KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Xoverzicht: Afgeleiden

(Versie 2026/08/25H.51)

Inhoudsopgave

1 Afgeleiden: Intro 1.1

1.1 Intro afgeleiden . . . 1.1

1.2 Intro Afgeleiden . . . 1.2

2 Definitie en basisregels 2.1

2.1 Definitie van afgeleide . . . 2.1

2.2 Definitie afgeleide . . . 2.8

2.3 Definitie differentiaal . . . 2.9

2.4 Begintest berekening afgeleiden . . . 2.11

2.5 Basisregels . . . 2.12

3 Eerst exp/log/sin en dan product/ketting 3.1

3.1 Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies . . . 3.1

3.2 Afgeleiden van goniometrische functies . . . 3.2

3.3 Afgeleiden cyclometrische functies . . . 3.3

3.4 Product- en quotiëntregel . . . 3.4

3.5 Kettingregel . . . 3.7

4 Eerst product/ketting, dan (evt.) exp/log/sin 4.1

4.1 Product- en quotiëntregel . . . 4.1

4.2 Kettingregel . . . 4.3

4.3 Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies . . . 4.6

4.4 Afgeleiden van goniometrische functies . . . 4.8

5 Oefeningen 5.1

5.0.A Basisoefeningen afgeleiden . . . 5.1

6 Toepassingen/extra 6.1

6.1 Hogere orde afgeleiden . . . 6.1

6.1.A Oefeningen hogere orde afgeleiden . . . 6.2

6.2 Afgeleide van de inverse functie . . . 6.3

6.3 Regel van de l'Hôpital . . . 6.6

6.3.A Oefeningen de l'Hôpital . . . 6.9

6.4 Toepassing van l'Hôpital . . . 6.10

6.5 Minimum-Maximumproblemen 6.11

6.6 Kritieke punten, extrema en buigpunten 6.18

7 Usolvit 7.1

7.0.A Extra oefeningen afgeleiden (usolv-it) 7.1

7.0.B Extra oefeningen minimum maximum problemen 7.2

8 Extra, work-in-progress 8.1

8.1 Overzicht afgeleiden 8.1

1.1 Overzicht van de definitie en de rekenregels voor afgeleiden 8.1

1.2 Voorbeelden van het berekenen van afgeleiden 8.2

8.2 Samenvatting 8.6

8.3 Afgeleiden van sin/exp/log 8.7

8.4 Toepassingen van afgeleiden 8.9

9 Alternatieve introducties (Work-not-finished-and-not-in-progress) 9.1

9.1 Afgeleiden via rekenregels 9.1

9.1.1 Korte definitie en de rekenregels voor afgeleiden 9.1

9.1.2 Basisregels: sommen, machten en scalaire veelvouden 9.2

9.1.3 Basisregels voor exponentiële, logaritmische en goniometrische functies 9.4

9.1.4 Regels voor afgeleiden van producten en quotiënten van functies 9.5

9.1.5 Regels voor samengestelde functies (kettingregel) 9.7

9.2 Intro via limieten 9.11

9.3 Intro via veranderingen 9.17

9.4 Intro via differentialen 9.24

9.4.1 Algebraïsche interpretatie van differentialen 9.30

9.4.2 Formularium 9.31

9.5 Intro via youtube 9.33

1.1 Intro afgeleiden

Het begrip *afgeleide* komt frequent voor in allerlei wetenschappelijke en andere contexten. De techniek van afgeleiden laat toe om erg precies, erg efficiënt en in erg uiteenlopende situaties *veranderingen* te bestuderen.

Vele fenomenen zoals bewegingen, temperatuursverlopen, productievolumes, epidemies en hoogteprofielen van wielerwedstrijden kunnen beschreven worden als functies. *Afgeleiden* zeggen dan iets over de *veranderingen van de functiewaarden*. Hoe *verandert* de temperatuur, het geproduceerde volume, het aantal besmette personen als de tijd, de prijs of de sociale contacten veranderen? In vele contexten is de *waarde* van de functie zelfs minder belangrijk dan de *verandering van de waarde*. Een renner die een berg oprijdt, hecht op cruciale momenten in de wedstrijd meer belang aan de *verandering van de hoogte*, dat is de steilheid van de berg, dan aan de *absolute hoogte* op dat punt. De winst die iemand behaalt bij een belegging in aandelen hangt niet zozeer af van de *waarde* van de aandelen op een bepaald ogenblik, maar van de *verandering van die waarde* tussen de aankoop en de verkoop.

In deze context begrijpen we functies dikwijls als een verband tussen een 'onafhankelijke' variabele (de tijd, de prijs, de lockdown maatregelen) en de 'afhankelijke' variabele (de temperatuur, de hoeveelheid geproduceerde producten of het aantal besmette personen). In wiskundige taal noemen we de onafhankelijke variabele typisch x (maar soms ook t als het over tijd gaat, of s, of andere letters) en de afhankelijke grootheid is dan een functie die we typisch f noemen (maar soms ook T als het over temperatuur gaat, of v en a als het snelheden en versnellingen zijn). Als we de afhankelijke grootheid ook als 'variabele' willen weergeven, gebruiken we dikwijls de letter y en schrijven we $y = f(x)$, of soms ook $y(x)$, om aan te duiden dat de grootheid y afhangt van x.

Afgeleiden geven informatie over de *verhouding* tussen *de verandering van de afhankelijke variabele* ten opzichte van *de verandering van de onafhankelijke variabele*. Als je de onafhankelijke variabele varieert, wat gebeurt er dan met de afhankelijke variabele? Stijgt die, of daalt die, en hoe snel of hoe traag gebeurt dat? Je kan hetzelfde ook begrijpen in termen van *gevoeligheid*: hoe gevoelig is de afhankelijke variabele aan een wijziging in de onafhankelijke variabele?

Een aangename manier om vertrouwd te raken met de betekenis van afgeleiden (en integralen), is het met aandacht bekijken van de geniale videos van 3Blue1Brown:

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=WUvTyaaNkzM

In wat volgt hebben we de leerstof over afgeleiden als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Enkele voorbeelden en een wiskundige definitie

(3) Een kleine uitweiding over het begrip differentiaal

(4) Enkele basisregels over het berekenen van afgeleiden

(5) De afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

(6) De afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

(7) Regels voor producten en quotiënten van functies

(8) Regels voor samenstellingen van functies

(9) Hogere orde afgeleiden

(10) Afgeleide van inverse van een functie

(11) De regel van l' Hôpital om limieten te berekenen

(12) Als toepassing het oplossen van minimum-maximum problemen

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Intro Afgeleiden

Sommigen beweren dat er 42 manieren zijn om afgeleiden te leren of te herhalen.
We vermelden er een aantal, en behandelen er enkele in detail:

(1) Je slaat de inleiding(en) voorlopig over, leest de definitie en herhaalt de rekenregels. Daarna maak je enkele oefeningen en toepassingen, en uit pure nieuwsgierigheid lees je daarna toch de intro's.

(2) Je herhaalt een stukje theorie dat allicht tamelijk erg lijkt op wat je in het middelbaar onderwijs al hebt gezien, en dat gebaseerd is op limieten. Daarna herhaal en oefen je de rekenregels.

(3) Je denkt wat concreter, en leest en studeert enkele aspecten van veranderingen. De rekenregels zijn daarna kinderspel.

(4) Je houdt van een uitdaging, en waagt jezelf aan een erg atypische maar ongetijfeld fascinerende inleiding gebaseerd op eenvoudige axioma's voor differentialen.

(5) Je doet erg modern, en bingewatcht de geniale videos van 3Blue1Brown:

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=WUvTyaaNkzM

Je kijkt de hele reeks, dat is 12 keer een dik kwartier, of in totaal ongeveer $12 \times 15 =$ *heel veel minuten*. Reken daarbij dat je toch nog wat oefeningen zal moeten maken, en misschien niet alles direct zal begrijpen. Het is niet uitgesloten dat je stevig zal moeten nadenken. En, als je toch op youtube bent, kan je snel worden afgeleid. 3Blue1Brown heeft trouwens ook over andere wiskundige topics interessante filmpjes. Er is een risico op verslaving. Dus, is dit geschikt voor jouw? Maar, de video's zijn *echt* goed.

(6) Je begint aan de oefeningen, en raadpleegt de theorie zodra je vast zit.

(7) Je raadpleegt je handboeken uit het middelbaar onderwijs.

(8) ...

⋮

42) Je zoekt zelf een 43-ste manier. (Pas op: eerder risicovol voor de doorsnee student!)

Bij twijfel raden wij aan te kiezen voor optie 1).

En je bekijkt de filmpjes op youtube tijdens de pauzes.

De leerstof over afgeleiden is als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een overzicht en korte handleiding.

(2) Enkele modules waarin vanuit verschillende invalshoeken met afgeleiden wordt kennisgemaakt.

Je kan ze al dan niet lezen en bestuderen, aan het begin of aan heteinde van je studie van afgeleiden.

- Via limieten en raaklijnen
- Via verandering
- Via differentialen
- Via Youtube filmpjes (van 3Blue1Brown)

(3) Een overzicht van definities en notaties

(4) Een overzicht van de basisregels, de product- en quotëntregels en de kettingregel

(5) Een reeks basisoefeningen

(6) Een reeks meer uitdagende oefeningen (via Usolv-it)

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Intro Afgeleiden

(7) Enkele uitbreidingen

- Hogere orde afgeleiden

(8) Enkele toepassingen

- minimum-maximum problemen

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Definitie van afgeleide

De *afgeleide* van een functie f in een punt a geeft de *gevoeligheid* weer van de functiewaarde $f(x)$ voor kleine veranderingen van x in de buurt van a. Als de afgeleide gelijk is aan 1 verandert $f(x)$ ongeveer even snel als x, als de afgeleide 2 is dubbel zo snel, en als de afgeleide $1/2$ is half zo snel. De afgeleide is dus de *verhouding* tussen de verandering van $f(x)$ en die van x. Er is jammer genoeg een technische complicatie: die verhouding hangt in het algemeen af van de *grootte* van de verandering van x. En als de verandering in x nul is, dan verandert $f(x)$ natuurlijk ook niet, en is er geen verhouding te bepalen. De oplossing ligt in het begrip limiet en lijkt bij een eerste kennismaking misschien wat duister en zelfs afschrikwekkend. Gelukkig is het algemeen idee wel relatief eenvoudig, en in de praktijk wordt de definitie altijd vervangen door handige rekenregels.

Voorbeeld 2.1.1 (Gevoeligheid voor verandering bij rechten)**.**

De 'gevoeligheid voor verandering' is het duidelijkst zichtbaar bij rechten, dus bij *eerstegraadsfuncties*. De theorie van afgeleiden breidt dit uit tot veel algemenere functies.

Als x een klein beetje verandert bij een erg steile rechte, bijvoorbeeld $y = 100x + 42$, dan is de verandering in y veel groter dan die van x:

Als $y = 100x + 42$ en $x \rightsquigarrow x + 1$
dan $y \rightsquigarrow y + 100$ want $100(x+1) + 42 = \underbrace{100x + 42}_{y} + 100 = y + 100$

Voor de erg vlakke rechte $y = \frac{1}{100}x + 42$ is de verandering in y dan weer veel kleiner dan die in x:

Als $y = \frac{1}{100}x + 42$ en $x \rightsquigarrow x + 100$
dan $y \rightsquigarrow y + 1$ want $\frac{1}{100}(x+100) + 42 = \underbrace{\frac{1}{100}x + 42}_{y} + 1 = y + 1$

Conclusie: de richtingscoëfficiënt is een maat voor de gevoeligheid van y voor veranderingen in x. Het extreme geval is richtingscoëfficiënt gelijk aan nul: dan verandert y helemaal niet als x verandert.

Om later deze eenvoudige situatie voor rechten beter te kunnen vergelijken met het meer algemene geval, beschrijven we ze ook in detail in de taal van functies.

De functiewaarde van $f : x \mapsto f(x) = 2x - 1$ verandert in elk getal a dubbel zo snel als a zelf: als bij a één bijkomt dan komt er bij $f(a)$ twee bij, want

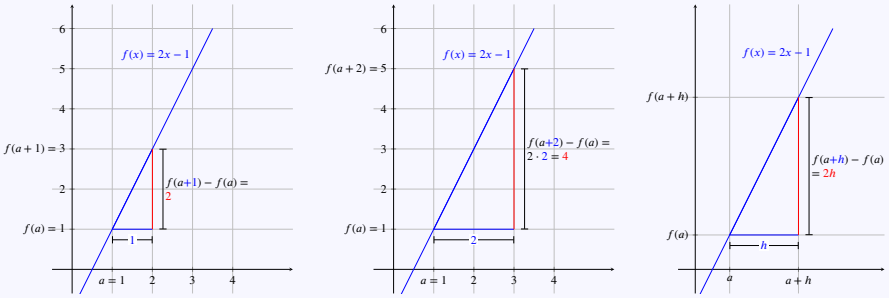
$$f(a{+}1) = 2(a{+}1) - 1 = 2a + 1 = (2a - 1) + 2 = f(a){+}2$$

Als bij a twee bijkomt, stijgt $f(a)$ met $2 \cdot 2 = 4$:

$$f(a{+}2) = 2(a{+}2) - 1 = 2a + 3 = (2a - 1) + 4 = f(a){+}4$$

en als bij a drie bijkomt, stijgt $f(a)$ met $2 \cdot 3 = 6$:

$$f(a{+}3) = 2(a{+}3) - 1 = 2a + 5 = (2a - 1) + 6 = f(a){+}6$$



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

2.1 Definitie van afgeleide

Als h de verandering is rond a, dan is de *verandering* van $f(a)$ naar $f(a+h)$ wiskundig het *verschil* tussen $f(a+h)$ en $f(a)$, dus $f(a+h)-f(a)$.

We stellen vast dat voor deze functie $f : x \mapsto 2x-1$ de verandering van de functiewaarden afhangt van de verandering h van x maar dat de *verhouding* tussen beide veranderingen constant is:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2(a+h)-1-(2a-1)}{h} = \frac{2a+2h-1-2a+1}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

Uit dezelfde berekening volgt dat dit voor elke functie $f : x \mapsto mx+q$ met $m, q \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{m(a+h)+q-(ma+q)}{h} = \frac{ma+mh+q-ma-q}{h} = \frac{mh}{h} = m.$$

We vinden dus het weinig verwonderlijke feit dat de richtingscoëfficiënt m van de rechte met vergelijking $y = mx+q$ aangeeft hoe snel y verandert als x verandert. Het is ook duidelijk dat deze verhouding niet afhangt van a: een rechte stijgt in elk punt even snel.

De hele theorie van afgeleiden is een succesvolle poging om deze eenvoudige inzichten over de richtingscoëfficiënt om het stijgen of dalen van rechten weer te geven te veralgemenen naar meer algemene functies (of krommen).
Er duiken daarbij twee enigszins vervelende aspecten op: enerzijds hangt de verhouding nu af van h, en anderzijds hangt de verhouding ook af van a. De afhankelijkheid van h wordt opgelost door de *limiet* te nemen voor $h \to 0$, en de afhankelijkheid van a door van de afgeleide een *functie van a* te maken.

Oefening 2.1.1. Onderzoek voor de functie $g : x \mapsto g(x) = \frac{x}{2}-1$ de verhouding van de veranderingen van $g(a)$ en a, zoals in het vorige voorbeeld.

Voorbeeld 2.1.2 (Gevoeligheid voor verandering bij kwadratische functies)**.**

Veeltermfuncties van de tweede graad, dus parabolen, zijn subtieler dan eerstegraadsveeltermen.
We onderzoeken de veranderingen van de functiewaarden van de functie $f : x \mapsto f(x) = x^2+1$ in de buurt van het punt $a = 1$, en zijn dus geïnteresseerd in het verschil $f(a+h)-f(a)$.

Als bij a één bijkomt, veranderen de functiewaarden als

$$f(a+1)-f(a) = (a+1)^2+1-(a^2+1) = a^2+2a+1+1-a^2-1 = 2a+1$$

en als bij a twee bijkomt

$$f(a+2)-f(a) = (a+2)^2+1-(a^2+1) = a^2+4a+4+1-a^2-1 = 4a+4$$

en als bij a drie bijkomt

$$f(a+3)-f(a) = (a+3)^2+1-(a^2+1) = a^2+6a+9+1-a^2-1 = 6a+9$$

Voor algemene h geldt

$$f(a+h)-f(a) = (a+h)^2+1-(a^2+1) = a^2+2ha+h^2+1-a^2-1 = 2ah+h^2$$

en verschil $f(a+h)-f(a)$ hangt dus zowel af van a als van h, en nog wel op een wat moeilijke manier, namelijk met een kwadraat van h.

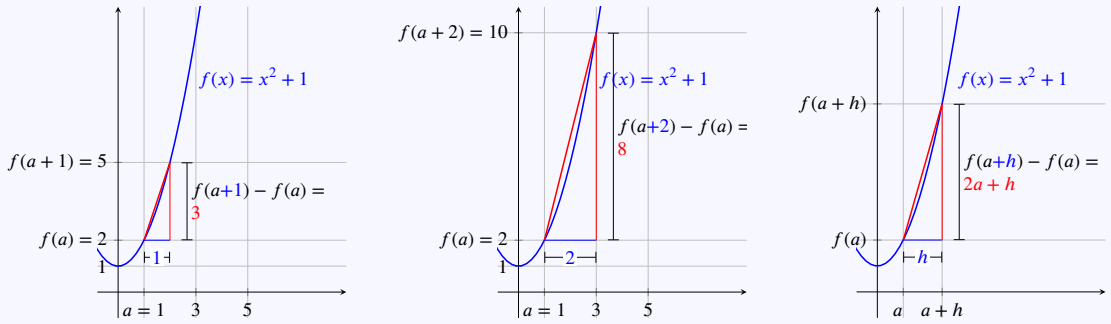
De *verhouding* van $f(a+h)-f(a)$ ten opzichte van h wordt

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$$

en ook die verhouding hangt af van zowel a als h.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Definitie van afgeleide



Als we de verhouding echter berekenen voor $a = 1$ en steeds kleinere waarden van h, dus steeds dichter in de buurt van $a = 1$, geeft dat

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
1	1	2	2	5	3	3
1	0.5	1.5	2	3.25	1.25	2.5
1	0.1	1.1	2	2.21	0.21	2.1
1	0.01	1.01	2	2.0201	0.00201	2.01
1	0.001	1.001	2	2.0020	0.00020	2.001

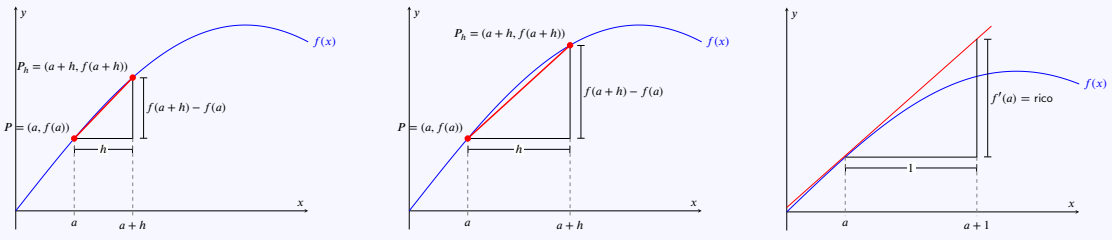
en we stellen vast dat die verhouding steeds dichter in de buurt van 2 ligt.

Een gelijkaardig onderzoek in de buurt van $a = 3$ levert een verhouding 6 op:

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3	1	4	10	17	7	7
3	0.5	3.5	10	13.25	3.25	6.5
3	0.1	3.1	10	10.61	0.61	6.1
3	0.01	3.01	10	10.0601	0.0601	6.01
3	0.001	3.001	10	10.006	0.006001	6.001

Voorbeeld 2.1.3.

De raaklijn aan de grafiek van een functie f in een punt $(a, f(a))$ kan je bekomen vanaf de rechte door $(a, f(a))$ en een naburig punt $(a+h, f(a+h))$, en dan h steeds kleiner te maken:



Opfrissing: formules voor rechten in het vlak.

Herinner u de vergelijking van de rechte L door twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) (met $x_1 \neq x_2$):

$$L \leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Definitie van afgeleide

De vergelijking van de rechte door de twee punten $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ is

$$y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}(x - a)$$

Door de term $f(a)$ naar het rechterlid te brengen krijgt de vergelijking de vorm $y = mx + q$ met rico $m = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Die rico hangt af van h (en van a, maar a is vast gekozen). Als h kleiner wordt, dan beweegt het punt $(a+h, f(a+h))$ op de grafiek van f naar het punt $(a, f(a))$. De rechte door $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ draait en heeft als limietstand de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$.
De rico van die raaklijn is dus gelijk aan

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en deze limietwaarde noemen we *de afgeleide van f in a*.
In het algemeen is die limiet niet eenvoudig berekenbaar, want hij leidt tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$. Maar verder zal blijken dat er gelukkig relatief eenvoudige technieken zijn om afgeleiden toch te berekenen.

Definitie 2.1.1 (Afgeleide in een punt)**.**

Een reële functie f is **afleidbaar** of **differentieerbaar** in een punt a van haar domein als de limiet $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *bestaat* en *eindig* is.

In dat geval noemen we die limiet **de afgeleide van f in a** en we noteren

$$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Uit voorbeeld 2.1.3 blijkt dat er een verband is tussen deze limiet en de raaklijn aan de grafiek:

Eigenschap 2.1.1 (Vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f)**.**

De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ is

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

en de *afgeleide in een punt* is dus de *richtingscoëfficiënt* van de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

Door de afgeleide van f in *elk punt* a te berekenen verkrijgen we een nieuwe *functie*:

Definitie 2.1.2 (Afgeleide functie)**.**

De **afgeleide functie** van een reële functie f, genoteerd f', is de functie

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

die enkel gedefinieerd is in de punten waar de afgeleide van f bestaat.

Het domein van de afgeleide functie kan strikt *kleiner* zijn dan het domein van de functie zelf als in een aantal punten de afgeleide niet bestaat.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Definitie van afgeleide

Voorbeeld 2.1.4.

1. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto 2x + 1$ is de functie $f' : x \mapsto 2$.

Uitwerking: Voor willekeurige a is de afgeleide gelijk aan 2, de afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2$.

2. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto x^2 + 1$ is de functie $f' : x \mapsto 2x$.

Uitwerking: Voor willekeurige a is de afgeleide gelijk aan $2a$, de afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2x$.

3. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto |x|$ is de functie $f' : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$

Uitwerking: In het punt $x = 0$ bestaat de afgeleide niet, en f' is dus niet gedefinieerd in $x = 0$:

$$f' : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Opmerking 2.1.1.

(a) Door $a + h = b$ te stellen, en dus $h = b - a$, kan je de limiet van de afgeleide ook schrijven als

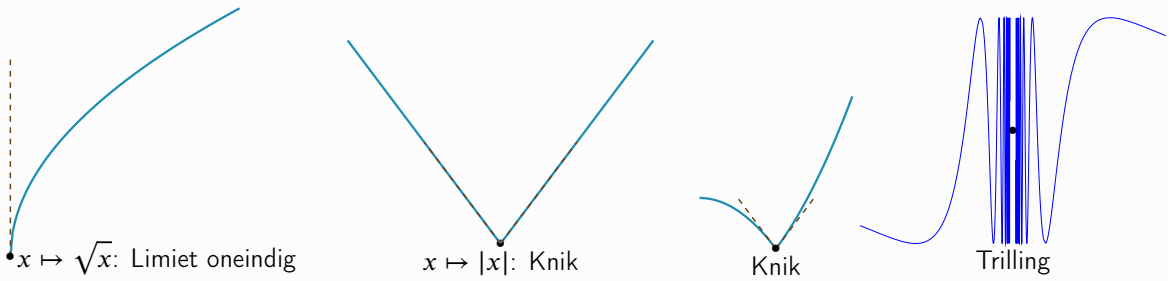
$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sommige handboeken gebruiken deze equivalente formulering.

(b) De breuk $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ beschouw je best niet als een *quotiënt* (dus het resultaat van een deling), maar eerder als een *verhouding*: de breuk meet hoe de verandering van y-waarden, dus $f(a+h) - f(a)$ zich verhoudt tot de verandering in x-waarden, dus $(a+h) - a = h$.
De afgeleide is *de limiet van die verhouding* voor steeds kleinere h, en meet dus hoeveel de y-waarden sneller of trager veranderen dan de x-waarden. Dat is op elke plaats anders, dus we hebben een functie nodig om al die verhoudingen netjes bij te houden.

Extra: voorbeelden van niet-afleidbare functies.

