KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: Goniometrie

(Versie 2026/08/25H.51)

Inhoudsopgave

1 Goniometrie 1.1

1.1 Intro Goniometrie . . . 1.1

1.2 Definitie van een hoek . . . 1.2

1.2.A Oefeningen hoeken . . . 1.5

1.3 Meten van hoeken . . . 1.6

1.4 Goniometrische cirkel . . . 1.8

1.5 Goniometrische getallen . . . 1.10

1.5.1 Rechthoekige driehoeken . . . 1.11

1.5.2 Standaardhoeken . . . 1.12

1.6 Verwante hoeken . . . 1.15

1.7 Goniometrische formules . . . 1.17

1.8 Basiseigenschappen van driehoeken . . . 1.18

2 Goniometrie (opgesplitst) 2.1

2.1 Goniometrische getallen op de goniometrische cirkel . . . 2.1

2.2 Goniometrische getallen in rechthoekige driehoek . . . 2.3

2.3 Standaardhoeken . . . 2.5

3 Goniometrische en cyclometrische functies 3.1

3.1 Goniometrische functies . . . 3.1

3.2 Cyclometrische functies . . . 3.4

3.2.1 Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies . . . 3.6

1.1 Intro Goniometrie

Goniometrie (of driehoeksmeting) is het deel van de wiskunde dat zich bezighoudt met de studie van hoeken en driehoeken.

De natuurlijke getallen zijn de bouwstenen van het 'tellen'. Deze worden uitgebreid tot gehele getallen, rationale getallen en reële getallen. In de meetkunde zijn de bouwstenen punten en rechten. We bekomen een voor de hand liggende uitbreiding door twee halfrechten uit hetzelfde punt te bestuderen: dergelijke constructie vormt een *hoek*.

Om dergelijke hoeken te bestuderen voeren we het begrip *georiënteerde hoek* in en leren we hoeken *meten* in *radialen* en aflezen op de *goniometrische cirkel*. Dat leidt tot de definitie van sinus, cosinus en tangens gevolgd door een collectie eigenschappen en formules.

We zullen die sinus, cosinus en tangens ook als zogenaamde *goniometrische functies* bestuderen.

CC BY-NC-SA 4.0

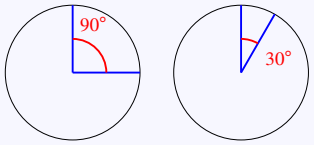
1.2 Definitie van een hoek

Iedereen weet wat een *hoek* is. Het begrip is echter wat ingewikkelder dan je misschien zou verwachten, omdat we in het dagelijkse leven met het woord *hoek* soms lichtjes verschillende dingen bedoelen. We zullen verder vooral zogenaamde **georiënteerde hoeken** bestuderen.

Voorbeeld 1.2.1 (Verschillende soorten hoeken)**.**

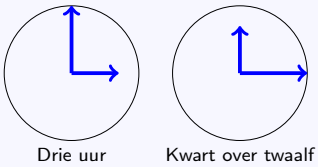
(a) Op een tekening van een analoge klok kan je een tijdspanne van vijftien minuten aangeven met een *hoek*.

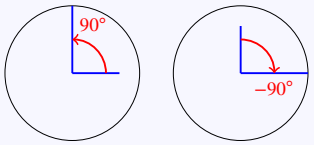




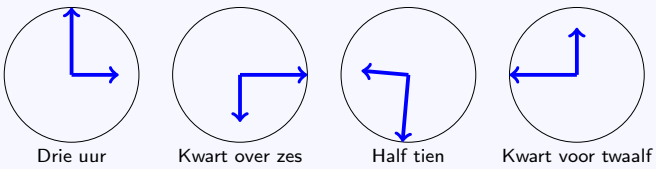
Bij dit soort hoeken spelen beide benen van de hoek precies dezelfde rol.
Een kwartier wordt aangegeven met een hoek van $90°$. Negatieve hoeken komen niet ter sprake.
Ook bij driehoeken is het dikwijls niet belangrijk in welke zin de hoeken worden doorlopen.

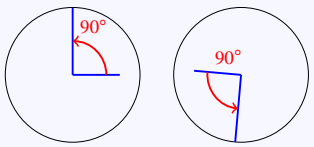
(b) Op een tekening van een analoge klok kan je zowel drie uur als kwart over twaalf aangegeven door (ongeveer) dezelfde hoek van 90 graden maar de kleine en de grote wijzer duiden de verschillende betekenis aan.



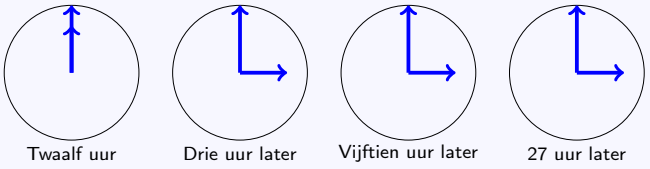


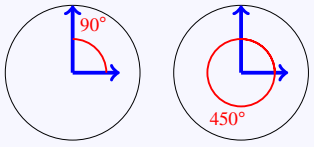
Bij deze hoeken zijn er dus twee verschillende benen, elk met een verschillende betekenis. Per afspraak geeft het korte been de uren aan, en het lange been de minuten.
Om beide situaties te onderscheiden zouden we kunnen afspreken de positie van drie uur aan te duiden met '$+90°$', en die van kwart over twaalf met '$-90°$'. Maar er is geen algemeen geldende afspraak daarover, en je zou het ook precies omgekeerd kunnen doen.
In deze situatie is natuurlijk ook de oriëntatie belangrijk, want de relatieve positie van kleine en grote wijzer zijn (ongeveer) hetzelfde bij bijvoorbeeld negen uur, kwart over twaalf, half vier en kwart voor zes.





(c) Op een analoge klok kan je geen tijdsverlopen van meer dan 12 uur aflezen. Als die belangrijk zijn, moet je ze onthouden of uit de context afleiden.

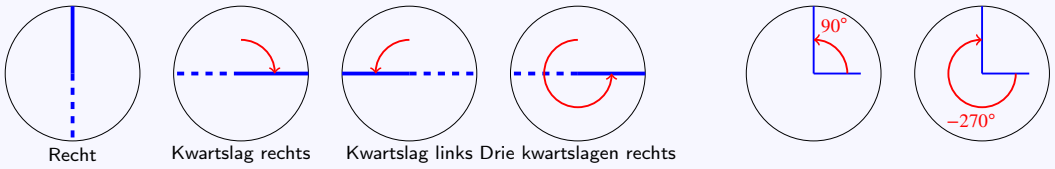




(d) Om een klok manueel van twaalf uur op drie uur te zetten is het niet belangrijk of je de kleine wijzer $90°$ verder draait, of $270°$ terug draait: het effect is precies hetzelfde.
Als je echter een schroef van een positie 'rechtop' naar '$90°$ rechts' zou moeten draaien, is het wel erg belangrijk in welke richting je ze draait. Je draait ze immers ofwel een kwartslag vaster, ofwel drie kwartslagen losser.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Definitie van een hoek

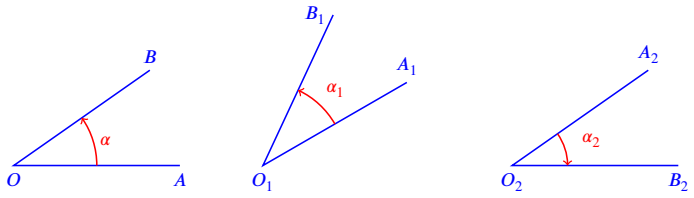


Recht | Kwartslag rechts | Kwartslag links | Drie kwartslagen rechts

Samengevat: soms maakt het een verschil of een hoek in wijzerzin of in tegenwijzerzin wordt doorlopen, en soms niet. Soms is ook het aantal omwentelingen belangrijk, en soms niet. Soms is enkel het eindresultaat belangrijk, soms ook de manier waarop je dat eindresultaat hebt bereikt.
In de goniometrie bestuderen we meestal zogenaamde **georiënteerde hoeken**, waarbij de hoek gaat van een *begin*been naar een *eind*been, maar het *aantal* omwentelingen niet belangrijk is, en ook niet of we die hoek langs de kortste weg hebben gemaakt of niet. Dus hoeken van $30°$, $-330°$, $390°$ en $750°$ beschouwen we als *gelijk*.
Dat komt best overeen met de kleine-en-grote-wijzer op de klok, zoals in voorbeeld b). Maar, bij de georiënteerde hoek wordt vastgelegd welk been 'eerst' is, en welk 'tweede' in plaats van welk 'klein' is en welk 'groot'.

Definitie 1.2.1. Een **georiënteerde hoek** is een meetkundige figuur bestaande uit een **hoekpunt** O en een halfrechte OA als **eerste been** of **beginbeen** en een halfrechte OB als **tweede been** of **eindbeen**. Twee dergelijke figuren bepalen dezelfde hoek als ze door verschuiven en draaien op elkaar kunnen worden gelegd.
Een georiënteerde hoek wordt genoteerd als $\measuredangle AOB$, waarbij het hoekpunt dus in het midden staat.

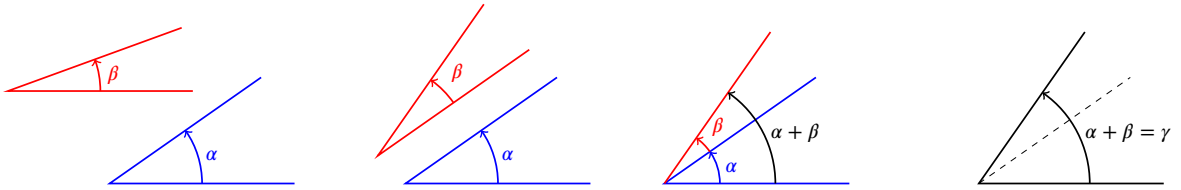
Op een tekening duiden we $\measuredangle AOB$ dikwijls aan met een boogje-met-een-pijltje-van-het-beginbeen-naar-het-eindbeen. Als *namen* zijn Griekse letters α (alfa), β (beta) en γ (gamma) erg populair.



