8n - 6m = 101$.
Dan is het linkerlid $8n - 6m = 2(4n - 3m)$ even, maar het rechterlid oneven.
Dat kan niet, dus is de veronderstelling dat $n, m \in \mathbb{N}$ bestaan fout. ■.

Bewijs per inductie ($\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$)

Stelling: Een bewering $P(n)$ is waar voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ zodra

(Basisstap) de uitspraak geldt voor het eerste getal: $P(1)$ is waar
(Inductiestap) de uitspraak zodanig is dat voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ geldt: als $P(k)$ waar is, dan is ook $P(k+1)$ waar.

Toon aan dat: $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n$ is even. *Bewijs* (per inductie):

(Basisstap) Voor $n = 0$ is $n^2 + n = 0^2 + 0 = 0$ inderdaad even.

(Inductiestap) Stel dat voor k geldt dat $k^2 + k$ even is. We moeten aantonen dat ook voor $k+1$ geldt dat $(k+1)^2 + (k+1)$ even is. Welnu,

$$(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k+1).$$

Wegens de inductiehypothese is $k^2 + k$ even, en $2(k+1)$ is ook even, en dus is ook hun som $(k^2 + k) + 2(k+1)$ even. Hiermee is de inductiestap bewezen.

(Conclusie): Uit basisstap en inductiestap volgt via volledige inductie het te bewijzen. ■

$p \implies q$: Bewijs per keten van implicaties

Via $p \implies p_1 \implies p_2 \implies \ldots \implies p_n \implies q$, met verklaring voor alle implicaties.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0 KU Leuven (2026/08/25H:51)

Algebraïsch rekenen

Breuken Op voorwaarde dat de noemers niet nul zijn geldt:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff ad=bc \quad \text{(gelijkheid van breuken: kruisproduct)}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{ad+cb}{bd} \quad \text{(som: op gelijke noemer brengen)}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{(som gelijknamige breuken)}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad \text{(product: teller × teller, noemer × noemer)}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad \text{(quotiënt: vermenigvuldig met omgekeerde)}$$

PAS OP: $\frac{3a+2}{2} \neq \frac{3a+2}{2}=3a$ $\quad \frac{3a+2}{b+2} \neq \frac{3a+2}{b+2}=\frac{3a}{b}$

$\frac{3a+2}{3} \neq \frac{3a+2}{3}=a+2$ $\quad \frac{a}{a+3} \neq \frac{a}{a}+\frac{a}{3}=1+\frac{a}{3}$

Machten en wortels Op voorwaarde dat de uitdrukkingen onder de wortels positief zijn geldt:

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1 \quad (a\in\mathbb{R}_0)$$

$$a^n \overset{\text{def}}{=} \overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n \text{ factoren}} \quad (a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}_0)$$

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n=a \quad (a,b\in\mathbb{R} \text{ als } n \text{ oneven}, \text{ of } a,b\in\mathbb{R}^+ \text{ als } n \text{ even})$$

$$a^{\frac{1}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a} \quad (a\in\mathbb{R}^+, \text{tenzij } n \text{ oneven})$$

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n} \quad (a\in\mathbb{R}_0, n\in\mathbb{N})$$

$a^m a^n = a^{m+n}$ (zelfde grondtal)

$a^n b^n = (ab)^n$ (zelfde exponent)

$(a^m)^n = a^{mn}$ (macht van macht)

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Voorbeelden machten: $a^1=a \quad a^2=a\cdot a \quad a^3=a\cdot a\cdot a \quad a^{-1}=\frac{1}{a} \quad a^{-2}=(a^2)^{-1}=\frac{1}{a^2}=\left(\frac{1}{a}\right)^2=(a^{-1})^2$

Rekenen met wortels: $a\sqrt{b}+c\sqrt{b}=(a+c)\sqrt{b}, \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}, \quad (\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$

Noemer wortelvrij maken: gepaste vermenigvulig teller en noemer: $\sqrt{\frac{32}{12}}=\sqrt{\frac{8\cdot\cancel{4}}{3\cdot\cancel{4}}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Merkwaardige producten en ontbinden in factoren

$$-(a+b) = -a-b \qquad -(a-b)=-a+b \quad \text{(minteken binnen de haakjes brengen)}$$

$$(a+b)c = ac+bc \qquad a(c+d)=ac+ad \quad \text{(distributiviteit van } \cdot \text{ t.o.v. } +)$$

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd \quad \text{(som van alle producten term met term)}$$

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad \text{(kwadraat van een tweeterm)}$$

$$(a-b)(a-b) = (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad \text{(kwadraat van een tweeterm)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2=(a-b)(a+b) \quad \text{(verschil van twee kwadraten)}$$

PAS OP: $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$

Som en verschil met hogere machten (Uitbreiding; *geen* voorkennis)

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 (=(a+b)^2(a+b))$ (derdemacht van tweeterm)

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (som van derdemachten)

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (verschil van derdemachten)

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1})$ (verschil n^{de} machten)

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1})$ (som n^{de} machten, n **oneven**)

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ (Binomium van Newton)

Absolute waarde

De **absolute waarde** van een reëel getal $a\in\mathbb{R}$ is $|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{als } a\geq 0 \\ -a & \text{als } a<0. \end{cases}$

$|x|\geq 0, \quad |x|=|-x|, \quad |x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

$|a|<r \iff -r<a<r$ (verwijder absolute waardetekens uit ongelijkheid)

$|a-b|$ is de **afstand** tussen a en b: $|21-27|=6$ is de *afstand* tussen 21 en 27.

PAS OP: $|-x|\neq x$ (want voor $x=-2$ is $|-(-2)|\neq -2$)

Voorbeelden

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ $\quad \frac{1}{4a}+\frac{b}{8}=\frac{2}{8a}+\frac{ab}{8a}=\frac{2+ab}{8a}$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$ $\quad (-2)^2=(-2)(-2)=4\neq -2^2$

$(x-1)^2=x^2-2x+1$ $\quad (1+1)^2=2^2=4\neq 1^2+1^2=2$

Niet vereenvoudigbaar: $x^2+1, \quad \sqrt{2}+\sqrt{3}, \quad \sqrt{a+1}, \quad \frac{1}{1+a}, \quad \sqrt{a^2+b^2}$

PAS OP: $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ en $\sqrt{x^2}\neq x$ (als $x<0$) , want

$\sqrt{2+2}\neq\sqrt{2}+\sqrt{2}$ en $\sqrt{(-2)^2}\neq -2$

Maak *gevalsonderscheid* bij $|a|$ en $\sqrt{a}$ als het teken van a niet vast ligt!

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Functies

Definities functies en veeltermfuncties

Een (reële) **functie**	$f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ is een procedure die met elk getal $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ het uniek gedefinieerde getal $f(x)$ associeert.
Een **functievoorschrift**	van een functie f is een *formule* die $f(x)$ berekent voor elke $x \in A$.
Het **domein** $\operatorname{dom} f$	is de verzameling A van alle mogelijke inputs van de functie.
Het **bereik** $\operatorname{bld} f$	is de verzameling van alle mogelijke outputs van de functie.
De **grafiek**	van een functie is de verzameling $\{(x, f(x)) \mid x \in A)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, en is typisch een kromme in het xy-vlak die elke verticale rechte hoogstens één keer snijdt.
Een **veeltermfunctie**	is een functie waarvan het voorschrift een veelterm is, dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, met $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0 \in \mathbb{R}$.
De **graad**	van de veelterm (en van de veeltermfunctie) is de hoogste macht die voorkomt (dus n als $a_n \neq 0$).
Een **constante functie**	is een functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op eenzelfde reëel getal c. De grafiek is een horizontale rechte op hoogte $y = c$.
De **nulfunctie**	is de constante functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op 0. De graad van de nulfunctie is onbepaald, alle andere constante functies zijn veeltermfuncties van graad 0.
Een **eerstegraadsfunctie**	is een veeltermfunctie van graad één, dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$, met **nulpunt** (of nulwaarde) $x = -\frac{b}{a}$. De grafiek is een rechte met vergelijking $y = ax + b$ en helling of **richtingscoëfficiënt** of rico a, en snijpunt met de y-as in $(0, b)$.
Een **tweedegraadsfunctie**	is een veeltermfunctie van graad twee, dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$, en $a \neq 0$.

De nulpunten zijn $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ als de zogenaamde **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ positief is. Als de discriminant strikt negatief is zijn er geen nulpunten.

De nulpunten $x_{1,2}$ leveren de ontbinding $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

De grafiek is een **dalparabool** als $a > 0$ en een **bergparabool** als $a < 0$, telkens met **top** in $\left(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})\right)$.

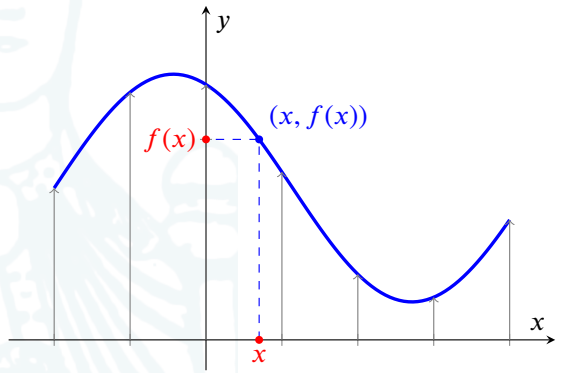
Samenstellen van functies

Bij het **samenstellen van functies** wordt de output van één functie de input van een volgende functie:

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x)), \quad \text{waarbij} \quad (f \circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)) \quad \text{(lees als: } f \textit{ na } g \text{ van } x\text{)}.$$

Ingewikkelde functies worden opgebouwd via som, product en samenstelling van eenvoudigere basisfuncties.

Grafiek van een functie



Inverse functies

Soms kan een functie worden 'ongedaan gemaakt' door haar **inverse** f^{-1} die uit de output van f terug de input berekent. Voor elke y in het bereik van f waarvoor een *unieke input* bestaat, geldt: $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$. Dit is equivalent aan de voorwaarden $f^{-1}(f(x)) = x$ en $f(f^{-1}(x)) = x$.