Niet alle functies zijn overal afleidbaar:



(a) Het is mogelijk dat de limiet $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *oneindig* wordt. In dat geval noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. We hebben dan een verticale raaklijn aan de grafiek van f in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de functie $x \mapsto \sqrt{x}$ in het punt $a = 0$. (figuur linksboven)

(b) De limiet bestaat in sommige gevallen niet omdat de linkerlimiet verschilt van de rechterlimiet in

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Definitie van afgeleide

een punt a. Er bestaat dan geen raaklijn aan de grafiek van f in a omdat de grafiek een knik maakt in a. Ook dan noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de absolute waarde $x \mapsto |x|$ in het punt $a = 0$. (figuur midden boven) Hier is

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{-h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ <}} (-1) = -1 \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} 1 = 1.$$

(c) In andere gevallen bestaat de limiet mogelijk niet omdat de functie f te erg trilt in de buurt van a. Er bestaan zelfs functies die *nergens* afleidbaar zijn. Hier gaan we niet verder op in.

Om historische en praktische redenen zijn in sommige contexten andere notaties gebruikelijk.

Definitie 2.1.3 (Notaties afgeleide)**.**

De afgeleide van een functie f wordt ook genoteerd als $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \overset{\text{def}}{=} f'$ (Leibniz notatie)

of ook als $Df \overset{\text{def}}{=} f'$ (Euler notatie)

De afgeleide van f in een punt a wordt dan $f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = Df(a)$.

De schrijfwijzen f', $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ en $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ worden in de praktijk door elkaar gebruikt.

Voorbeeld 2.1.5. We kunnen dus afgeleiden van functies op meerdere manieren schrijven:

$$(\sin x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin}{\mathrm{d}x}(x) \quad \text{en} \quad (5x^4+1)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^4+1) = \frac{\mathrm{d}(5x^4+1)}{\mathrm{d}x}$$

Extra: over notaties voor afgeleiden.

Geen echte leerstof, maar voor sommigen misschien toch verhelderend:

- Hoewel wiskundige begrippen bijna altijd erg nauwkeurig worden gedefinieerd, hangt er toch een mysterieuze *flou artistique* rond de precieze betekenis van het symbool x: soms is dat een onbekende, soms een willekeurig getal, soms een variabele, soms gewoon een letter en soms de naam van één of ander ding. In het bijzonder bij het afleiden van functies is het echter erg belangrijk x te beschouwen als een variabele, en zeker niet als een willekeurig getal. Inderdaad, als x een willekeurig getal zou zijn, zeg bijvoorbeeld 42, dan zou $x' = 42' = 0$ als afgeleide van een constante.

  Mede daarom gebruiken we in deze cursus liefst de notatie $f : x \mapsto f(x)$ of $f : t \mapsto f(t)$ om zo duidelijk mogelijk aan te geven dat x dan wel t de variabele is in een functiedefinitie. De identieke functie $x \mapsto x$ krijgt jammer genoeg meestal geen vaste naam, soms gebruikt men $\mathrm{Id} : x \mapsto \mathrm{Id}(x) = x$ of $\mathbb{1} : x \mapsto \mathbb{1}(x) = x$. De meest voor de hand liggende naam echter is – enigszins verrassend misschien – gewoon x, dus $x : x \mapsto x(x) = x$. En het is van die identieke functie x dat de afgeleide 1 is: $x' = 1$. En met x als naam voor de functie geldt zelfs de gelijkheid van functies $f(x) = f \circ x = f \ldots$

- Hoewel wiskundige notatie bijna altijd erg nauwkeurig wordt gedefinieerd, is de notatie voor afgeleiden een warboel. We definieerden de afgeleide van de functie f in a als $f'(a)$, en dus niet als $f(a)'$. En de afgeleide functie noteerden we $f' : x \mapsto f'(x)$, en ook hier komt dus $f(x)'$ niet voor. En dat is zeer terecht, want technisch staat in $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ het symbool $f(x)$ voor de functiewaarde van f in x, en dus $f(x) \in \mathbb{R}$. En als $f(x) \in \mathbb{R}$, dan is $f(x)' = 0$ als afgeleide van een constante.

  Dus, men zou willen afspreken dat je steeds $f'(x)$ moet gebruiken, en nooit $f(x)'$. Maar, dat werkt erg slecht voor concrete functies: hoe moet je de afgeleide noteren van $x \mapsto x^2$? Zeer zeker is x'^2

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Definitie van afgeleide

of $(x')^2$ onzin, en dus gebruikt men $(x^2)'$ of soms zonder haakjes $x^{2\prime}$. Eigenlijk feitelijk is dat fout ... Toch wordt het algemeen gebruikt, ook in deze cursus.

- Hoewel wiskundige notatie bijna altijd correct en consistent is opgebouwd, lijkt de notatie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ voor afgeleiden verdacht veel op een breuk, maar is het toch geen breuk, want het is volgens de definitie een *limiet* van een breuk. Toch zet men bij integralen het symbool dx ook in de teller, en men geeft betekenis aan de uitdrukking
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) \iff df = f'(x)dx$$
De symbolen df en dx zijn dan differentialen, maar die behandelen we hier niet.

- De notatie met f' is handig als de variabele waarnaar wordt afgeleid duidelijk is uit de context. In de wiskunde is die variabele dikwijls x, maar letters als t, u of y komen ook erg dikwijls voor. Als verwarring mogelijk is, zoals bij $2x^2t + 5u$, dan gebruik je beter de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$).

- Als een functie geschreven wordt als $y = f(x)$, en men dus eigenlijk via $f : x \mapsto y = f(x)$ in plaats van $f : x \mapsto f(x)$ een generieke naam y geeft aan het beeld, dan wordt ook y' gebruikt voor de afgeleide. Dat is bijvoorbeeld bij differentiaalvergelijkingen erg gebruikelijk.

  En zoals hierboven x gebruikt werd als naam voor de identieke functie $x : x \mapsto x(x) = x$, kan je dan eigenlijk beter ook de letter y gebruiken in plaats van f voor de naam van de functie:
$$y : x \mapsto y = y(x) \text{ en } \frac{dy}{dx} = y' = y'(x)$$
  Jammer genoeg gebruiken verschillende handboeken en cursussen hier dikwijls ook verschillende notaties en conventies.

- In cursussen fysica schrijft men ook $\dot{y}$ voor de afgeleide van een functie $y = f(t)$ naar de tijd t.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Definitie afgeleide

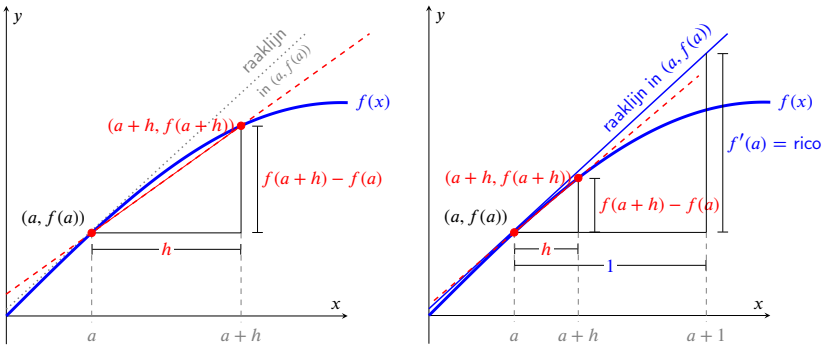
De *afgeleide van een reële functie in een punt* is een getal dat de helling van de grafiek in dat punt meet (concreet: het is de *richtingscoëfficiënt* van de *raaklijn* in dat punt). Je kan ook zeggen dat de afgeleide de *gevoeligheid* meet van de afhankelijke variabele voor veranderingen van de onafhankelijke variabele.

Definitie 2.2.1. De **afgeleide** van een reële functie f in a, genoteerd $f'(a)$ is het getal

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

als deze limiet bestaat en eindig is, en we noemen f dan **afleidbaar** of **differentieerbaar in** a.

De **afgeleide functie** is de functie $f' : x \mapsto f'(x)$, die enkel gedefinieerd is waar f afleidbaar is.



Opmerking 2.2.1. Door a te vervangen door x_0 en h door $x - x_0$ wordt $h \to 0$ nu $x \to x_0$ en:

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

De afgeleide $f'(x_0)$ zegt dat $f(x)$ in de onmiddellijke omgeving van x_0 ongeveer $f'(x_0)$ keer zo snel verandert als x. Inderdaad, voor x voldoende dicht bij x_0 geldt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x_0),$$

en dus $$f(x)-f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

of nog $$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

De laatste uitdrukking leidt tot de vergelijking van de raaklijn in x_0 aan de grafiek van f:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

waarbij $f'(x_0)$ dus de **richtingscoefficiënt** van de raaklijn is.

Soms gebruikt men ook de notatie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \stackrel{\text{def}}{=} f'$ voor de afgeleide. Vooral bij integralen is dat handig.

In de praktijk bereken je een afgeleide nooit met deze definitie, maar met eenvoudige rekenregels.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Definitie differentiaal

Om technische redenen voeren we hier ook al het begrip *differentiaal* in. Een differentiaal is 'een wiskundig object' waarvan we hier *niet* uitleggen *wat* het precies is. Je kan het dus voorlopig beschouwen als een extra notatie. Later zal het erg handig blijken bij het bestuderen en berekenen van integralen. Ook in de fysica en vele andere toepassingen is het handig om vlot met differentialen te kunnen rekenen.

Definitie 2.3.1 (Pseudo-definitie differentiaal)**.**

De **differentiaal van** x is een nieuw symbool dx.

De **differentiaal van** f, genoteerd df, is het (formeel) product:

$$df \overset{\text{def}}{=} f'(x) \cdot dx$$

Voorbeeld 2.3.1.

$d(x^2+1) = 2x\,dx$ want $(x^2+1)' = 2x$.

Opmerking 2.3.1.

- De *afgeleide functie* van f, genoteerd als f' of $\frac{df}{dx}$, is in elk punt gedefinieerd als een limiet.

  De *differentiaal* van f, genoteerd df, is een nieuw soort object, waarbij het verband met afgeleiden wordt gegeven in de definitie: $df = f'(x)\,dx$.

  Je kan deze formule lezen als 'de differentiaal van f is gelijk aan de afgeleide van f vermenigvuldigd met het *symbool* dx'.

- Dikwijls beschouwt men $\frac{df}{dx}$ gewoon als een andere notatie voor f'. Via het begrip differentiaal kunnen we $\frac{df}{dx}$ echter ook *beschouwen als een breuk of een verhouding*, namelijk een breuk of verhouding van *differentialen*: in de definitie $df \overset{\text{def}}{=} f'(x) \cdot dx$ beide leden formeel delen door dx levert de gekende gelijkheid $\dfrac{df}{dx} = f'(x)$.

  De afgeleide is dus de *verhouding* van de twee *differentialen* df en dx. En deze verhouding is blijkbaar een functie in x, en wel precies de *afgeleide functie* van f. Als je differentialen zou interpreteren als 'verandering', dan geeft de afgeleide het verband tussen de verandering df van de functie f ten gevolge van een verandering dx in de onafhankelijke variabele x.

- Merk op dat sommige handboeken en cursussen *andere afspraken* maken, en dat volgens die afspraken $\frac{df}{dx}$ mogelijk *geen breuk is*. Dit is meestal het geval omdat die handboeken niet spreken over *differentialen*.

- De gekende rekenregels werken voor differentialen: $dx + dx = 2\,dx$, $dx - dx = 0$ en $0\,dx = 0$. Voorlopig *vermenigvuldigen* we wel geen differentialen met elkaar: $dx \cdot dx$ heeft *geen betekenis*.

- Merk op dat dx dus een totaal ander symbool is dan ax: bij dx denk je direct aan differentiaal, bij ax, kx en rx denk je direct aan een product van a, k of r met x. Uitzonderlijk kan d toch een getal voorstellen en dan is dx dus toch d keer x.

Voorbeeld 2.3.2. In de fysica worden functies dikwijls genoteerd als $y = y(x)$. Als de snelheid v een functie is van de tijd t schrijft men dat als $v = v(t)$. De differentiaal dt wordt in de fysica beschouwd als een oneindig kleine verandering van de tijd t, en dv als de (ook oneindig kleine) verandering van de snelheid. De *verhouding* tussen die oneindig kleine veranderingen is precies de afgeleide (en dus

2.3 Definitie differentiaal

versnelling):

$$v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Begintest berekening afgeleiden

Als je volgende oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je dit deel over afgeleiden verder overslaan. Als dat niet of moeilijk lukt, bestudeer je eerst de theorie of maak je extra oefeningen. De regel van de l'Hôpital wordt hier nog niet behandeld.

Oefening 2.4.1. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^2) =$ …

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) =$ …

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) =$ …

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x \cdot \sin x) =$ …

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln x}{\sin x} =$ …

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2 - 7) =$ …

Oefening 2.4.2.

1. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie $f(x) = \ln g(x)$ in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

$f'(x) =$ …

2. Bereken de tweede afgeleide: $\frac{d^2}{dx^2}(\mathrm{bgsin}\, x + x) =$ ….

3. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1.

Oplossing: …

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Basisregels

De basisregels voor afgeleiden behandelen het afleiden van machten, sommen en scalaire veelvouden. Deze basisregels worden later aangevuld met de regels voor producten en quotiënten en voor samenstellingen.

We geven telkens drie versies van de basisregels: eerst met de notatie f', en vervolgens met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ en met differentialen. Het is belangrijk om na verloop van tijd met elke notatie vertrouwd te worden. Bij het begin van je studie kan je *zelf kiezen* welke notatie voor jou het meest duidelijk is. We vermelden hier niet de notatie Df die in vele handboeken van het secundair onderwijs voorkomt, maar als je er vertrouwd mee bent kan je die natuurlijk ook nog toevoegen.

Eigenschap 2.5.1 (Basisregels voor machten)**.**

De afgeleiden van de constante functie $x \mapsto c$ en de machtsfunctie $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn

	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(c)' = 0$
Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$
en met differentialen:	$\mathrm{d}x^r = rx^{r-1}\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}c = 0$

Merk op dat de machtregel voor *alle* reële exponenten geldt, en niet alleen voor natuurlijke getallen.

Voorbeeld 2.5.1.

1. $(1)' = 0$
2. $(\pi^2)' = 0$
3. $(x)' = 1$
4. $(x^2)' = 2x$
5. $(x^3)' = 3x^2$
6. $(x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
7. $(x^{-1/2})' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$
8. $(x^{n+42})' = (n+42)x^{n+41}$
9. $(x^\pi)' = \pi x^{\pi-1}$

Opmerking 2.5.1.

De afgeleide van een **constante functie** $x \mapsto c$ is de nulfunctie $x \mapsto 0$: $\left(\sqrt{2}\right)' = 0$

De afgeleide van de **identieke functie** $x \mapsto x$ is de constante functie $x \mapsto 1$: $x' = 1$.
Inderdaad, dit volgt uit de formule $(x^r)' = rx^{r-1}$ voor $r = 1$: $x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$.

De afgeleide van een macht brengt een **kopie van de exponent naar voor** en **vermindert de exponent met** 1: $(x^5)' = 5x^4$ en $(x^{-2})' = -2x^{-3}$.

Oefening 2.5.1. Bereken volgende afgeleiden:

1. $(x^{3/2})' = \ldots\ldots$
2. $(x^{2/3})' = \ldots\ldots$
3. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \ldots\ldots$

Er zijn ook eenvoudige regels voor de som en scalaire veelvouden:

Eigenschap 2.5.2 (Basisregels voor som en scalair veelvoud)**.**

De afgeleiden van som $f + g$ en scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g en $c \in \mathbb{R}$ zijn

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Basisregels

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$

en met differentialen: $\mathrm{d}(cf) = c\mathrm{d}f$ $\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$

Oefening 2.5.2.

1. $(7x)' = \ldots\ldots$
2. $(7x^2)' = \ldots\ldots$
3. $(7x+1)' = \ldots\ldots$
4. $(7x^2+7x)' = \ldots\ldots$
5. $(2(x+1))' = \ldots\ldots$
6. $(x(x+1))' = \ldots\ldots$

Opmerking 2.5.2.

De afgeleide van een scalair veelvoud is het scalair veelvoud van de afgeleide: $(5x)' = 5x' = 5$.
of ook: **bij afleiden mag je constanten buiten brengen**: $(cf)' = cf'$.

De afgeleide van een som is de som van de afgeleiden: $(7+5x)' = 7' + (5x)' = 0 + 5 = 5$.
of ook: **afgeleiden mag je term per term berekenen**: $(f+g)' = f' + g'$.

Deze twee regels zijn samen equivalent met volgende regel:

$$(af+bg)' = af' + bg' \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af+bg) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g \qquad \mathrm{d}(af+bg) = a\mathrm{d}f + b\mathrm{d}g$$

of: **de afgeleide van een lineaire combinatie is de lineaire combinatie van de afgeleiden**.

Met deze beperkte set van regels kunnen de afgeleiden van *alle* veeltermen berekend worden.

Oefening 2.5.3. Bereken volgende afgeleiden van veeltermen:

1. $\left(1+x+x^2\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(1+x+x^2+x^3\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(x+2x^2+3x^3+4x^4\right)' = \ldots\ldots$
5. $\left(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)' = \ldots\ldots$
6. $\left(\sqrt{\pi}+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 2.5.4. Bereken volgende afgeleiden

1. $\left(4x^2+8x+9\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(4x^2+8x+3^2\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left((2x)^2+8x+3^2\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(4x(x+2)+3^2\right)' = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

3.1 Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen (met $a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$).

Eigenschap 3.1.1 (Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies)**.**

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = 1/x \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}e^x = e^x \,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}a^x = a^x \ln a \,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x} = x^{-1}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\log_a x) = \frac{\mathrm{d}x}{x \ln a}$$

Opmerking 3.1.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van e^x is terug e^x. Dit is een erg handige en belangrijke eigenschap van de functie e^x en ze kan beschouwd worden als de *definitie* van het getal e. Er is een unieke exponentiële functie $x \mapsto a^x$ waarvoor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x$. Het grondtal van deze functie is per definitie e.
- de afgeleide van $\ln x$ is $1/x$. Het lijkt wat merkwaardig dat in de mooie reeks van afgeleiden-van-een-macht-is-terug-een-macht (namelijk $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^r = r x^{r-1}$) ineens een vreemde eend opduikt: ook de afgeleide van $\ln x$ blijkt een macht te zijn (namelijk x^{-1}).
- de afgeleide van *willekeurige* exponentiële of logaritmische functies is een *herschaling* (met een factor $\ln a$) van de afgeleide van e^x en $\ln x$.

Voorbeeld 3.1.1.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = 7^x \ln 7$. Verwar dit niet met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) = 7x^6$

Oefening 3.1.1. Bereken de afgeleiden van volgende exponentiële en logaritmische functies.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^x) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25 \cdot 7^x) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((a+7)^x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^2) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^r) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Afgeleiden van goniometrische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen.

Eigenschap 3.2.1 (Afgeleiden goniometrische functies)**.**

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie wordt dit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Opmerking 3.2.1. De afgeleide van de sinus is dus de cosinus, en de afgeleide van de cosinus is *min* de sinus. Het is nuttig om voor jezelf een ezelsbruggetje te vinden om die regel te onthouden. Sommigen onthouden SICO, voor (afgeleide van) SInus is COsinus, maar dat kan ongetwijfeld beter.

Omdat de tangens een quotiënt is van sinus en cosinus, zullen we verder zien hoe de formule voor tangens (en ook cotangens) eenvoudig kan worden *berekend*.

Het is soms belangrijk enkele alternatieve formuleringen te kennen. Omdat per definitie de secans en cosecans de omgekeerden zijn van cosinus en sinus, kan je de afgeleide van de tangens ook schrijven met secans en cosecans. Omdat bovendien $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ kan je de afgeleide van de tangens ook schrijven *als een formule met een tangens*:

Eigenschap 3.2.2.

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x = -(1 + \cot^2 x)$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Afgeleiden cyclometrische functies

Via de formule voor de afgeleide van een inverse functie kan men volgende formules aantonen:

Eigenschap 3.3.1 (Afgeleiden cyclometrische functies)**.**

$$(\mathrm{bgsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\mathrm{bgcos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\mathrm{bgtan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Of met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{bgsin}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{bgcos}\, x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{bgtan}\, x = \frac{1}{1+x^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Product- en quotiëntregel

We tonen hoe je *producten en quotiënten* van functies kan afleiden. Later volgt nog een regel over de *samenstelling* van functies. Met deze technieken kunnen dan de afgeleiden van ongeveer alle afleidbare functies die in de praktijk voorkomen worden berekend. We geven de regels in de drie notaties.

Eigenschap 3.4.1 (Productregel en quotiëntregel)**.**

De afgeleide van het product $f \cdot g$ en het quotiënt $\frac{f}{g}$ van twee afleidbare functies f en g wordt gegeven door:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \textbf{(productregel)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \quad \textbf{(productregel)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}(f \cdot g) = (\mathrm{d}f) \cdot g + f \cdot (\mathrm{d}g) \quad \textbf{(productregel)} \qquad \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\mathrm{d}f) \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Voorbeeld 3.4.1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x^4 \ln x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x^4 en $\ln x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4 \cdot \ln x\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4\right) \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) \\ &= 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = x^3(4 \ln x + 1)\,.\end{aligned}$$

Voorbeeld 3.4.2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{2x+3}{4x+5}$.

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $2x+3$ en $4x+5$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x+3}{4x+5} &= \frac{2(4x+5) - 4(2x+3)}{(4x+5)^2} \\ &= \frac{8x + 10 - 8x - 12}{(4x+5)^2} = \frac{-2}{(4x+5)^2}\end{aligned}$$

Voorbeeld 3.4.3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{\ln x}{\sin x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Product- en quotiëntregel

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln x}{\sin x}\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)\cdot \sin x - \ln x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\frac{\sin x}{x} - \ln x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{x\,\sin x} - \frac{\ln x\,\cos x}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Oefening 3.4.1.

1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (x^3+27)(x^4-1)$
2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$
3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (x^{42}+x^{13}+1)(x^{2020}-1)$

Opmerking 3.4.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- om de afgeleide van een *product* te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de eerste factor, en je vermenigvuldigt die afgeleide met de tweede factor. Daarbij tel je de afgeleide van de tweede factor vermenigvuldigd met de eerste factor op.

  Dus: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\cdot\sin x) = (2x)\cdot\sin x + x^2\cdot\cos x = x(2\sin x + x\cos x)$

- om de afgeleide van een *quotiënt* te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de teller, en vermenigvuldigt die afgeleide met de noemer. Daarvan trek je de afgeleide van noemer vermenigvuldigd met de teller af. Vervolgens deel je het verschil door het kwadraat van de noemer.

  Dus: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{x^2}{\sin x} = \dfrac{(2x)\cdot\sin x - x^2\cdot(\cos x)}{\sin^2 x} = \dfrac{x(2\sin x - x\cos x)}{\sin^2 x}$

- de formule voor product kan je naar keuze schrijven en begrijpen als:

  $$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad \text{of} \quad (f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f$$

  Dus:

  (*afgeleide* eerste factor) maal (tweede factor) plus (eerste factor) maal (*afgeleide* tweede factor)
  dan wel
  (*afgeleide* eerste factor) maal (tweede factor) plus (*afgeleide* tweede factor) maal (eerste factor)

Eigenschap 3.4.2. De formule voor product kan je veralgemenen naar een product van meerdere factoren:

$$\begin{aligned}(f\cdot g\cdot h)' &= (f\cdot(g\cdot h))' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g\cdot h)' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g'\cdot h + g\cdot h') \\ &= f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Product- en quotiëntregel

Dus: leid *elke* factor af, vermenigvuldig die afgeleide met de andere factoren en tel al de producten op.

Voorbeeld 3.4.4. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x \cdot \ln x \cdot \sin x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x,$\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x \cdot \sin x) &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x)(\ln x \cdot \sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x)(x \cdot \sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x)(x \cdot \ln x) \\ &= \ln x \sin x + \sin x + x \ln x \cos x.\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Kettingregel

De zogenaamde *kettingregel* laat toe om de afgeleide te berekenen van *samengestelde* functies.

Eigenschap 3.5.1 (Kettingregel)**.**

De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is gelijk aan:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

Dezelfde kettingregel kan ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

of met differentialen:

$$d(f(g(x))) = f'(g(x))\, dg(x) = f'(g(x))\, g'(x)\, dx \quad \textbf{(kettingregel)}.$$

Opmerking 3.5.1. We hebben in de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie de afgeleide van f toch genoteerd als f' om de notatie eenvoudig te houden. De kettingregel kan ook geformuleerd worden als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}(f(g)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$$

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 3.5.1.

(a) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (5x+2)^2$:

Merk allereerst op dat je in dit voorbeeld de kettingregel niet *moet* gebruiken. Je kan ook het kwadraat eerst uitrekenen:

$$((5x+2)^2)' = (25x^2 + 20x + 4)' = 50x + 20$$

Je *mag* de kettingregel wel gebruiken en je vindt uiteraard hetzelfde resultaat.