Hoek $\alpha = \measuredangle AOB$ | Hoek $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ | Hoek $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$

De *georiënteerde hoeken* $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ zijn dus *aan elkaar gelijk* omdat ze via *verschuiven* en *draaien* op elkaar kunnen gelegd worden. De hoeken $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$ zijn echter niet aan elkaar gelijk, want om $\alpha = \measuredangle AOB$ op $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$ te leggen moeten we ook *spiegelen* en dat is voor georiënteerde hoeken niet toegelaten. Ook $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle BOA$ zijn dus onderling verschillende hoeken.

Je kan met georiënteerde hoeken *rekenen*: je telt twee hoeken α en β bij elkaar op door ze 'achter elkaar' te leggen, dus je legt het beginbeen van β op het eindbeen van α. Dat levert een nieuwe georiënteerde hoek γ op die we de *som* van α en β noemen. We noteren $\alpha + \beta = \gamma$.



Als het eindbeen samenvalt met het beginbeen is er geen echte hoek maar enkel een halfrechte en spreken we van de **nulhoek** $\measuredangle AOA$. Het is onmiddellijk duidelijk dat de nulhoek optellen bij een hoek de hoek niet verandert – net zoals nul optellen bij een getal dat getal niet verandert.

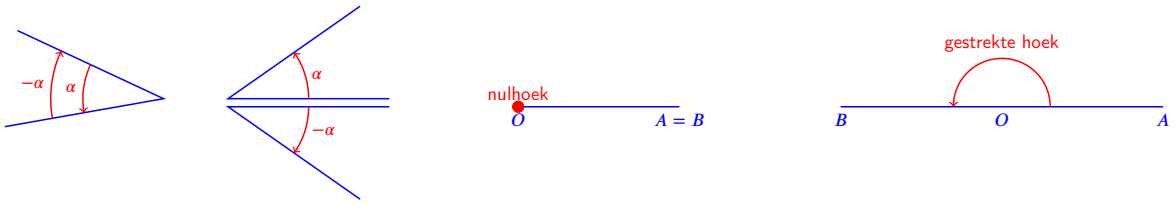
We noemen de georiënteerde hoek $\measuredangle BOA$ de **tegengestelde hoek** van $\measuredangle AOB$ en noteren die met een minteken: als $\alpha = \measuredangle AOB$, dan is $-\alpha = \measuredangle BOA$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Definitie van een hoek

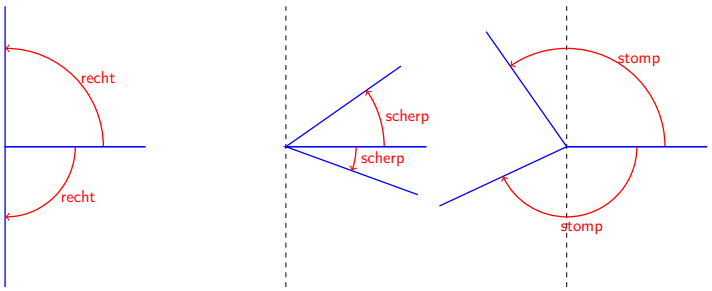
We stellen vast dat de som van twee tegengestelde hoeken de nulhoek is en dat de tegengestelde hoek $-\alpha$ bekomen wordt door α over zijn eerste been te spiegelen.

De **gestrekte hoek** is de hoek waarbij het eindbeen in het verlengde van het beginbeen ligt: dergelijke hoek is onzichtbaar, want het hoekpunt is gewoon een punt O op een rechte AB.



Een **rechte hoek** is de helft van een gestrekte hoek, dus een hoek α zodat $\alpha + \alpha$ een gestrekte hoek vormt.

Een hoek is **scherp** als hij kleiner is dan een rechte hoek en **stomp** als hij groter is.



Samengevat:

Definitie 1.2.2.

Een **gestrekte hoek** is een hoek waarbij beginbeen en eindbeen in elkaars verlengde liggen.
Een **nulhoek** is een hoek waarbij beginbeen en eindbeen aan elkaar gelijk zijn.
Een **rechte hoek** is de helft van een gestrekte hoek.
Een **scherpe hoek** is een hoek die kleiner is dan een rechte hoek.
Een **stompe hoek** is een hoek die groter is dan een rechte hoek.

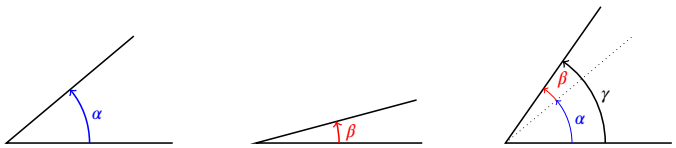
De **tegengestelde hoek** van de hoek $\alpha = \measuredangle AOB$ is de hoek $-\alpha = \measuredangle BOA$.

Opmerking 1.2.1. Merk op dat we voorlopig niet gesproken hebben over het *meten* van hoeken. Alle regels over rekenen en vergelijken van hoeken zijn voorlopig zuiver meetkundig, er komen geen getallen voor. In de praktijk is het natuurlijk handig hoeken te kunnen *meten*, en vervolgens eerder te rekenen met de maatgetallen van de hoeken dan met de hoeken zelf. Dat wordt verder uitgelegd.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2.A Oefeningen hoeken

Oefening 1.2.1. Basisrekenen met hoeken (op basis van een tekening, nog zonder maatgetallen)



Bepaal door verschuiven en draaien welke hoek hier telkens getekend is:

1.  $= \alpha$

2.  $= -\alpha$

3.  $= \alpha$

4.  $= \beta$

5.  $= -\beta$

6.  $= \gamma$

7.  $= -\gamma$

8.  $= \alpha$

9.  $= -\alpha$

Bepaal door te redeneren op een tekening telkens volgende uitdrukking:

10. $\alpha + \beta = \gamma$

11. $\beta + \alpha = \gamma$

12. $\gamma - \beta = \alpha$

13. $\alpha - \gamma = -\beta$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Meten van hoeken

Definitie 1.3.1. Een gestrekte hoek meet per afspraak π **radialen**. Een rechte hoek meet dan $\pi/2$ radialen, en de nulhoek 0 of 2π radialen. Het maatgetal van een georiënteerde hoek is slechts bepaald 'op 2π na', dus per afspraak zijn $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}+4\pi=\frac{25\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6}-2\pi=\frac{-11\pi}{6}$ allemaal maatgetallen van dezelfde hoek.

We schrijven dikwijls $\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

Als symbool voor radialen wordt **rad** gebruikt, maar het wordt meestal niet geschreven. Men schrijft dus meestal *een hoek met grootte* π in plaats van *een hoek met grootte* π *rad*.

Opmerking 1.3.1.

- Het verband tussen een hoek gemeten in graden en radialen wordt gegeven door $90°=\frac{\pi}{2}$, en dus geldt ook $360°=2\pi$ en $180°=\pi$. Voor enkele gekende hoeken geldt dus $\frac{\pi}{6}=30°$, $\frac{\pi}{4}=45°$, $\frac{3\pi}{4}=135°$, $\pi=180°$, $\frac{\pi}{2}=90°$,$\frac{3\pi}{2}=270°$, ... Merk op dat de grootte in radialen erg dikwijls wordt uitgedrukt als een veelvoud van π.
- Een gestrekte hoek van $180°$ meet π radialen, en dus komt één graad overeen met $\frac{\pi}{180}\approx 0.017\ldots$ rad. Omgekeerd komt 1 rad overeen met ongeveer $\frac{180°}{\pi}\approx 57,\ldots°$.
- Zowel het maatgetal van een hoek als de hoek zelf worden meestal genoteerd met Griekse letters. We spreken dus zowel van 'de hoek α' (waarbij α een letter is, namelijk de naam van de hoek) als 'de hoek met grootte α' (waar α dan staat voor een getal, namelijk het maatgetal van de hoek). Het maatgetal is altijd in radialen uitgedrukt, tenzij er expliciet staat $\alpha°$. De dubbelzinnigheid tussen een 'hoek' en 'de grootte van een hoek' is gelukkig compatibel met de optelling van hoeken: de grootte van de som van twee hoeken is de som van de groottes.
- Het symbool ° kan begrepen worden als een afkorting voor 'maal $\frac{2\pi}{360}$', waardoor dus graden automatisch worden omgezet naar radialen: $7°=7\cdot\frac{2\pi}{360}=\frac{14\pi}{360}=\frac{7\pi}{180}$. De breuk $\frac{2\pi}{360}$ moet je daarbij niet echt onthouden, want een hoek van $360°$ moet worden omgezet naar 2π, en daarvoor moet je natuurlijk vermenigvuldigen met $\frac{2\pi}{360}$.

Voorbeeld 1.3.1 (Omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd)**.**

Je kan de omzetting van graden naar radialen maken met behulp van *de regel van drie*. Je vertrekt van het feit dat $360°$ gelijk is aan 2π radialen, berekent dan hoeveel radialen één graad is, en daarna hoeveel radialen bijvoorbeeld 7 graden zijn. Dezelfde redenering werkt voor de omrekening van

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Meten van hoeken

radialen naar graden.

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 2$	$: 2$
$180°$	π

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 360$	$: 360$
$1°$	$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$
$\times 7$	$\times 7$
$7°$	$\frac{7\pi}{180}$

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 2\pi$	$: 2\pi$
$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$	1
$\times 7$	$\times 7$
$\frac{7\cdot 180°}{\pi}$	7

We zien dus dat $180°$ gelijk is aan π radialen, dat $7°$ gelijk is aan $\frac{7\pi}{180}$ radialen en dat 7 radialen gelijk is aan $\frac{7\cdot 180°}{\pi}$.

Oefening 1.3.1.

1. Hoeveel radialen is $120°$? ... ...

2. Hoeveel graden is 1 rad? ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Goniometrische cirkel

Hoeken worden traditioneel *gemeten in (boog)graden*, waarbij een rechte hoek $90°$ is, een gestrekte hoek $180°$ en de nulhoek $0°$ of $360°$. Het maatgetal van een georiënteerde hoek is daarbij slechts bepaald 'op $360°$ na': per afspraak zijn $20°$, $20° + 360° = 380°$, $20° + 720° = 740°$ en $20° - 360° = -340°$ allemaal maatgetallen van *dezelfde georiënteerde hoek*.