Pas op:	*de waarde van de inverse functie*	$f^{-1}(x)$	is meestal niet gelijk aan
	het inverse (of omgekeerde) van de functiewaarde	$(f(x))^{-1} = 1/f(x)$.	Let dus op de plaats van de exponent.

Rationale en irrationale functies

Een **rationale functie**	heeft als voorschrift een quotiënt van twee veeltermfuncties	vb: $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$ of $g(x) = \frac{1}{x}$
Een **irrationale functie**	heeft een voorschrift met een niet-verwijderbare wortelvorm van de variabele.	$f(x) = \sqrt[5]{x^2+1} + \sqrt{x}$ of $h(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-3}}$ of $g(x) = \sqrt{2x+3}$.
Een **vierkantswortelfunctie**	heeft als voorschrift $f(x) = \sqrt{g(x)}$, met $g(x)$ een veelterm van graad ≥ 1.	$f(x) = \sqrt{2x+3}$ of $h(x) = \sqrt{2x^2+3x+1}$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

26.13 Overzicht veeltermen en ongelijkheden

Veeltermen, vergelijkingen en ongelijkheden

Definitie veelterm

eerstegraads*veelterm* $p(x) = ax + b$ $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$

tweedegraadsveelterm $p(x) = ax^2 + bx + c$ $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$

***n*-de graadsveelterm** $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $a_i \in \mathbb{R}$ en $a_n \neq 0$

De $a_i x^i$ zijn de **termen** van de veelterm, de a_i zijn de **coëfficiënten**, en n is de **graad**.

Definitie nulpunt – Ontbinden in factoren

Een getal a is een **nulpunt** (ook **nulwaarde** of **wortel**) van veelterm $p(x)$ als $p(a) = 0$.
De nulpunten van een veelterm zijn dus de **oplossingen van de vergelijking** $p(x) = 0$.

Een veelterm $d(x)$ is een **factor** (of **deler**) van een veelterm $p(x)$ als $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$.
Een getal a is een nulpunt van $p(x)$ als en slechts als $x - a$ een factor is van $p(x)$.

Een veelterm $p(x)$ **ontbinden in factoren** betekent $p(x)$ schrijven als een product van zo veel mogelijk niet-constante factoren.

Nulpunten van een tweedegraadsveelterm

Nulpunten van de veelterm $ax^2 + bx + c$ worden berekend met de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$:

- $D > 0$: **twee verschillende reële** nulpunten,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(wortelformule)}$$

- $D = 0$: **twee gelijke** nulpunten: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ (ook: één nulpunt met **multipliciteit** 2),
- $D < 0$: **geen reële** nulpunten.

Gehele nulpunten en delers van de constante term

Gehele **nulpunten** van veeltermen met **gehele** coëfficiënten **delen de constante term**.

Vb $p(x) = x^2 - 5x + 6$: de gehele nulpunten 2 en 3 delen constante term 6.
Ook $1, 6, -1, -2, -3$ en -6 delen de constante term, maar het zijn *geen* nulpunten.

Vb $p(x) = x^2 - 2$: *geen gehele* nulpunten, wel $\pm\sqrt{2}$. *Geen enkele* deler van 2 is nulpunt.

Rekenschema van Horner voor ontbinden in factoren

Het **algoritme van Horner** berekent voor een veelterm $p(x)$ met nulpunt a de factorisatie

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x)$$

als volgt:

	a_n	a_{n-1}	…	a_1	a_0	(1)
a		$a \cdot a_n$	…	…	…	(2)
	a_n	$a_{n-1} + a \cdot a_n$	…	…	0	(3)

(a) Schrijf alle coëfficiënten van de veelterm $p(x)$ op een rij, achter een verticale lijn.
Schrijf hieronder op rij twee, *voor* de verticale lijn, het nulpunt a.
Kopieer de eerste coëfficiënt naar de eerste plaats achter de verticale lijn van rij drie.

(b) Vermenigvuldig nu telkens het getal in rij (3) met a,
en schrijf het product één kolom verder in rij (2).

(c) Schrijf de som van de twee getallen in deze kolom in rij (3).
Herhaal (b) en (c) voor elke kolom. De som in de laatste kolom *moet* nul zijn.

(d) In rij (3) staan nu de coëfficiënten van $q(x)$ (negeer de laatste nul).

Voorbeeld: voor $p(x) = x^4 - 6x^2 + 8$ en $a = 2$ vinden we $q(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4$
en dus de ontbinding $x^4 - 6x^2 + 8 = (x - 2)(x^3 + 2x^2 - 2x - 4)$.

	1	0	−6	0	8
2		2	4	−4	−8
	1	2	−2	−4	0

Coëfficiënten van $p(x)$
(telkens 2× *vorige* getal van rij (3))
Coëfficiënten van $q(x)$

Veeltermongelijkheden oplossen via een tekentabel

Een veeltermongelijkheid zoals $x^3 - 12x^2 < -39x + 28$ los je op als volgt:

(a) breng alle termen naar dezelfde kant van het ongelijksheidsteken
(bv. het linkerlid, waar dan een *veelterm* komt te staan).

(b) bepaal de **nulpunten** (want enkel daar kan de veelterm eventueel van teken veranderen).

(c) stel een **tekentabel** op (apart voor elke factor en tekens vermenigvuldigen).

(d) bepaal in die tekentabel de zones voor de gevraagde ongelijkheid ($> 0, \geq 0, < 0, \leq 0$).

x		1		4		7	
$x - 1$	−	0	+	+	+	+	+
$x - 4$	−	−	−	0	+	+	+
$x - 7$	−	−	−	−	−	0	+
$(x-1)(x-4)(x-7)$	−	0	+	0	−	0	+
	<0				<0		

De oplossingenverzameling van de ongelijkheid is dus: $]-\infty, 1[\cup]4, 7[$.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H51)

Exponentiële en logaritmische functies

Definitie

De **exponentiële functie met grondtal** a
(met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$), is de reële functie

$$\exp_a : x \mapsto a^x$$

De **logaritmische functie met grondtal** a
(met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}_0^+$), is de reële functie

$$\log_a : x \mapsto \log_a x$$

Beide functies zijn elkaars inverse:

$$\log_a(\exp_a x) = x \quad \text{of} \quad \log_a a^x = x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\exp_a(\log_a x) = x \qquad a^{\log_a x} = x \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

Definitie en eigenschappen van logaritmen

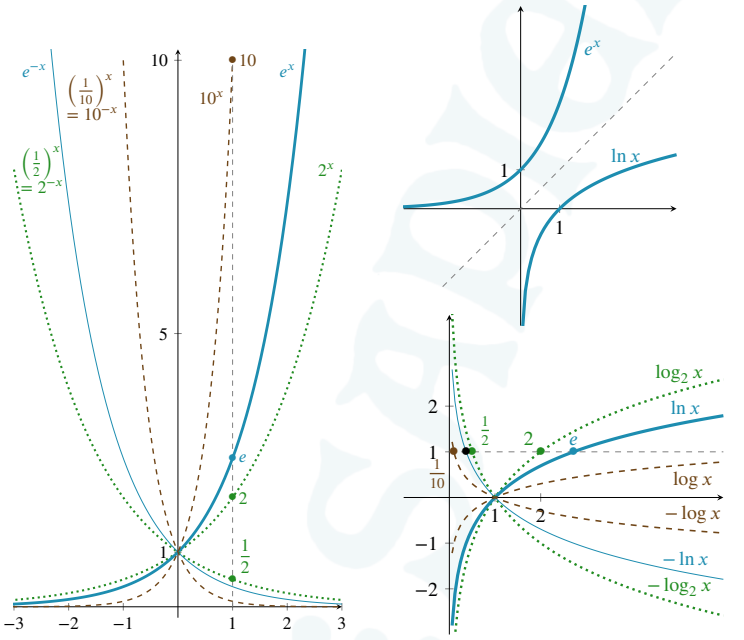
Definitie a-logaritme van x: $\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$ of ook: $\log_a x$ is het unieke reële getal zodat $a^{\log_a x} = x$.

Onmiddellijke gevolgen: $\log_a 1 = 0$ en $\log_a a = 1$ en $\log_a a^x = x$

Notatie speciale grondtallen: $\log x \overset{\text{def}}{=} \log_{10} x$ en $\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$ met $e \approx 2.7182$ **getal van Euler**.

$\log_a(x \cdot y)$	$=$	$\log_a x + \log_a y$	*de **logaritme van een product** is de som van de logaritmen.*
$\log_a \frac{x}{y}$	$=$	$\log_a x - \log_a y$	*de **logaritme van een quotiënt** is het verschil van de logaritmen.*
$\log_a x^r$	$=$	$r \cdot \log_a x$	*de **logaritme van een macht** brengt de exponent naar voor.*
$\log_a x^{-1}$	$=$	$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$	*de **logaritme van het omgekeerde** is het tegengestelde van de logaritme*
$\log_b x$	$=$	$\frac{\log_a x}{\log_a b}$	**verandering van grondtal** (het geval $x = a$ geeft $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$)
$\log_a(x + y)$	$\neq$	~~$\log_a x \cdot \log_a y$~~	*de logaritme van een som is **NIET** het product van de logaritmen.*
$\log_a(x + y)$	$\neq$	~~$\log_a x + \log_a y$~~	*de logaritme van een som is **NIET** de som van de logaritmen.*
$\log_a(x \cdot y)$	$\neq$	~~$\log_a x \cdot \log_a y$~~	*de logaritme van een product is **NIET** het product van de logaritmen.*

Grafieken van exponentiële en logaritmische functies



Eigenschappen van exponentiële functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff a^x < a^y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff a^x > a^y$

(3) Het **domein** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$: a^x is gedefinieerd voor alle reële getallen x
(4) Het **beeld** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: a^x kan alleen strikt positieve waarden aannemen

De grafiek van $\exp_a$
(5) snijdt **de x-as** niet: a^x is nooit gelijk aan 0
(6) snijdt **de y-as** in het punt $(0, 1)$: $a^0 = 1$
(7) snijdt **de rechte $x = 1$** in het punt $(1, a)$: $a^1 = a$

Hoe groter het grondtal, hoe *sneller* de grafiek stijgt/daalt.