We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (5x+2)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto 5x+2$$

dan is $f(g(x)) = f(5x+2) = (5x+2)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto 5$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{5x+2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{5}^{g'(x)} = 10(5x+2) = 50x+20$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Kettingregel

waarbij $f'(g(x)) = f'(5x+2) = 2(5x+2)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((5x+2)^2)' = 2(5x+2)\cdot 5 = 10(5x+2)$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 2(5x+2)\cdot 5.$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(5x+2)^2 = 2(5x+2)\,d(5x+2) = 2(5x+2)5\,dx = 10(5x+2)\,dx$$

(b) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin^2 x$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder het kwadraat met haakjes: $x \mapsto (\sin x)^2$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (\sin x)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sin x$$

dan is $f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto \cos x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{\sin x}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{\sin x}^{g(x)})}_{f'(g(x))}\cdot \overbrace{\cos x}^{g'(x)} = 2\sin x\cos x$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(\sin x) = 2(\sin x)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((\sin x)^2)' = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^2 = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x)^2 = 2(\sin x)\,d(\sin x) = 2(\sin x)\cos x\,dx = 2\sin x\cos x\,dx$$

(c) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin x^2$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder haakjes rond het kwadraat: $x \mapsto \sin(x^2)$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Kettingregel

- De functie $x \mapsto \sin(x^2)$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto \sin x$$
$$g : x \mapsto x^2$$

dan is $f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$. Omdat

$$f' : x \mapsto \cos x$$
$$g' : x \mapsto 2x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{\sin(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{\cos(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{2x}^{g'(x)} = 2x\cos x^2$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(x^2) = \cos(x^2)$

Je *moet* de samenstellende functies geen namen geven. Je kan ook sneller rekenen als volgt:

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Je kan ook de notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken, dat geeft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x^2) = \cos x^2 d(x^2) = \cos x^2\, 2x dx$$

Oefening 3.5.1.

1. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5^{x^2} = \ldots\ldots$

2. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie

$$f(x) = \ln g(x)$$

in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

Opmerking 3.5.2. We begrijpen deze kettingregel als volgt:

- Om de afgeleide van een samenstelling $f(g(x))$ te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de *buitenste* functie f en die evalueer je in de enige waarde waar dat betekenis heeft: de functiewaarde van de binnenste functie g. Vervolgens vermenigvuldig je dat resultaat met de afgeleide van de binnenste functie. Dus: afleiden doe je *van buiten naar binnen*, stap per stap, en je vermenigvuldigt de tussenresultaten met elkaar.
- Indien je nog niet zo vertrouwd bent met de kettingregel kan je de samenstellende functies f en g expliciet opschrijven, of je kan werken met extra variabelen (*substitutie*). We geven een

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Kettingregel

voorbeeld met extra variabelen in de notatie met differentialen:

$$\mathrm{d}\sin(x^2) \overset{x^2=u}{=} \mathrm{d}\sin(u) = \cos(u)\mathrm{d}u \overset{u=x^2}{=} \cos(x^2)\mathrm{d}x^2 = \cos(x^2)\cdot 2x\mathrm{d}x = 2x\cos x^2\mathrm{d}x$$

en

$$\mathrm{d}(\sin^2 x) = \mathrm{d}(\sin x)^2 \overset{\sin x=v}{=} \mathrm{d}v^2 = 2v\,\mathrm{d}v \overset{v=\sin x}{=} 2\sin x\cdot \mathrm{d}\sin x = 2\sin x\cos x\mathrm{d}x$$

Zodra je vertrouwd bent met de kettingregel is het niet meer nodig om de extra variabele expliciet op te schrijven.

Eigenschap 3.5.2. De *ketting*regel berekent de afgeleide van een ketting of *keten* van samenstellingen:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

Dus je leidt de samenstellende functies af *van buiten naar binnen* en vermenigvuldigt de afgeleiden.

Voorbeeld 3.5.2. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2-7)$.

We gebruiken weer de kettingregel, maar nu hebben we een samenstelling van drie functies: $f(x)=x^3$, $g(x)=\cos x$ en $h(x)=4x^2-7$.

$$f(g(h(x))) = f(g(4x^2-7)) = f(\cos(4x^2-7)) = \cos^3(4x^2-7)$$

In de eerste stap van de berekening gebruiken we:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x)))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(g(h(x)))]$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^3\left(4x^2-7\right)\right] &= 3\left(\cos\left(4x^2-7\right)\right)^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos\left(4x^2-7\right)\right]\\ &= 3\cos^2\left(4x^2-7\right)\left(-\sin\left(4x^2-7\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x^2-7\right]\right)\\ &= -3\cos^2\left(4x^2-7\right)\sin\left(4x^2-7\right)\cdot 8x\\ &= -24x\sin\left(4x^2-7\right)\cos^2\left(4x^2-7\right).\end{aligned}$$

Oefening 3.5.2.

1. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\sin^3(e^{x^2})} = \ldots\ldots$

Opmerking 3.5.3.

De Leibniz notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ is bijzonder handig als x op zijn beurt afhankelijk wordt van een andere variabele (bijvoorbeeld van de tijd, of bij een substitutie) en wordt dan ook vaak gebruikt in de fysica.

Stel dat bij een functie $x\mapsto f(x)$ blijkt dat x eigenlijk afhangt van t. Dan is x dus zelf een functie van t, dus $x : t\mapsto x(t)$. Dan wordt natuurlijk ook f een functie van t, namelijk $t\mapsto f(x(t))$. We

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Kettingregel

krijgen dan volgende functies:

$$f : x \mapsto f(x)$$
$$x : t \mapsto x(t)$$
$$f \circ x : t \mapsto f(x(t))$$

en die functies hebben respectievelijk als afgeleide

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f : x \mapsto f'(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x : t \mapsto x'(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ x) : t \mapsto (f \circ x)'(t) \overset{\text{kettingregel}}{=} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

Een concreet voorbeeld: je rijdt met de auto van $A_{ntwerpen}$ naar B_{russel}. Je schrijft de afgelegde afstand in kilometer als x en je noemt $f(x)$ het aantal liter benzine in je tank na x km. Veronderstel dat je vertrekt met een volle tank van 50 liter en je auto 5 liter verbruikt per honderd kilometer, dan is

$$f(x) = 50 - \frac{5}{100}x.$$

Veronderstel dat je aan een constante snelheid van 75 km/u rijdt, dan is de afgelegde weg x na t uur dus $x(t) = 75 \cdot t$ km. De samengestelde functie $f(x(t))$ is dan

$$f(x(t)) = 50 - \frac{5}{100}x(t) = 50 - \frac{5}{100} \cdot 75 \cdot t = 50 - \frac{75 \cdot 5}{100}t$$

en die formule drukt uit hoeveel benzine je nog hebt na t uur, in plaats van na x kilometer.

De kettingregel zegt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = f'(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$

of anders geschreven:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)}$$

Als we schrijven dat $x = x(t)$ en $y = f(x)$, dus ook $y = f(x(t))$ wordt dat soms korter genoteerd als:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

We kunnen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$$

ook met gebruik van andere letters formuleren. Bijvoorbeeld met functie $u(x)$ in plaats van $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(u(x))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(u(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)$$

of met de functies u en v in plaats van f en x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(v(x))) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}(v(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x)$$

maar het betekent natuurlijk allemaal hetzelfde.

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Kettingregel

Opmerking 3.5.4.

Je kan de regels voor het afleiden van producten, quotiënten en samenstellingen als volgt samenvatten:

- je *begint* altijd direct de eerste of buitenste functie af te leiden
- daarna werk je als volgt verder:
  - bij de *vermenigvuldiging* $(f \cdot g)'$
    - je maakt het product $f' \cdot g$ van de afgeleide van de eerste factor met de andere factor(en),
    - je doet vervolgens hetzelfde voor de andere factor(en), dus $g' \cdot f$,
    - en je maakt de *som* van al die resultaten: $f' \cdot g + g' \cdot f$
  - bij de *deling* $\left(\frac{f}{g}\right)'$
    - je maakt het product $f' \cdot g$ van de afgeleide van de teller met de noemer,
    - je doet vervolgens hetzelfde voor noemer (dus afgeleide noemer maal teller, of $g' \cdot f$),
    - maar je maakt het *verschil* van die twee resultaten: $f' \cdot g - g' \cdot f$
    - en je deelt alles door het *kwadraat van de noemer*: $\frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
  - bij de *samenstelling* $(f \circ g)'$
    - je evalueert de afgeleide van de buitenste functie in het correcte punt: $f'(g(x))$,
    - je doet vervolgens hetzelfde voor binnenste functie(s): $g'(x)$,
    - en je maakt het *product* van al die resultaten: $f'(g(x)) \cdot g'(x)$

De productregel en kettingregel kunnen op die manier ook erg eenvoudig worden begrepen voor meerdere functies:

- $(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + g' \cdot f \cdot h + h' \cdot f \cdot g$
- $(f \circ g \circ h)' = f'(g(h)) \cdot g'(h) \cdot h'$
- $(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$
- $(f(g(h(k(x)))))' = f'(g(h(k(x)))) \cdot g'(h(k(x))) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x)$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Product- en quotiëntregel

Met volgende formules kan je de afgeleiden berekenen van *producten en quotiënten* van functies:

Eigenschap 4.1.1 (Productregel en quotiëntregel)**.**

De *afgeleide van het product* $f \cdot g$ en *het quotiënt* $\frac{f}{g}$ van afleidbare functies f en g is

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{(productregel)} \qquad \text{en} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \text{(quotiëntregel)}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2}$

Opmerking 4.1.1.

De productregel zegt dat de *afgeleide van een product* van functies $f \cdot g$ berekend wordt door

- de afgeleide van de eerste factor te vermenigvuldigen met de tweede factor,
- de afgeleide van de tweede factor te vermenigvuldigen met de eerste factor,
- en de *som* te maken van die resultaten: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Bij een product van *meerdere functies* pas je de productregel herhaaldelijk toe:

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h)' &= (f \cdot (g \cdot h))' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g \cdot h)' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g' \cdot h + g \cdot h') \\ &= f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'\end{aligned}$$

Dus: leid *elke* factor af, vermenigvuldig die afgeleide met de andere factoren en tel alle producten op.

Voorbeeld 4.1.1. Bereken de afgeleide van volgende functies.

1. $x \mapsto (x^3 + 7x - 1) \cdot (5x + 2)$

Uitwerking: Deze functie is het product van $x^3 + 7x - 1$ en $5x + 2$, en de productregel zegt dan dat

$$\begin{aligned}\big((x^3 + 7x - 1) \cdot (5x + 2)\big)' &= (x^3 + 7x - 1)' \cdot (5x + 2) + (x^3 + 7x - 1) \cdot (5x + 2)' \\ &= (3x^2 + 7) \cdot (5x + 2) + (x^3 + 7x - 1) \cdot (5) \\ &= 15x^3 + 6x^2 + 35x + 14 + 5x^3 + 35x - 5 = 20x^3 + 6x^2 + 70x + 9\end{aligned}$$

Je kan voor deze functie ook eerst de haakjes uitwerken en dan de regels van machten toepassen.

2. $x \mapsto \frac{x^2}{3x - 1}$

Uitwerking: Deze functie is het quotiënt van x^2 en $3x - 1$, en de quotiëntregel zegt dan dat

$$\left(\frac{x^2}{3x - 1}\right)' = \frac{(3x - 1)(2x) - (x^2)(3)}{(3x - 1)^2} = \frac{6x^2 - 2x - 3x^2}{(3x - 1)^2} = \frac{x(3x - 2)}{(3x - 1)^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Product- en quotiëntregel

3. $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}\left(2x - x^2\right)$

Uitwerking: De wortel herschrijf je als een macht: $x^{\frac{2}{3}}(2x - x^2)$. De productregel zegt dan dat

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\left(2x - x^2\right)\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2x - x^2) + x^{\frac{2}{3}}(2 - 2x)$$

Oefening 4.1.1. Bereken de afgeleide van volgende functies.

1. $x \mapsto (x^3 + 27)(x^4 - 1)$

2. $x \mapsto \dfrac{2x + 3}{4x + 5}$

3. $x \mapsto \dfrac{x + 1}{x - 1}$

4. $x \mapsto (x^{42} + x^{13} + 1)(x^{2020} - 1)$

5. $x \mapsto x \cdot \sqrt{x} \cdot (x^3 + 1)$

Oefening 4.1.2. Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = x \cdot x^2$

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Kettingregel

De zogenaamde *kettingregel* laat toe om de afgeleide te berekenen van *samengestelde* functies.

Eigenschap 4.2.1. De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \textbf{(kettingregel)}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(g(x))\big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big(g(x)\big) \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)$

Extra: subtiliteiten bij de formulering met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Bij samengestelde functies is er een wat subtiel maar erg belangrijk onderscheid tussen

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(g(x))\big) = \frac{\mathrm{d}(f\circ g)}{\mathrm{d}x}(x)$, de afgeleide van de samengestelde functie $f\circ g$

en $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big(g(x)\big)$, de afgeleide van de functie f, geëvalueerd in $g(x)$.

De kettingregel zegt: de afgeleide $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(g(x))\big)$ is het *product* van $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big(g(x)\big)$ met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$.

Voor niet-samengestelde functies heeft de plaats van f en (x) typisch geen belang: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.
En ja, dat is verwarrend ...

Opmerking 4.2.1.

De afgeleide van een *samenstelling* van functies bereken je **van buiten naar binnen**:

- bereken de afgeleide van de *buitenste* functie en evalueer in de binnenste: $f'(g(x))$,
- bereken de afgeleide van de *binnenste* functie en evalueer in x: $g'(x)$,
- maak het *product* van die resultaten: $(f\circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Bij de kettingregel let je zowel op de plaats van de *afgeleiden*: $(f\circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
als op de plaats van de *functies*: $(f\circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Merk ook op dat ergens wel logisch is om f' in $g(x)$ te evalueren, en niet in x. Inderdaad, $f'(x)$ is mogelijk betekenisloos voor x in het domein van $f\circ g$: bij $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en $g : x \mapsto x^2 - 5$ is $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ niet gedefinieerd in $x = -3$, maar $f(g(-3)) = \sqrt{(-3)^2 - 5} = \sqrt{9-5} = 2$ wel, en $f'(g(-3)) = \frac{1}{2\sqrt{(-3)^2-1}} = \frac{1}{4}$ ook.

Anderzijds is het ook logisch dat de afgeleide $f(g(x))'$ niet gewoon $f'(g(x))$ kan zijn: de functie $g : x \mapsto 100x$ drukt de grafiek van f erg samen in de x-richting, en dus worden de raaklijnen veel steiler. Hier is $g'(x) = 100$, en dus $(f(100x))' = 100f'(100x)$, en zijn de rico's bij $f(100x)$ precies 100 keer groter dan die bij $f(x)$.

Bij een samenstelling van *meerdere functies* pas je de kettingregel herhaaldelijk toe:

$$\begin{aligned}\big(f(g(h(x)))\big)' &= f'(g(h(x))) \cdot \big(g(h(x))\big)' \\ &= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)\end{aligned}$$

en dus $\big(e^{\sin 5x}\big)' \underset{e^{g(h(x))}}{=} \big(e^{\sin 5x}\big) \cdot (\sin 5x)' \underset{\sin(h(x))}{=} \big(e^{\sin 5x}\big) \cdot (\cos 5x) \cdot (5x)' = 5 \cdot \big(e^{\sin 5x}\big) \cdot (\cos 5x)$

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Kettingregel

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 4.2.1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (5x+2)^3$

Uitwerking: De functie $x \mapsto (5x+2)^3$ is de samenstelling van $f : x \mapsto x^3$ en $g : x \mapsto 5x+2$ want $f(g(x)) = f(5x+2) = (5x+2)^3$.
Omdat $f' : x \mapsto 3x^2$ en $g' : x \mapsto 5$ zegt de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ dat

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f(g(x))} \Big)' = \underbrace{3(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{5}_{g'(x)} = 15(5x+2)^2 = 15(25x^2+20x+4)$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(5x+2) = 3(5x+2)^2 = 3(25x^2+20x+4)$.

Zodra je voldoende vertrouwd bent met de kettingregel kan je zonder f en g direct schrijven

$$\big((5x+2)^3\big)' = 3(5x+2)^2 \cdot (5x+2)' = (125x^2+30x+12) \cdot 5 = 375x^2+300x+60.$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie wordt dit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^3 = 3(5x+2)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2) = (125x^2+30x+12) \cdot 5 = 375x^2+300x+60.$$

Merk op dat je in dit voorbeeld de kettingregel niet *moet* gebruiken:

$$\big((5x+2)^3\big)' = \big(125x^3+300x^2+60x+8\big)' = 375x^2+300x+60.$$

Voorbeeld 4.2.2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sqrt{x^3-7}$

Uitwerking: De functie $x \mapsto \sqrt{x^3-7}$ is de samengestelling van $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en $g : x \mapsto x^3-7$ want $f(g(x)) = f(x^3-7) = (x^3-7)^{1/2}$.
Omdat $f' : x \mapsto \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $g' : x \mapsto 3x^2$ zegt de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ dat

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{x^3-7}^{g(x)})^{1/2}}_{f(g(x))} \Big)' = \underbrace{\frac{1}{2}(\overbrace{x^3-7}^{g(x)})^{-1/2}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{(3x^2)}_{g'(x)} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-7}}$$

Voorbeeld 4.2.3. Berekenen de afgeleide van de functie $f : [-2,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sqrt{3x+6}$.

Uitwerking: Hiervoor gebruik je zowel de *productregel* als de *kettingregel*. De productregel levert

$$f'(x) = \Big(x \cdot \sqrt{3x+6}\Big)' = (x)' \cdot \sqrt{3x+6} + x \cdot \Big(\sqrt{3x+6}\Big)'$$

en met de kettingregel vind je $\Big(\sqrt{3x+6}\Big)' = \frac{1}{2\sqrt{3x+6}} \cdot (3x+6)' = \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$,

zodat $\Big(x \cdot \sqrt{3x+6}\Big)' = 1 \cdot \sqrt{3x+6} + x \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x+6}} = \frac{2(3x+6)}{2\sqrt{3x+6}} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+6}} = \frac{9x+12}{2\sqrt{3x+6}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Kettingregel

Oefening 4.2.1. Bereken de afgeleide van volgende functies.

1. $x \mapsto (x^3 + 27)^{15}$

2. $x \mapsto (27x^3 + 5)^{15}$

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide kan men aantonen dat:

Eigenschap 4.3.1. De afgeleide van de exponentiële en logaritmische functie zijn

$$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1}$

De kettingregel en het feit dat $a = e^{\ln a}$ en $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ geeft dan

Gevolg 4.3.1. Omdat $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ en $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x$ (met $a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$) geldt dat

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \ln a$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

Opmerking 4.3.1.

- De afgeleide van e^x is terug e^x. Dit is een erg handige en belangrijke eigenschap van de functie e^x en ze kan beschouwd worden als de *definitie* van het getal e: het getal e is het unieke getal $a \in \mathbb{R}$ waarvoor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x \stackrel{?}{=} a^x$.
- De afgeleide van $\ln x$ is $1/x$. Het lijkt wat merkwaardig dat in de mooie reeks van afgeleiden-van-een-macht-is-terug-een-macht (namelijk $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^r = r x^{r-1}$) ineens een vreemde eend opduikt: ook de afgeleide van $\ln x$ blijkt een macht te zijn (namelijk x^{-1}).
- De functie $x \mapsto e^x$ is essentieel de enige functie die gelijk is aan haar afgeleide. Inderdaad, stel dat voor een functie f geldt dat $f = f'$. De quotiëntregel toegepast op $f(x)/e^x$ geeft dan:

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{e^x f'(x) - f(x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x(f'(x) - f(x))}{(e^x)^2} \stackrel{f'(x)=f(x)}{=} 0$$

  Omdat de afgeleide nul is, is $f(x)/e^x = c$ voor een constante $c \in \mathbb{R}$, en dus is $f(x) = ce^x$.

Voorbeeld 4.3.1.

1. De afgeleide van $f : x \mapsto \ln(x^{100})$ is $f' : x \mapsto \frac{100}{x}$

Uitwerking: Beschouw f als samenstelling van $g(x) = \ln(x)$ en $h(x) = x^{100}$ en pas de kettingregel toe:

$$f'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{x^{100}} \cdot 100x^{99} = 100 \cdot \frac{1}{x} = \frac{100}{x}$$

Uit de rekenregels van logaritmen volgt echter gemakkelijker dat $\ln(x^{100}) = 100 \cdot \ln(x)$ en $(100 \cdot \ln x)' = \frac{100}{x}$.

2. De afgeleide van $f : x \mapsto x^4 - 4^x$ is $f' : x \mapsto 4x^3 - ln4 \cdot 4^x$

3. De afgeleide van $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$ is $f' : x \mapsto \frac{1-x}{e^x}$

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

Uitwerking: $\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{1e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{(1-x)}{e^x}$

4. De afgeleide van $f : x \mapsto e^{x^2}$ is $f' : x \mapsto 2x \cdot e^{x^2}$

Uitwerking: $(e^{x^2})' \overset{\text{kettingregel}}{=} e^{x^2} \cdot 2x$

Oefening 4.3.1.

1. De afgeleide van $f : x \mapsto x^4 \ln x$ is $f' : x \mapsto \ldots\ldots$

2. De afgeleide van $f : x \mapsto xe^{2x}$ is $f' : x \mapsto \ldots\ldots$

3. De afgeleide van $f : x \mapsto \frac{\ln x}{2^x}$ is $f' : x \mapsto \ldots\ldots$

Oefening 4.3.2. Bereken volgende afgeleiden.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2 - x^2 + 3e^{-x}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x + 3^x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4^{2x}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

4. $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x \ln x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

5. $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3^{x^2}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 4.3.3. Bereken volgende afgeleiden.

1. $(\pi^x)' = \ldots\ldots$

2. $(x^\pi)' = \ldots\ldots$

3. $(25 \cdot 7^x)' = \ldots\ldots$

4. $((a+7)^x)' = \ldots\ldots$

5. $(\ln x^2)' = \ldots\ldots$

6. $(\ln x^r)' = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Afgeleiden van goniometrische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide kan men aantonen dat:

Eigenschap 4.4.1 (Afgeleiden goniometrische functies)**.**

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Opmerking 4.4.1.

- De afgeleide van de sinus is de cosinus en de afgeleide van de cosinus is *min* de sinus. Vind uzelf een ezelsbruggetje om die regel te onthouden. Sommigen onthouden SICO, voor (afgeleide van) SInus is COsinus, maar dat kan ongetwijfeld beter.
- De afgeleide van de sinus is niet zo eenvoudig te berekenen met de definitie, en we leggen hier niet uit *waarom* de afgeleide van de sinus gelijk is aan de cosinus.
- Zodra je weet dat $(\sin x)' = \cos x$ volgt met de kettingregel wel direct de formule voor $(\cos x)'$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \overset{\text{beide leden afleiden}}{\Longrightarrow} 2\cos x(\cos x)' + 2\sin x\cos x = 0 \implies (\cos x)' = -\sin x$$

- En de formule voor $(\tan x)'$ volgt dan eenvoudig uit de quotiëntregel:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot(\sin x)' - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- Omdat $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ kan je ook schrijven

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

wat soms handig is omdat het de afgeleide van de tangens schrijft in functie van een tangens.

Voorbeeld 4.4.1. Bereken de afgeleiden van de functies $x \mapsto \sin x^2$ en $x \mapsto \sin^2 x$.

1. De afgeleide van $x \mapsto \sin x^2$ is de functie $x \mapsto 2x\cos x^2$.

Uitwerking: De functie $h : x \mapsto \sin(x^2)$ is de samenstelling van $f : x \mapsto \sin x$ en $g : x \mapsto x^2$ want $h(x) = \sin(x^2) = f(g(x))$. Omdat $f'(x) = \cos x$ en $g'(x) = 2x$ zegt de kettingregel $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ dat

$$\Big(\underbrace{\sin(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{\cos(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f'(g(x))}\cdot\overbrace{2x}^{g'(x)} = 2x\cos x^2$$

Indien je voldoende vertrouwd bent met de kettingregel kan je zonder f en g direct schrijven

$$\big(\sin x^2\big)' = \cos x^2\cdot\big(x^2\big)' = \cos x^2\cdot 2x = 2x\cos x^2$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Afgeleiden van goniometrische functies

en met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ wordt dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$$

2. De afgeleide van $x \mapsto \sin^2 x$ is de functie $x \mapsto 2\sin x \cos x$.

Uitwerking: De functie $x \mapsto \sin^2 x = (\sin x)^2$ is de samenstelling van $g : x \mapsto x^2$ en $f : x \mapsto \sin x$ want $(\sin x)^2 = g(f(x))$. Omdat $g' : x \mapsto 2x$ en $f' : x \mapsto \cos x$ zegt de kettingregel $\big(g(f(x))\big)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ dat

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{\sin x}^{f(x)})^2}_{g(f(x))}\Big)' = \underbrace{(2\overbrace{\sin x}^{f(x)})}_{g'(f(x))} \cdot \overbrace{\cos x}^{f'(x)} = 2\sin x\cos x$$

Indien je voldoende vertrouwd bent met de kettingregel kan je zonder f en g direct schrijven

$$\big(\sin^2 x\big)' = \big((\sin x)^2\big)' = (2\sin x)\cdot(\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x$$

en met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ wordt dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^2 = 2(\sin x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

Merk op dat je het antwoord nog kan herschrijven als $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

Oefening 4.4.1. Bereken volgende afgeleiden.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin 42x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x^{42}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin^{42} x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos^{42} x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 4.4.2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sin x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.0.A Basisoefeningen afgeleiden

Oefening 5.0.3. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\left(x^{1/3}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(x^{-1/3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(x^4\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(9x^9\right)' = \ldots\ldots$
5. $(x^4 - 4x)' = \ldots\ldots$
6. $(x + \sin x)' = \ldots\ldots$
7. $(x - \cos x)' = \ldots\ldots$
8. $(7e^x)' = \ldots\ldots$
9. $(e^{7x})' = \ldots\ldots$
10. $(\sin x + e^x)' = \ldots\ldots$

Oefening 5.0.4. Bereken de afgeleide van volgende functies op twee manieren:

1. $(x^2 \cdot x^2)' = \ldots\ldots$
2. $(3x + 5)^{2\prime} = \ldots\ldots$

Oefening 5.0.5. Bereken de afgeleide van volgende rationale functies.