De keuze voor (boog)graden, die onderverdeeld zijn in (boog)minuten en (boog)seconden is historisch gemotiveerd, en gebaseerd op een zestigtallig talstelsel. Je kan het vergelijken met het meten van lengtes in mijl, el of voet. Er is een meer natuurlijke manier om hoeken te meten, die eigenlijk zelfs geen willekeurige keuze van een nieuwe eenheid vraagt. We zullen hiervoor een hoek bekijken op de goniometrische cirkel.

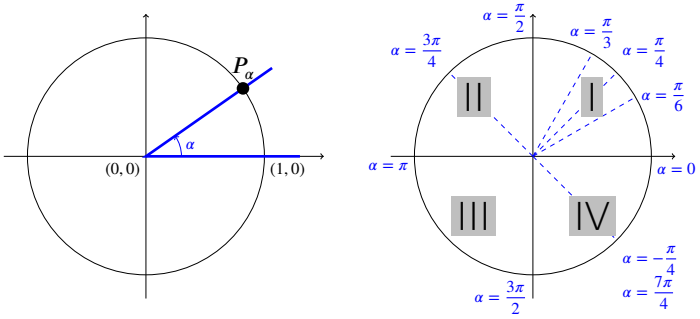
Door verschuiven en draaien (maar niet spiegelen) kan je het hoekpunt van een georiënteerde hoek in de oorsprong van het vlak leggen, en het eerste been op de positieve x-as. Dat leidt tot volgende definities:

Definitie 1.4.1.

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong.

Met elke georiënteerde hoek α komt een uniek **beeldpunt** P_α van de goniometrische cirkel overeen door het hoekpunt van α te verschuiven naar de oorsprong, het eerste been op de positieve x-as te leggen en het unieke snijpunt van het tweede been met de goniometrische cirkel P_α te noemen. Omgekeerd bepaalt elk punt P_α van de goniometrische cirkel een georiënteerde hoek α.

De goniometrische cirkel wordt verdeeld in vier **kwadranten**, die vanaf rechtsboven tegen de klok in genummerd worden met Romeinse cijfers I, II, III, IV zoals op de figuur hieronder.



Hoeken komen dus overeen met *punten van de goniometrische cirkel* en in de praktijk wordt meestal geen onderscheid gemaakt tussen het punt P_α en de hoek α.

Omdat de omtrek van een cirkel met straal één gelijk is aan 2π, ligt het voor de hand om een hoek die éénmaal ronddraait maatgetal 2π te geven; een 'halve draai', dus een gestrekte hoek heeft dan maat π, en de helft daarvan, dus een rechte hoek, heeft maatgetal $\pi/2$. Deze manier van hoeken meten noemt men 'meten in radialen'. Op bovenstaande figuur zijn enkele hoeken gemeten in radialen aangeduid.

Het blijkt wiskundig veel handiger hoeken te meten in *radialen* dan in *graden*. De formules voor afgeleiden van sinus en cosinus werken bijvoorbeeld enkel als de hoeken worden gemeten in radialen.

Het maatgetal van een georiënteerde hoek is slechts bepaald 'op 2π na', dus per afspraak zijn $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{-11\pi}{6}$ allemaal maatgetallen van dezelfde hoek.

We schrijven dikwijls $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

Als symbool voor radialen wordt **rad** gebruikt, maar het wordt meestal niet geschreven. Men schrijft dus meestal *een hoek met grootte* π in plaats van *een hoek met grootte* π *rad*.

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Goniometrische cirkel

Opmerking 1.4.1.

- De **lengte van de cirkelboog** tussen de twee benen van een hoek is gelijk aan het maatgetal van die hoek uitgedrukt in radialen, wanneer we dit maatgetal kiezen tussen 0 en 2π. Dit verklaart waarom men soms het begrip *booglengte* gebruikt voor de grootte van een hoek.
- Het verband tussen een hoek gemeten in graden en radialen wordt gegeven door $360° = 2\pi$, en dus geldt ook $90° = \frac{\pi}{2}$ en $180° = \pi$. Voor enkele gekende hoeken geldt dus $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{3\pi}{2} = 270°$, ... Merk op dat de grootte in radialen erg dikwijls wordt uitgedrukt als een veelvoud van π.
- Een gestrekte hoek van $180°$ meet π radialen, en dus komt één graad overeen met $\frac{\pi}{180} \approx 0.017\ldots$ rad. Omgekeerd komt 1 rad overeen met ongeveer $\frac{180°}{\pi} \approx 57,\ldots°$.
- Zowel het maatgetal van een hoek als de hoek zelf worden meestal genoteerd met Griekse letters. We spreken dus zowel van 'de hoek α' (waarbij α een letter is, namelijk de naam van de hoek) als 'de hoek met grootte α' (waar α dan staat voor een getal, namelijk het maatgetal van de hoek). Het maatgetal is altijd in radialen uitgedrukt, tenzij er expliciet staat $\alpha°$. De dubbelzinnigheid tussen een 'hoek' en 'de grootte van een hoek' is gelukkig compatibel met de optelling van hoeken: de grootte van de som van twee hoeken is de som van de groottes.
- Het symbool ° kan begrepen worden als een afkorting voor 'maal $\frac{2\pi}{360}$', waardoor dus graden automatisch worden omgezet naar radialen: $7° = 7 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{14\pi}{360} = \frac{7\pi}{180}$. De breuk $\frac{2\pi}{360}$ moet je daarbij niet echt onthouden, want een hoek van $360°$ moet worden omgezet naar 2π, en daarvoor moet je natuurlijk vermenigvuldigen met $\frac{2\pi}{360}$.

Voorbeeld 1.4.1 (Omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd)**.**

Van graden omzetten naar radialen gaat met behulp van *de regel van drie*. Vertrek van het feit dat $360°$ gelijk is aan 2π radialen en bereken dan hoeveel radialen één graad is, en daarna hoeveel radialen bijvoorbeeld 7 graden zijn. Met dezelfde redenering zet je radialen om naar graden.

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 2$	$: 2$
$180°$	π

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 360$	$: 360$
$1°$	$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$
$\times 7$	$\times 7$
$7°$	$\frac{7\pi}{180}$

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 2\pi$	$: 2\pi$
$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$	1
$\times 7$	$\times 7$
$\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$	7

Een hoek van $180°$ meet π radialen, $7°$ is gelijk aan $\frac{7\pi}{180}$ radialen en 7 radialen is gelijk aan $\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Goniometrische getallen

Door een georiënteerde hoek op de goniometrische cirkel te plaatsen bekomen we een punt op die cirkel, en dergelijk punt heeft x en y coördinaten. Deze coördinaten zijn per definitie de cosinus en de sinus van die hoek. We zullen verder zien dat wegens de stelling van Pythagoras deze definitie overeenkomt met de mogelijk meer vertrouwde definities met aanliggende en overstaande zijden in een driehoek.

Definitie 1.5.1.

Als P_α het punt is op de goniometrische cirkel dat hoort bij een hoek α, dan is

de **cosinus** van de hoek α per definitie de x-coördinaat van het punt P_α, en

de **sinus** van de hoek α per definitie de y-coördinaat van het punt P_α:

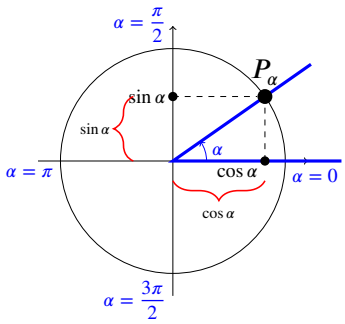
$$P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Per definitie is ook

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{(tangens)} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{(secans)}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{(cotangens)} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{(cosecans)}$$

We noemen de $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$ de **goniometrische getallen** van een hoek.



Oefening 1.5.1. Lees volgende waarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 2\pi = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$
2. $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$
3. $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$
4. $\cos(-\pi) = \ldots\ldots$ $\sin(-\pi) = \ldots\ldots$

De vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ (of de Stelling van Pythagoras) geeft onmiddellijk de hoofdformule van de goniometrie omdat het punt P_α op de goniometrische cirkel coördinaten $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ heeft:

Eigenschap 1.5.1 (Hoofdformule van de goniometrie)**.** Voor elke hoek α geldt:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \text{(hoofdformule goniometrie)}$$

Hieruit volgt onmiddellijk ook dat

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \cos^2\alpha\text{)}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \sin^2\alpha\text{)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Goniometrische getallen

Opmerking 1.5.1.

Let op de notatie voor machten: $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2 = \cos^2(\alpha) \neq \cos(\alpha^2) = \cos\alpha^2$.

Merk ook op dat in het algemeen $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$ en $\cos 2\alpha \neq 2\cos\alpha$.

Inderdaad, $\cos(\alpha+\beta) \stackrel{?}{=} \cos\alpha + \cos\beta$ werkt al niet voor bijvoorbeeld $\beta = 0$:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha+0) \neq \cos\alpha + \cos 0 = \cos\alpha + 1$$

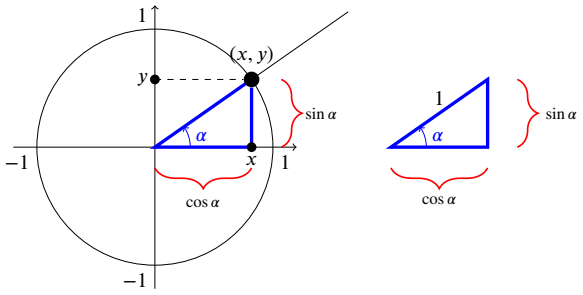
en $\cos 2\alpha \stackrel{?}{=} 2\cos\alpha$ werkt niet voor bijvoorbeeld $\alpha = 0$

$$\cos(2\cdot 0) = \cos 0 = 1 \text{ maar } 2\cdot\cos 0 = 2\cdot 1 = 2$$

Gelijkaardige problemen doen zich voor bij sinus, tangens, secans en cosecans. Er bestaat een hele collectie formules om toch de goniometrische getallen van sommen te berekenen.