Eigenschappen van logaritmische functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff \log_a x < \log_a y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff \log_a x > \log_a y$

(3) Het **domein** van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: $\log_a x$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$
(4) Het **beeld** van $\log_a$ is $\mathbb{R}$: $\log_a x$ kan alle reële waarden aannemen

De grafiek van $\log_a$
(5) snijdt **de x-as** in het punt $(1, 0)$: $\log_a 1 = 0$
(6) snijdt **de y-as** niet: voor $x = 0$ is $\log_a x$ niet gedefinieerd
(7) snijdt **de rechte $y = 1$** in het punt $(a, 1)$: $\log_a(a) = 1$

Hoe groter het grondtal, hoe *minder snel* de grafiek stijgt/daalt.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0 (2026/08/25H.51)
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie
KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

26.17 Overzicht limieten

Limieten

Definitie

$\lim_{x\to c} f(x) = L$	leest als	de **limiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als x nadert naar c, dan nadert $f(x)$ tot L
$\lim_{\substack{x\to c\\<}} f(x) = L$	leest als	de **linkerlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als $x \to c$ langs links (dus met $x < c$), dan $f(x) \to L$
$\lim_{\substack{x\to c\\>}} f(x) = L$	leest als	de **rechterlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als x nadert naar c **langs rechts** (dus met $x > c$), dan nadert $f(x)$ tot L

Dergelijke limieten bestaan niet altijd. Zowel c als L zijn ofwel een reëel getal, ofwel het symbool $+\infty$ of $-\infty$.

Berekenen via *voorzichtig invullen*

Eigenschap: Als f continu is, en $f(c)$ bestaat, dan is $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

In de praktijk leiden heel wat voorschriften tot functies die continu zijn op hun domein, en geldt de regel: als je $f(c)$ zonder problemen kan uitrekenen door c in te vullen in het voorschrift van f, dan is $f(c)$ de limiet van f in c.

Je kan c *niet* invullen in het voorschrift van f als dat zou leiden tot één van volgende uitdrukkingen:

$\pm\infty$	raadpleeg de rekenregels voor $\pm\infty$
$\frac{a}{0}, a \neq 0$	onderzoek of de noemer van teken verandert rond $x = c$
$\infty - \infty, 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$	om deze *onbepaaldheden* op te lossen zijn er enkele technieken.

Regels voor som, verschil, product en quotiënt

Voor functies f, g waarvoor de limieten $\lim_{x\to c} f(x)$ en $\lim_{x\to c} g(x)$ bestaan,

gelden volgende (reken-)regels **tenzij ze een onbepaaldheid geven**:

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{som}) = \text{som}(\lim)$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{verschil}) = \text{verschil}(\lim)$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{product}) = \text{product}(\lim)$$

$$\lim_{x\to c}(b\cdot f(x)) = b\cdot\lim_{x\to c} f(x) \qquad \lim(\text{constante}\cdot\text{functie}) = \text{constante}\cdot\lim(\text{functie})$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \qquad \lim(\text{quotiënt}) = \text{quotiënt}(\lim)$$

Rekenregels voor oneindig $(+\infty, -\infty)$

$$\begin{aligned}
\infty + a &= \infty && a \in \mathbb{R}\\
-\infty + a &= -\infty && a \in \mathbb{R}\\
\infty \cdot a &= \infty && a > 0\\
-\infty \cdot a &= -\infty && a > 0\\
-a \cdot \infty &= -\infty && a > 0\\
-a \cdot (-\infty) &= \infty && a > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\infty + \infty &= \infty\\
-\infty - \infty &= -\infty = (-\infty) + (-\infty)\\
\infty \cdot \infty &= \infty = (-\infty)\cdot(-\infty)\\
\frac{a}{+\infty} &= 0 = \frac{a}{-\infty} && a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

MAAR volgende uitdrukkingen zijn onbepaald:

$$\infty - \infty \qquad 0\cdot\infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{a}{0} \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{0}$$

Merk op: ook de machten 0^0, ∞^0 en 1^∞ zijn onbepaald.

Voorbeelden

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x) \overset{?}{=} \infty+\infty \overset{!}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) \overset{?}{=} \infty-\infty = \text{onbepaald, maar}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) \overset{?}{=} \infty\cdot\infty \overset{!}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \text{ bestaat niet (LL} \neq \text{RL)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Limieten en ∞

Het symbool ∞

Het symbool ∞ ('oneindig') betekent intuïtief

erg veel groter dan elk ander voorkomend getal.

Volgende afspraken (of 'regels') veralgemenen die voor gewone getallen:

$$\begin{array}{lll} \infty+2=\infty & \infty-2=\infty & \infty+\infty=\infty \\ 2\cdot\infty=\infty & (-2)\cdot\infty=-\infty & \infty\cdot\infty=\infty \end{array}$$

We spreken ook af dat $\frac{1}{\infty}=0$, en dus ook $\frac{1}{-\infty}=\frac{-1}{\infty}=\frac{2}{\infty}=0$.

Maar er zijn volgende uiterst belangrijke uitzonderingen:

$\frac{1}{0}$	**delen door nul**	soms oplosbaar via linker- en rechterlimiet
$\infty-\infty$	**oneindig min oneindig**	soms oplosbaar via rekenregels limieten
$0\cdot\infty$	**nul maal oneindig**	soms oplosbaar via rekenregels limieten

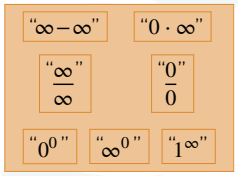
Hieruit volgt ook dat $\infty^2=\infty^n=\infty$, $2^\infty=\infty$, $\left(\frac{1}{2}\right)^\infty=\frac{1}{2^\infty}=2^{-\infty}=0$.

Omdat $0=\frac{1}{\infty}$ zijn ook $\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$ onbepaald.

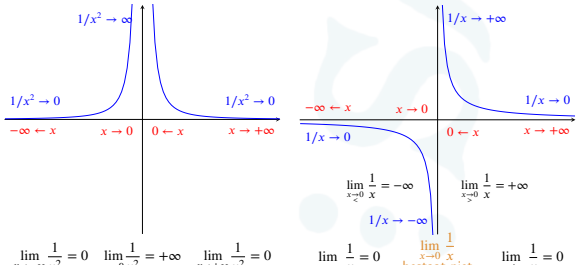
Omdat $a^b=e^{b\ln a}$ zijn ook $0^0=e^{0\cdot\ln 0}$, $1^\infty=e^{\infty\cdot\ln 1}$ en $\infty^0=e^{0\cdot\ln\infty}$ onbepaald.

Onbepaalde vormen

Reken met ∞ zoals met getallen
maar let op voor delen door nul
en vermijd volgende
ONBEPAALDE VORMEN:



Voorbeelden van limieten op een grafiek



Definitie van limiet (met c en L ofwel een reëel getal, ofwel het symbool $+\infty$ of $-\infty$)

$\lim_{x\to c} f(x)=L$	leest als	de **limiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als x nadert naar c, dan nadert $f(x)$ tot L
$\lim_{\substack{x\to c\\<}} f(x)=L$	leest als	de **linkerlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als $x\to c$ langs links (dus met $x<c$), dan $f(x)\to L$
$\lim_{\substack{x\to c\\>}} f(x)=L$	leest als	de **rechterlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
	en betekent	als x nadert naar c **langs rechts** (dus met $x>c$), dan nadert $f(x)$ tot L

Dergelijke limieten bestaan niet altijd, maar er geldt:

Een limiet bestaat als en slechts als
zowel linkerlimiet als rechterlimiet bestaan, en bovendien aan elkaar gelijk zijn.

Regels voor som, verschil, product en quotiënt

Voor functies f,g waarvoor de limieten $\lim_{x\to c} f(x)$ en $\lim_{x\to c} g(x)$ bestaan,

gelden volgende (reken-)regels **tenzij ze tot een onbepaalde vorm leiden**:

$$\lim_{x\to c}(b\cdot f(x))=b\cdot\lim_{x\to c} f(x) \qquad \lim(\text{constante}\cdot\text{functie})=\text{constante}\cdot\lim(\text{functie})$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{som})=\text{som}(\lim)$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{verschil})=\text{verschil}(\lim)$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{product})=\text{product}(\lim)$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \qquad \lim(\text{quotiënt})=\text{quotiënt}(\lim)$$

Voorbeelden van limieten algebraïsch

$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x)\overset{?}{=}\infty+\infty\overset{!}{=}\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)\overset{?}{=}\infty-\infty$ is onbepaald, maar $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to+\infty}x(x-1)\overset{?}{=}\infty\cdot\infty\overset{!}{=}\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ maar $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$ bestaat niet, want LL $\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{x}=-\infty$ verschilt van RL $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x}=+\infty$)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ en $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