1. $\left(\dfrac{x-4}{x}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(\dfrac{x}{x+3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(\dfrac{1}{x+5}\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(\dfrac{4-x}{3-x}\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 5.0.6. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 \cos t) = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{-1}{t^2}\right) = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{3t-1}{2t+2}\right) = \ldots\ldots$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(4x+5) = \ldots\ldots$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \ldots\ldots$
7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{4x^3+1}{3x} = \ldots\ldots$
8. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$
9. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(-8x^2-1) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.0.A Basisoefeningen afgeleiden

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3(3x) = \ldots\ldots$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-7x+8} = \ldots\ldots$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t\,\sin(t^2)) = \ldots\ldots$

13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t^2) = \ldots\ldots$

14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2+3)^4} = \ldots\ldots$

Oefening 5.0.7. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $(2e^x)' = \ldots\ldots$

2. $(2e^{-x})' = \ldots\ldots$

3. $(e^{2x})' = \ldots\ldots$

4. $(e^{x+2})' = \ldots\ldots$

5. $(e^{2x+2})' = \ldots\ldots$

6. $(e^{x^2})' = \ldots\ldots$

7. $(e^{2x^2+3})' = \ldots\ldots$

8. $(e^{x^2+2x+3})' = \ldots\ldots e^{x^2+2x+3}$

9. $(e^{1-x^2})' = \ldots\ldots$

10. $(2e^{\sqrt{x}})' = \ldots\ldots$

Oefening 5.0.8. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{-2} = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3-2\sqrt{x}+5x-2) = \ldots\ldots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5-x^4) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2x^{-n} = \ldots\ldots$

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1+x)(x+2)\big) = \ldots\ldots$

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((x+2)^3e^x\big) = \ldots\ldots$

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t^{-3}(t+5)^7\big) = \ldots\ldots$

8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sin t^2} = \ldots\ldots$

9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{4}{1+2\cos\theta}\right) = \ldots\ldots$

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^{\sin x+2x} = \ldots\ldots$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sqrt{1-2\theta} = \ldots\ldots$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+\tan x} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.0.A Basisoefeningen afgeleiden

13. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \ldots\ldots$

14. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(2\theta^{1/2} + \dfrac{3}{2}\theta^{2/3} + \dfrac{4}{3}\theta^{3/4}\right) = \ldots\ldots$

15. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin(3x)\cdot\cos(2x)\big) = \ldots\ldots$

16. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{2x-1} = \ldots\ldots$

Oefening 5.0.9. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie f in termen van g en van de afgeleide van de functie g voor volgende functies f:

1. Als $f(x) = 2g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

2. Als $f(x) = (g(x))^2$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

3. Als $f(x) = g(x^2)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

4. Als $f(x) = \mathrm{bgtan}\, g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

5. Als $f(x) = g(3x) + 3g(x) + (g(x))^3 + g(x) + g(3) + xg(3) + g(3^x) + 3^{g(x)}$,
dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 5.0.10. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ constanten. Bepaal dan de afgeleide van onderstaande functies.

1. Als $s(t) = a + b\sin(bt - c)$, dan is $s'(t) = \ldots\ldots$

2. Als $s(\theta) = ab\theta + c\theta^2$, dan is $s'(\theta) = \ldots\ldots$

3. Als $s(x) = b[1 - \cos(a^2x)]$, dan is $s'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 5.0.11. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het gegeven punt.

1. $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1. $\ldots\ldots$

2. $f(x) = 1 - \cos x$ in het punt met als x-coördinaat $\dfrac{\pi}{2}$. $\ldots\ldots$

3. $f(x) = 1 - x^2$ in het punt met als x-coördinaat 2. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Hogere orde afgeleiden

Omdat de afgeleide van een functie $f : x \mapsto f(x)$ opnieuw een functie $f' : x \mapsto f'(x)$ is, houdt niets ons tegen om te proberen ook f' af te leiden.

Definitie 6.1.1 (Hogere orde afgeleiden)**.**

Als voor een afleidbare reële functie f ook de afgeleide functie f' opnieuw afleidbaar is, dan is de **tweede afgeleide** van f, genoteerd $f'' = \dfrac{d^2 f}{dx^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)$ de afgeleide van de afgeleide functie f'.

Opmerking 6.1.1.

Analoog kan je ook de n-de afgeleide ($n \in \mathbb{N}_0$) van een functie f definiëren. Die noteren we als $f^{(n)}$ of $\dfrac{d^n f}{dx^n}$. Merk op dat de haakjes *niet* mogen worden weggelaten in $f^{(2)}$, want anders zou voor bijvoorbeeld de sinus verwarring mogelijk zijn tussen het kwadraat $\sin^2(x)$ en de tweede afgeleide $\sin^{(2)}(x)$.

Voorbeeld 6.1.1.

Bereken de tweede afgeleide $\dfrac{d^2}{dx^2}(\mathrm{bgsin}\, x + x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathrm{bgsin}\, x + x\right] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\mathrm{bgsin}\, x + x\right]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right] + \frac{d}{dx}[1] \\
&= -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-3/2} \cdot \frac{d}{dx}\left[1-x^2\right] + 0 \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,(-2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.
\end{aligned}$$

Oefening 6.1.1.

1. Bereken de derde afgeleide van $f(x) = 2\,e^{x^2-1} - \sin 3x + \dfrac{x^3}{2} + 4x^2 - 6x - \dfrac{12}{5}$.

Oplossing: … …

CC BY-NC-SA 4.0

6.1.A Oefeningen hogere orde afgeleiden

Oefening 6.1.2. Bereken de tweede afgeleide van volgende functies:

(a) $f(x) = \ln(x^2)$. $f''(x) = \ldots\ldots$

(b) $f(\theta) = \theta\cos\theta$ $f''(\theta) = \ldots\ldots$

(c) $f(t) = \sin(t^4)$ $f''(t) = \ldots\ldots$

Oefening 6.1.3. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{d^2}{dx^2}x^3 = \ldots\ldots$
2. $\frac{d^3}{dx^3}6x^3 = \ldots\ldots$
3. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}(314x^9 + x^5 + \frac{\pi}{2}) = \ldots\ldots$
4. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}314^{15} = \ldots\ldots$
5. $\frac{d}{dx}\sin x = \ldots\ldots$
6. $\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \ldots\ldots$
7. $\frac{d^3}{dx^3}\sin x = \ldots\ldots$
8. $\frac{d^4}{dx^4}\sin x = \ldots\ldots$
9. $\frac{d^{12}}{dx^{12}}\sin x = \ldots\ldots$
10. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}\sin x = \ldots\ldots$
11. $\frac{d^{120}}{dx^{120}}\sin x = \ldots\ldots$
12. $\frac{d^n}{dx^n}x^n = \ldots\ldots$
13. $\frac{d}{dx}x^{n+1} = \ldots\ldots$
14. $\frac{d^n}{dx^n}x^{n+1} = \ldots\ldots$
15. $\frac{d}{dx}x^{n!} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Afgeleide van de inverse functie

Voor een inverteerbare functie f geldt voor elke x in het domein dat

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

De functies $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ en $x \mapsto x$ zijn dus gelijk, en dus zijn ook hun afgeleiden aan elkaar gelijk:

$$(f^{-1}(f(x)))' = x'$$

Uit de kettingregel volgt dan (omdat $x' = 1$)

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \text{ en dus } (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = (f'(x))^{-1}$$

en dit verklaart volgende eigenschap:

Eigenschap 6.2.1.

De inverse van een inverteerbare afleidbare functie f met $f'(x) \neq 0$ is afleidbaar in het punt $y = f(x)$, met afgeleide gelijk aan de omgekeerde van de afgeleide van f in x:

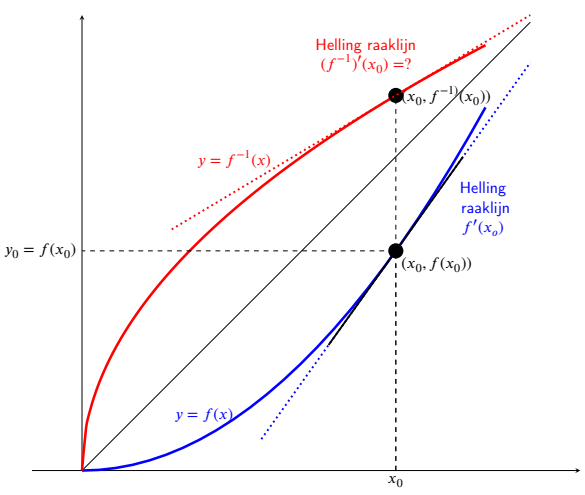
$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{en dus} \quad \boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}} \quad \textbf{(afgeleide inverse)}$$

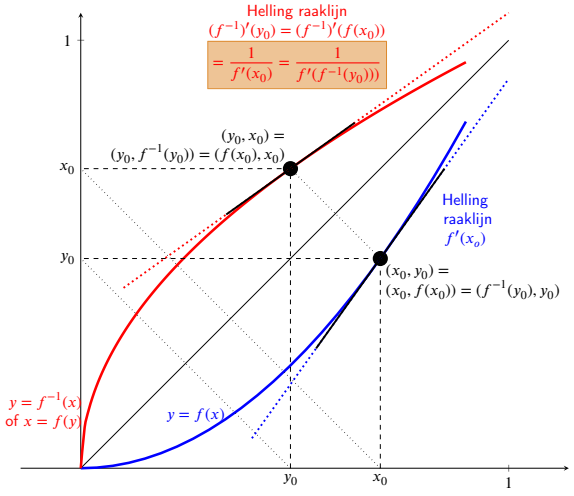
waarbij $y = f(x)$, en dus ook $x = f^{-1}(y)$.

Opmerking 6.2.1. Je zou deze formule kunnen schrijven als $(f^{-1})'(y) = \left(f'(f^{-1}(y))\right)^{-1}$ waarbij de exponent $^{-1}$ echter twee verschillende betekenissen heeft:

$f^{-1}(x)$	$= y$	$\iff$	$x = f(y)$	de inverse van een **functie**
$(f(x))^{-1}$	$= y$	$\iff$	$\frac{1}{f(x)} = y$	het omgekeerde van een **getal**

Er is *geen duidelijk verband* tussen de raaklijnen van f en f^{-1} boven het punt x_0, maar wel tussen
enerzijds de raaklijn aan f in het punt $(x_0, f(x_0))$ en
anderzijds de raaklijn aan de *gespiegelde grafiek* f^{-1} boven het *gespiegelde punt* $(f(x_0), x_0)$.
Die raaklijnen zijn ook elkaars spiegelbeeld, en gespiegelde rechten hebben omgekeerde hellingen.





CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Afgeleide van de inverse functie

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 6.2.1. De afgeleide van de inverse van $f : x \mapsto 2x$

De inverse van de functie $f : x \mapsto 2x$ is de functie $f^{-1} : y \mapsto y/2$. De afgeleide van f is de constante functie $f' : x \mapsto 2$, en de afgeleide van f^{-1} is de constante functie $(f^{-1})' : y \mapsto 1/2$ en er geldt inderdaad dat $(f^{-1})'(y) = 1/2 = 2^{-1} = (f'(x))^{-1}$.

Bovenstaand voorbeeld is echter bedrieglijk eenvoudig omdat de afgeleide een *constante* functie is.

Voorbeeld 6.2.2. De afgeleide van de inverse van $f : x \mapsto x^2$

De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ is niet inverteerbaar: er is geen inverse op het hele domein $\mathbb{R}$.

De functie $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ heeft als inverse $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$ en de functie $f_2 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ heeft als inverse $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$. In een punt x_0 is de afgeleide van zowel f_1 als f_2 gelijk aan $2x_0$, en de raaklijn in $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2)$ heeft dus helling $2x_0$.

In het punt $y_0 = x_0^2$ is de afgeleide van $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : y \mapsto \sqrt{y}$ gelijk aan

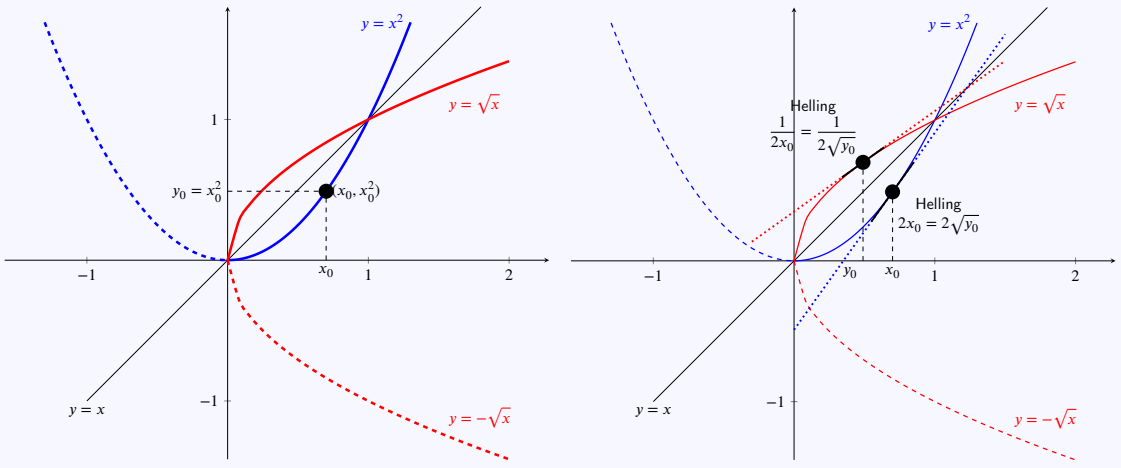
$$(f_1^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f_1'(\sqrt{y_0})} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}},$$

en de raaklijn in $(y_0, \sqrt{y_0}) = (x_0^2, x_0)$ heeft dus een helling $\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}} = \dfrac{1}{2x_0}$.

In het punt $y_0 = x_0^2$ is de afgeleide van $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : y \mapsto -\sqrt{y}$ gelijk aan

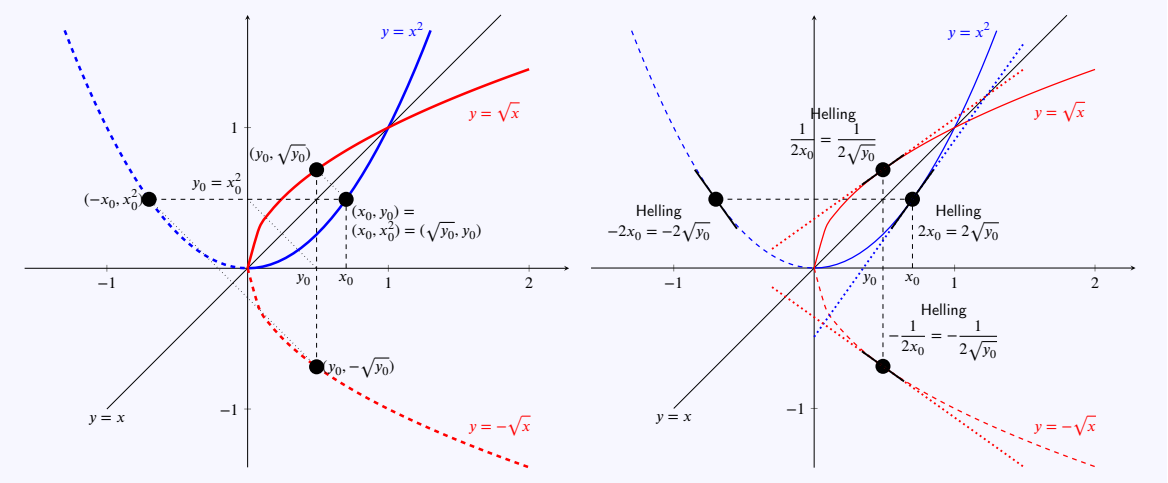
$$(f_2^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f_2'(f_2^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f_2'(-\sqrt{y_0})} = -\frac{1}{2\sqrt{y_0}},$$

en de raaklijn in $(y_0, -\sqrt{y_0}) = (x_0^2, -x_0)$ heeft dus een helling $-\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}} = -\dfrac{1}{2x_0}$.



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

6.2 Afgeleide van de inverse functie

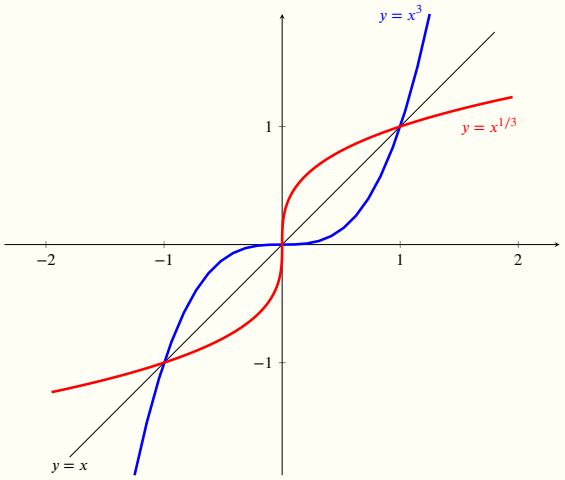


Opmerking 6.2.2.

- De raaklijn in $(x_0, f(x_0))$ aan graf f is de spiegeling ten opzichte van de eerste bissectrice van de raaklijn in $(f(x_0), x_0)$ aan graf f^{-1}. Dit is evident, omdat de grafieken van inverse fucnctie elkaars spiegelbeeld zijn, en dus geldt dat ook voor de *raaklijnen* aan de grafieken.
- Als $f'(x_0) = 0$, dan is de inverse functie in het punt $f(x_0)$ niet afleidbaar (want de afgeleide zou gelijk moeten zijn aan $\frac{1}{f'(x_0)}$). Dat komt overeen met het feit dat de spiegeling van een horizontale rechte (helling 'nul') een verticale rechte is (helling 'oneindig').

  Neem als voorbeeld $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ en $x_0 = 0$. In dit geval is $f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$. De inverse functie is $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{1/3}$.

  Deze inverse is niet *afleidbaar* in 0: de afgeleide van $x \mapsto x^{1/3}$ is $x \mapsto \frac{1}{3}x^{-2/3}$, en dat wordt 'oneindig groot' in $x = 0$. Dus, $x \mapsto x^{1/3}$ is niet afleidbaar in de oorsprong omdat de raaklijn er verticaal is.



CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Regel van de l'Hôpital

Het berekenen van limieten leidt soms tot zogenaamde *onbepaaldheden* zoals $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$. Er bestaat een handige techniek om die onbepaaldheden te omzeilen via het nemen van *afgeleiden*. De held van dit verhaal is de Fransman de l'Hôpital, die zijn naam gaf aan de techniek. Hij heeft aangetoond dat een limiet $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ die leidt tot een onbepaaldheid van de vorm $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ onder bepaalde voorwaarden gelijk is aan de limiet van de verhouding *van de afgeleiden* $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Er zijn enkele technische beperkingen die de exacte formulering van de regel van de l'Hôpital wat ingewikkeld maken, maar in de praktijk is aan de technische voorwaarden meestal voldaan.

Eigenschap 6.3.1 (Regel van de l'Hôpital)**.** Voor twee reële functies f en g waarbij

- f en g afleidbaar zijn in een omgeving van c (met $c \in \mathbb{R}$ of $c = \pm\infty$),
- $f(c) = g(c) = 0$ ofwel $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ en $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$,
- $g'(x) \neq 0$ voor $x \neq c$ in een omgeving van c en
- $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat, geldt dat:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \left(\text{ als } \frac{f(c)}{g(c)} \text{ van de vorm } \frac{0}{0} \text{ of } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Opmerking 6.3.1.

- Men schrijft soms $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ om het gebruik van de regel van de l'Hôpital aan te duiden.
- Met de notatie $\frac{\infty}{\infty}$ worden volgende 4 situaties bedoeld: $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$ of $\frac{-\infty}{-\infty}$.
- De regel van de l'Hôpital werkt ook voor limieten in oneindig.
- De regel van de l'Hôpital werkt ook voor rechter- en linkerlimieten.
- Let op: bereken de afgeleide van teller en noemer afzonderlijk, *niet* de afgeleide van de breuk.

Voorbeeld 6.3.1. Bereken $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

We gaan na of de regel van de l'Hôpital toegepast kan worden met $f(x) = \sin x$ en $g(x) = x$. Omdat $f(0) = 0$ en $g(0) = 0$ komen we de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ uit. We moeten nagaan of de limiet van het quotiënt van de afgeleiden bestaat: $(\sin x)' = \cos x$ en $x' = 1$, dus

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0} \cos x = \cos(0) = 1$$

De limiet van de afgeleiden bestaat, en in een omgeving van $c = 0$ is $g'(x) = 1 \neq 0$ en dus geldt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

We beperken ons in deze cursus tot oefeningen waarbij het volstaat om de voorwaarde $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ na

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Regel van de l'Hôpital

te gaan en noteren dit voorbeeld korter:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1.$$

Voorbeeld 6.3.2. Bereken $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{2x}}$.

Omdat $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ en $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$ bekomen we de onbepaaldheid $\frac{\infty}{\infty}$ en kunnen we de regel van de l'Hôpital toepassen.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=0\,.$$

Soms is niet meteen duidelijk of $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat en moet je meerdere keren na elkaar de regel van de l'Hôpital toepassen:

Voorbeeld 6.3.3. Bereken $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x-\sin(x)}$.

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ dus kunnen we de regel van de l'Hôpital toepassen.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x-\sin(x)} &\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x)-2\cos(2x)}{1-\cos(x)} && \text{(nog steeds } \tfrac{0}{0}\text{)}\\ &\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x)+4\sin(2x)}{\sin(x)} && \text{(nog steeds } \tfrac{0}{0}\text{)}\\ &\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(x)+8\cos(2x)}{\cos(x)} && \text{(niet langer } \tfrac{0}{0}\text{)}\\ &=\frac{-2+8}{1}=6\end{aligned}$$

De regel van de l'Hôpital kan soms ook worden gebruikt voor onbepaaldheden van de vorm $0\cdot\infty$. Inderdaad, als de limiet van $f(x)\cdot g(x)$ leidt tot de onbepaaldheid $(+\infty)\cdot 0$, dan kan door één van de twee functies om te keren de regel van de l'Hôpital mogelijk worden toegepast via $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ of $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.

Voorbeeld 6.3.4. Bereken $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(x)$.

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $0\cdot(-\infty)$. In plaats van $\ln x$ te vermenigvuldigen met x, kunnen we $\ln x$ ook delen door $1/x$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\frac{-\infty}{+\infty}$ en kan dus worden berekend met de regel van de l'Hôpital:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(x)\;=\;\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\;\overset{\text{H}}{=}\;\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(-x)=0$$

Merk op dat de onbepaaldheid $0\cdot(-\infty)$ bij het product $x\cdot\ln x$ dus blijkbaar 0 wordt. Maar het product $x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)$ gaat naar -1 voor $x\underset{>}{\to}0$, terwijl $-\frac{1}{x}$ ook oneindig negatief wordt, en het product $x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x}$ wordt oneindig negatief voor $x\underset{>}{\to}0$. Dit is precies de betekenis van de bewering '$0\cdot\infty$ is onbepaald': naargelang het geval neemt de limiet van $f(x)\cdot g(x)$ met $f(x)\to 0$ en $g(x)\to\infty$ allerlei verschillende waarden aan.

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Regel van de l'Hôpital

Net zoals limieten van functies die leiden tot een onbepaaldheid van de vorm $0 \cdot \infty$ herschreven kunnen worden zodat je de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ verkrijgt en dus de regel van de l'Hôpital kan toepassen, is het soms ook mogelijk bij de onbepaaldheid $\infty - \infty$ om de functie te herschrijven om $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ te verkrijgen.