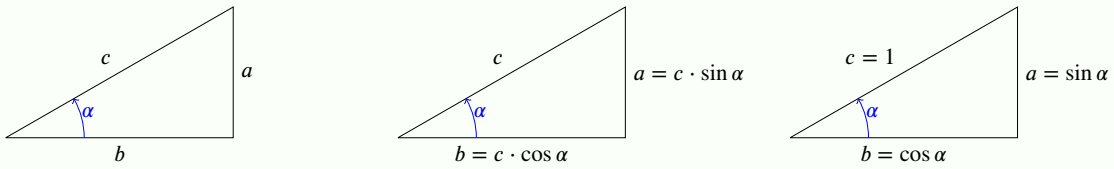
1.5.1 Rechthoekige driehoeken

Voor *scherpe hoeken* kunnen we de sinus en cosinus ook bekijken in een **rechthoekige driehoek**. Omdat het punt $P_\alpha = (x, y)$ op de goniometrische cirkel ligt, heeft de schuine zijde van de rechthoekige driehoek op onderstaande figuur lengte 1. De lengte van de *aanliggende zijde* van hoek α is gelijk aan $\cos\alpha$, de lengte van de *overstaande zijde* is $\sin\alpha$.



De volgende eigenschap veralgemeent dit voor rechthoekige driehoeken waarvan de schuine zijde niet noodzakelijk lengte 1 heeft. Het volstaat dan te *herschalen* met de lengte van de schuine zijde:

Eigenschap 1.5.2 (Sinus en cosinus in een rechthoekige driehoek)**.**

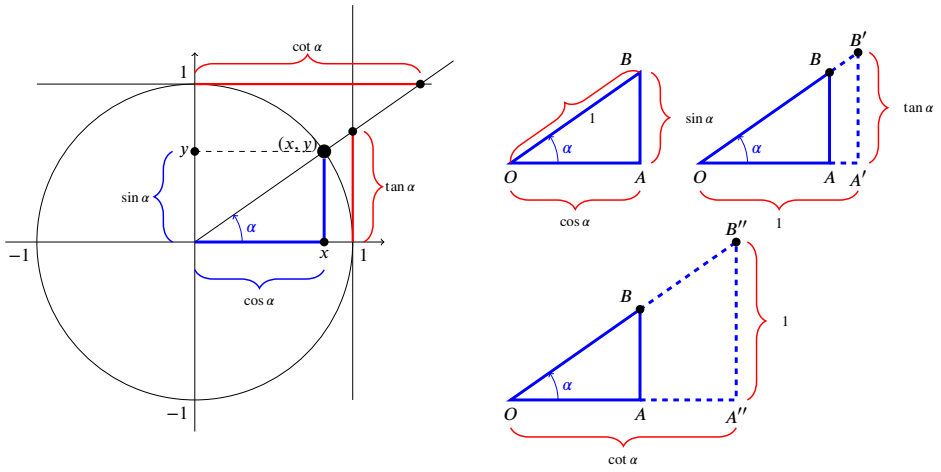


CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Goniometrische getallen

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$a = \sin\alpha \cdot c$	SOS
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$= \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$b = \cos\alpha \cdot c$	CAS
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$a = \tan\alpha \cdot b$	TOA
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	$= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$b = \cot\alpha \cdot a$	cotangens

De cosinus en de sinus van een hoek α kan je op de goniometrische cirkel aflezen op de *assen*. Ook de tangens en de cotangens kan je aflezen, en wel op de *raaklijnen* aan de goniometrische cirkel in punten $(1,0)$ en $(0,1)$:



Opmerking 1.5.2.

- We lezen de cosinus af op de x-as, en de sinus op de y-as.
  We zien dat $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ en $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$
- We lezen de *tangens* af op de verticale *raak*lijn $x = 1$. Dat volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle A'OB'$
  want in driehoek $\measuredangle AOB$ geldt $\tan\alpha = \frac{|AB|}{|AO|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
  terwijl in driehoek $\measuredangle A'OB'$ geldt dat $\tan\alpha = \frac{|A'B'|}{|A'O|} = \frac{|A'B'|}{1} = |A'B'|$.
  Dus is $|A'B'| = \tan\alpha$.
  Op analoge wijze lezen we de cotangens af op de horizontale rechte $y = 1$.
  We zien dat $\tan\alpha$ en $\cot\alpha$ alle mogelijk reële waarden kunnen aannemen.
- De formule $a = c \cdot \sin\alpha$ betekent dat de sinus precies het getal is waarmee we de lengte van de *schuine* zijde van een driehoek moeten vermenigvuldigen om de lengte van de *overstaande* zijde te bekomen. Idem voor cosinus en aanliggende zijde.

1.5.2 Standaardhoeken

Voor enkele hoeken zijn er eenvoudige formules voor de goniometrische getallen. Deze hoeken komen in de praktijk regelmatig voor, en het is handig en belangrijk de *exacte uitdrukkingen* te kennen.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Goniometrische getallen

De waarden in volgende eigenschap zijn eenvoudig te onthouden: schrijf de hoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ van klein naar groot. De bijhorende sinussen zijn dan een rijtje halve vierkantswortels van klein naar groot. De cosinus is hetzelfde rijtje omgekeerd, en de tangens is natuurlijk het quotiënt van de sinus en de cosinus. Merk op dat $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

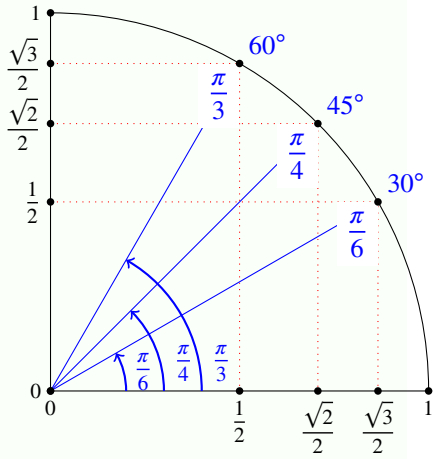
Opmerking 1.5.3.

Een rekenmachine geeft enkel numerieke oplossingen, en het is soms veel handiger om met uitdrukkingen als $\sqrt{2}$ te rekenen dan met $1,41421\ldots$. Dat is bijvoorbeeld het geval als je de waarde even verder moet kwadrateren, wat met goniometrische formules wel eens voorkomt.

Met de goniometrische cirkel bepaal je ook de goniometrische getallen van verwante hoeken in de andere kwadranten: de sinus lees je af op de rechte $x = 0$ (dus de y-as), de tangens op de rechte $x = 1$, de cosinus op de rechte $y = 0$ (dus de x-as), en de cotangens op de rechte $y = 1$. Je kan ook het *teken* van de sinus, cosinus en tangens dadelijk aflezen.

BELANGRIJK: leer dit niet van buiten, maar bestudeer het tot je er de evidentie van inziet.

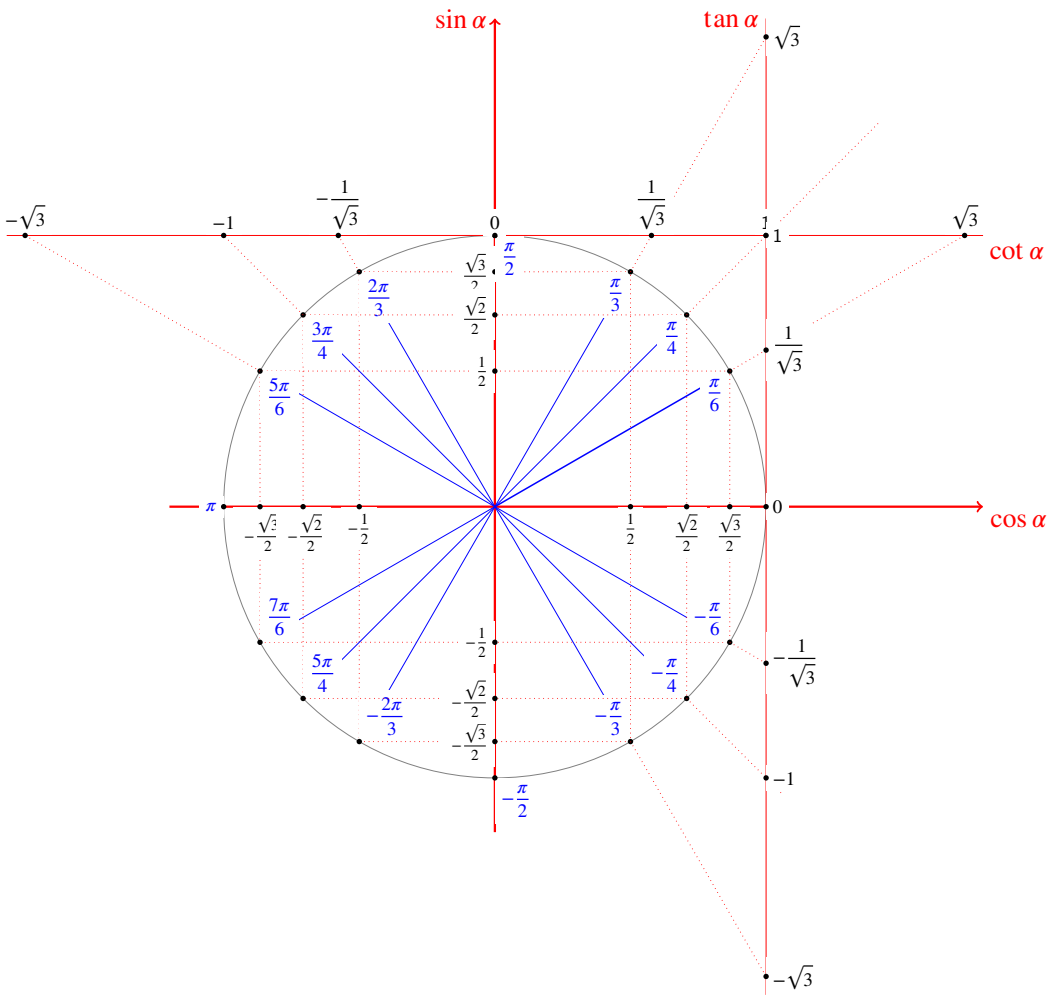
Eigenschap 1.5.3 (Goniometrische getallen van standaardhoeken)**.**



α	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

1.5 Goniometrische getallen



1.6 Verwante hoeken

Op de goniometrische cirkel zien we dat er eenvoudige verbanden zijn tussen de goniometrische getallen van zogenaamde *verwante* hoeken. Uit de gekende waarden voor sinus, cosinus, tangens en cotangens van enkele *standaardhoeken*, volgen dus ook de waarden van veel meer hoeken. Bovendien kunnen we het berekenen van goniometrische getallen van een willekeurige hoek steeds herleiden tot het berekenen van een goniometrisch getal van een hoek uit het eerste kwadrant.