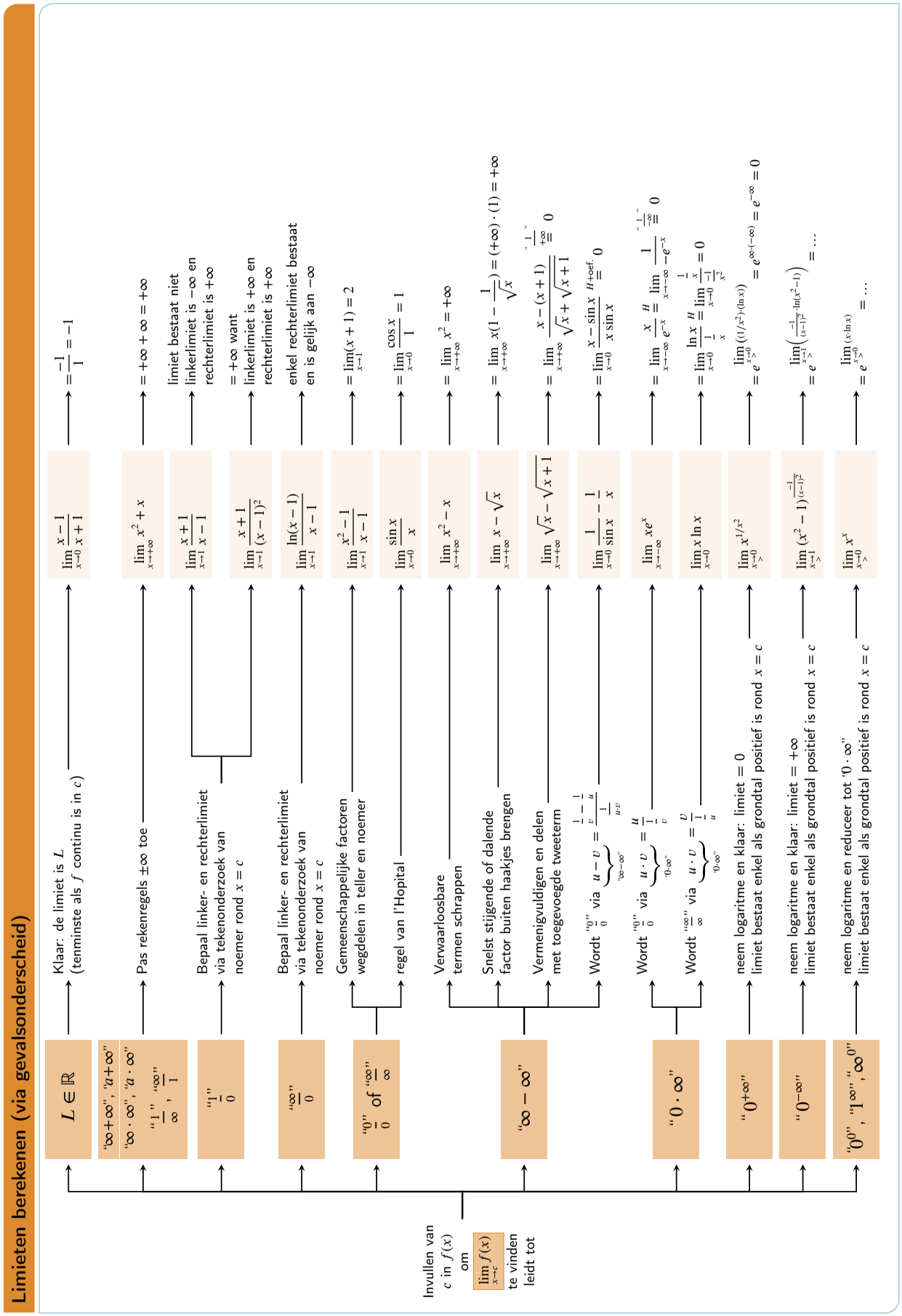
$\lim_{x\to+\infty}\sin(x)$ bestaat niet want ook voor heel grote x blijft $\sin(x)$ oscilleren tussen -1 en $+1$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

26.21 Overzicht limieten berekenen



KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

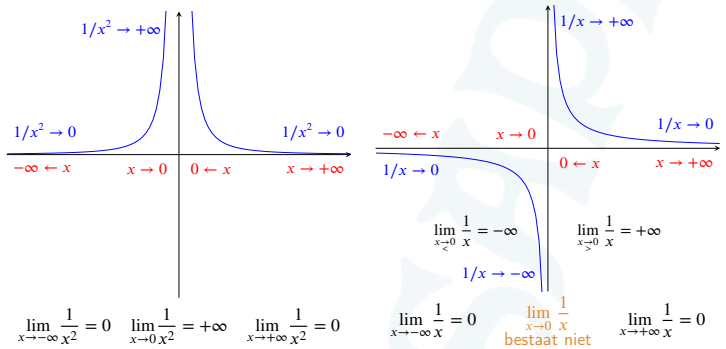
26.23 Overzicht limieten en asymptoten

Limieten en asymptoten

Basislimieten

	$x \to -\infty$	$x \overset{<}{\to} 0$	$x \to 0$	$x \overset{>}{\to} 0$	$x \to +\infty$
$x \mapsto x$	$-\infty$	0	0	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	0	$-\infty$	X	$+\infty$	0
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$x \mapsto e^x$	0	1	1	1	$+\infty$
$x \mapsto \ln x$	X	X	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Voorbeelden $f(x) = 1/x$ en $f(x) = 1/x^2$



Beide functies $1/x$ en $1/x^2$ hebben
$y = 0$ als horizontale asymptoot en $x = 0$ als verticale asymptoot.

Definitie

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ lees je als de **limiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent als x nadert naar c dan nadert $f(x)$ tot L

$\lim_{x \overset{<}{\to} c} f(x) = L$ lees je als de **linkerlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent als $x \to c$ langs links (dus met $x < c$), dan $f(x) \to L$

$\lim_{x \overset{>}{\to} c} f(x) = L$ lees je als de **rechterlimiet** van f als x gaat naar c is gelijk aan L
en betekent als x nadert naar c **langs rechts** (dus met $c < x$), dan nadert $f(x)$ tot L

In de uitdrukking $\lim_{x \to c} f(x) = L$ zijn zowel c als L een reëel getal of het symbool $+\infty$ of $-\infty$.

Limieten bestaan *niet* voor alle functies f en getallen c, bijvoorbeeld $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ en $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x}$ bestaan niet.

Op de grafiek lees je x en c op de x-as (dus links-rechts) en $f(x)$ en L op de y-as (dus hoog-laag).

Eigenschappen van limieten

Eigenschap: Als f continu is, en $f(c)$ bestaat, dan is $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Eigenschap: $\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \overset{<}{\to} c} f(x) = L$ en $\lim_{x \overset{>}{\to} c} f(x) = L$

De meeste voorschriften geven functies die continu zijn op hun domein, en dan geldt de regel: als je c kan invullen in $f(x)$ zonder problemen zoals $\frac{a}{0}, \frac{0}{0}$ of $\pm\infty$, dan is $f(c)$ de limiet van f in c.

Rekenregels voor limieten (Niet voor HW)

Voor continue functies f, g waarvoor $\lim_{x \to c} f(x)$ en $\lim_{x \to c} g(x)$ bestaan,

gelden volgende (reken-)regels **tenzij ze een onbepaaldheid geven**:

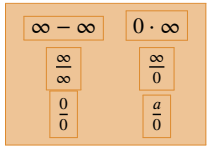
$$\lim_{x \to c}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) \qquad \lim(\text{som}) = \text{som}(\lim)$$

$$\lim_{x \to c}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) \qquad \lim(\text{product}) = \text{product}(\lim)$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} \qquad \lim(\text{quotient}) = \text{quotient}(\lim)$$

Onbepaaldheden

(Niet voor HW)
Volgende uitdrukkingen zijn ONBEPAALD



Asymptoten

Een **asymptoot** is een rechte waartoe de grafiek van een functie willekeurig dicht nadert.
Men spreekt van **horizontale asymptoot (HA), verticale asymptoot (VA) of schuine asymptoot (SA)** als de rechte respectievelijk horizontaal, verticaal of schuin is.

Rechte $y = a$ is een **horizontale asymptoot** van f asa $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ of $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$.

Rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** van f asa $\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \pm\infty$ of $\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \pm\infty$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0 KU Leuven (2026/08/25H51)

Afgeleiden

Definitie van de afgeleide

Een reële functie f is **afleidbaar** of **differentieerbaar in een punt** a van haar domein als de limiet $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *bestaat* en *eindig* is.

De **afgeleide van** f **in** a, genoteerd $f'(a)$ is de waarde van die limiet:

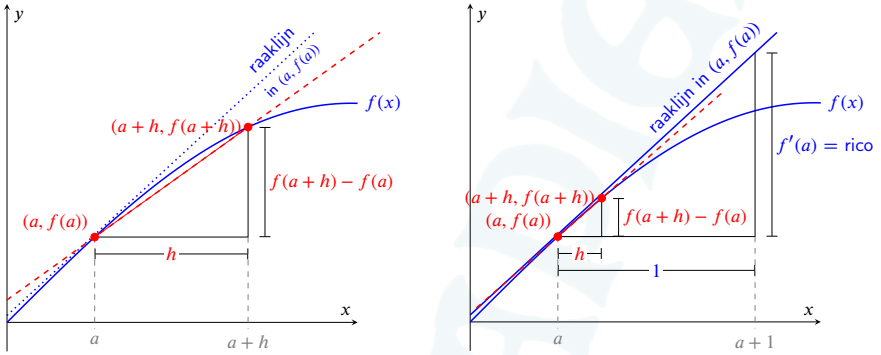
$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

De **afgeleide functie van** f, genoteerd f', is gedefinieerd waar f afleidbaar is en heeft als functiewaarde in a de afgeleide van f in het punt a:

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Betekenis van de afgeleide als helling van de raaklijn

De **raaklijn** aan de grafiek van een differentieerbare functie f in een punt $(a, f(a))$ is de limiet van de rechten door $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ wanneer h willekeurig klein wordt:



De rechte door die twee punten heeft vergelijking $y - f(a) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}(x-a)$ en de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ heeft dus als vergelijking

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

De **afgeleide** in a is de **richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek** in $(a, f(a))$.