Voorbeeld 6.3.5. Bereken $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\infty - \infty$. Door op gelijke noemer te brengen krijgen we de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ en kunnen we de regel van de l'Hôpital toepassen.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{\sin x - x}{x \sin x} \right) \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \right) \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{-\sin x}{\cos x + (\cos x - x \sin x)} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \right) = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Opmerking 6.3.2.

Ook limieten die leiden tot onbepaaldheden van de vorm 0^0, ∞^0 en 1^∞ kunnen soms herschreven worden zodat de regel van de l'Hôpital toegepast kan worden.

CC BY-NC-SA 4.0

6.3.A Oefeningen de l'Hôpital

Oefening 6.3.1. Bereken volgende limieten.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2 + x} = \ldots\ldots$
2. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3e^x - 1}{3e^x} = \ldots\ldots$
3. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(7x)}{x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \ldots\ldots$
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \ldots\ldots$ met $a > 0$

Oefening 6.3.2. Bereken volgende limieten.

1. $\lim_{x\to +\infty} x^4 e^{-x^2} = \ldots\ldots$
2. $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} 2x \ln x = \ldots\ldots$
3. $\lim_{x\to +\infty} x \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \ldots\ldots$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} = \ldots\ldots$
5. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \ldots\ldots$
6. $\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Toepassing van l'Hôpital

De regel van l'Hôpital laat toe om onbepaaldheden van de vorm $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ te berekenen. Er zijn een aantal techniekjes om ook onbepaaldheden van de vorm $\infty - \infty$ of $0 \cdot \infty$ via l'Hôpital aan te pakken.

Ook onbepaalde vormen van het type 0^0, ∞^0 en 1^∞ kunnen dikwijls herleid worden naar $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ door slim gebruik te maken van de logaritme, en van het feit dat de logaritme een continue functie is, en dus de limiet van de logaritme gelijk is aan de logaritme van de limiet:

$$\ln\left[\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x\to a} \ln\left[f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x\to a} [g(x)\ln f(x)]$$

waarbij $\lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$ meestal met l'Hôpital te berekenen is. Als bovenstaande limiet bestaat en gelijk is aan L, dan is

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \exp(L).$$

Voorbeeld 6.4.1. Bereken $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$.

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$
$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{x+a}\right)\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x+a} = a$$

en dus is

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \exp(a).$$

CC BY-NC-SA 4.0

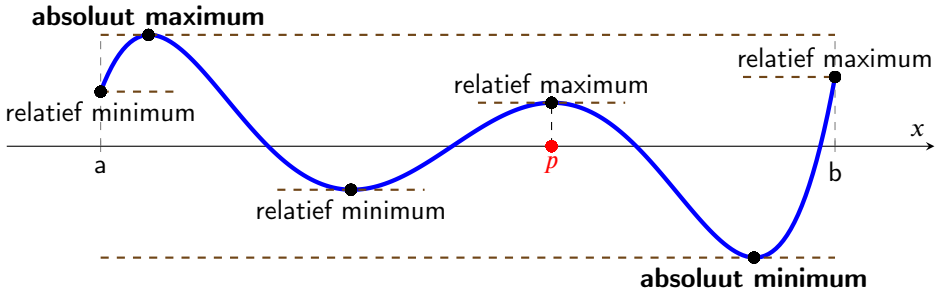
6.5 Minimum-Maximumproblemen

Wetenschappelijke problemen gaan dikwijls over het *maximum* of het *minimum* van een zekere grootheid. Deze grootheid kan van wiskundige, fysische, economische of andere aard zijn, bijvoorbeeld een maximale of minimale inhoud, oppervlakte of afstand, minimale kosten of maximale winst. Dergelijke minimum-maximumproblemen worden ook wel optimalisatieproblemen genoemd, en *afgeleiden* spelen een belangrijke rol bij het vinden van de oplossingen. De onderstaande definitie over relatieve en absolute maxima en minima is vrij evident.

Definitie 6.5.1. Een reële functie bereikt in een punt p van haar domein een

een	**absoluut (of globaal) maximum**	als $f(p)$ maximaal is voor het ganse domein,
een	**absoluut (of globaal) minimum**	als $f(p)$ minimaal is voor het ganse domein,
een	**relatief (of lokaal) maximum**	als $f(p)$ maximaal is in de buurt van p, en
een	**relatief (of lokaal) minimum**	als $f(p)$ minimaal is in de buurt van p.

Een **extremum** is ofwel een maximum ofwel een minimum.



Extra: de begrippen absoluut en relatief minimum en maximum met formules.

Definitie6.5.2. Een reële functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bereikt in een punt $p \in A$

een **absoluut maximum**	als voor elke $x \in A$ geldt:	$f(x) \leq f(p)$.
een **absoluut minimum**	als voor elke $x \in A$ geldt:	$f(p) \leq f(x)$.
een **relatief maximum**	als een interval I rond p bestaat zodat voor elke $x \in I \cap A$ geldt:	$f(x) \leq f(p)$.
een **relatief minimum**	als een interval I rond p bestaat zodate voor elke $x \in I \cap A$ geldt:	$f(p) \leq f(x)$.

Opmerking 6.5.1.

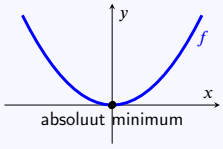
- Let bij extrema op het onderscheid tussen *de plaats waar het extremum wordt bereikt* (één of meerdere x-waarden) en *het extremum zelf* (een functiewaarde en dus een y-waarde).
- Een (absoluut of relatief) maximum kan worden bereikt in meerdere x-waarden. Zo bereikt de cosinusfunctie haar absoluut maximum oneindig dikwijls, namelijk in de punten $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Of een relatief maximum al dan niet absoluut is hangt of van het *domein* van de functie: door het domein voldoende klein te maken wordt elk relatief maximum absoluut, en door het domein te vergroten blijft een absoluut maximum mogelijk geen absoluut maximum.

Voorbeeld 6.5.1. De functie $f : x \mapsto x^2$ bereikt in $x = 0$ een globaal (en dus ook lokaal) minimum.

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Minimum-Maximumproblemen

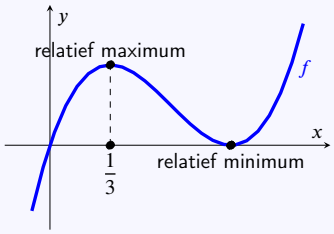
Inderdaad, want voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $0 \leq x^2$ (en dus $0 = f(0) \leq f(x)$).



Voorbeeld 6.5.2. De functie $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x$ bereikt een lokaal minimum in 1 en een lokaal maximum in $1/3$.

Inderdaad, voor x in de buurt van 1 geldt dat $f(1) = 0 \leq f(x)$ want $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 \geq 0$ *voor x in de buurt van* 1. De ongelijkheid $x(x-1)^2 \geq 0$ geldt niet voor negatieve x, maar voor een *lokaal* minimum in $x = 1$ volstaat het dat ze geldt voor x *voldoende dicht bij* 1.

In $x = \frac{1}{3}$ bereikt f een lokaal maximum. Geen van beide lokale extrema zijn ook globale extrema.



Op de figuur blijkt duidelijk volgend verband tussen de extrema en **het stijgen en dalen van een functie**:

Eigenschap 6.5.1. Een reële functie bereikt

een **relatief maximum**	bij *een overgang van stijgen naar dalen*	of in een randpunt,
een **relatief minimum**	bij *een overgang van dalen naar stijgen*	of in een randpunt.

En het stijgen en dalen van functies is gerelateerd aan **het teken van de afgeleide**:

Eigenschap 6.5.2.

	stijgt	waar de afgeleide positief is,
Een afleidbare functie	daalt	waar de afgeleide negatief is,
	heeft een horizontale raaklijn	waar de afgeleide nul is.

Extra: het teken van de afgeleide en stijgen en dalen met formules.

Een wat meer nauwkeurige formulering gaat als volgt:

Eigenschap6.5.3. Voor een continue functie f op $[a, b]$ die afleidbaar is op $]a, b[$ geldt:

als $f'(x) > 0$ voor elke $x \in]a, b[$,	dan is f *strikt stijgend* in $[a, b]$
als $f'(x) < 0$ voor elke $x \in]a, b[$,	dan is f *strikt dalend* in $[a, b]$
als $f'(c) = 0$ voor een $c \in]a, b[$,	dan heeft de grafiek van f in $(c, f(c))$ een *horizontale raaklijn*.

De enigszins subtiele formulering met open en gesloten intervallen kan nuttig zijn bij een functie zoals de vierkantswortel, die continu is op $[0, +\infty[$, maar enkel afleidbaar op $]0, +\infty[$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

6.5 Minimum-Maximumproblemen

Opmerking 6.5.2.

- Voor afleidbare functies komen extrema dus enkel voor in *nulpunten van de afgeleide* of in randpunten van het domein. Een *tekenonderzoek van de afgeleide* bepaalt dus de lokale extrema.
- Pas op: niet elk nulpunt van de afgeleide leidt tot een extremum: voor $x \mapsto x^3$ heeft de afgeleide $x \mapsto 3x^2$ een nulpunt in $x = 0$, maar x^3 heeft daar *geen extremum*, enkel een buigpunt.
- Voor functies die niet afleidbaar zijn in sommige punten van hun domein, moet je op een andere manier de extrema onderzoeken, bijvoorbeeld via de grafiek.
- Een nulpunt van de afgeleide f' noemt men soms ook een *kritiek punt* van f, maar wij zullen de naam kritiek punt niet gebruiken.

Voorbeeld 6.5.3. Bepaal de extrema van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Uitwerking:

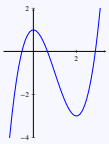
Bereken de *afgeleide* van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$

en bepaal daarvan de *nulpunten*: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 2$.

Maak vervolgens een *tekentabel* (ook *tekenverloop*) met

- op de eerste lijn: de *nulpunten van de afgeleide* f' van klein naar groot
- op de tweede lijn: het *tekenverloop van* f' met een 0 onder de nulpunten en ertussen plustekens of mintekens naargelang het teken van f'.
- op de derde lijn: *het verloop van de grafiek van* f met een $\nearrow$ waar $f'(x)$ positief is en f dus stijgt, en een $\searrow$ waar $f'(x)$ negatief is en f dus daalt .
- er is dan een relatief maximum waar de functie overgaat van stijgend naar dalend, en een relatief minimum waar ze overgaat van dalend naar stijgend.

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	relatief maximum	$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$



De functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ heeft geen absoluut minimum omdat $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ en geen absoluut maximum omdat $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Voor functies op een begrensd interval neem je ook de randpunten op in de tabel.

Met afgeleiden worden *relatieve* extrema bepaald, maar in toepassingen zoeken we soms *absolute* extrema.

Algoritme 6.5.1 (Algoritme voor absolute extrema)**.**

Een continue functie op een gesloten interval bereikt steeds haar extrema die je vindt door

de *relatieve extrema* te bepalen (via nulpunten en tekenverloop van de afgeleide)
de *functiewaarde* te berekenen in elk relatief extremum *en in de randpunten*
de *grootste* van die functiewaarden is het absolute maximum, de *kleinste* is het absolute minimum.

Functies op een open interval bereiken niet noodzakelijk hun extrema (bv $x \mapsto 1/x$).

Voor begrensde functies is het absolute maximum het grootste van alle relatieve maxima,
het absolute minimum is het kleinste van alle relatieve minima.

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Minimum-Maximumproblemen

Extra: relatief/absoluut hangt af van het beschouwde domein.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.51)

6.5 Minimum-Maximumproblemen

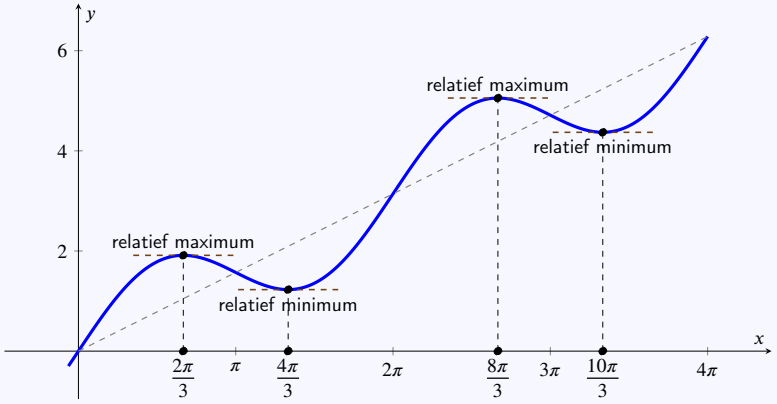
Voorbeeld6.5.4. Bepaal de extrema van de functie $f : x \mapsto \frac{x}{2} + \sin x$.

Uitwerking: Bereken eerst de afgeleide: $f'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$,

en de nulpunten $f'(x) = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2(3k \pm 1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$,

en tekentabel (voor x tussen 0 en 4π)

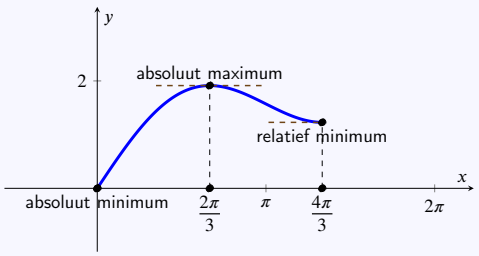
x		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{8\pi}{3}$		$\frac{10\pi}{3}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	rel. max	↘	rel. min	↗	rel. max	↘	rel. min	↗

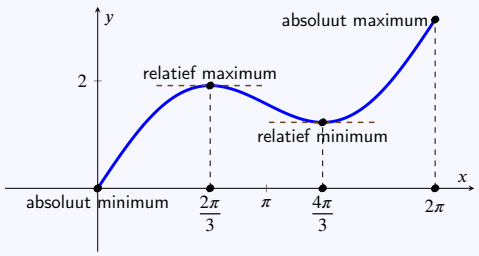


Deze functie heeft dus oneindig veel relatieve minima, oneindig veel relatieve maxima, maar geen absolute minima of maxima.

Merk op dat de situatie verandert als het domein van de functie wordt beperkt:

domein	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\mathbb{R}$	-	rel. max	rel. min	-
$[0, 4\pi/3]$	abs. min	abs. max	rel. min	-
$[0, 2\pi]$	abs. min	rel. max	rel. min	abs.max





Een *relatief* extremum is een *lokaal* begrip want het hangt enkel af van het gedrag van de functie in een (willekeurig kleine) omgeving van dat punt.

Een *absoluut* extremum is een *globaal* begrip: het hangt af van het gedrag op *het gehele domein*.

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Minimum-Maximumproblemen

Volgende voorbeelden illustreren extrema bij *vraagstukken*. Bepaal daarbij eerst de *veranderlijken*, en daarna de *functie* die minimaal of maximaal moet zijn. Leg ook het *domein* van deze functie vast. Soms zijn meerdere keuzes mogelijk.

Voorbeeld 6.5.5.

Toon aan: van alle rechthoeken met een gegeven oppervlakte heeft het vierkant de kleinste omtrek.

Uitwerking:

- **Kies veranderlijken**: noem de lengtes van de zijden van de rechthoek x en y, en de oppervlakte S.
- **Bepaal het domein**: omdat x en y lengtes voorstellen en $S \neq 0$ moet $x > 0$ en $y > 0$.
- **Bepaal de functie** die minimaal moet zijn:
  - Je zoekt het minimum van de omtrek, dus van $2x + 2y$. Deze uitdrukking bevat echter *twee* veranderlijken. We proberen één van de veranderlijken uit te drukken in termen van de andere.
  - Uit het gegeven halen we dat $S = x \cdot y$ dus $y = \dfrac{S}{x}$, en dus een **verband tussen de twee variabelen**.
  - Schrijf de omtrek als een functie van één variabele $f(x)$ (via het verband tussen beide variabelen):

$$f(x) = 2x + 2\frac{S}{x} = 2\left(x + \frac{S}{x}\right) \text{ met } x > 0$$

- **Zoek het (absolute) minimum van deze functie** f:
  - $f'(x) = 2\left(1 - \dfrac{S}{x^2}\right)$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{S}$
  - Omdat $x > 0$ behoud je alleen $\sqrt{S}$.
  - Met behulp van het tekenverloop onderzoek je of dit een (absoluut) minimum is.

x		$\sqrt{S}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$

Nemen we $x > \sqrt{S}$, dan is $x^2 > S$, dus $1 > \dfrac{S}{x^2}$, dus $1 - \dfrac{S}{x^2} > 0$ en dus is f' groter dan 0. Vandaar het plusteken bij het tekenverloop van f'. Met een analoge redenering vind je het minteken voor $x < \sqrt{S}$.

Omdat de functie $f(x)$ daalt tot $\sqrt{S}$ en dan stijgt, bereikt de omtrek f een *relatief minimum* in $x = \sqrt{S}$. Uit het functieverloop van $f(x)$ blijkt dat $x = \sqrt{S}$ ook het absolute minimum is.

- **Besluit**: Als $x = \sqrt{S}$ dan is ook $y = \sqrt{S}$, en de gezochte rechthoek is dus een vierkant.

Voorbeeld 6.5.6.

Een draad van 4 meter wordt in 2 stukken geknipt. Met één stuk wordt een vierkant gemaakt, met het andere een cirkel. We willen de ingesloten oppervlakte voor beide figuren samen maximaliseren. Hoeveel draad gebruik je best voor de cirkel?

Uitwerking:

- **Kies veranderlijken**: We noteren met x de omtrek van de cirkel, dan is $4-x$ de omtrek van het vierkant.
- **Domein:** Uit de opgave volgt dat $x \in [0, 4]$.
- **Bepaal de functie** die maximaal moet zijn:

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Minimum-Maximumproblemen

- De oppervlakte van een vierkant is het kwadraat van de zijde, en de omtrek is vier keer zijde. De oppervlakte van het vierkant is dus $\frac{(4-x)^2}{4^2} = \frac{(4-x)^2}{16}$
- De oppervlakte van een cirkel is π maal de straal in het kwadraat, de omtrek is 2π maal de straal. De straal is dus $\frac{x}{2\pi}$ en bijgevolg is de oppervlakte van de cirkel $\frac{x^2}{4\pi}$

We zoeken bijgevolg het maximum van $f(x) = \frac{(4-x)^2}{16} + \frac{x^2}{4\pi}$ met $x \in [0,4]$

- **Zoek het (absolute) maximum van deze functie** f:
  - $f'(x) = -\frac{2(4-x)}{16} + \frac{2x}{4\pi} = -\frac{1}{2} + (\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi})x$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{\pi+4}$
  - Hieruit mogen we niet meteen besluiten dat $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$ het gezochte maximum is:

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$	

  Dus bereikt f een relatief *minimum* in $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$, en dit is bijgevolg **niet** het gezochte punt.
  - Uit het tekenverloop hierboven volgt dat de maxima van f te vinden zijn in de *randpunten van het domein* $[0,4]$. We berekenen de functiewaarden in deze randpunten om te weten waar het absolute maximum zich bevindt.

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$	$\frac{4}{\pi}$

- **Besluit:** We vinden het maximum van f in 4. De omtrek van de cirkel is dus 4 meter, deze van het vierkant 0. De ingesloten oppervlakte is maximaal als de draad *volledig voor de cirkel* gebruikt wordt.

Extra oefening.

Oefening6.5.1. De som van twee positieve getallen a en b is 100, waarbij $a \leq b$. Zoek deze getallen als

1. hun product maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

2. de som van hun kwadraten minimaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

3. de som van hun kwadraten maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

4. het product van het kwadraat van een getal met de derde macht van het andere getal maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.6 Kritieke punten, extrema en buigpunten

Definitie 6.6.1. Een **kritiek punt** van een afleidbare functie f is een nulpunt van de afgeleide, dus

$$c \text{ is een kritiek punt van } f \iff f'(c) = 0$$

Men noem een kritiek punt soms ook een **stationair punt**.

Er volgend verband tussen kritieke punten en extrema van functies:

Eigenschap 6.6.1. Voor een functie f op $[a, b]$ en een punt $c \in]a, b[$ met f afleidbaar in c geldt:

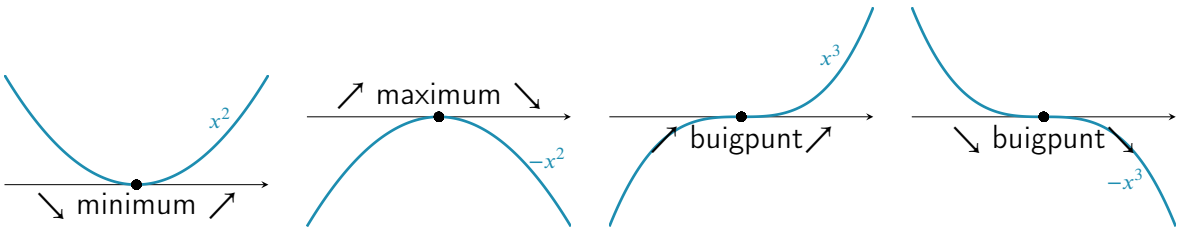
als f een relatief extremum bereikt in c **dan** is $f'(c) = 0$

Of: voor een *afleidbare* functie is *elk relatief extremum* een *kritiek punt*.

Wat leert deze eigenschap? In toepassingen zijn we dikwijls geïnteresseerd in de relatieve extrema, terwijl we de kritieke punten meestal relatief gemakkelijk kunnen berekenen. Volgens deze eigenschap zijn, onder de punten van $]a, b[$ waar de functie f een afgeleide heeft, de kritieke punten de enige *kandidaat-extrema*. Er zijn echter twee vervelende subtiliteiten: een kritiek punt is niet altijd een extremum, en in randpunten en punten waar de functie niet afleidbaar is kunnen extrema voorkomen die toch geen kritiek punt zijn.

Er geldt:

Eigenschap 6.6.2. Een kritiek punt is ofwel een *extremum* ofwel *een buigpunt*.



Onderscheid maken tussen een relatief minimum, relatief maximum of een buigpunt kan op twee manieren. We bespreken hier enkel de eerste.

- Het *tekenverloop van de afgeleide* f' bepaalt of er extremum dan wel een buigpunt optreedt:

x		c	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	relatief maximum	↘

x		c	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	relatief minimum	↗

  Bij een tekenverandering is er een extremum; als het teken *niet* verandert is er een buigpunt:

x		c	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	geen extremum	↗

x		c	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	geen extremum	↘

- Je kan ook het *teken van de tweede afgeleide* $f''(c)$ gebruiken als die bestaat, maar de techniek van de tweede afgeleide test behandelen we hier niet. Ze kan nuttig zijn als het tekenverloop van f' moeilijk te bepalen is.

CC BY-NC-SA 4.0

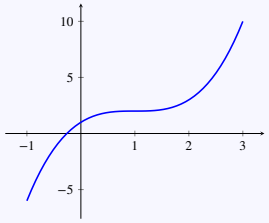
6.6 Kritieke punten, extrema en buigpunten

Voorbeeld 6.6.1. Onderzoek via de afgeleide het dalen en stijgen van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ en bepaal de extrema.

Bereken de afgeleide van $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$: $g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$,

en bepaal daarvan de nulpunten (dat zijn dus de kritieke punten van f):$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x		1	
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	↗	buigpunt	↗

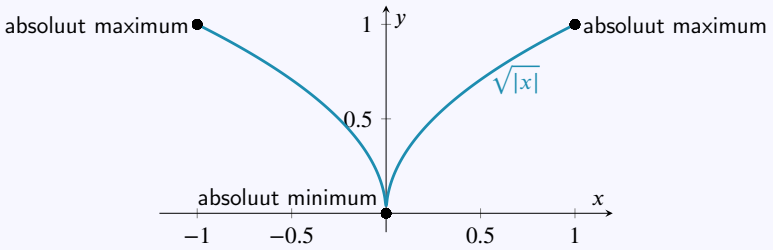


Deze functie gaat in het kritiek punt over van stijgend naar stijgend, en er is dus geen relatief maximum en ook geen relatief minimum. Deze functie heeft een *buigpunt* in $x = 1$.

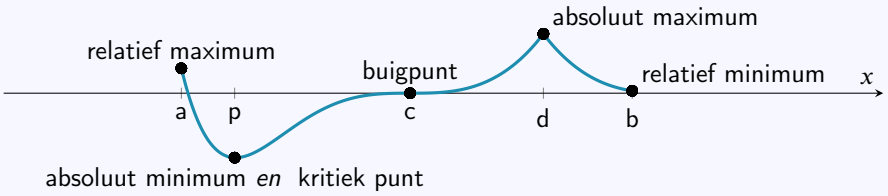
Eigenschap 6.6.3. Een extremum kan *toch* voorkomen in een punt dat geen kritiek punt is, namelijk in één van de randpunten of in een punt waar de functie niet afleidbaar is.

Voorbeeld 6.6.2. De functie $x \mapsto \sqrt{|x|}$ op het interval $[-1, 1]$ heeft twee maxima en één minimum, en geen enkel van die drie punten is een kritiek punt.