Definitie 1.6.1 (Verwante hoeken)**.** Elke hoek α heeft volgende zogenaamde **verwante** hoeken:

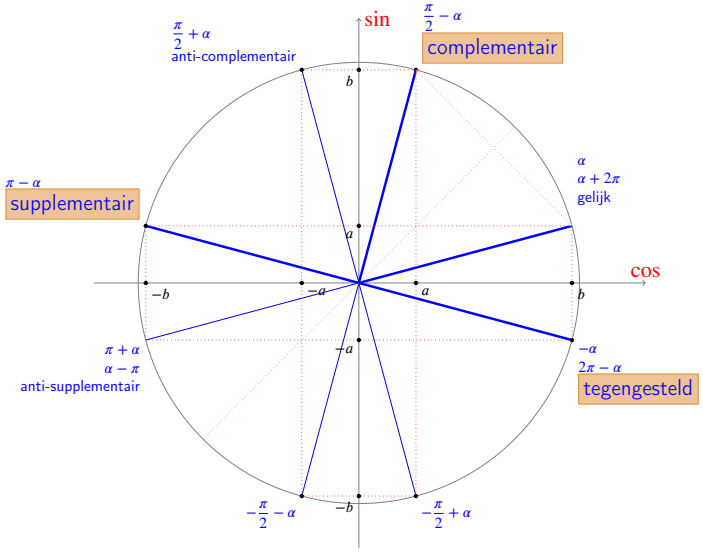
$-\alpha$	is de **tegengestelde** hoek	(de som van α en $-\alpha$ is gelijk aan 0)
$\pi - \alpha$	is de **supplementaire** hoek	(de som van α en $\pi - \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	is de **complementaire** hoek	(de som van α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)
$\pi + \alpha$	is de **anti-supplementaire** hoek	(het verschil van α en $\pi + \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	is de **anti-complementaire** hoek	(het verschil van α en $\frac{\pi}{2} + \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)

Uit deze definitie volgt direct volgende eigenschap:

Eigenschap 1.6.1.

- Twee hoeken zijn *tegengesteld* als hun som gelijk is aan de *nulhoek*, *supplementair* als hun som gelijk is aan een *gestrekte* hoek, en *complementair* als hun som gelijk is aan een *rechte* hoek.
- Tegengestelde hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzichte van de x-as, supplementaire hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzichte van de y-as en complementaire hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzicht van de *eerste* bissectrice.

Op een tekening ziet dat er uit als volgt:



Het is *niet* zinvol deze figuur of volgende tabellen van buiten te leren. Het is *wel* zinvol de goniometrische getallen van verwante hoeken direct te leren aflezen. Hierbij is $\sin\alpha = a$ en $\cos\alpha = b$, en de goniometrische getallen van de verwante hoeken zijn dan a, b, $-a$ of $-b$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Verwante hoeken

Eigenschap 1.6.2.

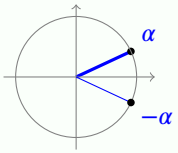
Cosinus:	(op de x-as)		Sinus:	(op de y-as)	
$\cos\alpha$	$= \cos(-\alpha)$	$= b$	$\sin\alpha$	$= \sin(\pi-\alpha)$	$= a$
$\cos(\pi-\alpha)$	$= \cos(\pi+\alpha)$	$= -b$	$\sin(-\alpha)$	$= \sin(\pi+\alpha)$	$= -a$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \cos(\alpha-\frac{\pi}{2})$	$= a$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$	$= b$
$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$	$= \cos(-\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= -a$	$\sin(-\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \sin(\alpha-\frac{\pi}{2})$	$= -b$

Per type van verwante hoek geeft dat volgende lijst verbanden tussen de *goniometrische getallen*:

Eigenschap 1.6.3 (Verwante hoeken)**.**

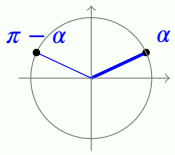
Tegengestelde hoeken

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos\alpha\\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



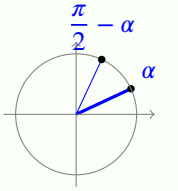
Supplementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(\pi-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



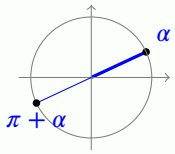
Complementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \tan\alpha\end{aligned}$$



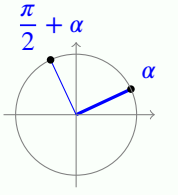
Anti-supplementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\pi) &= -\sin\alpha\\ \cos(\alpha\pm\pi) &= -\cos\alpha\\ \tan(\alpha\pm\pi) &= \tan\alpha\\ \cot(\alpha\pm\pi) &= \cot\alpha\end{aligned}$$



Anti-complementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\alpha\\ \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\cot\alpha\\ \cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\tan\alpha\end{aligned}$$



CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Goniometrische formules

Ter referentie staan hier een aantal goniometrische formules om allerlei uitdrukkigen om te vormen en soms te berekenen. Alle formules zijn zowel van links naar rechts te lezen, als van rechts naar links.

Eigenschap 1.7.1 (Goniometrische formules)**.**

Hoofdformule en varianten:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \qquad \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1 \qquad \cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1$$

Som- en verschilformules:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Formules voor dubbele hoek:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Formules van Simpson:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \qquad \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \qquad \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

Verwante hoeken:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= -\sin(-\alpha) &&= \sin(\pi-\alpha) &&= -\sin(\pi+\alpha)\\
&&&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\\
&&&= -\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\\
\cos\alpha &= \cos(-\alpha) &&= -\cos(\pi-\alpha) &&= -\cos(\pi+\alpha)\\
&&&= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\\
&&&= -\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= -\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.8 Basiseigenschappen van driehoeken

Driehoeken zijn erg belangrijke objecten bij meetkundige problemen. Enerzijds kunnen we van elke *hoek* eenvoudig een rechthoekige *drie*hoek maken door een loodlijn te tekenen op één van de benen van de hoek. Anderzijds kan de studie van veelhoeken zoals rechthoeken of zeshoeken dikwijls worden herleid tot de studie van driehoeken door *diagonalen* te tekenen. Zo kan de oppervlakte van een veelhoek –minstens theoretisch– worden berekend als de som van de oppervlakte van een aantal driehoeken.

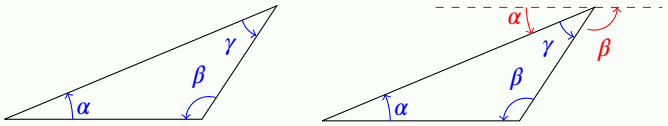


Een hoek Een driehoek Eén *veel*hoek *Veel* driehoeken

Door een rechte te tekenen evenwijdig aan de overstaande zijde blijkt dat de som van de drie hoeken een gestrekte hoek is:

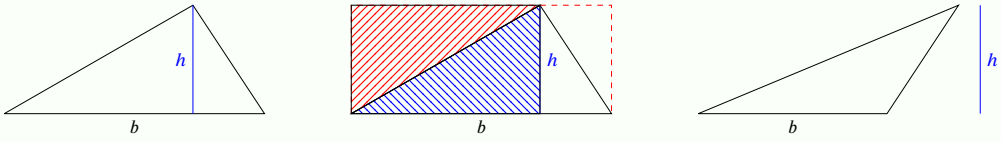
Eigenschap 1.8.1. De *som van de hoeken* van een driehoek is een gestrekte hoek.

In symbolen: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$



Als de hoeken α, β en γ in graden zijn uitgedrukt wordt de som $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Eigenschap 1.8.2. De *oppervlakte* van een driehoek is $\dfrac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}$



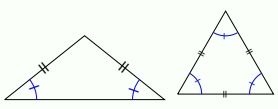
De oppervlakte van een driehoek is inderdaad precies de helft van die van de rechthoek met zijden b en h. De oppervlakte hangt niet af van de *vorm* van de driehoek, enkel van een *basis* en de bijhorende *hoogte*.

Definitie 1.8.1.

Een **gelijkbenige** driehoek is een driehoek met (minstens) twee gelijke zijden.
Een **gelijkzijdige** driehoek is een driehoek met drie gelijke zijden.

Eigenschap 1.8.3.

Een gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke basishoeken.
Een gelijkzijdige driehoek heeft drie gelijke hoeken.



De som van de hoeken is $180°$, dus is elke hoek van een gelijkzijdige driehoek $\dfrac{180°}{3} = 60°$ of $\dfrac{\pi}{3}$.

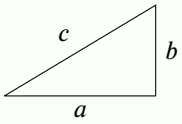
CC BY-NC-SA 4.0

1.8 Basiseigenschappen van driehoeken

Eigenschap 1.8.4 (Stelling van Pythagoras)**.**

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de aanliggende zijden.

In symbolen: $a^2 + b^2 = c^2$



Oefening 1.8.1. Bepaal de grootte van de derde hoek van volgende driehoeken:

1. $\alpha = 80°, \beta = 30°$, $\gamma = \ldots\ldots°$.

2. $\beta = 31°, \gamma = 72°$, $\alpha = \ldots\ldots°$.