Basisafgeleiden

$(c)' = 0$	$(x)' = 1$	**(constante)**
$(x^r)' = rx^{r-1}$		**(machtregel)**
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	kettingregel en $a = e^{\ln a}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	kettingregel en $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
$(\sin x)' = \cos x$		
$(\cos x)' = -\sin x$		
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	kettingregel en $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Extra: omdat $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ en $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ is ook $(\tan x)' = \sec^2 x$ en $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

Extra: enkel voor wie vertrouwd is met de cyclometrische functies:

$$(\text{bgsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgcos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgtan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Rekenregels

Voor afleidbare functies f en g, en constanten $c \in \mathbb{R}$ geldt:

$(cf)' = cf'$	**(scalair veelvoud)**	$(5x)' = 5(x)' = 5$
$(f+g)' = f' + g'$	**(somregel)**	$(x + x^2)' = 1 + 2x$
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	**(productregel)**	$\big((5x+2)\cdot x^2\big)' = 5\cdot x^2 + 2x\cdot(5x+2)$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$	**(quotiëntregel)**	$\left(\dfrac{x^7+1}{x^2}\right)' = \dfrac{7x^6\cdot x^2 - 2x\cdot(x^7+1)}{x^4}$
$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$	**(kettingregel)**	$\big((x^7+1)^{42}\big)' = 42(x^7+1)^{41}\cdot 7x^6$

Extra voorbeelden:

$$\big(e^{2x}\big)' = 2e^{2x} \qquad \big(e^{x^4}\big)' = 4x^3 e^{x^4}$$
$$\big(e^{\sin 3x}\big)' = 3e^{\sin 3x}\cos 3x \qquad \big(e^{5x}\sin 3x\big)' = 5e^{5x}\sin 3x + 3e^{5x}\cos 3x$$
$$\big(\sin x^2\big)' = 2x\cos x^2 \qquad \big(\sin^2 x\big)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0 (2026/08/25H:51)
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie
KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

26.27 Overzicht integralen

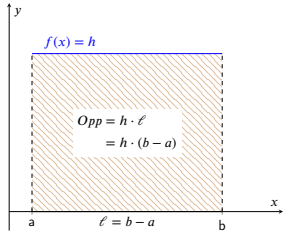
Integralen

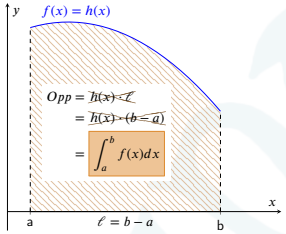
Definities

De **onbepaalde integraal** van een functie f is de verzameling van functies F zodat $F' = f$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{met} \quad F'(x) = f(x).$$

De **bepaalde integraal** $\int_a^b f(x)\,dx$ is de oppervlakte onder de grafiek van f tussen a en b:





Eigenschappen van de bepaalde integraal

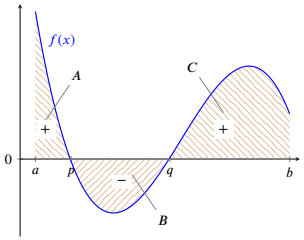
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{(Hoofdstelling van de integraalrekenenig)}$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c \qquad \text{(Gevolg van de Hoofdstelling, } c = -F(a)\text{)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \text{(Omwisselen integratiegrenzen)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{(Opsplitsen integratieinterval)}$$

Oppervlakte onder een kromme



Oppervlaktes *onder* de x-as worden *negatief geteld* door de bepaalde integraal:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx$$
$$= \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

Basisintegralen, som en scalair veelvoud

$$\int 0\,dx = c \quad \text{met } c \in \mathbb{R} \qquad \int dx = x + c$$

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \int r \cdot f(x)\,dx = r \cdot \int f(x)\,dx$$

Substitutiemethode

Voor reële, afleidbare functies f en g waarvoor der samenstelling $f(g(x))$ bestaat geldt:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \overset{g(x)=u}{=} \int f(u)\,du \qquad \textbf{(substitutie } u = g(x)\textbf{)}$$

Of ook: $\int f(u)du = \int f(u(x))d(u(x)) = \int f(u(x))u'(x)dx \quad (du = u'(x)dx \text{ want } \frac{du}{dx} = u'(x))$

Voorbeeld:

$$\int e^{x^2}\,2x\,dx \overset{u(x)=x^2}{=} \int e^{u(x)}u'(x)dx = \int e^u du = e^u + c = e^{u(x)} + c = e^{x^2} + c$$

Partiële integratie

Voor reële, afleidbare functies f en g geldt:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx \overset{P.I.}{=} f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad \textbf{(partiële integratie)}$$

Of ook: $\int u\,dv \overset{P.I.}{=} uv - \int v\,du$ (want $du = u'(x)dx$)

Voorbeeld:

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x \overset{P.I.}{=} x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

26.29 Overzicht afgeleiden en integralen (formularium)

Afgeleiden en integralen

Basisafgeleiden

• De afgeleide van constante en machtsfunctie $x \mapsto c$ en $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn:

$$(x^r)' = rx^{r-1} \qquad (c)' = 0$$

• Afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(\text{bgsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgcos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgtan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

• Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = 1/x \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Rekenregels afgeleiden

• De afgeleide van de som $f + g$ en het scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g (met $c \in \mathbb{R}$) wordt gegeven door:

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

• De afgeleide van het product $f \cdot g$ en het quotiënt $\frac{f}{g}$ van twee afleidbare functies f en g wordt gegeven door:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad \textbf{(productregel)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \qquad \textbf{(quotiëntregel)}$$

• De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is gelijk aan:

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \textbf{(kettingregel)}$$

Basisintegralen

$$\int 0\, dx = c \qquad \int dx = x + c$$

$$\int x^r\, dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad (r \in \mathbb{R}, r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c \qquad \int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \text{bgsin}\, x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \text{bgtan}\, x + c$$

Substitutiemethode

Voor reële, afleidbare functies f en u waarvoor $f \circ u$ bestaat geldt:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int f(u(x))\, du(x) = \int f(u)\, du.$$

vb. $\int e^{x^2}\, 2x\, dx$. Stel $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$ zodat

$$\int e^{x^2}\, 2x\, dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^2} + c$$

Partiële integratie

Voor reële, afleidbare functies f en u geldt:

$$\int f(x) \cdot u'(x)\, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\, dx\,,$$

of met differentialen genoteerd:

$$\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df\,.$$

vb. $\int x \cos x\, dx = \ldots$ aangezien $d \sin x = \cos x\, dx$, zal:

$$\int x \cos x\, dx = \int x d \sin x \overset{P.I.}{=} x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

26.31 Overzicht integralen berekenen

Integralen oplossen: inspiratiepagina

Integrand bewerken en substitutie

Techniek	Voorbeeld	Methode	Oplosbare vorm
Subsitutie lineair ($u = ax + b$)	$\int \frac{1}{\cos^2(5-5x)}\,dx$	$u = 5 - 5x, \quad du = -5dx$	$\frac{-1}{5}\int \frac{1}{\cos^2(u)}\,du$
Subsitutie niet-lineair (stel $u = f(x)$, herken $f'(x)$ elders)	$\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}\,dx$	$u = \left(\frac{x}{2}\right)^2, du = \frac{1}{2}x\,dx$	$\int \frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}\,du$
Splits in breuken (vul de teller verder aan)	$\int \frac{x}{x+8}\,dx$	$\frac{x}{x+8} = \frac{x+8-8}{x+8} = 1 - \frac{8}{x+8}$	$\int 1\,dx - 8\int \frac{1}{x+8}\,dx$
Splits in breuken (partieelbreuken)	$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$	vind A en B zodat $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$	$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx$
Subsitutie goniometrisch (basis)	$\int \sin(x)\cos^6(x)\,dx$	$u = \cos x, du = -\sin x dx$	$-\int u^6\,du$
Gebruik hoofdformule goniometrie (als directe substitutie niet werkt)	$\int \sin^3 x\,dx$	$\int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx$ $u = \cos x \quad du = -\sin x dx$	$-\int (1-u^2)\,du$
Verdubbelingsformule (idem.)	$\int \cos^2 x\,dx$	$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$	$\frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx$
Substitutie niet-triviaal	$\int \sqrt{e^x - 1}dx$	$u^2 = e^x - 1,$ $2udu = d(u^2) = d(e^x-1) = e^x dx = (u^2+1)\,dx$ $du = (u^2+1)/2u\,dx$	$\int u \cdot \frac{2u}{u^2+1}\,du$ (vul teller aan)

Basisintegralen

$$\int 0\,dx = c \quad \text{met } c \in \mathbb{R}$$
$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \qquad (r \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$
$$\int e^x\,dx = e^x + c$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{bgsin}\,x + c$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{bgtan}\,x + c$$

Partiële integratie

Type oefening	Voorbeeld	Keuze voor u en dv	Uitgewerkte vorm
veelterm en goniometrische functie	$\int x \cdot \cos(x)\,dx$	$u = x \quad du = dx$ $dv = \cos(x)\,dx \quad v = \sin(x)$	$x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$
veelterm en exponentiële functie	$\int x \cdot e^x\,dx$	$u = x \quad du = dx$ $dv = e^x\,dx \quad v = e^x$	$xe^x - \int e^x\,dx$
één moeilijke term (zonder directe integraal)	$\int \ln(x)\,dx$	$u = \ln(x) \quad du = \frac{1}{x}\,dx$ $dv = dx \quad v = x$	$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,dx$
P.I. en recursie (gebruik twee keer P.I.)	$I = \int e^x \cos x\,dx$	$\int e^x \cos x\,dx = \cos x \cdot e^x - \int e^x - \sin x\,dx$ $= \cos x \cdot e^x + \left(\sin x \cdot e^x - \int e^x \cos x\,dx\right)$	$I = \cos x e^x + \sin x e^x - I$ $\Rightarrow I = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$

Partiële integratie: Vuistregel

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Vuistregel volgorde kiezen u (**L-CAGE**):

- **L**ogaritmische functies: $\ln(x), \log_b(x)$
- **C**yclometrische functies: $\arctan(x), \arcsin(x)$
- **A**lgebraische functies: $x^2, 7x^{20}$
- **G**oniometrische functies: $\cos(x), \tan(x)$
- **E**xponentiële functies: $e^x, 4^x$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

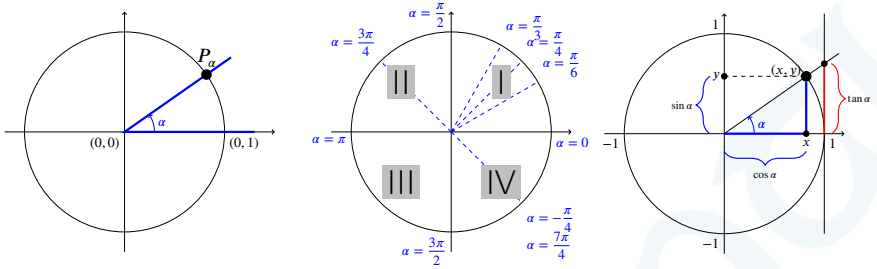
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Goniometrie

Goniometrische cirkel

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong, verdeeld in vier **kwadranten**, genummerd van rechtsboven tegen de klok in met Romeinse cijfers I, II, III, IV.