De punten -1 en 1 zijn randpunten van $[-1, 1]$, en in 0 is de functie niet afleidbaar. En in geen van deze extrema is de afgeleide dus gelijk aan 0.



Voorbeeld 6.6.3. Volgende grafiek geeft een visueel overzicht van extrema die geen kritiek punt zijn en van kritieke punten die geen extremum zijn.



Deze functie, gedefinieerd op een gesloten interval $[a, b]$, bereikt een relatief maximum in a, een relatief minimum in b, een absoluut maximum in d, en een buigpunt in c.
In p is er een absoluut minimum, en dat is hierwel een kritiek punt.

De punten a en b zijn *randpunten*	(extrema, maar geen kritieke punten),
in d is de functie is *niet afleidbaar*	(extremum, maar geen kritiek punt),
en in c is er een *buigpunt*	(kritiek punt, maar geen extremum)

CC BY-NC-SA 4.0

6.6 Kritieke punten, extrema en buigpunten

Extra: voor wie van een uitdaging houdt ....

Oefening6.6.1. Gegeven is de functie f met voorschrift

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = \begin{cases} x \text{ als } x \geq 0 \\ 0 \text{ als } x < 0 \end{cases}$$

en de functie g met voorschrift

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = f(1+x) + f(1-x)$$

Het minimum van de functie g is 2

Bron: ijkingstoets burgerlijk ingenieur september 2016

CC BY-NC-SA 4.0

7.0.A Extra oefeningen afgeleiden (usolv-it)

7.0.A Extra oefeningen afgeleiden (usolv-it)

Via onderstaande knop kan je in USolv-it extra oefeningen maken.

Je krijgt telkens 5 vragen.

CC BY-NC-SA 4.0

7.0.B Extra oefeningen minimum maximum problemen

Via onderstaande knop kan je usolv-it oefeningen genereren over het zoeken van minima en maxima. Je krijgt telkens een willekeurige set van 2 oefeningen, en je kan zo dikwijls oefenen als je wil.

CC BY-NC-SA 4.0

8.1 Overzicht afgeleiden

Het berekenen van afgeleiden van functies lijkt in het begin complex, maar zodra je er voldoende mee vertrouwd bent wordt het eigenlijk eerder eenvoudig: je past de rekenregels voor som, product en quotiënt toe, indien nodig gecombineerd met de kettingregel en de basisformules. Dat werkt in principe altijd. Maar het vraagt wel wat inoefenen om de regels vlot te kunnen toepassen.

Profiteer ervan, want voor integralen zal dat niet meer het geval zijn. Voor het berekenen van integralen bestaan er jammer genoeg *geen* regels die altijd werken!

We herhalen kort de belangrijkste definities en rekenregels, en lossen enkele voorbeeld-oefeningen op. Als je niet begrijpt wat er gebeurt, raadpleeg je de andere modules.

1.1 Overzicht van de definitie en de rekenregels voor afgeleiden

We herhalen de belangrijkste definities en eigenschappen van afgeleiden.

Definitie 8.1.1 (Afgeleide functie)**.** Zij f een reële functie, en $a \in \mathbb{R}$ in het domein van f.

We noemen de functie f *afleidbaar* (of differentieerbaar) in a als volgende limiet bestaat en eindig is:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

In dat geval noemen we die limiet de *afgeleide* van f in a, en we noteren

$$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \frac{df}{dx}(a) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)|_a \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Waar de afgeleide bestaat definiëren we de *afgeleide functie* van f, genoteerd f' of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$, als volgt:

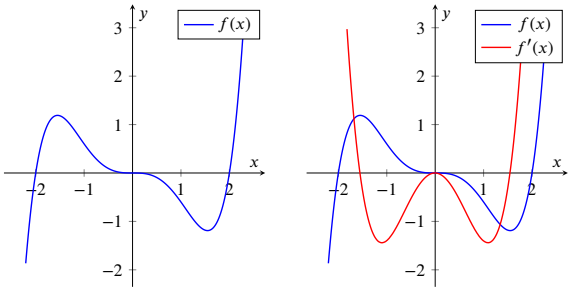
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = \frac{df}{dx} = f' : x \mapsto f'(x)$$

We noemen de uitdrukking df de *differentiaal* van f, en er geldt volgende gelijkheid:

$$df \overset{\text{def}}{=} f'(x) \cdot dx = \frac{df}{dx} \cdot dx$$

De afgeleide is de richtingscoëfficiënt aan de raaklijn aan de grafiek van de functie f in het punt a, en geeft dus aan hoeveel de functie f stijgt (als de afgeleide positief is) dan wel daalt (als de afgeleide negatief is).

Als de $f'(a) = 0$, dan stijgt of daalt de functie niet in het punt a, en heeft de functie f er mogelijk een lokaal minimum of maximum. Het is echter ook mogelijk dat f een buigpunt heeft.



CC BY-NC-SA 4.0

1.2 VOORBEELDEN VAN HET BEREKENEN VAN AFGELEIDEN

Eigenschap 8.1.1 (Eigenschappen van afgeleiden (met differentialen)). Zij f, g differentieerbare functies, $a, c, r \in \mathbb{R}$ en $a > 0, a \neq 1$. Dan gelden volgende formules:

df	$=$	$f'(x)\cdot dx$	(definitie)	$d(f+g)$	$=$	$df+dg$	(somregel)
$d(f\cdot g)$	$=$	$f\cdot dg + g\cdot df$	(productregel)	$d\left(\frac{f}{g}\right)$	$=$	$\frac{g\cdot df - f\cdot dg}{g^2}$	(quotiëntregel)
$d(f(g(x)))$	$=$	$f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx$	(kettingregel)				
dc	$=$	0	(d van const)	$d(cx)$	$=$	$c\,dx$	(d van veelvoud)
$d(x^r)$	$=$	$rx^{r-1}\,dx$	(d van macht)				
$d(e^x)$	$=$	$e^x\,dx$	(d van exp)	$d(a^x)$	$=$	$a^x \ln a\,dx$	(d van a^x)
$d(\ln x)$	$=$	$\frac{dx}{x}$	(d van ln)	$d(\log_a x)$	$=$	$\frac{dx}{x\ln a}$	(d van log)
$d(\sin x)$	$=$	$\cos x\,dx$	(d van sinus)	$d(\cos x)$	$=$	$-\sin x\,dx$	(d van cosinus)
$d(\tan x)$	$=$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$	(d van tangens)				
$d(\text{bgsin}\,x)$	$=$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	(d van bgsin)	$d(\text{bgcos}\,x)$	$=$	$\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$	(d van bgcos)
$d(\text{bgtan}\,x)$	$=$	$\frac{dx}{1+x^2}$	(d van bgtan)				

1.2 Voorbeelden van het berekenen van afgeleiden

Voorbeeld 8.1.1 (Afgeleiden van veeltermen). Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) = 1+2x$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = 1+2x+3x^2$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3+x^4) = 1+2x+3x^2+4x^3$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4) = 1+x+x^2+x^3$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4) = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3$

Voorbeeld 8.1.2 (Afgeleiden van producten en quotiënten).

1. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^4\ln x = x^3(4\ln x+1)$

Uitwerking: We zoeken de afgeleide van het product van x^4 en $\ln x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^4\ln x\right] &= \ln x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^4\right] + x^4\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln x\right]\\ &= \ln x\cdot 4x^3 + x^4\cdot\frac{1}{x}\\ &= x^3(4\ln x+1).\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 VOORBEELDEN VAN HET BEREKENEN VAN AFGELEIDEN

2. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x+3}{4x+5} = \frac{-2}{(4x+5)^2}$

Uitwerking: We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $2x+3$ en $4x+5$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x+3}{4x+5} &= \frac{2(4x+5)-4(2x+3)}{(4x+5)^2}\\ &= \frac{8x+10-8x-12)}{(4x+5)^2} \qquad\qquad = \frac{-2}{(4x+5)^2}\end{aligned}$$

3. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln x}{\sin x} = \frac{1}{x\,\sin x} - \frac{\ln x\,\cos x}{\sin^2 x}$

Uitwerking: We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\ln x}{\sin x}\right] &= \frac{\sin x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln x]-\ln x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sin x]}{\sin^2 x}\\ &= \frac{\frac{\sin x}{x}-\ln x\cdot\cos x}{\sin^2 x}\\ &= \frac{1}{x\,\sin x}-\frac{\ln x\,\cos x}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Voorbeeld 8.1.3 (Afgeleiden van samengestelde functies)**.**

1. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 50x+20$

Uitwerking: Dit is een samengestelde functie, want de functie $h : x \mapsto (5x+2)^2$ is het kwadraat (dus $f : x \mapsto x^2$) van de functie $g : x \mapsto 5x+2$. Dat betekent dat $h(x) = f(g(x))$, en we gebruiken dan de kettingregel $d(f(g(x)) = f'(g(x)\cdot g(x) = f'(g(x)\cdot g'(x)\cdot dx$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f\,(g(x))]\\ &= f'\,(g(x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[g(x)]\\ &= f'\,(g(x))\cdot g'(x)\\ &= 2(5x+2)\cdot 5 = 10(5x+2)\end{aligned}$$

Je kan ook sneller als volgt rekenen, zonder de samenstellende functies namen te geven:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 2(5x+2)\cdot 5\cdot dx = 10(5x+2)$$

In dit geval zou je natuurlijk ook het kwadraat gewoon kunnen uitrekenen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25x^2+20x+4) = 50x+20$$

en gelukkig geeft dat hetzelfde resultaat!

2. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{\left(x^2+3\right)^4} = \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2+3}$

Uitwerking: Je herschrijft in dit soort opgaven best eerst de wortel als een macht $h : x \mapsto \left(x^2+3\right)^{4/3}$, en dan krijg je een samengestelde functie want $h(x) = f(g(x))$ met $g(x) = x^2+3$ en $f(x) = x^{4/3}$. De afgeleiden

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 VOORBEELDEN VAN HET BEREKENEN VAN AFGELEIDEN

van g en f zijn gegeven door respectievelijk $g'(x) = 2x$ en $f'(x) = (4/3)\,x^{1/3}$. Met behulp van de kettingregel $d(f(g(x)) = f'(g(x) \cdot g(x) = f'(g(x) \cdot g'(x) \cdot dx$ bekomen we dan voor h':

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[h(x)\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f\left(g(x)\right)\right]\\ &= f'\left(g(x)\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[g(x)\right]\\ &= \frac{4}{3}(x^2+3)^{1/3} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2+3\right]\\ &= \frac{4}{3}(x^2+3)^{1/3} \cdot 2x\\ &= \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2+3}.\end{aligned}$$

Bij het afleiden van een samengestelde functie hoef je niet steeds de samenstellende functies expliciet te benoemen en af te leiden. Je mag ook rechtstreeks de afgeleides van de samengestelde functies opschrijven.

3. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}5^{x^2} = 2\ln 5 \cdot x \cdot 5^{x^2}$

Uitwerking: We gebruiken weer de kettingregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}5^{x^2} &= 5^{x^2}\ln 5 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\right]\\ &= 5^{x^2}\ln 5 \cdot 2x\\ &= (2\ln 5)\,x\,5^{x^2}.\end{aligned}$$

4. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2-7) = -24x\sin(4x^2-7)\cos^2(4x^2-7)$

Uitwerking: We gebruiken weer de kettingregel, maar nu hebben we een samenstelling van wel drie functies: $f(x) = 4x^2 - 7$, $g(x) = \cos x$ en $h(x) = x^3$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^3\left(4x^2-7\right)\right] &= 3\cos^2\left(4x^2-7\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos\left(4x^2-7\right)\right]\\ &= 3\cos^2\left(4x^2-7\right)\left(-\sin\left(4x^2-7\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x^2-7\right]\right)\\ &= -3\cos^2\left(4x^2-7\right)\sin\left(4x^2-7\right) \cdot 8x\\ &= -24x\sin\left(4x^2-7\right)\cos^2\left(4x^2-7\right).\end{aligned}$$

5. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\sin^3(e^{x^2})} = \dfrac{3x}{\sqrt{\sin(e^{x^2})}}\cos^2(e^{x^2})e^{x^2}$

Uitwerking: We merken op dat dit een lange samenstelling is van functies, dus we gebruiken de kettingregel

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 VOORBEELDEN VAN HET BEREKENEN VAN AFGELEIDEN

(als een echte *ketting*regel!)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\sin^3(e^{x^2})} &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3(e^{x^2})}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3(e^{x^2}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3(e^{x^2})}}\cdot 3\cdot\cos^2(e^{x^2})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(e^{x^2}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3(e^{x^2})}}\cdot 3\cdot\cos^2(e^{x^2})\sin(e^{x^2})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3(e^{x^2})}}\cdot 3\cdot\cos^2(e^{x^2})\sin(e^{x^2})e^{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3(e^{x^2})}}\cdot 3\cdot\cos^2(e^{x^2})\sin(e^{x^2})e^{x^2}\cdot 2\cdot x \\
&= \frac{3x}{\sqrt{\sin(e^{x^2})}}\cos^2(e^{x^2})e^{x^2}.
\end{aligned}$$

6. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie f in termen van de afgeleide van de functie g als f bepaald wordt door het functievoorschrift

$$f(x) = \ln g(x).$$

Oplossing:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln g(x)\right] = \frac{1}{g(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[g(x)\right] = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Samenvatting

We herhalen hier kort een definitie en de belangrijkste notaties van de *afgeleide* van een reële functie.

Definitie 8.2.1 (Afgeleide in een punt)**.** Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een reële functie, en $a \in \mathbb{R}$.

De *afgeleide* van f in a, genoteerd $f'(a)$ is het getal

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

als deze limiet bestaat en eindig is.

We zeggen dat f *afleidbaar* of *differentieerbaar* is in het punt a.

Definitie 8.2.2 (Afgeleide functie)**.** Zij f een reële functie.

De *afgeleide functie* van f, genoteerd f', Df of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$ is de functie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = \frac{df}{dx} = f' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

die enkel gedefinieerd is voor de x waarvoor deze limiet bestaat en eindig is.

We zeggen dat f *afleidbaar* of *differentieerbaar* is in die punten x.

Definitie 8.2.3 (Differentiaal)**.** We voeren een nieuw object dx in, dat we de differentiaal van x noemen.

We definiëren de *differentiaal* van f, genoteerd df als :

$$df \overset{\text{def}}{=} f'(x) \cdot dx = \frac{df}{dx} \cdot dx$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Afgeleiden van sin/exp/log

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen. We geven weer drie versies van de regels:

Eigenschap 8.3.1 (Afgeleiden exponentiële en goniometrische functies)**.**

Zij $a \in \mathbb{R}$ en $a > 0, a \neq 1$. Dan gelden volgende formules:

f'	met differentiaal	met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$	
$(e^x)' = e^x$	$\mathrm{d}e^x = e^x\,\mathrm{d}x$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x$	(exp)
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\mathrm{d}a^x = a^x \ln a\,\mathrm{d}x$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = a^x \ln a$	(a^x)
$(\ln x)' = 1/x$	$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x} = x^{-1}\mathrm{d}x$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x} = x^{-1}$	(ln)
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$\mathrm{d}(\log_a x) = \frac{\mathrm{d}x}{x \ln a}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$	(log)
$(\sin x)' = \cos x$	$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$	$(sinus)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$	$(cosinus)$

We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van e^x is terug e^x. Dit is een erg handige en belangrijke eigenschap van de functie e^x, en ze kan beschouwd worden als de *definitie* van het getal e: Er is een unieke exponentiële functie $x \mapsto a^x$ waarvoor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = a^x$. Het grondtal van deze functie is per definitie e.
- de afgeleide van $\ln x$ is $1/x$. Het lijkt wat merkwaardig dat in de mooie reeks van afgeleiden-van-een-macht-is-terug-een-macht (namelijk $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^r = rx^{r-1}$) ineens een vreemde eend opduikt: ook de afgeleide van $\ln x$ blijkt een macht te zijn (namelijk x^{-1}).
- de afgeleide van *willekeurige* exponentiële of logaritmische functies is een *herschaling* (met een factor $\ln a$) van de afgeleide van e^x en $\ln x$.
- de afgeleide van de sinus is de cosinus, en de afgeleide van de cosinus is *min* de sinus.

Voorbeeld 8.3.1 (Berekenen van afgeleiden van transcendente functies)**.**

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = 7^x \ln 7$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^x) = \pi^x \ln \pi$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) = 7x^6$

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Afgeleiden van sin/exp/log

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25 \cdot 7^x) = 25 \ln 7 \cdot 7^x$

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((a+7)^x) = \ln(a+7) \cdot (a+7)^x$

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^{x+7}) = 7^7 \ln(7) \cdot 7^x$

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = 1/x$

8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^2) = 2/x$

Uitwerking: We herschrijven de opgave met behulp van de rekenregels voor ln: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2 \ln x = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = 2/x$

9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^r) = r/x$

Uitwerking: We herschrijven de opgave met behulp van de rekenregels voor ln: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r \ln x = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = r/x$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Toepassingen van afgeleiden

Voorbeeld 8.4.1 (Raaklijn aan de grafiek van een functie)**.** De afgeleide van een functie kan gebruikt worden om de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van die functie in een gegeven punt van de grafiek te bepalen. De afgeleide $f'(a)$ van een functie f in een punt $a \in \mathbb{R}$ is namelijk niets anders dan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ op die grafiek. De vergelijking van de raaklijn r in het punt $(a, f(a))$ aan de grafiek is dan gegeven door

$$y = t_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Zij f de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - x$. We zoeken de vergelijking van de raaklijn t_1 aan de grafiek van f in het punt $P(-1, 0) \in \text{graf } f$. De richtingscoëfficiënt van deze raaklijn is gegeven door $f'(-1) = 3(-1)^2 - 1 = 2$. Van de gezochte rechte t_1 kennen we dus de richtingscoëfficiënt en een punt, nl. $P(-1, 0)$. Dit is voldoende om de vergelijking op te stellen:

$$\begin{aligned} r &\leftrightarrow y = 2(x - (-1)) \\ &\leftrightarrow y = 2x + 2. \end{aligned}$$

Voorbeeld 8.4.2 (Harmonische oscillator)**.** In een cursus fysica leren we dat wanneer een massa aan een veer een trillende beweging uitvoert (in het verlengde van de veer), de uitwijking x van de massa t.o.v. haar rusttoestand, in functie van de tijd t, beschreven wordt door

$$x(t) = A \cos \omega t$$

Hierin zijn de amplitude $A > 0$ en de hoeksnelheid $\omega > 0$ reële constanten. De snelheid v waarmee de massa trilt (in functie van de tijd) kunnen we bepalen door de uitwijking x af te leiden naar de tijd t. Met de *kettingregel* vinden we

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(A \cos \omega t) \\ &= A(-\sin \omega t)\frac{d}{dt}(\omega t) \\ &= -\omega A \sin \omega t. \end{aligned}$$

Op analoge manier wordt de versnelling a van de massa in functie van de tijd gevonden door de snelheid v op haar beurt af te leiden naar de tijd:

$$\begin{aligned} a(t) = \frac{dv(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(-\omega A \sin \omega t) \\ &= -\omega^2 A \cos \omega t. \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Afgeleiden via rekenregels

Opmerking 9.1.1. We maken hier op een ietwat onconventionele manier kennis met het begrip *afgeleide*.

We leggen daarbij in eerste instantie de nadruk op de rekenregels. Toepassingen en betekenis komen later aan bod.

We verwachten van u het volgende:

(a) u vertrouwt ons dat we weten wat we doen.

(b) u vertrouwt ons dat we u iets nuttigs willen bijleren.

(c) u raadpleegt de vorige modules over algebraïsch rekenen en functies zodra dingen onduidelijk worden.

(d) u bent bereid minstens één uur met volledige concentratie deze module te bestuderen, en de voorbeelden en oefeningen te maken.

Onder die voorwaarden beloven wij u het volgende:

(a) we zullen u op een volgens ons zo efficiënt mogelijke manier leren afgeleiden berekenen.

9.1.1 Korte definitie en de rekenregels voor afgeleiden

We herhalen kort de definitie en de notatie van de afgeleide van een reële functie. De definitie is voorlopig niet erg belangrijk, want we zullen er in deze module geen verder gebruik van maken. De notatie is voor sommigen wat afschrikwekkend, maar went na verloop van tijd. Er zijn essentieel twee varianten, één met een accent zoals in f', en een andere met het symbool $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, zoals in $\frac{df}{dx}$. Beide notaties betekenen hetzelfde, ze duiden beide de zogenaamde *afgeleide functie* aan:

Definitie 9.1.1 (Afgeleide functie)**.** Zij f een reële functie.

De *afgeleide functie* van f, genoteerd f' of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$, is de functie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f = \frac{df}{dx} = f' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

die enkel gedefinieerd is voor de x waarvoor deze limiet bestaat en eindig is.

We zeggen dat f *afleidbaar* of *differentieerbaar* is in die punten x.

We noemen de uitdrukking df de *differentiaal* van f, en er geldt volgende gelijkheid:

$$df = f'(x)\cdot dx = \frac{df}{dx}\cdot dx$$

Voorlopig hoef je je dus geen zorgen te maken over *wat* een afgeleide of een differentiaal precies *zijn*, we zullen er eerst mee leren rekenen, en er daardoor wat vertrouwd mee worden. Later zullen we de betekenis uitleggen.

Van een afgeleide weten we voorlopig alleen dat het een functie is, genoteerd met f' of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$. Van een differentiaal weten we voorlopig niets: het is gewoon een 'ding', genoteerd met een d, zoals in df, dg of dx. We zullen er verder wel een betekenis aan geven. Een verband met afgeleiden wordt gegeven door de fundamentele gelijkheid

$$df = f'(x)\,dx \quad \text{of} \quad \frac{df}{dx} = f'(x)$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Afgeleiden via rekenregels

Hoewel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ meestal niet echt als een breuk wordt beschouwd, kunnen we er dus toch enigszins mee rekenenen *alsof* het een gewone breuk is. Dan zegt de formule $f'(x) = \frac{df}{dx}$ dat de afgeleide de *verhouding* weergeeft van de twee dingen df en dx. Je kan dus de dx naar het andere lid brengen, en dan krijg je $df = f'(x)\,dx$, een gelijkheid van twee zogenaamde differentialen.

9.1.2 Basisregels: sommen, machten en scalaire veelvouden

We beginnen met de meest eenvoudige basisregel voor het bereken van afgeleiden.

Er worden telkens drie versies gegeven: in de eerste kolom een notaie met 'differentialen', in de tweede kolom de klassieke notatie met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (waarbij de dx naar het linkerlid is gebracht), en in de derde kolom de notatie met f'. Het is belangrijk om na verloop van tijd met elke notatie vertrouwd te worden. Bij het begin van je studie kan je zelf kiezen welke notatie voor jou het meest duidelijk is.

Eigenschap 9.1.1 (Basisregels voor afgeleiden)**.** Zij f, g differentieerbare functies, $c, r \in \mathbb{R}$. Dan gelden volgende formules:

$dc = 0$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$	$c' = 0$	$(constante)$
$dx = dx$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$	$x' = 1$	$(identieke)$
$d(cf) = c\,df$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$	$(cf)' = cf'$	$(veelvoud)$
$d(f+g) = df + dg$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$	$(f+g)' = f' + g'$	$(somregel)$
$dx^r = rx^{r-1}\,dx$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}$	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(machtregel)$

We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van een constante functie is altijd 0.
  Dus: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}7 = 0, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\pi = 0, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\pi^3 = 0, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5+\sqrt{2}) = 0$ enzovoort
- de afgeleide van x is 1.
  Dus: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$. Meer valt daar niet direct over te zeggen. Tenzij dat $dx = dx$ een *tautologie* is.
- de afgeleide van een scalair veelvoud is het scalair veelvoud van de afgeleide
  Dus: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 5 \cdot 1 = 5$
- de afgeleide van een som is de som van de afgeleiden
  Dus: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7+5x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}7 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) = 0 + 5 = 5$
- bij de afgeleide van een macht komt een copie van de exponent naar voor, en exponent zelf wordt met 1 verminderd.
  Dus= $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = 2x, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 3x^2, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{42} = 42x^{41}$ enzovoort

Met deze beperkte set van regels kunnen de afgeleiden van *alle* veeltermen berekend worden:

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Afgeleiden via rekenregels

Voorbeeld 9.1.1 (Afgeleiden van veeltermen). Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) = 1+2x$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) \overset{\text{(somregel)}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 \overset{\text{(rekenregels)}}{=} 0+1+2x = 1+2x$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = 1+2x+3x^2$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 0+1+2x+3x^2 = 1+2x+3x^2$

Maar je kan het resultaat van vorige oefening gebruiken: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 1+2x+3x^2$

En je kan dit antwoord ook in één keer opschrijven, door term per term af te leiden: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = (0+)1+2x+3x^2$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3+x^4) = 1+2x+3x^2+4x^3$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+2x^2+3x^3+4x^4) = 1+4x+9x^2+16x^3$

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3) = 1+x+x^2$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3) = 0+1+\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{1}{3}\cdot 3x^2 = 1+x+3x^2$

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{\pi}+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4) = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3$

Oefening 9.1.1 (Bereken volgende afgeleiden).