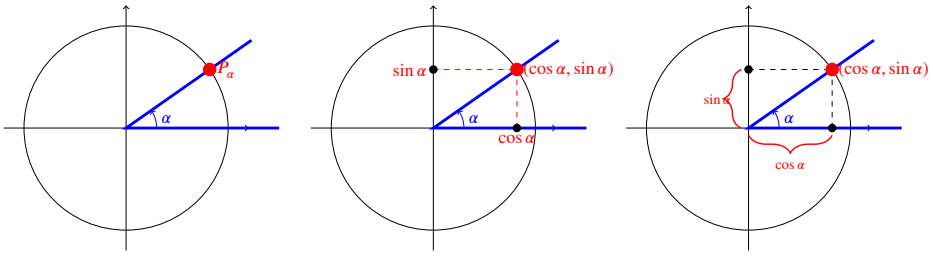
3. $\alpha = \pi/4, \gamma = \pi/3$, $\beta = \ldots\ldots$ radialen.

4. Gegeven een gelijkbenige driehoek waarvan één basishoek grootte $\pi/4$ heeft. De andere basishoek heeft dan grootte = ……, en de derde hoek heeft grootte = ……

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Goniometrische getallen op de goniometrische cirkel

Door een georiënteerde hoek op de goniometrische cirkel te plaatsen bekomen we een punt P_α op die cirkel. De x en y coördinaten van P_α zijn per definitie de cosinus en de sinus van de hoek α. Uit de stelling van Pythagoras volgt dat deze definitie overeenkomt met de mogelijk meer vertrouwde definities met aanliggende en overstaande zijden in een driehoek, die echter enkel geldig zijn voor *scherpe* hoeken.



Definitie 2.1.1.

Als P_α het punt is op de goniometrische cirkel dat hoort bij een hoek α, dan is

de **cosinus** van de hoek α per definitie de x-coördinaat van het punt P_α, en

de **sinus** van de hoek α per definitie de y-coördinaat van het punt P_α:

$$P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Per definitie is ook

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{(tangens)} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{(secans)}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{(cotangens)} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{(cosecans)}$$

We noemen de $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$ de **goniometrische getallen** van een hoek.

Oefening 2.1.1. Lees volgende waarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 2\pi = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$
2. $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$
3. $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$
4. $\cos(-\pi) = \ldots\ldots$ $\sin(-\pi) = \ldots\ldots$

De vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ (of de Stelling van Pythagoras) geeft onmiddellijk de hoofdformule van de goniometrie, want punt P_α met coördinaten $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ligt op de goniometrische cirkel:

Eigenschap 2.1.1 (Hoofdformule van de goniometrie)**.** Voor elke hoek α geldt:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \text{(hoofdformule goniometrie)}$$

Hieruit volgt onmiddellijk ook dat

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \cos^2\alpha\text{)}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \sin^2\alpha\text{)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Goniometrische getallen op de goniometrische cirkel

Opmerking 2.1.1.

Let op de notatie voor machten: $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2 = \cos^2(\alpha) \neq \cos(\alpha^2) = \cos \alpha^2$.

Merk ook op dat in het algemeen $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos \alpha + \cos \beta$ en $\cos 2\alpha \neq 2 \cos \alpha$.

Inderdaad, $\cos(\alpha + \beta) \stackrel{?}{=} \cos \alpha + \cos \beta$ werkt al niet voor bijvoorbeeld $\beta = 0$:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 0) \neq \cos \alpha + \cos 0 = \cos \alpha + 1$$

en $\cos 2\alpha \stackrel{?}{=} 2 \cos \alpha$ werkt niet voor bijvoorbeeld $\alpha = 0$

$$\cos(2 \cdot 0) = \cos 0 = 1 \text{ maar } 2 \cdot \cos 0 = 2 \cdot 1 = 2$$

Gelijkaardige problemen doen zich voor bij sinus, tangens, secans en cosecans.
Er bestaat een hele collectie formules om toch de goniometrische getallen van sommen te berekenen.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Goniometrische getallen in rechthoekige driehoek

De sinus, cosinus en tangens van een *scherpe hoek* hebben in een *rechthoekige driehoek* volgende betekenis:

Eigenschap 2.2.1. In een rechthoekige driehoek gelden volgende verbanden tussen de zijden en een hoek:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Schuine zijde}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Aanliggende zijde}}{\text{Schuine zijde}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Aanliggende zijde}}$$

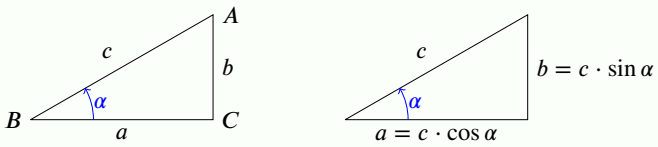
SOS
Sinus is **O**verstaande over **S**chuine

CAS
Cosinus is **A**anliggende over **S**chuine

TOA
Tangens is **O**verstaande over **A**anliggende

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$b = \sin\alpha \cdot c \qquad a = \cos\alpha \cdot c \qquad b = \tan\alpha \cdot a$$



- Deze formules zeggen dat een ladder met lengte c die een hoek α maakt met de grond een hoogte $c \cdot \sin\alpha$ heeft en op een afstand $c \cdot \cos\alpha$ van de muur staat. Cosinus en sinus zijn dus de *verhouding* waarmee je een schuine afstand omzet in respectievelijk een horizontale afstand en in een hoogte.

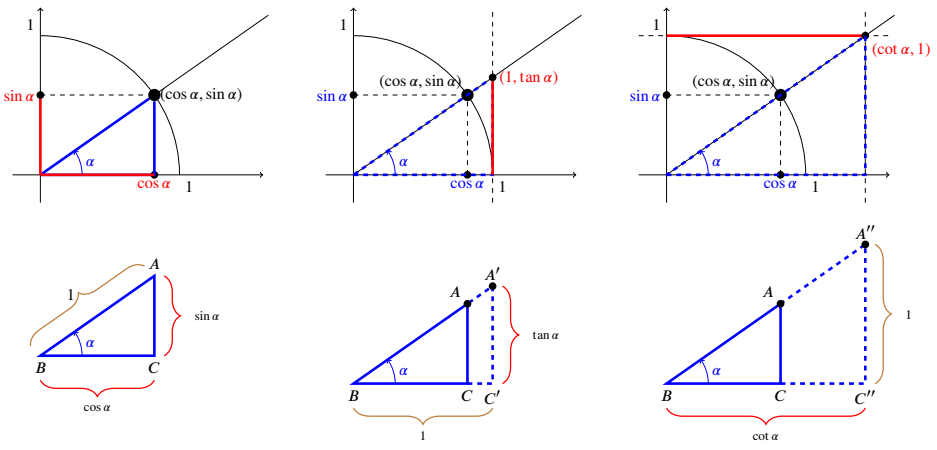
  In wiskundige termen betekent $a = c \cdot \sin\alpha$ dat je in elke rechthoekige driehoek de lengte van de *overstaande* zijde van hoek α vindt door de lengte van de *schuine* zijde te vermenigvuldigen $\sin\alpha$. Voor de *aanliggende* zijde vermenigvuldig je met $\cos\alpha$.

- Als de schuine zijde lengte $c = 1$ heeft, worden de formules eenvoudiger: $a = \cos\alpha$ en $b = \sin\alpha$. De driehoek past dan in de goniometrische cirkel, en je vindt $A = (a, b) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

  De cosinus en de sinus van een hoek α lees je dus op de *assen* van goniometrische cirkel.

- De tangens lees je af op de (vertikale) *raaklijn in* $(1, 0)$ aan de goniometrische cirkel.

- De cotangens $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ is de omgekeerde van de tangens,
  en lees je af op de (horizontale) *raaklijn in* $(0, 1)$.



2.2 Goniometrische getallen in rechthoekige driehoek

Samengevat geeft dit volgende eigenschap:

Eigenschap 2.2.2. Voor hoeken voorgesteld op de goniometrische cirkel geldt

- de *sinus* lees je af op de y-as.
- de *cosinus* lees je af op de x-as.
- de *tangens* lees je af op de *verticale raaklijn* $x = 1$,
  (want in de gelijkvormige $\triangle A'BC'$ geldt dat $\tan\alpha = \dfrac{|A'C'|}{|BC'|} = \dfrac{|A'C'|}{1} = |A'C'|$).
- de *cotangens* lees je af op de *horizontale raaklijn* $y = 1$,
  (want in de gelijkvormige $\triangle A''BC''$ geldt dat $\cot\alpha = \dfrac{|BC''|}{|A''C''|} = \dfrac{|BC''|}{1} = |BC''|$).
- cosinus en sinus liggen altijd tussen -1 en 1: $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ en $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.
- tangens en cotangens kunnen alle mogelijk reële waarden aannemen: $\tan\alpha, \cot\alpha \in \mathbb{R}$.

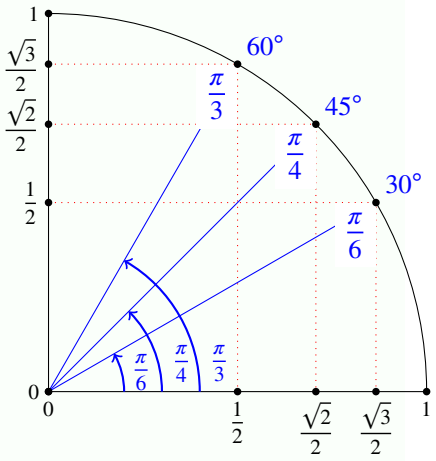
CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Standaardhoeken

Voor de hoeken $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ is het handig en belangrijk de volgende *exacte uitdrukkingen* te kennen:

Eigenschap 2.3.1 (Goniometrische getallen van standaardhoeken).

α	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/



Opmerking 2.3.1.

De tabel is eenvoudig te onthouden: schrijf de hoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ van klein naar groot.