Elke hoek α komt overeen met een uniek **beeldpunt** P_α op deze cirkel (en vice versa).



De **cosinus** en **sinus** van α zijn per definitie de coördinaten van P_α: $P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

De **tangens** van α is de verhouding van sinus tot cosinus: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Voor scherpe hoeken volgen uit de stelling van Pythagoras de meer gekende formules in een rechthoekige driehoek:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Schuine zijde}}$	SOS	$a = \sin\alpha \cdot c$
$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Aanliggende zijde}}{\text{Schuine zijde}}$	CAS	$b = \cos\alpha \cdot c$
$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Aanliggende zijde}}$	TOA	$a = \tan\alpha \cdot b$

Hoofdformule van de goniometrie: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Graden en radialen

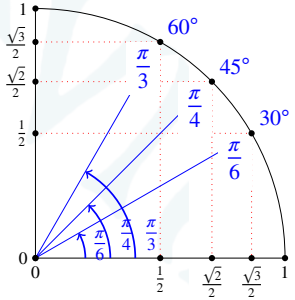
Hoeken kunnen uitgedrukt worden in zowel radialen (**rad**) als graden (°).

Graden en radialen worden naar elkaar omgerekend met *de regel van drie*:

360° is gelijk aan 2π rad, dus 1° is gelijk aan $\frac{\pi}{180}$ rad, dus 7° is gelijk aan $7\frac{\pi}{180}$ rad.
2π rad is gelijk aan 360°, dus π rad is gelijk aan 180°, dus $\frac{5}{4}\pi$ rad is $\frac{5}{4} \cdot 180° = 225°$.

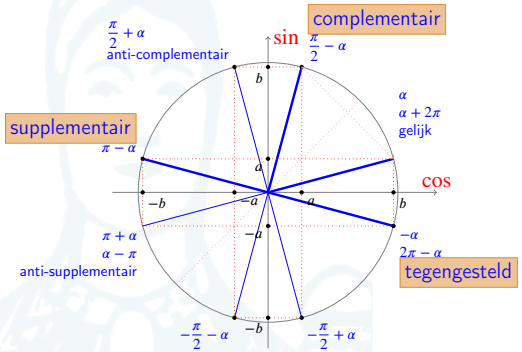
Gekende goniometrische getallen

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/



Goniometrische formules

Verwante hoeken:



Somformules (en dubbele hoek; verschilformules via verwante hoeken):

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ en dus $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

t-Formules: $\cos\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}$

Formules van Simpson:

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

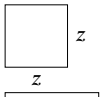
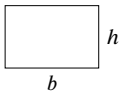
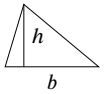
KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Meetkundige basisbegrippen

Omtrek en oppervlakteformules

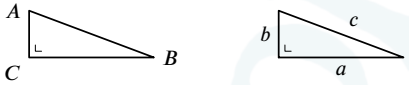
		Omtrek	Oppervlakte
Vierkant met zijde z		$4z$	z^2
Rechthoek met breedte b en hoogte h		$2b+2h$	bh
Driehoek met basis b en hoogte h		som van de zijden	$\frac{bh}{2}$
Cirkel met straal r		$2\pi r$	πr^2

De stelling van Pythagoras

Een driehoek ABC is rechthoekig in hoek C $\iff$ $|AC|^2+|CB|^2=|AB|^2$.

Een driehoek met zijden a,b,c is rechthoekig in de hoek tegenover c $\iff$ $a^2+b^2=c^2$

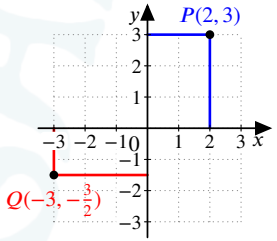
Een driehoek met zijden a,b,c is rechthoekig in de hoek tegenover c $\iff$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$



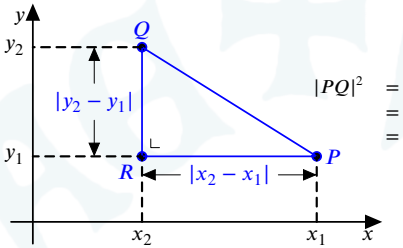
Cartesiaans assenstelsel

Cartesiaans **assenstelsel**:
horizontale x-as en een verticale y-as met gelijke eenheden.

Elk punt P van het vlak komt overeen met een uniek koppel reële getallen (x,y), de **coördinaten** van P.



Afstand tussen punten $P(x_1,y_1)$ en $Q(x_2,y_2)$ in het vlak



$$\begin{aligned}|PQ|^2 &= |PR|^2+|RQ|^2\\ &= |x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2\\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\end{aligned}$$

De **afstand** tussen het punt $P(x_1,y_1)$ en $Q(x_2,y_2)$ is

$$d(P,Q) \overset{\text{def}}{=} |PQ| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Vergelijkingen van rechte en cirkel

Rechte PQ door $P(x_1,y_1)$ en $Q(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$ $\quad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

Richtingscoëfficiënt van rechte PQ $\quad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)$

Rechte door $P(x_1,y_1)$ met helling (of rico) m	$y-y_1=m(x-x_1)$
Rechte door $P(0,q)$ met helling (of rico) m	$y=mx+q$
Horizontale rechte door $P(x_1,y_1)$	$y=y_1$ (of ook $y-y_1=0$)
Verticale rechte door $P(x_1,y_1)$	$x=x_1$ (of ook $x-x_1=0$)

Cirkel met middelpunt $M(x_M,y_M)$ en straal r $\quad (x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$

PAS OP: Verticale rechten hebben geen rico, en geen vergelijking van de vorm $y=mx+q$!

Onderlinge ligging van rechten

Snijdend	één snijpunt	verschillende helling (rico's)	$y=x$ en $y=2x$
Evenwijdig	geen snijpunten	gelijke helling (rico) maar vergelijkingen niet evenredig	$y=x$ en $y=x+1$
Samenvallend	elk punt is snijpunt	evenredige vergelijkingen	$y=x$ en $2y=2x$

Loodrechte stand van rechten

Verticale rechten staan loodrecht op horizontale rechten, en omgekeerd.

Andere rechten staan loodrecht op elkaar als en slechts als het product van de rico's -1 is:

$$L_1\perp L_2 \iff m_1\cdot m_2=-1 \left(\iff m_2=\frac{1}{m_1}\right)$$

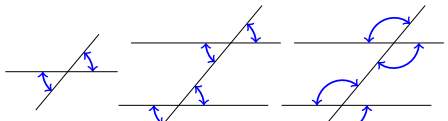
CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H:51)
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie
Leuven, CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

26.37 Overzicht basiseigenschappen rechten en cirkels

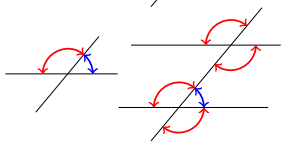
Basiseigenschappen van hoeken, driehoeken, cirkels en vlakke figuren

Hoeken bij snijdende rechten

overstaande hoeken zijn *gelijk*:
net zoals overeenkomende binnenhoeken,
en overeenkomende buitenhoeken



aanliggende hoeken zijn *supplementair*:

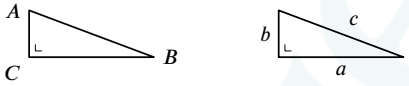


De stelling van Pythagoras

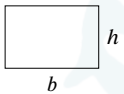
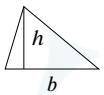
Een driehoek ABC is rechthoekig in hoek C $\iff$ $|AC|^2 + |CB|^2 = |AB|^2$.

Een driehoek met zijden a, b, c is rechthoekig in de hoek tegenover c $\iff$ $a^2 + b^2 = c^2$

Een driehoek met zijden a, b, c is rechthoekig in de hoek tegenover c $\iff$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$



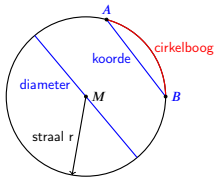
Omtrek en oppervlakteformules

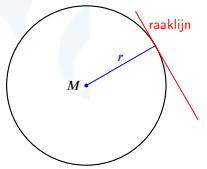
		Omtrek	Oppervlakte
Vierkant met zijde z		$4z$	z^2
Rechthoek met breedte b en hoogte h		$2b + 2h$	bh
Driehoek met basis b en hoogte h		som van de zijden	$\frac{bh}{2}$
Cirkel met straal r		$2\pi r$	πr^2

Cirkels

De **cirkel** met **middelpunt** M en **straal** r is
de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt M liggen.

De **raaklijn** aan een cirkel staat **loodrecht op de straal** naar het raakpunt.

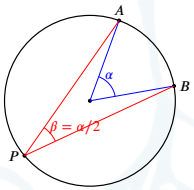


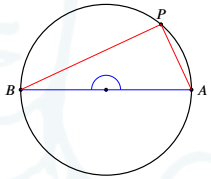


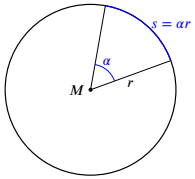
Elke **omtrekshoek** meet de helft van de **middelpuntshoek** die op dezelfde boog staat, en dus:

Elke **driehoek op een diameter met derde hoekpunt op de cirkel** is **rechthoekig**, en

De **lengte van een boog** s die een middelpuntshoek α afsnijdt op een cirkel met straal r is gegeven door $\alpha \cdot r$ als de hoek α wordt uitgedrukt in radialen.



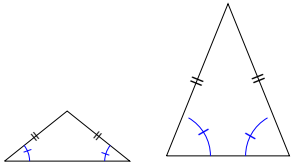




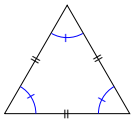
Driehoeken

De **som van de hoeken** van een driehoek meet $180°$ (of dus π radialen).

Een **gelijkbenige driehoek** heeft twee gelijke basishoeken.



Een **gelijkzijdige driehoek** heeft drie gelijke hoeken,
van elk $60°$ of dus $\frac{\pi}{6}$ radialen.



KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Vergelijkingen van rechten in het vlak (cartesiaans assenstelsel Oxy)

Vormen

Een rechte door het punt $P(x_1, y_1)$ kunnen we beschrijven op verschillende manieren.
Een **cartesiaanse vergelijking** van een rechte is *een nodige en voldoende voorwaarde* opdat punten (x, y) op de rechte zouden liggen.

(A) $y = y_1 + m(x - x_1)$

expliciete vergelijking: y als functie van x
Het getal m is de **richtingscoëfficiënt** (rico) van de rechte.
Door $P = (0, q)$ te kiezen wordt de vergelijking $y = q + mx$.

vb: $y = 1 + 2x$ heeft rico 2.

(B) $n_x(x - x_1) + n_y(y - y_1) = 0$

impliciete vergelijking: verband tussen x en y
De vector $\vec{n}(n_x, n_y)$ is een **normaalvector** op de rechte.
De vergelijking kan ook geschreven worden als
$n_x\, x + n_y\, y + c = 0$ met c een constante.

vb: $2x - y + 1 = 0 \perp \vec{n} = (2, -1)$

Een **parametervergelijking** *genereert* alle punten van de rechte met behulp van een parameter:

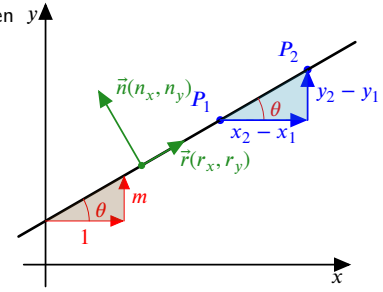
(C) $\begin{cases} x = x_1 + r_x\, t \\ y = y_1 + r_y\, t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

parametervergelijking: elke waarde voor de parameter t genereert een punt van de rechte
$\vec{r}(r_x, r_y)$ is een **richtingsvector** van de rechte.

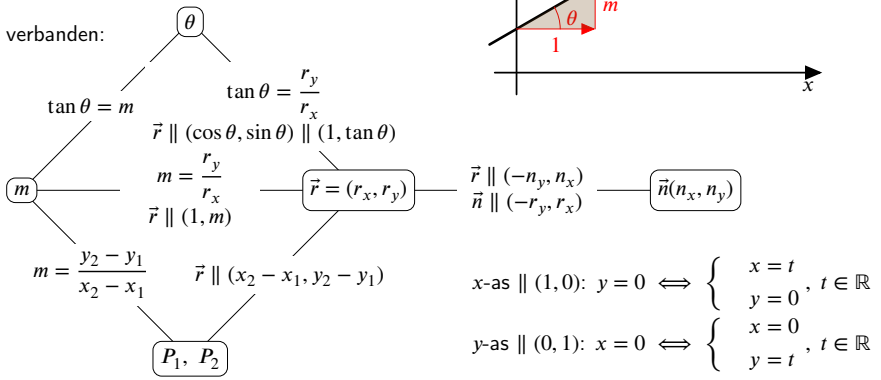
vb: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \| \vec{r} = (1, 2)$

Richting

De **richting** van een rechte kan gespecifieerd worden op verschillende manieren:
- met de **hoek** θ die de rechte maakt met de x-as
- met de **rico** m van de rechte
- met een **richtingsvector** $\vec{r}(r_x, r_y)$ van de rechte
- met een **normaalvector** $\vec{n}(n_x, n_y)$ op de rechte
- met **twee punten** $P_1(x_1, y_1)$ en $P_2(x_2, y_2)$



verbanden:



x-as $\| (1, 0)$: $y = 0 \iff \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

y-as $\| (0, 1)$: $x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Onderlinge ligging van rechten

De **snijpunten** van twee rechten zijn de oplossingen van een stelsel gevormd door de vergelijkingen van beide rechten. De vergelijkingen mogen gemengd worden wat betreft vorm.

Snijdend	één snijpunt	verschillende richting
Evenwijdig en niet samenvallend	geen snijpunten	gelijke richting
Samenvallend	elk punt is snijpunt	gelijke richting

Rechten staan **loodrecht op elkaar** als

hun richtingsvectoren loodrecht op elkaar staan.	$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$
het product van hun rico's gelijk is aan -1.	$m_1 \cdot m_2 = -1$ (volgt uit $(1, m_1) \cdot (1, m_2) = 0$)
hun normaalvectoren loodrecht op elkaar staan.	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
een normaalvector van de ene rechte evenwijdig is met een richtingsvector van de andere rechte.	$\vec{n}_1 = k\vec{r}_2 = 0,\ k \in \mathbb{R}$

Rechten zijn **evenwijdig** als

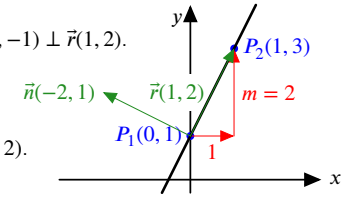
hun richtingsvectoren evenwijdig zijn.	$\vec{r}_1 = k\vec{r}_2,\ k \in \mathbb{R}$
hun rico's gelijk zijn.	$m_1 = m_2$
hun normaalvectoren evenwijdig zijn.	$\vec{n}_1 = k\vec{n}_2\ ,\ k \in \mathbb{R}$
een normaalvector van de ene rechte loodrecht staat op een richtingsvector van de andere rechte.	$\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$

Omzetten van parametervergelijkingen en cartesiaanse vergelijkingen

Meetkundig:
Maak gebruik van de verbanden tussen de rico m, de richtingsvector $\vec{r}$ en de normaalvector $\vec{n}$.

vb: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$ gaat door het punt $(1, 3)$ en heeft richtingsvector $\vec{r}(1, 2) \perp \vec{n}(-2, 1)$.
$\iff -2(x - 1) + 1(y - 3) = 0 \iff -2x + y - 1 = 0$

vb: $2x - y + 1 = 0$ gaat door het punt $(0, 1)$ en heeft normaalvector $\vec{n}(2, -1) \perp \vec{r}(1, 2)$.
$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



vb: $y = 2x + 1$ gaat door het punt $(0, 1)$ en heeft richtingsvector $\vec{r}(1, 2)$.
$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Algebraïsch:
- Een parameter $x = t$ invoeren (of $y = t$) schrijft een cartesiaanse vergelijking in parametervorm:

$$y = 3 + 2x \iff \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \overset{\text{of}}{\iff} \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- De parameter t elimineren maakt van een parametervergelijking een cartesiaanse vergelijking:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \overset{t=x-1}{\iff} y = 3 + 2(x - 1) \iff 2x - y + 1 = 0$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

Matrices

Definitie

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

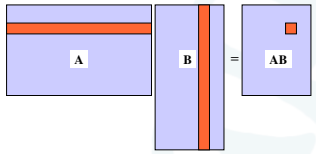
- De **matrixelementen** (of *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{11}, \ldots a_{ij}, \ldots, a_{mn}$.
- Men noteert ook $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij.

Vermenigvuldiging van matrices

Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ met element c_{ij} op de i-de rij en de j-de kolom gelijk aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Het product $\mathbf{AB}$ bestaat enkel als het aantal kolommen van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal rijen van $\mathbf{B}$.



De volgorde van de matrices mag in het algemeen niet omgewisseld worden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot -1+2\cdot 1 \\ -2\cdot 1+0\cdot 3 & -2\cdot -1+0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+-1\cdot -2 & 1\cdot 2+-1\cdot 0 \\ 3\cdot 1+1\cdot -2 & 3\cdot 2+1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

In het algemeen geldt dus dat $\mathbf{AB}$ *niet gelijk is* aan $\mathbf{BA}$.

Inverse van een vierkante matrix

Twee vierkante matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn elkaars **inverse** als:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

Als voor een gegeven $\mathbf{A}$ dergelijke $\mathbf{B}$ bestaat dan is die uniek, en we noteren die als $\mathbf{A}^{-1}$.
Er geldt dus

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Merk op: niet elke matrix heeft een inverse. Er geldt $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Transponeren van matrices

De **getransponeerde matrix** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ is de $n \times m$ matrix $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$.
De *rijen* van de getransponeerde $\mathbf{A}^T$ zijn de *kolommen* van $\mathbf{A}$. Er geldt $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Voorbeeld:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Determinant van een vierkante matrix

De **determinant** van een *vierkante* 2×2 matrix is *een getal* dat belangrijke eigenschappen van die matrix weergeeft, in de eerste plaats of de matrix al dan niet *inverteerbaar* is

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\text{notatie}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} ad - bc \in \mathbb{R}.$$

De determinant van een 3×3 matrix is het getal

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

De coëfficiënten komen telkens uit de eerste rij en de bijhorende 2×2 determinanten worden bekomen door de rij en de kolom van de betreffende coëfficiënt te schrappen.

Voor een vierkante $n \times n$ matrix geldt dat $\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A}$ inverteerbaar

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04
CC BY-NC-SA 4.0 KU Leuven (2026/08/25H51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

Lineaire stelsels met 2 vergelijkingen en 2 onbekenden

Definitie

Een 2×2 **lineair stelsel** in onbekenden x en y is een uitdrukking van de vorm

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \qquad \textbf{Voorbeeld:} \begin{cases} x+\ y=\ 5 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$$

Stelsel oplossen: *alle* x en y vinden die aan *beide* vergelijkingen voldoen.

Aantal oplossingen

Het **aantal oplossingen** van een lineair stelsel is nul, één of oneindig, en nooit 2, 3 of 42:

Eén	onafhankelijke vergelijkingen	$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$	of	$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$
Geen	strijdig stelsel	$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$	of	$\begin{cases} x+y=1 \\ \boxed{0=1} \end{cases}$
Oneindig veel	'dubbele' vergelijking	$\begin{cases} x+\ y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$	of	$\begin{cases} x+y=1 \\ \boxed{0=0} \end{cases}$

Oplossen met substitutiemethode

1: **los op** - schrijf met één vergelijking één van de onbekenden in termen van de andere
2: **substitueer** - substitueer die uitdrukking in de andere vergelijking
3: **los op** - los die andere vergelijking op (dat kan nu, want die heeft nog maar één onbekende)
4: **vul in** - en vul die oplossing in in je eerste vergelijking.