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2+8x+9) = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2+8x+3^2) = \ldots\ldots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((2x)^2+8x+3^2) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x(x+2)+3^2) = \ldots\ldots$

Merk op dat de machtregel niet alleen geldt voor natuurlijke getallen als exponent, maar voor alle exponenten. Dus, hij geldt in het bijzonder ook voor vierkantswortels want $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Voorbeeld 9.1.2 (Afgeleiden van rationale machten). Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-2}) = -2x^{-3}$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-2}) = (-2)\cdot x^{-2-1} = -2x^{-3}$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-25}) = -25x^{-26}$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Afgeleiden via rekenregels

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-25}) = (-25)\cdot x^{-25-1} = -25x^{-26}$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/2}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1/2}) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1/2}) = -\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2-1} = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

Oefening 9.1.2.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/3}) = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1/3}) = \ldots\ldots$

9.1.3 Basisregels voor exponentiële, logaritmische en goniometrische functies

We breiden de verzameling van functies die we kunnen afleiden verder uit met behulp van volgende regels, die men kan bewijzen op basis van de definitie van de afgeleide functie, maar die we hier gewoon als rekenregels geven:

Eigenschap 9.1.2 (Afgeleiden exponentiële en goniometrische functies)**.** Zij $a \in \mathbb{R}$ en $a > 0, a \neq 1$. Dan gelden volgende formules:

f f'	met differentiaal	met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ – notatie	
$(e^x)' = e^x$	$de^x = e^x\,dx$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x$	(exp)
$(a^x)' = a^x \ln a$	$da^x = a^x \ln a\,dx$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = a^x \ln a$	(a^x)
$(\ln x)' = 1/x$	$d(\ln x) = \frac{dx}{x} = x^{-1}\,dx$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x} = x^{-1}$	(ln)
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x\ln a}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$	(log)
$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x\,dx$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$	$(sinus)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x\,dx$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$	$(cosinus)$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Afgeleiden via rekenregels

We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van e^x is terug e^x. Dit is een erg handige en belangrijke eigenschap van de functie e^x, en ze kan zelfs beschouwd worden als de definitie van het getal e. Inderdaad, e is precies dat getal a waarvoor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x \stackrel{?}{=} a^x$.
- de afgeleide van de natuurlijke logaritme is $1/x$. Het lijkt wat merkwaardig dat in de mooie reeks van afgeleiden-van-een-macht-is-terug-een-macht (namelijk $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^r = rx^{r-1}$) ineens een vreemde eend opduikt: ook de afgeleide van $\ln x$ blijkt een macht te zijn (namelijk x^{-1}).
- de afgeleide van willekeurige exponentiële of logaritmische functies moeten worden herschaald met een factor $\ln a$.
- de afgeleide van de sinus is de cosinus, en de afgeleide van de cosinus is *min* de sinus. Vind uzelf een ezelsbruggetje om die regel te onthouden. Sommigen onthouden SICO, voor (afgeleide van) SInus is COsinus, maar dat kan ongetwijfeld beter. Pas op: voor de integraal later zal het ('natuurlijk' zullen we dan zeggen) precies omgekeerd zijn: de integraal van de COsinus is de SInus, en die van de sinus in *min* de cosinus. Maar, dat zijn zorgen voor later.

Voorbeeld 9.1.3 (Berekenen van afgeleiden van transcendente functies)**.**

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = 7^x \ln 7$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^x) = \pi^x \ln \pi$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) = 7x^6$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25 \cdot 7^x) = 25 \ln 7 \cdot 7^x$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((a+7)^x) = \ln(a+7) \cdot (a+7)^x$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^{x+7}) = 7^7 \ln(7) \cdot 7^x$
7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = 1/x$
8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^2) = 2/x$
9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^r) = r/x$

9.1.4 Regels voor afgeleiden van producten en quotiënten van functies

Nu volgen enkele werkpaard-regels, die ons zullen toelaten om op basis van de voorgaande basisregels ook erg complexe functies bijna zonder nadenken, maar wel met de nodige aandacht te leren afleiden. Eerst leren we hoe we producten en quotiënten van functies moeten afleiden, en daarna volgt nog één regel over de samenstelling van functies. En dan ken je (bijna) alles over het berekenen van afgeleiden. Ook deze regels kan men bewijzen, maar we gaan daar hier niet op in.

Eigenschap 9.1.3 (Productregel en quotiëntregel)**.** Zij f, g differentieerbare functies. Dan gelden volgende formules:

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Afgeleiden via rekenregels

$$d(f\cdot g)=(df)\cdot g+f\cdot(dg) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\cdot g)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g+f\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \qquad (f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$

(productregel)

$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{(df)\cdot g-f\cdot dg}{g^2} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g-f\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

(quotiëntregel)

We begrijpen deze regels als volgt:

- om de afgeleide van een product te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de eerste factor, en je vermenigvuldigt die afgeleide met de tweede factor. Daarbij tel je de afgeleide van de tweede factor vermenigvuldigd met de eerste factor op.

  Dus: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\cdot\sin x)=(2x)\cdot\sin x+x^2\cdot(-\cos x)=x(2\sin x-x\cos x)$
- om de afgeleide van een quotiënt te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de teller, en vermenigvuldigt die afgeleide met de noemer. Daarvan trek je de afgeleide van noemer vermenigvuldigd met de teller af. Vervolgens deel je het verschil door het kwadraat van de noemer.

  Dus: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^2}{\sin x}=\frac{(2x)\cdot\sin x-x^2\cdot(-\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{x(2\sin x+x\cos x)}{\sin^2 x}$
- de formule voor product kunnen we veralgemenen naar een product van meerdere factoren:

$$\begin{aligned}(f\cdot g\cdot h)' &= (f\cdot(g\cdot h))'\\ &= f'\cdot(g\cdot h)+f\cdot(g\cdot h)'\\ &= f'\cdot(g\cdot h)+f\cdot(g'\cdot h+g\cdot h')\\ &= f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'\end{aligned}$$

  Dus: je leidt *elke* factor af en vermenigvuldigt telkens die afgeleide met de andere factoren. En je telt al die producten op.

Voorbeeld 9.1.4 (Afgeleiden van producten en quotiënten)**.**

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^4\ln x=x^3(4\ln x+1)$

Uitwerking: We zoeken de afgeleide van het product van x^4 en $\ln x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^4\ln x\right] &= \ln x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^4\right]+x^4\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln x\right]\\ &= \ln x\cdot 4x^3+x^4\cdot\frac{1}{x}=x^3\left(4\ln x+1\right).\end{aligned}$$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\cdot\ln x\cdot\sin x)=\ln x\sin x+\sin x+x\ln x\cos c$

Uitwerking: We zoeken de afgeleide van het product van x,$\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\cdot\ln x\cdot\sin x\right] &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x)(\ln x\cdot\sin)+(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x)(x\sin x)+(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x)(x\ln x)\\ &= \ln x\sin x+\sin x+x\ln x\cos c.\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Afgeleiden via rekenregels

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x+3}{4x+5} = \frac{-2}{(4x+5)^2}$

Uitwerking: We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $2x+3$ en $4x+5$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x+3}{4x+5} &= \frac{2(4x+5)-4(2x+3)}{(4x+5)^2}\\ &= \frac{8x+10-8x-12)}{(4x+5)^2} = \frac{-2}{(4x+5)^2}\end{aligned}$$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln x}{\sin x} = \frac{1}{x\,\sin x} - \frac{\ln x\,\cos x}{\sin^2 x}$

Uitwerking: We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\ln x}{\sin x}\right] &= \frac{\sin x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln x]-\ln x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sin x]}{\sin^2 x}\\ &= \frac{\frac{\sin x}{x}-\ln x\cdot\cos x}{\sin^2 x}\\ &= \frac{1}{x\,\sin x}-\frac{\ln x\,\cos x}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Oefening 9.1.3 (Afgeleiden van rationale functies)**.**

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x-4}{x}\right) = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{x+3}\right) = \ldots\ldots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x+5}\right) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4-x}{3-x}\right) = \ldots\ldots$

9.1.5 Regels voor samengestelde functies (kettingregel)

Eigenschap 9.1.4 (Kettingregel)**.** Zij f, g differentieerbare functies, $c, r \in \mathbb{R}$. Dan gelden volgende formules:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\circ g)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = \frac{df}{dg}(g(x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f \qquad (\textit{kettingregel})$$

De kettingregel is voor sommigen makkelijker te onthouden met de f' notatie:

$$(f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

We begrijpen deze kettingregel als volgt:

- om de afgeleide van een samenstelling te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de buitenste

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Afgeleiden via rekenregels

functie (en die evalueer je in de binnenste functie), en je vermenigvuldigt dat resultaat met de afgeleide van de binnenste functie. Dus: afleiden doe je van buiten naar binnen, stap per stap. Sommigen beweren dat dat ook werkt voor andere dingen die rijmen op afleiden.

Dus: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = -\cos x^2 \cdot 2x = -2x\cos x^2$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^2 x) = 2\sin x \cdot (-\cos x) = -2\sin x \cos x$

- de *ketting*regel laat je toe om een lange *keten* van samenstellingen te berekenen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(h(x))) = \frac{d}{dg} f(g(h(x))) \cdot \frac{d}{dh} g(h(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(h(x)))$$

of

$$f(g(h(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Dus: je leidt af van buiten naar binnen.

- zowel voor product, qutiënt als samenstelling *begin* je met de eerste of buitenste functie af te leiden, en je werkt zo verder. Bij het product vermenigvuldig je en telt de resultaten op, bij het quotiënt vermenigvuldig je ook, maar trek je de resulatten van elkaar af, en bij de samenstelling evalueer je correct, en vermenigvuldig je alles.

Voorbeeld 9.1.5 (Afgeleiden van samengestelde functies)**.**

1. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 50x + 20$

Uitwerking: Dit is een samengestelde functie, want de functie $h : x \mapsto (5x+2)^2$ is het kwadraat (dus $f : x \mapsto x^2$) van de functie $g : x \mapsto 5x + 2$. Dat betekent dat $h(x) = f(g(x))$, en we gebruiken dan de kettingregel $d(f(g(x)) = f'(g(x) \cdot g(x) = f'(g(x) \cdot g'(x) \cdot dx$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(x))] \\ &= f'(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[g(x)] \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= 2(5x+2) \cdot 5 = 10(5x+2)\end{aligned}$$

Je kan ook sneller als volgt rekenen, zonder de samenstellende functies namen te geven:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 2(5x+2) \cdot 5 \cdot dx = 10(5x+2)$$

In dit geval zou je natuurlijk ook het kwadraat gewoon kunnen uitrekenen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25x^2 + 20x + 4) = 50x + 20$$

en gelukkig geeft dat hetzelfde resultaat!

2. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{\left(x^2+3\right)^4} = \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2+3}$

Uitwerking: Je herschrijft in dit soort opgaven best eerst de wortel als een macht $h : x \mapsto \left(x^2+3\right)^{4/3}$, en dan krijg je een samengestelde functie want $h(x) = f(g(x))$ met $g(x) = x^2 + 3$ en $f(x) = x^{4/3}$. De afgeleiden van g en f zijn gegeven door respectievelijk $g'(x) = 2x$ en $f'(x) = (4/3)\,x^{1/3}$. Met behulp van de kettingregel

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Afgeleiden via rekenregels

$d(f(g(x)) = f'(g(x) \cdot g(x) = f'(g(x) \cdot g'(x) \cdot dx$ bekomen we dan voor h':

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(x))] \\ &= f'(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[g(x)] \\ &= \frac{4}{3}(x^2+3)^{1/3} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2+3\right] \\ &= \frac{4}{3}(x^2+3)^{1/3} \cdot 2x \\ &= \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2+3}.\end{aligned}$$

Bij het afleiden van een samengestelde functie hoef je niet steeds de samenstellende functies expliciet te benoemen en af te leiden. Je mag ook rechtstreeks de afgeleiden van de samenstellende functies opschrijven.

3. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}5^{x^2} = 2\ln 5 \cdot x \cdot 5^{x^2}$

Uitwerking: We gebruiken weer de kettingregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}5^{x^2} &= 5^{x^2}\ln 5 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\right] \\ &= 5^{x^2}\ln 5 \cdot 2x \\ &= (2\ln 5)\, x\, 5^{x^2}.\end{aligned}$$

4. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2-7) = -24x\sin(4x^2-7)\cos^2(4x^2-7)$

Uitwerking: We gebruiken weer de kettingregel, maar nu hebben we een samenstelling van wel drie functies: $f(x) = 4x^2-7$, $g(x) = \cos x$ en $h(x) = x^3$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^3\left(4x^2-7\right)\right] &= 3\cos^2\left(4x^2-7\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos\left(4x^2-7\right)\right] \\ &= 3\cos^2\left(4x^2-7\right)\left(-\sin\left(4x^2-7\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x^2-7\right]\right) \\ &= -3\cos^2\left(4x^2-7\right)\sin\left(4x^2-7\right) \cdot 8x \\ &= -24x\sin\left(4x^2-7\right)\cos^2\left(4x^2-7\right).\end{aligned}$$

5. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\sin^3(e^{x^2})} = \frac{3xe^{x^2}\cos^2(e^{x^2})}{\sqrt{\sin(e^{x^2})}}$

Uitwerking: We merken op dat dit een lange samenstelling is van functies, dus we gebruiken de kettingregel (als een echte *ketting*regel!)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\sin^3(e^{x^2})} &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3(e^{x^2})}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3(e^{x^2}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3(e^{x^2})}} \cdot 3 \cdot \cos^2(e^{x^2})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(e^{x^2}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3(e^{x^2})}} \cdot 3 \cdot \cos^2(e^{x^2})\sin(e^{x^2})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3(e^{x^2})}} \cdot 3 \cdot \cos^2(e^{x^2})\sin(e^{x^2})e^{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3(e^{x^2})}} \cdot 3 \cdot \cos^2(e^{x^2})\sin(e^{x^2})e^{x^2} \cdot 2 \cdot x \\ &= \frac{3xe^{x^2}\cos^2(e^{x^2})}{\sqrt{\sin(e^{x^2})}}.\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Afgeleiden via rekenregels

6. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie f in termen van de functie g en de afgeleide g' als f bepaald wordt door het functievoorschrift

$$f(x) = \ln g(x).$$

Oplossing:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln g(x)\right] = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[g(x)\right] = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Dus $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ is de afgeleide van f' in termen van g en g'.

Merk op dat het in sommige toepassingen kan volstaan om de afgeleide van een functie te kennen 'in termen van een andere functie', en dat het dus in die gevallen niet nodig is om de afgeleide volledig uit te rekenen.

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Intro via limieten

We geven hier enkele voorbeelden van een *afgeleide* als een *limiet* van *verhoudingen* van *veranderingen*. Dat leidt dan tot een wiskundige definitie van afgeleide in een punt. Deze definitie is niet gemakkelijk. Ook als je deze niet volledig begrijpt kan je verder leren *rekenen* met afgeleiden.

Voorbeeld 9.2.1 (Eenvoudige voorbeelden).

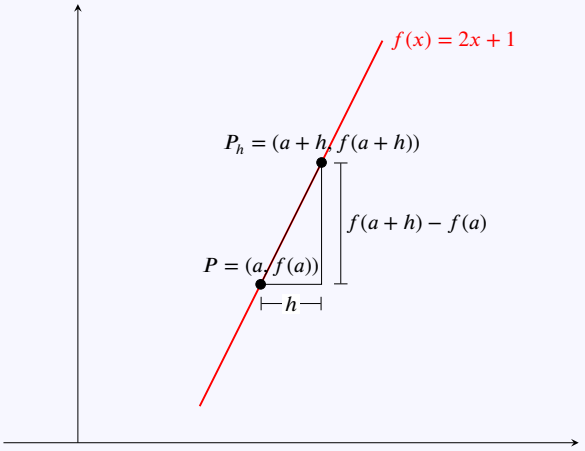
Onderzoek de verandering van de functiewaarden van de volgende functies als de onafhankelijke variabele x (lichtjes) verandert in de omgeving van een gegeven punt $a \in \mathbb{R}$.

1. Onderzoek de verandering van de functiewaarden van $f : x \mapsto 2x+1$ in het punt $a = 3$.

Uitwerking:

We bestuderen de veranderingen van de functiewaarden die horen bij verschillende veranderingen $h = 1, h = 0.5, h = 0.1, \ldots$ rond het punt $a = 3$. We noteren telkens de functiewaarde in a en in $a+h$, en de verandering $f(a+h) - f(a)$ van de functiewaarden die bij een verandering h horen. In de laatste kolom schrijven we de verhouding van de veranderingen:

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3	1	4	7	9	2	2
3	0.5	3.5	7	8	1	2
3	0.1	3.1	7	7.2	0.2	2
3	0.01	3.01	7	7.02	0.02	2
3	0.001	3.001	7	7.002	0.002	2



Voor een willekeurige h zien we dat $f(a+h) = 2(a+h)+1 = 2a+1+2h = f(a)+2h$. Dit maakt duidelijk dat f hier steeds met $2h$ toeneemt als x met h toeneemt. De verhouding tussen de toename in x en de toename in y is dus steeds $\frac{2h}{h} = 2$, wat ook precies de richtingscoëfficiënt is van de rechte met vergelijking $y = 2x+1$.

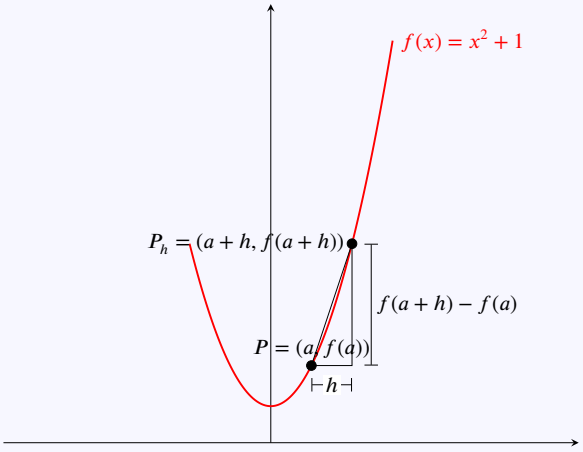
2. Onderzoek de verandering van de functiewaarden van $f : x \mapsto x^2+1$ in het punt $a = 3$.

Uitwerking:

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3	1	4	10	17	7	7
3	0.5	3.5	10	13.25	3.25	6.5
3	0.1	3.1	10	10.61	0.61	6.1
3	0.01	3.01	10	10.0601	0.0601	6.01
3	0.001	3.001	10	10.006	0.006001	6.001

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Intro via limieten

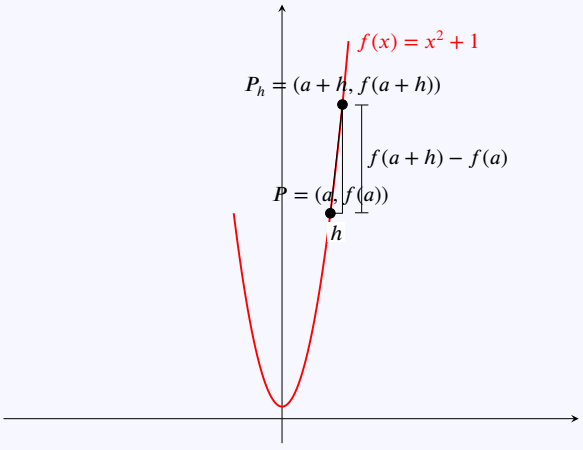


Hier hangt de verhouding $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ af van h, maar als h kleiner wordt, ligt de verhouding steeds dichter bij 6. Dat is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme $y = x^2 + 1$ in het punt met x-coördinaat 3.

3. Onderzoek de verandering van de functiewaarden van $f : x \mapsto x^2 + 1$ in het punt $a = 4$.

Uitwerking:

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
4	1	5	17	26	9	9
4	0.5	4.5	17	21.25	4.25	8.5
4	0.1	4.1	17	17.81	0.81	8.1
4	0.01	4.01	17	17.0801	0.00801	8.01
4	0.001	4.001	17	17.008	0.008001	8.001



Hier hangt de verhouding $\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$ ook af van h, maar als h kleiner wordt, ligt de verhouding steeds dichter bij 8. Dat is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme $y = x^2+1$ in het punt met x-coördinaat 4.

Voorbeeld 9.2.2. We onderzoeken de helling van de raaklijn aan de grafiek van een kromme in een willekeurig punt met x-coördinaat a.

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Intro via limieten

Herinner u volgende formule voor de vergelijking van de rechte L door twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) (met $x_1 \neq x_2$) in het vlak:

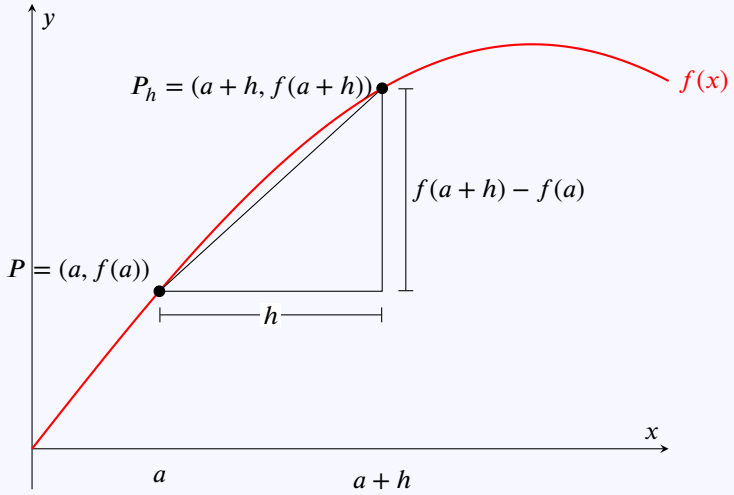
$$L \leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Je kan snel nagaan dat de twee gegeven punten inderdaad aan deze vergelijking voldoen. De vergelijking is van de eerste graad en stelt dus een rechte voor. Dat moet dus zeker de rechte door die twee punten zijn, want er gaat steeds precies één rechte door twee verschillende punten.

Herinner u ook volgende algemene vergelijking van de rechte L met richtingscoëfficiënt m en snijpunt met de y-as in $(0, q)$ (met $m, q \in \mathbb{R}$):

$$L \leftrightarrow y = mx + q$$

Op onderstaande figuur zien we de grafiek van een functie f en een willekeurig punt met x-coördinaat a.



Alle punten op de grafiek van f zijn van de vorm $(x, f(x))$. We schrijven de vergelijking op van de rechte door het punt $(a, f(a))$ en $(a + h, f(a + h))$, twee punten op de grafiek van f. De vergelijking is

$$y - f(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}(x - a)$$

of dus

$$y = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot x + f(a) - a\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

De laatste vergelijking is van de vorm $y = mx + q$. De rico van deze rechte is dus $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$. Die rico hangt duidelijk af van h (a is vast kozen). Als we h kleiner laten worden, dan beweegt het punt $(a + h, f(a + h))$ op de grafiek van f naar het punt $(a, f(a))$. De rechte door $(a, f(a))$ en $(a + h, f(a + h))$ draait en heeft als limietstand de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$. De rico van de raaklijn is dus:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

In het algemeen kunnen we die limiet niet direct uitrekenen, want hij is van de vorm $\frac{0}{0}$, en dat is een onbepaaldheid.

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Intro via limieten

Deze limiet wordt '*de afgeleide van f in a*' genoemd. En het zal blijken dat er relatief eenvoudige technieken zijn om afgeleiden te berekenen.

Definitie 9.2.1 (Afgeleide in een punt)**.** Zij f een reële functie en $a \in \mathbb{R}$ in het domein van f.

Als de limiet $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *bestaat* en *eindig* is, dan noemen we de functie f *afleidbaar* in a

In dat geval noemen we die limiet de *afgeleide* van f in a en we noteren

$$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

We berekenen nu als voorbeeld enkele afgeleiden met behulp van deze definitie. Met de rekenregels voor afgeleiden die volgen kunnen we dit resultaat echter op een eenvoudigere wijze bekomen.

Voorbeeld 9.2.3 (Basisvoorbeelden)**.** Bepaal op basis van de definitie de afgeleide van volgende functies:

1. $f : x \mapsto 2x+1$ in het punt $a = 3$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(3+h)+1-(2\cdot 3+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6+2h+1-7}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

2. $f : x \mapsto 2x+1$ in een willekeurig punt a

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(a+h)+1-(2a+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned}$$

3. $f : x \mapsto x^2+1$ in $a = 3$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2+1-(3^2+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{9+6h+h^2+1-9-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (6+h) = 6 \end{aligned}$$

4. $f : x \mapsto x^2+1$ in $a = 4$

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Intro via limieten

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2+1-(4^2+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{16+8h+h^2+1-16-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{8h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(8+h) = 8 \end{aligned}$$

5. $f : x \mapsto x^2+1$ in een willekeurig punt a

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2+1-(a^2+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2+1-a^2-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a \end{aligned}$$

In elke x kunnen we nu de afgeleide van f in x berekenen. Zo krijgen we een nieuwe functie in x die we de afgeleide functie zullen noemen.