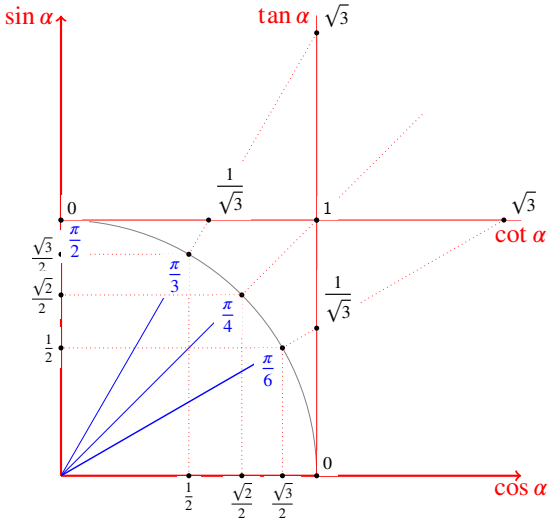
De bijhorende sinussen zijn dan een rijtje halve vierkantswortels van klein naar groot.

De cosinus is hetzelfde rijtje omgekeerd, en de tangens is het quotiënt van de sinus en de cosinus.

Merk op dat $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Een rekenmachine geeft enkel numerieke oplossingen. Het is soms veel handiger om met uitdrukkingen als $\sqrt{2}$ te rekenen dan met $1,41421\ldots$, bijvoorbeeld als je de waarde even verder moet kwadrateren, wat met goniometrische formules wel eens voorkomt.

langs de x-as op $y=0$: $\cos(x)$
$y=1$: $\cot(x)$

langs de y-as op $x=0$: $\sin(x)$
$x=1$: $\tan(x)$



De sinus lees je af op de rechte $x=0$ (dus de y-as), de tangens op de rechte $x=1$,
de cosinus op de rechte $y=0$ (dus de x-as), de cotangens op de rechte $y=1$.

Leer dit niet van buiten, maar bestudeer het tot je er de evidentie van inziet.

CC BY-NC-SA 4.0

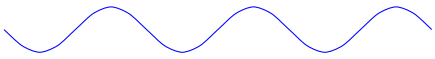
3.1 Goniometrische functies

Met een hoek α hebben we een getal $\sin\alpha$ geassocieerd. Door nu de hoek α te laten *variëren* (dus 'variabel' te maken), bekomen we een *functie* in de 'variabele' α. In de wiskunde gebruiken we dikwijls de letter x voor variabelen. We zullen hier dus ook meestal spreken van $\sin x$ in plaats van $\sin\alpha$. Ook van de cosinus, de tangens en de cotangens kunnen we functies maken.

Definitie 3.1.1 (Goniometrische functies)**.**

De **goniometrische functies** zijn de reële functies sinus, cosinus, tangens en cotangens:

$$\begin{aligned}
\sin &: \quad x \mapsto \sin(x) \\
\cos &: \quad x \mapsto \cos(x) \\
\tan &: \quad x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\cot &: \quad x \mapsto \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

We gaan nu na hoe de grafieken van deze functies er uit zien. We nemen als voorbeeld $\sin : x \mapsto \sin(x)$, waarvan velen de vorm kennen of minstens herkennen: 

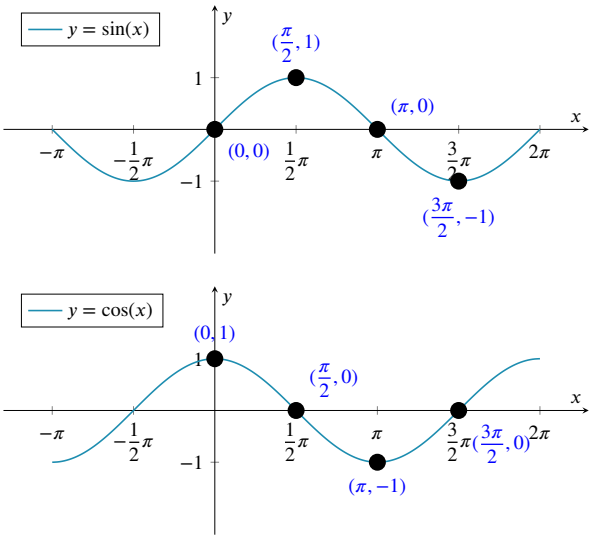
Zonder aanduidingen op de assen ziet de grafiek van $\cos : x \mapsto \cos(x)$ er net hetzelfde uit. Het is dus belangrijk om te weten waar de nulpunten, de maximale en de minimale waarden liggen.

Oefening 3.1.1. Lees volgende functiewaarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 0 = \ldots\ldots$ $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$ $\sin\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin 2\pi = \ldots\ldots$

2. $\cos 0 = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\cos\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$

Met de waarden uit vorige oefening kunnen we nu enkele waarden op de x-as en y-as noteren:

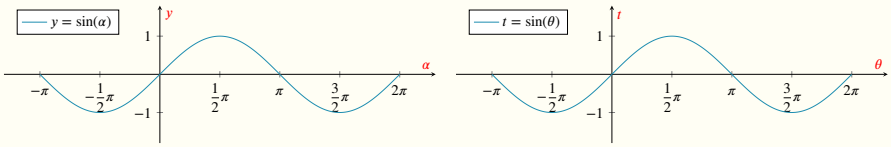


Opmerking 3.1.1.

- Als we sinus, cosinus en tangens als functies beschouwen, geldt dat in principe *altijd* met de variabele uitgedrukt in radialen.

3.1 Goniometrische functies

- Als we de sinus beschouwen als een functie, gebruiken we dikwijls de letter x als variabele eerder dan α. Vooral in toepassingen gebruikt men ook andere letters. Men tekent dan bijvoorbeeld ook grafieken in een αy-vlak of een θt-vlak

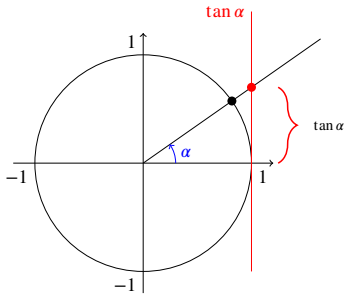


- Het domein van sin en van cos is $\mathbb{R}$ en het beeld is $[-1,1]$.
  Met de uitgebreidere notatie voor functies kunnen we dus ook schrijven

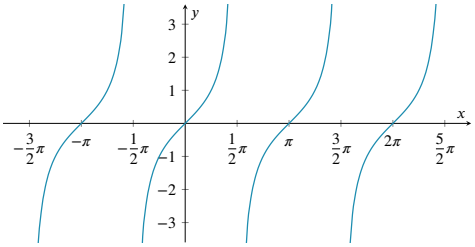
$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \sin(x)$$

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \cos(x)$$

Voor de tangensfunctie $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ merken we op dat ze niet gedefinieerd is in de nulpunten van de noemer, dus als $\cos x = 0$ zoals bijvoorbeeld in $\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ of algemeen als $x \in \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Waar $\sin x = 0$ zal ook de tangensfunctie nul zijn.



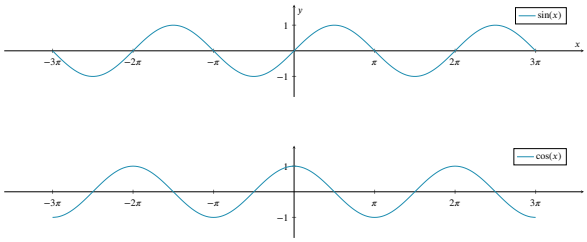
We lezen op de goniometrische cirkel af dat $\tan 0 = 0$, en dat naarmate de hoek groter wordt ook de tangens van de hoek groter wordt. Als de hoek de waarde $\dfrac{\pi}{2}$ krijgt, dan bestaat de tangens niet meer, dan wordt deze 'oneindig'. Volledig gelijkaardig wordt de tangens steeds negatiever als de hoek varieert van 0 tot $-\dfrac{\pi}{2}$. De grafiek van $x \mapsto \tan(x)$ ziet er als volgt uit:

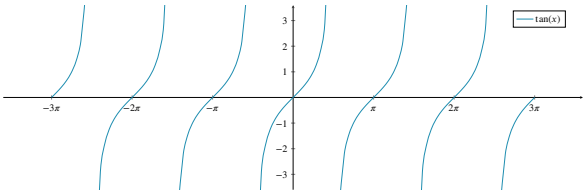


Op de grafieken van sin, cos en tan lees je onderstaande eigenschappen af (die je dus niet van buiten moet leren).

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Goniometrische functies





Eigenschap 3.1.1 (Eigenschappen van goniometrische functies)**.**

(a) de nulpunten van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft nulpunten in $\frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$

(b) de maxima en minima van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft maxima in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de sinusfunctie heeft minima in $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft maxima in $2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft minima in $\pi + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft geen maxima of minima

(c) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ en $\tan(x + \pi) = \tan(x)$

(d) de sinus over een afstand $\frac{\pi}{2}$ naar links verschuiven geeft de cosinus: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

(e) de cosinus over een afstand $\frac{\pi}{2}$ naar rechts verschuiven geeft de sinus: $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

(f) de tangensfunctie heeft *verticale asymptoten* in de punten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$: in die punten zelf is de tangens niet gedefinieerd, maar de grafiek komt er wel willekeurig dicht tegen de verticale rechten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

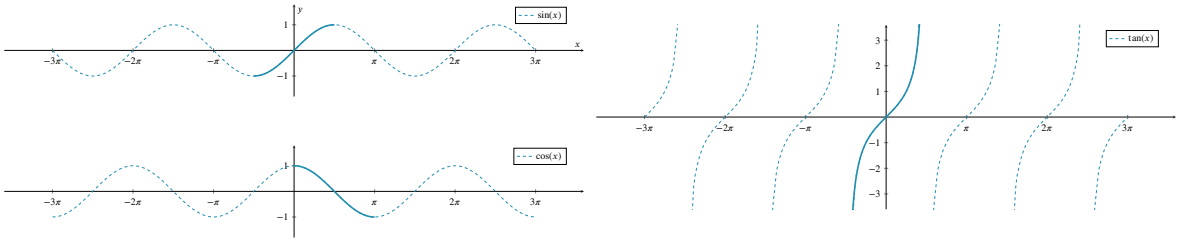
Eigenschap (c) betekent dat sinus, cosinus en tangens *periodische functies* zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Cyclometrische functies

We bestuderen de *inverse functies* van de gekende functies sinus, cosinus en tangens. We zoeken dus niet de sinus van een bepaald getal x (dus niet r zodat $r = \sin x$), maar net het omgekeerde: we krijgen $r \in [-1, 1]$ en zoeken x zodat $\sin x = r$. Dat is enigszins subtiel omdat er natuurlijk *meerdere* dergelijke getallen x bestaan. Voor $r = 0$ weten we bijvoorbeeld dat $\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(-\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = 0$.