Voorbeeld:
$$\begin{cases} x+\ y=\ 5 \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{(1:\text{ los op})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-y \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{(2:\text{ substitueer})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-y \\ (5-y)-2y=-4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ -3y=-9 \end{cases} \overset{(3:\text{ los op})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-y \\ y=3 \end{cases} \overset{(4:\text{ vul in})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-3=2 \\ y=3 \end{cases}$$

De unieke oplossing van het stelsel is het koppel $(x,y)=(2,3)$.

De substitutiemethode is meestal handig bij kleine stelsels, zoals hier bij 2×2.

Oplossen met eliminatiemethode

1: **elimineer** tel bij één van de vergelijkingen een veelvoud van de andere op zodat ofwel x ofwel y verdwijnt
2: **los op** los die vergelijking met enkel x of y op (dat kan nu, want ze heeft nog maar één onbekende)
3: **vul in** en vul die oplossing in in de andere vergelijking.

Voorbeeld:
$$\begin{cases} x+\ y=\ 5 \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{\substack{(1:\text{ elimineer } x \text{ in } (2)) \\ \text{trek vgl (1) af van vgl (2)}}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+y=5 \\ x-2y-(x+y)=-4-5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ -3y=-9 \end{cases} \overset{(2:\text{ los op})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-y \\ y=3 \end{cases} \overset{(3:\text{ vul in})}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=5-3=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Alternatief:
$$\begin{cases} x+\ y=\ 5 \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{\substack{(1:\text{ elimineer } x \text{ in } (1)) \\ \text{trek vgl (2) af van vgl (1)}}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+y-(x-2y)=5-(-4) \\ x-2y=-4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3y=9 \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{(2:\text{ los op})}{\Longrightarrow} \begin{cases} y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases} \overset{(3:\text{ vul in})}{\Longrightarrow} \begin{cases} y=3 \\ x=-4+2\cdot 3=-4+6=2 \end{cases}$$

De unieke oplossing van het stelsel is het koppel $(x,y)=(2,3)$.

De eliminatiemethode veralgemeent naar grotere stelsels, en is handig bij het gebruik van matrices.

Oneindig veel oplossingen: schrijfwijze met parameters

$$\begin{cases} x+\ y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 0=0 \end{cases} \Longrightarrow x+y=1 \Longrightarrow y=1-x \Longrightarrow x=t, y=1-t, t\in\mathbb{R}$$

De oplossingen van het stelsel zijn alle koppels $(x,y)=(t,1-t)$ met $t\in\mathbb{R}$.

Je kan de oplossingen ook schrijven als $(x,y)=(1-t,t), t\in\mathbb{R}$ of als $(x,y)=(s,1-s)$ met $s\in\mathbb{R}$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

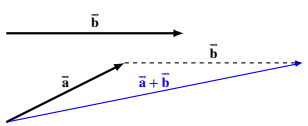
Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

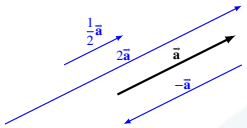
Vectoren

Basisconcepten

Een **(vrije) vector** $\vec{\mathbf{a}}$ is een object met een *grootte*, *richting* en *zin*,
en wordt typisch voorgesteld met een *pijl* (en dus met grootte,richting en zin).

Een **gebonden vector** $\vec{\mathbf{a}}$ is een object met een grootte, richting, zin *en een aangrijpingspunt*.





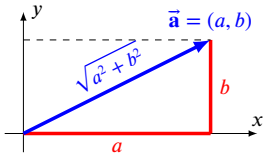
De **som** is de vector $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ die je bekomt door $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ *achter elkaar te leggen*.
Het **scalair product** van een vector $\vec{\mathbf{a}}$ met een reëel getal r is de *herschaalde* vector $r\vec{\mathbf{a}}$.

Scalair product en norm

Het **scalair product** (ook **inwendig product** of **inproduct** genoemd)
van vectoren $\vec{\mathbf{a}}=(a_1,a_2), \vec{\mathbf{b}}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ is het reëel getal

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = (a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) \overset{\text{def}}{=} a_1b_1+a_2b_2 \in \mathbb{R}.$$

De *grootte* van een vector $\vec{\mathbf{a}}$ wordt ook zijn **norm** of **lengte** genoemd en genoteerd als $\|\vec{\mathbf{a}}\|$.



Uit Pythagoras volgt dat de norm van
$\vec{\mathbf{a}}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ gegeven is door

$$\|\vec{\mathbf{a}}\| = \|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Een **eenheidsvector** (soms ook **genormeerde vector**) is een vector met norm of lengte 1.

De norm kan ook uitgedrukt worden in termen van het scalair product: voor $\vec{\mathbf{a}}\in\mathbb{R}^2$ is:

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \qquad \text{of} \qquad \|\vec{\mathbf{a}}\| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}}$$

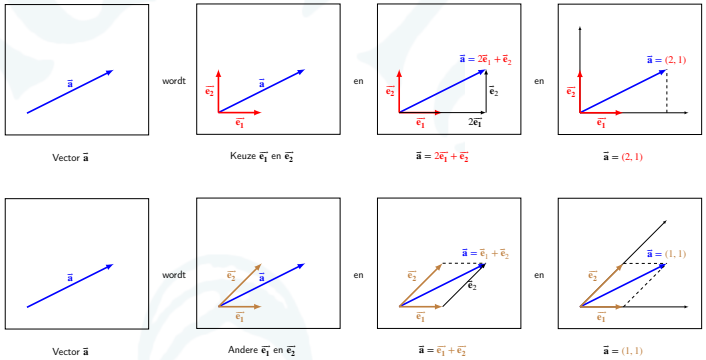
Het scalair product heeft ook een belangrijke meetkundige interpretatie. Voor twee vectoren $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}\in\mathbb{R}^2$, met θ de hoek tussen de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$, geldt:

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|\|\vec{\mathbf{b}}\|\cos\theta$$

Hieruit volgt een criterium voor loodrechte stand: $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=0 \iff \vec{\mathbf{a}}\perp\vec{\mathbf{b}} \iff \cos\theta = 0.$

Assenstelsels, basisvectoren en coördinaten

Twee gebonden vectoren $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ met hetzelfde beginpunt en die geen veelvoud zijn van elkaar bepalen een **assenstelsel**. Elke vector $\vec{\mathbf{a}}$ van het vlak kan dan op een unieke wijze geschreven worden als $\vec{\mathbf{a}} = a_1\vec{\mathbf{e}}_1 + a_2\vec{\mathbf{e}}_2$. De getallen a_1 en a_2, of ook het koppel (a_1,a_2), zijn de **coördinaten** of de **scalaire componenten** van de vector $\vec{\mathbf{a}}$ ten opzichte van de **basisvectoren** $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$.



Als de basisvectoren $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ loodrecht op elkaar staan en beide lengte één hebben spreken we van een **orthonormaal**, een **euclidisch** of een **cartesiaans assenstelsel**.

In coördinaten worden som en scalair veelvoud eenvoudig component per component berekend:

$$\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}} = (a_1+b_1)\vec{\mathbf{e}}_1 + (a_2+b_2)\vec{\mathbf{e}}_2 \qquad r\vec{\mathbf{a}} = (ra_1)\vec{\mathbf{e}}_1 + (ra_2)\vec{\mathbf{e}}_2$$

Men gebruikt ook $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$, en dus $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}} = (a_x+b_x)\vec{\mathbf{e}}_x + (a_y+b_y)\vec{\mathbf{e}}_y$.

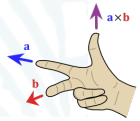
Vectorieel product

Het **vectorieel product** van twee vectoren $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}$ in $\mathbb{R}^3$ is een nieuwe vector $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$ in $\mathbb{R}^3$ die loodrecht staat op zowel $\vec{\mathbf{a}}$ als $\vec{\mathbf{b}}$. We definiëren deze bewerking als:

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3) &\overset{\text{def}}{=} (\,a_2b_3-a_3b_2,\; a_3b_1-a_1b_3,\; a_1b_2-a_2b_1\,)\\ &= \left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right) \in\mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Als θ de hoek is tussen de vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$, dan geldt

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|\cdot\|\vec{\mathbf{b}}\|\cdot\sin\theta\cdot\vec{\mathbf{n}}$$



met $\vec{\mathbf{n}}$ een eenheidsvector loodrecht op $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ en georiënteerd via de rechterhandregel.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0 versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

Voorkennis Wiskunde
Groep Wetenschap & Technologie

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorkennis Wiskunde

Module 27
Appendix

(Versie 2026/08/25H.51)

27.1 Het Griekse alfabet

Om wiskundige objecten te noteren gebruiken we meestal letters. Om de leesbaarheid te verhogen zijn dat typisch vaste reeksen letters per type objecten: f, g en h voor functies, x, y en z voor onbekenden of variabelen, k en l voor parameters, n, m, p voor natuurlijke getallen, z voor complexe getallen, enzovoort.

Omdat de voorraad letters beperkt is, worden in sommige situaties ook Griekse letters gebruikt. Voor hoeken is dat bijvoorbeeld een historisch gegroeide gewoonte.

Hieronder vind je het volledige Griekse alfabet (zowel kleine letters als hoofdletters). Dat kan ooit misschien ook nuttig zijn op vakantie. . . .

Definitie 27.1.1 (Grieks alfabet)**.**

α	A	alfa	ν	N	nu
β	B	beta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gamma	o	O	omikron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	E	epsilon	ρ	P	rho
ζ	Z	zeta	σ	Σ	sigma
η	H	eta	τ	T	tau
θ	Θ	theta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	φ	Φ	phi
κ	K	kappa	χ	X	chi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mu	ω	Ω	omega

Van enkele letters bestaan er verschillende versies:

epsilon: ϵ en ε

phi: ϕ en φ

Volgende symbolen zijn geen Griekse letters, maar ze komen ook regelmatig voor in wiskundige teksten:

∞: oneindig.

$\emptyset$: lege verzameling.

$\aleph$: aleph, voor (een speciale vorm van) oneindig.

∂: delta, voor partiële afgeleiden.

∇: nabla, of 'del' operator, voor vector differentialen.

CC BY-NC-SA 4.0