Om dit probleem op te lossen kijken we eerst naar de grafieken van sin, cos en tan:



Op de grafiek kan je zien dat, wanneer we het domein van sin beperken tot $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *wel* geldt dat voor elke $r \in [-1, 1]$ er *één unieke* x is zodat $\sin x = r$. Om dezelfde reden spreken we af om het domein van cos te beperken tot $[0, \pi]$ en dat van tan tot $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

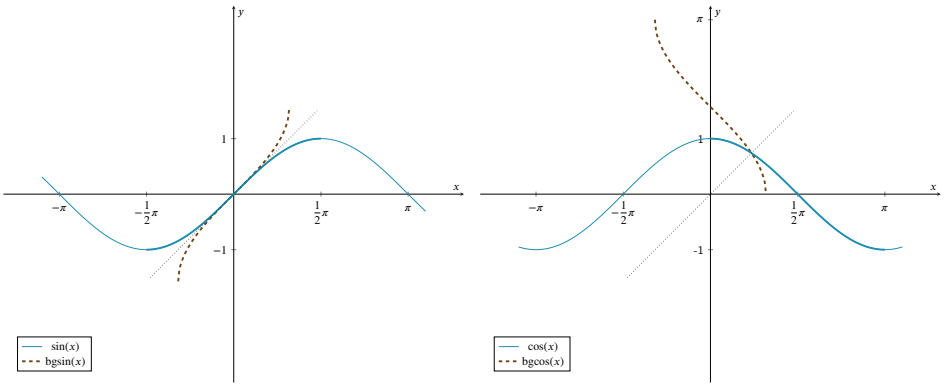
Definitie 3.2.1 (Cyclometrische functies)**.** Volgende **cyclometrische functies** zijn de inversen van de goniometrische functies als we het domein van die goniometrische functies gepast beperken:

$$\text{bgsin} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : x \mapsto \text{bgsin}(x) \text{ is invers van } \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \sin(x)$$

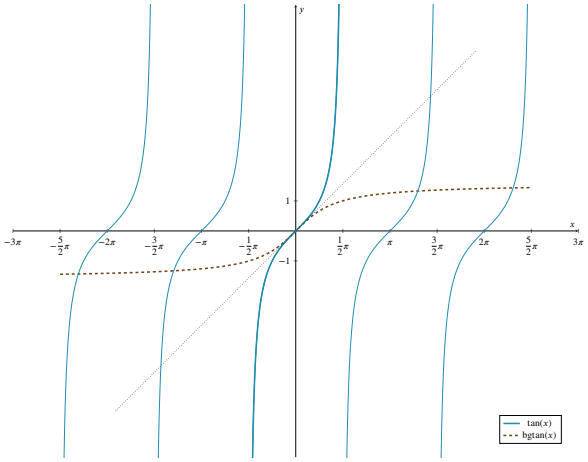
$$\text{bgcos} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] : x \mapsto \text{bgcos}(x) \qquad \cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \cos(x)$$

$$\text{bgtan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: x \mapsto \text{bgtan}(x) \qquad \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x)$$

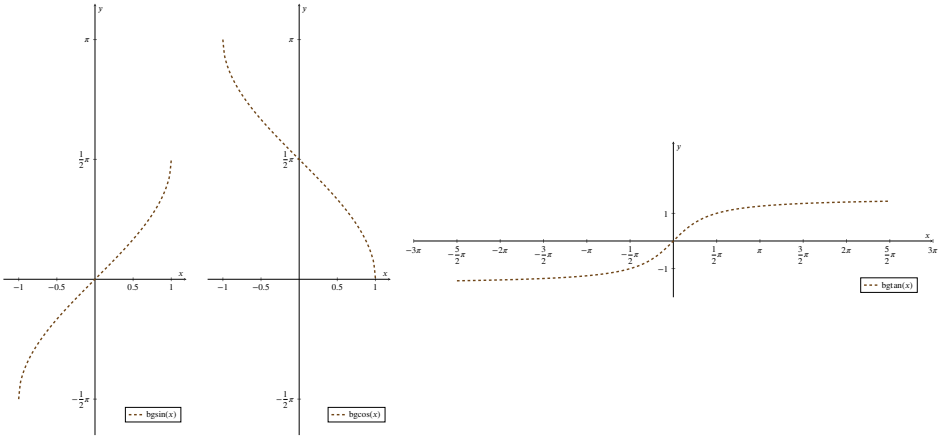
We bekomen de *grafiek* van de cyclometrische functies door het domein van de goniometrische functies te beperken, en de grafiek te spiegelen over de eerste bissectrice:



3.2 Cyclometrische functies



en dat resulteert in volgende grafieken van bgsin, bgcos en bgtan:



Opmerking 3.2.1.

- Cyclometrische functies geven *altijd* de waarde van een hoek uitgedrukt in radialen.
- De naam *boog*sinus komt van het feit dat de boogsinus de lengte geeft van de *boog* met een gegeven sinus. Men gebruikt zowel de notaties bgsin, Bgsin, arcsin als asin.
- De boogsinus en boogtangens is *altijd* een getal tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of IV.
- De boogcosinus van een getal is *altijd* een getal tussen 0 en π, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of II.
- Zoals steeds voor inverse functies geldt dat de grafiek van de sin en bgsin elkaars *spiegelbeeld* zijn over de eerste bissectrice $y = x$. Idem voor cos en bgcos, en tan en bgtan.
- bgsin en bgcos zijn slechts gedefinieerd op het interval $[-1, 1]$.
- bgtan is gedefinieerd op $\mathbb{R}$.
- bgsin en bgtan zijn *stijgende* functies, bgcos is een *dalende* functie.
- Soms wordt ook de standaard wiskunde notatie voor inverse functies $\sin^{-1}(x)$ gebruikt. Meestal wordt dat echter vermeden omdat er verwarring mogelijk is met $(\sin(x))^{-1} = \frac{1}{\sin(x)}$ wat iets

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Cyclometrische functies

heel anders is. De verwarring is fundamenteler bij de goniometrische functies dan elders omwille van de historisch gegroeide conventie om $\sin^2(x)$ te schrijven voor $(\sin(x))^2$.

Voorbeeld 3.2.1.

- $\operatorname{bgsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ want $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{bgsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ want $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ en $-\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{bgcos}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ want $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\operatorname{bgcos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ want $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{3\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\operatorname{bgtan} 1 = \frac{\pi}{4}$ want $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ want $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$ en $-\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

3.2.1 Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Cyclometrische functies

Voorbeeld 3.2.2 (Voorbeelden boogtangens)**.**

We kijken wat er gebeurt als we de functies bgtan en tan samenstellen. We weten bijvoorbeeld dat $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$, $\text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ en $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$. Hiermee kunnen we berekenen dat

- $\tan(\text{bgtan}(1)) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$. Voor $x = 1$ geldt bijgevolg $\tan(\text{bgtan}(x)) = x$.
- $\tan(\text{bgtan}(-1)) = \tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$. Voor $x = -1$ geldt ook $\tan(\text{bgtan}(x)) = x$.
- $\text{bgtan}(\tan(\frac{\pi}{4})) = \text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{\pi}{4}$ geldt bijgevolg $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha$.
- $\text{bgtan}(\tan(\frac{3\pi}{4})) = \text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ is $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) \neq \alpha$. Hier geldt dat $\text{bgtan}(\tan(\frac{3\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \pi$.

In het algemeen geldt voor hoeken tussen $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$ (hoeken in het 2de en 3de kwadrant) dat:

$$\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha - \pi \text{ en dus } \alpha = \text{bgtan}(\tan\alpha) + \pi.$$

Voor hoeken in het 1ste en 4de kwadrant geldt wel $\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha$.

Voor alle getallen x geldt *wel* dat $x = \tan(\text{bgtan}(x))$.

Merk op: We hebben hier bij de functie boogtangens gekozen om x als naam van de variable te nemen omdat de *boog*tangens genomen wordt van een gewoon *reëel getal*, terwijl we voor de functie *tangens* hierboven α hebben gebruikt omdat de tangens genomen wordt van de (getalwaarde van) een *hoek* (maar die is *ook* uitgedrukt als een reëel getal). De naam van de variabele kan natuurlijk vrij worden gekozen, en dikwijls wordt ook voor de tangens de letter x gebruikt.

Eigenschap 3.2.1 (Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies)**.**

- Als x een getal is dan geldt

$$\begin{aligned} &\text{als } x \in [-1,1] : \sin(\text{bgsin}(x)) = x. && \text{Voor andere } x \text{ is } \text{bgsin}(x) \text{ niet gedefinieerd} \\ &\text{als } x \in [-1,1] : \cos(\text{bgcos}(x)) = x. && \text{Voor andere } x \text{ is } \text{bgsin}(x) \text{ niet gedefinieerd} \\ &\text{als } x \in \mathbb{R} : \tan(\text{bgtan}(x)) = x \end{aligned}$$

- Als α het maatgetal is van een hoek dan geldt

$$\begin{aligned} \text{als } \alpha \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] &: \text{bgsin}(\sin(\alpha)) = \alpha. \\ \text{als } \alpha \in [0,\pi] &: \text{bgcos}(\cos(\alpha)) = \alpha \\ \text{als } \alpha \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[&: \text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha \end{aligned}$$

  Voor α buiten deze intervallen gelden deze gelijkheden niet.

CC BY-NC-SA 4.0