Definitie 9.2.2 (Afgeleide functie)**.**

Zij f een reële functie.

In de punten waar de afgeleide bestaat definiëren we de *afgeleide functie* van f, genoteerd f', als:

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Voorbeeld 9.2.4 (Basisvoorbeelden)**.** Bepaal de afgeleide functie van volgende functies:

1. $f : x \mapsto 2x+1$

Uitwerking: We hebben boven gezien dat voor willekeurige a, de afgeleide van $f : x \mapsto 2x+1$ in a gelijk is aan 2. De afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2$.

2. $f : x \mapsto x^2+1$

Uitwerking: We hebben boven gezien dat voor willekeurige a, de afgeleide van $f : x \mapsto x^2+1$ in a gelijk is aan $2a$. De afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2x$.

Opmerking 9.2.1.

(a) De afgeleide in een punt is gelijk aan de *rico* van de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

(b) Om historische en praktische redenen worden er ook een aantal alternatieve notaties gebruikt:

$$Df \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f \overset{\text{def}}{=} \frac{df}{dx} \overset{\text{def}}{=} f'$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Intro via limieten

voor de afgeleide functie en

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

voor de afgeleide van f in x. Met de notatie $y = f(x)$ schrijft men soms ook y' (of zelfs $\dot{y}$) voor de afgeleide. Dat is vooral handig bij differentiaalvergelijkingen.

(c) Het is meestal aangewezen om in deze definitie de breuk $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ niet zozeer te beschouwen als een *quotiënt* (dus het resultaat van een deling), maar eerder als een *verhouding*: de breuk meet hoe de verandering van y-waarden, dus $f(a+h)-f(a)$ zich verhoudt tot de verandering in x-waarden, dus $(a+h)-a = h$. De afgeleide is de limiet van die *verhouding* voor steeds kleinere h, en meet dus hoeveel de y-waarden sneller of trager veranderen dan de x-waarden. Dat is op elke plaats anders, dus we hebben een functie nodig om al die verhoudingen netjes bij te houden.

(d) Het is mogelijk dat de de afgeleide functie gedefinieerd is op een kleiner domein dan de functie zelf, omdat in een aantal punten de afgeleide niet bestaat.

(e) Het is mogelijk dat de limiet oneindig wordt. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de functie $x \mapsto \sqrt{x}$ in het punt $x = 0$. In dat geval noemen we de functie ook *niet afleidbaar* in $x = 0$.

(f) De limiet bestaat in sommige gevallen niet omdat de linkerlimiet verschilt van de rechterlimiet. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de absolute waarde $x \mapsto |x|$ in het punt $a = 0$. Hier is

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{-h}{h} = -1 \qquad \text{en} \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{h}{h} = 1.$$

(g) In andere gevallen bestaat de limiet mogelijk niet omdat de functie f te erg trilt in de buurt van a.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Intro via veranderingen

Opmerking 9.3.1. DIT IS EEN VOORLOPIGE VERSIE; USE WITH CARE

We maken hier op een ietwat onconventionele manier kennis met het begrip *verandering*.

We vermijden daarbij het begrip limiet, dat in de meeste uiteenzettingen over veranderingen en afgeleiden een prominente plaats inneemt.

We verwachten van u het volgende:

(a) u vertrouwt ons dat we weten wat we doen.

(b) u vertrouwt ons dat we u iets nuttigs willen bijleren.

(c) u vergeet indien nodig tijdelijk dat er zoiets bestaat als een 'differentiaal' (het veroorzaakt verwarring).

(d) u bent bereid minstens één uur met volledige concentratie deze module te bestuderen, en de voorbeelden en oefeningen te maken.

Onder die voorwaarden beloven wij u het volgende:

(a) we zullen u op een volgens ons zo efficiënt mogelijke manier leren redeneren over veranderingen.

(b) we verklaren u alle mysterieuze rekenregels over differentiëren.

(c) we gebruiken in deze module nergens het woord limiet. Behalve in de vorige zin, natuurlijk.

We willen onderzoeken of we iets zinnigs kunnen zeggen over de *verandering van samenhangende grootheden*. Anders gezegd: als twee grootheden van elkaar afhangen, willen we proberen begrijpen hoe de afhankelijke grootheid (zeg y) verandert als gevolg van veranderingen van de onafhankelijke grootheid (zeg x). Hoe verandert de winst als de productierkosten stijgen; hoe verandert de snelheid als het gewicht toeneemt; hoe veranderen examenresultaten als de studietijd toeneemt.

Voorbeeld 9.3.1 (Verandering van omtrek oppervlakte en inhoud (bij een vierkant of kubus))**.**

Beschouw een vierkant met een zijde met lengte a.

1. We vragen ons af hoe de *omtrek* van dat vierkant verandert als we de *zijde* a laten veranderen. Omdat de omtrek gelijk is aan 4 keer de zijde, verandert de omtrek 4 keer meer dan de zijde. In formules:

$$O_{mtrek}(a) = a + a + a + a = 4 \cdot a \qquad \text{(de omtrek van een vierkant met zijde } a\text{)}$$

Veronderstel dat we de zijde vergroten met h, dan is de nieuwe zijde dus $a + h$, en de nieuwe omtrek

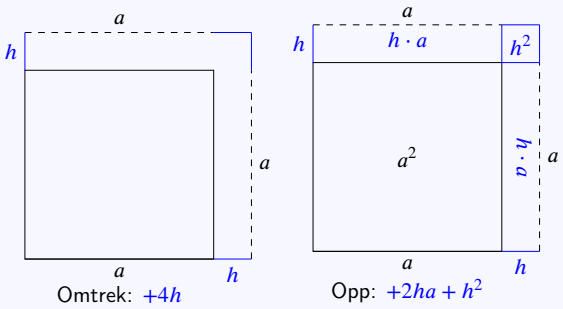
$$O_{mtrek}(a + h) = 4 \cdot (a + h) = 4a + 4h = O_{mtrek}(a) + 4h$$

Dus: als a verandert met h, dan verandert de omtrek met $4h$.

Concreet: als we de zijde vergroten met $2mm$, dan vergroot de omtrek met $4 \times 2mm = 8mm$. Als we de zijde vergroten met $5km$, dan vergroot de omtrek met $4 \times 5km = 20km$. En dit hangt allemaal niet af van de oorspronkelijke grootte van het vierkant. In het bijzonder hoeft de verandering helemaal niet klein te zijn ten opzichte van oorspronkelijke lengte.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Intro via veranderingen



2. We vragen ons af hoe de *oppervlakte* van datzelfde vierkant verandert als we de zijde a laten veranderen. De oppervlakte van een vierkant is het kwadraat van de zijde, dus:

$$O_{ppervlakte}(a) = a \cdot a = a^2 \qquad \text{(de oppervlakte van een vierkant met zijde } a\text{)}$$

Veronderstel dat we de zijde vergroten met h, dan is de nieuwe zijde dus $a + h$, en de nieuwe oppervlakte

$$O_{ppervlakte}(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ha + h^2 = O_{ppervlakte}(a) + 2ha + h^2$$

en dus

$$O_{ppervlakte}(a+h) - O_{ppervlakte}(a) = 2ha + h^2$$

Dus: als a verandert met h, dan verandert de oppervlakte met $2ha + h^2$.

Concreet:

Als we de zijde vergroten met $2mm$, dan hangt de toename van de oppervlakte af van de grootte van het oorspronkelijke vierkant. Inderdaad de toename is dan $2 \times 2 \times a + 4\ mm^2$.

Voor een vierkant dat oorspronkelijk $a = 2mm$ groot was (en dus oppervlake $4mm^2$ had), groeit de oppervlakte met $8 + 4 = 12mm^2$ (een verviervoudiging, zoals op een tekening ook onmiddellijk blijkt.)

De oppervlakte van een vierkant van $5cm$ vergroot met $2 \times 2 \times 50 + 4 = 204mm^2$, of $2.04cm^2$.

De oppervlakte van een vierkant van $1m$ vergroot met $2 \times 2 \times 1000 + 4 = 4004mm^2$, of $0.004004m^2$.

Het is duidelijk dat naarmate het vierkant relatief groter wordt (of de verandering relatief kleiner), de term '$+h^2$' steeds minder belang zal hebben ten opzichte van de totale toename (die zelf weliswaar ook steeds relatief kleiner zal worden). Voor een verandering die 1000 keer kleiner is dan de oorspronkelijke afmeting, draagt de kwadratische component dus voor hoogstens ongeveer $1/1000$ste bij in de totale verandering. Die bijdrage van de kwadratische component is dus niet alleen klein ten opzichte van de verandering van de zijde a, maar ook klein ten opzichte van de verandering van de oppervlakte a^2.

3. We vragen ons af hoe de inhoud van een kubus verandert als we de zijde a laten veranderen. Omdat de inhoud gelijk is aan de derde macht van de zijde, verandert de inhoud op tamelijk complexe wijze als de zijde verandert. In formules:

$$I_{nhoud}(a) = a \cdot a \cdot a = a^3 \qquad \text{(de inhoud van een kubus met zijde } a\text{)}$$

Veronderstel dat we de zijde vergroten met h, dan is de nieuwe zijde dus $a + h$, en de nieuwe inhoud

$$I_{nhoud}(a+h) = (a+h)^3 = a^3 + 3ha^2 + 3h^2a + h^3 = I_{nhoud}(a) + 3ha^2 + 3h^2a + h^3$$

Dus: als a verandert met h, dan verandert de inhoud van een kubus met $3ha^2 + 3h^2a + h^3$.

Opdracht: ga na dat –net zoals voor de oppervlakte van het vierkant– voor kleine h veruit de belangrijkste bijdrage van de toename bestaat uit de lineaire component, namelijk $3a^2h$. (Merk op: we bedoelen natuurlijk 'lineair in h', want het is h dat hier varieert, niet a. Het feit dat er a^2 staat is hier dus niet relevant).

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Intro via veranderingen

Voorbeeld 9.3.2 (Verandering van zijde (bij een vierkant))**.**

We keren nu het vorige voorbeeld om: we variëren de *omtrek* of de *oppervlakte* van een vierkant, en we vragen ons af wat er gebeurt met de lengtes van de zijden van dat vierkant. (Dit is bij een eerste lezing allicht tamelijk complex, en kan eventueel worden overgeslagen ...)

1. We bekijken hoe de *zijde* van een vierkant verandert als we de omtrek a laten veranderen. Omdat de omtrek gelijk is aan 4 keer de zijde, verandert de zijde 4 keer *minder snel* dan de omtrek. In formules:

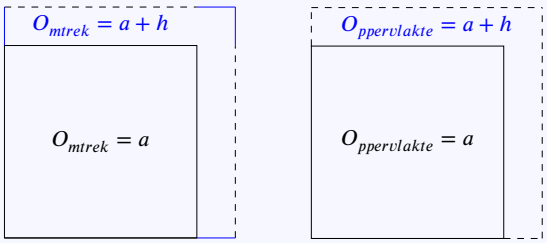
$$Z_{ijde}(a) = a/4 \qquad \text{(de zijde van een vierkant met omtrek } a\text{)}$$

Veronderstel dat we de omtrek vergroten met h, dan is de nieuwe omtrek dus $a+h$, en de nieuwe zijde

$$Z_{ijde}(a+h) = (a+h)/4 = a/4 + h/4 = Z_{ijde}(a) + h/4$$

Dus: als de omtrek a verandert met h, dan verandert de zijde met $h/4$.

Concreet: als we de omtrek vergroten met $8mm$, dan vergroot de zijde met $8/4 = 2mm$. Als we de omtrek vergroten met $20km$, dan vergroot de zijde met $20/4 = 5km$. En dit hangt allemaal niet af van de oorspronkelijke grootte van het vierkant. In het bijzonder hoeft de verandering hier helemaal niet klein te zijn ten opzichte van oorspronkelijke omtrek.



Zijde: $+h/4$ Zijde: $+???$

2. We bekijken hoe de *zijde* van een vierkant verandert als we de oppervlakte a laten veranderen. Omdat de oppervlakte gelijk is aan het kwadraat van de zijde, verwachten we dat de zijde ongeveer verandert als de *vierkantswortel* van de oppervlakte. In formules:

$$Z_{ijde}(a) = \sqrt{a} \qquad \text{(zijde van een vierkant met oppervlakte } a\text{)}$$

Veronderstel dat we de oppervlakte vergroten met h, dan is de nieuwe oppervlakte dus $a+h$, en de nieuwe zijde

$$Z_{ijde}(a+h) = \sqrt{a+h} = \sqrt{a} + ???$$

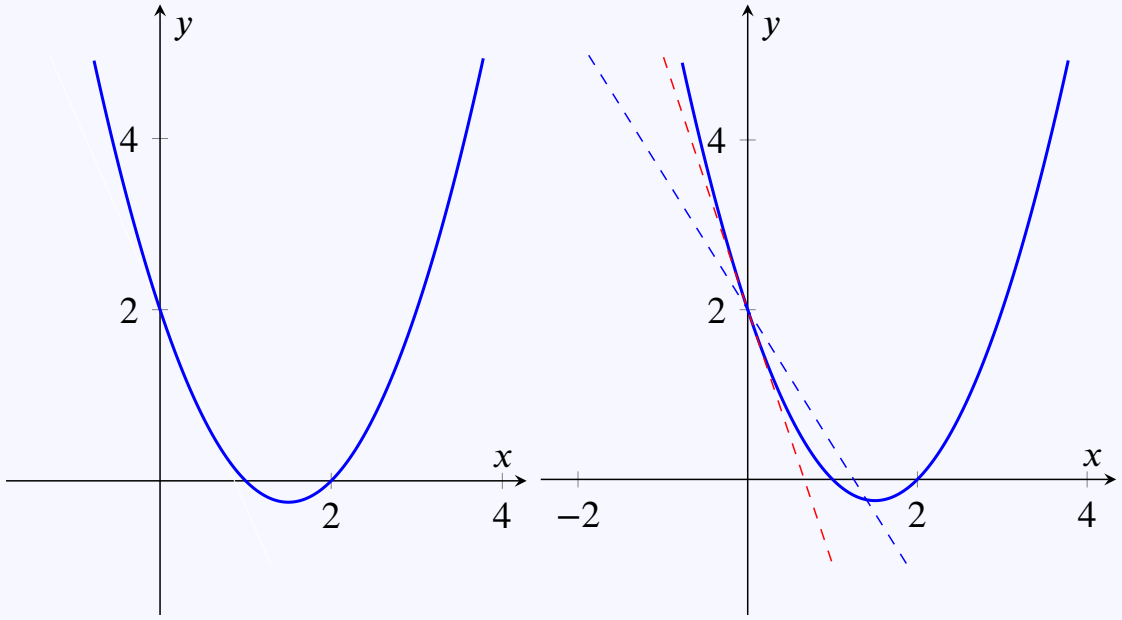
Dus: als de oppervlakte a verandert met h, dan hebben we geen voor de hand liggende formule om de verandering van de zijde uit te rekenen.

Voorbeeld 9.3.3 (Verandering van functiewaarden (helling))**.**

Beschouw de grafiek van de functie $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$. We willen de helling van die grafiek onderzoeken. Het is onmiddellijk af te lezen van de grafiek dat die eerst daalt tot in (ongeveer?) $x = 1/2$ en dan verder stijgt. Maar, we zien ook dat de kromme steeds *sneller* lijkt te stijgen.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Intro via veranderingen



Probleem: kunnen we daar verder iets zinnigs over zeggen?

Idee: we zouden kunnen proberen met een getal aan te geven hoe sterk de grafiek stijgt. In het punt $x = 1/2$ zou dat getal dan best 0 zijn (voor niet dalen en niet stijgen), en voor groter x zou dat getal best steeds groter worden (om aan te geven dat de kromme steeds sneller stijgt).

Probleem: hoe vinden we een geschikt getal?

Idee: we kennen al een getal dat aangeeft hoe sterk een *rechte* stijgt. Dat is de richtingscoëfficiënt of rico, dus het getal m in de vergelijking $y = mx + q$ van een rechte.

Probleem: hoe kunnen we dit idee gebruiken om een getal te vinden voor onze functie f?

Idee (lichtjes geniaal?): we kunnen overwegen om de rico van de *raaklijn* te gebruiken om aan te duiden hoe sterk de grafiek van f stijgt.

Probleem: hoe vinden we in godsnaam de rico van de raaklijn aan die grafiek in een willekeurig punt?

Idee: We gebruiken de (of een?) definitie van de raaklijn, namelijk de lijn waar twee snijpunten samenvallen (zie grafiek).

Oplossing: we snijden de grafiek van f met een willekeurige rechte $y = mx + q$, en eisen dat de twee snijpunten samenvallen. Dan is die rechte automatisch een raaklijn.

Uitwerking:

We zoeken $m, q \in \mathbb{R}$ waarvoor de rechte $y = mx + q$ de kromme $y = x^2 - 3x + 2$ in slechts één punt snijdt (of dus: in twee samenvallende punten).

Die snijpunten zijn alle punten (x, y) die zowel op de rechte liggen als op de kromme. Het zijn dus de punten die voldoen aan de twee vergelijkingen:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \tag{1}$$

We vervangen y in de tweede vergelijking door de waarde uit de eerste vergelijking (substitueren):

$$\begin{cases} y = mx + q \\ mx + q = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y - mx - q = 0 \\ x^2 - (3 + m)x + (2 - q) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Intro via veranderingen

De tweede vergelijking geeft de x-coordinaten van de twee snijpunten. We willen dat die twee snijpunten samenvallen, dus moet de discriminant nul zijn. Die disciiminant is $(3+m)^2-4(2-q)$, en dus moet

$$\begin{aligned} 0 &= (3+m)^2 - 4(2-q) \\ &= 9 + 6m + m^2 - 8 + 4q \end{aligned}$$

en bijgevolg

$$q = -\frac{1}{4}(m^2+6m+1)$$

Dus, de rechten

$$y = mx - \frac{1}{4}(m^2+6m+1) \quad (m \in \mathbb{R})$$

zijn allemaal raaklijnen aan de grafiek van $f(x) = x^2 - 3x + 2$, en wel in de punten $(x, mx - \frac{1}{4}(m^2 + 6m + 1))$

We willen echter de rico kennen van de raaklijn in een punt (x, y) van de grafiek, dus een punt $(x, x^2 - 3x + 2)$. We zoeken dus de bijhorende m. Dat is dus de m waarvoor $x^2 - 3x + 2 = mx - \frac{1}{4}(m^2 + 6m + 1)$.

Dit is een kwadratische vergelijking in m (waarbij nu x een parameter is).

We lossen die vergelijking op naar m:

$$x^2 - 3x + 2 = mx - \frac{1}{4}(m^2+6m+1) \iff 4x^2 - 12x + 8 = 4mx - m^2 - 6m - 1 \tag{3}$$

$$\iff m^2 + (6-4x)m + 4x^2 - 12x + 9 = 0 \tag{4}$$

We berekenen opnieuw een discriminant $(6-4x)^2 - 4(4x^2-12x+9) = 36 - 48x + 16x^2 - 16x^2 + 48x - 36 = 0$, en dus is er een unieke oplossing $m_1 = -\frac{6-4x}{2} = 2x + 3$.

Dus: de rico van de raaklijn in het punt x is gelijk aan $2x + 3$, voor elk punt x.

Besluit: we zijn licht geniaal, want we hebben –weliswaar met wat rekenwerk– een eenvoudige formule gevonden voor de rico van de raaklijnen in *alle* punten van de grafiek van de functie $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$: die rico is $2x + 3$.

In hoeverre lost dit ons oorspronkelijke probleem op? Wel, we weten nu dat de grafiek van deze functie f steeds *lineair* sterker gaat stijgen: voor $x = 1$ is de rico gelijk aan $r_1 = 2(1) + 3 = 4$, en voor $x = 2$ is hij $r_2 = 2(2) + 3 = 7$, voor $x = 3$ is hij $r_3 = 2(3) + 3 = 9$, en voor willekeurige x dus $2x + 3$.

Mooi, en we hebben nu zeker een kleine pauze verdiend. Maar, als wiskundigen zijn we inherent lui en willen we ten alle prijze dergelijke tamelijk langdradige berekeningen proberen te vermijden. En dat zal nog lukken ook. Op voorwaarde dat je moedig verder blijft lezen.

Voorbeeld 9.3.4 (Verandering van oppervlakte (bij een rechthoek))**.**

We kennen de formule voor de oppervlakte van een rechthoek met zijden met lengte a en b:

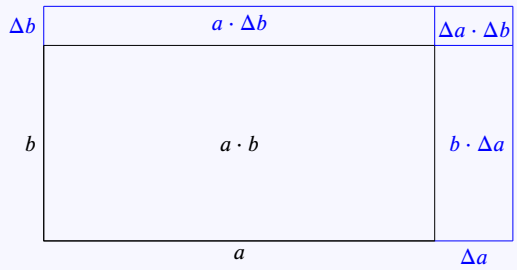
$$O_{ppervlakte} = a \cdot b.$$

Hoe *verandert* die oppervlakte als a en b veranderen? We noteren de verandering van a met Δa, en die van b met Δb. De verandering van de oppervlakte $a \cdot b$ noteren we dan logischerwijze $\Delta(a \cdot b)$.

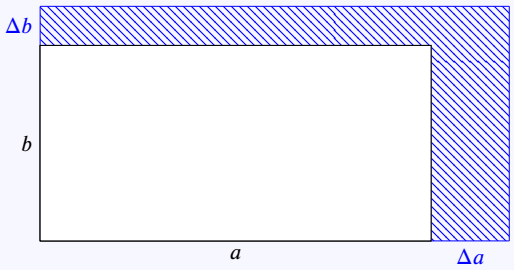
Dat wordt duidelijk op volgende tekening:

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Intro via veranderingen



De oppervlakte verandert met $a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b$



De oppervlakte verandert met $\Delta(a \cdot b)$

We stellen vast dat

$$\Delta(a \cdot b) = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b$$

We weten dat het bestuderen van veranderingen veel eenvoudiger wordt als we ons beperken tot de 'eerste orde component' van de verandering, wat hetzelfde betekent als beperken 'tot de lineaire component' van de verandering. Algebraïsch betekent dat precies hetzelfde als zeggen dat we alle producten van veranderingen zullen gelijkstellen aan 0.

We spreken af dat we de lineaire component van een verandering Δa noteren met da (dus met een kleine d in plaats van een Δ). Dit betekent algebraïsch dat (per definitie) $(da)^2 = (db)^2 = da \cdot db = 0$. Op die manier krijgen we volgende merkwaardige formule voor de eerste-orde component van de verandering van de oppervlakte van een rechthoek:

$$d(a \cdot b) = a \cdot db + b \cdot da$$

Deze formule is merkwaardig omdat ze precies gelijk is aan de productregel voor afgeleiden (of voor differentialen).

De productregel zegt dus dat je om de verandering van een oppervlakte te begrijpen, twee extra oppervlaktes moet toevoegen, namelijk $da \cdot b$ en $a \cdot db$. Je maakt dan een tweede-orde fout (je 'vergeet' namelijk het kleine rechthoekje $da \cdot db$), maar dat was precies de bedoeling. We willen namelijk niet de volledig exacte verandering bestuderen (want dat is in de praktijk onmogelijk, wegens veel te complex: er bestaat daarover geen bruikbare theorie), maar enkel de lineaire component. En, voor voldoende kleine veranderingen is natuurlijk de lineaire component de enige die telt, want tweede-orde componenten zijn -voor kleine veranderingen- verwaarloosbaar.

We hebben in verschillende situaties de samenhang tussen verschillende veranderingen onderzocht: die tussen tijd en afgelegde weg, tussen de zijde van een vierkant en zijn omtrek of oppervlakte, en hetzelfde voor de zijde van een kubus en zijn inhoud. En we hebben onderzocht of we de helling van een kromme kunnen bestuderen als we de kromme kennen.

In het algemeen ligt het voor de hand dat als er een erg ingewikkeld verband is tussen twee grootheden, dat dan het verband tussen de veranderingen van die grootheden mogelijk ook erg ingewikkeld zal zijn, misschien zelfs nog ingewikkelder dan het verband tussen de oorspronkelijke grootheden. Door een merkwaardig en geniaal inzicht hebben twee wetenschappers in de zeventiende eeuw ongeveer gelijktijdig ontdekt hoe voor de *lineaire benaderingen* van die veranderingen een relatief eenvoudige en zeker erg elegante en krachtige theorie bestaat. Dat is de theorie van de differentiaalrekening waaruit bovendien nog veel spectaculairdere dingen volgen in de pendant van de integraalrekening.

De kracht van de theorie komt uit volgende vaststelling:

Als we ons in de studie van *veranderingen* van samenhangende grootheden beperken tot de *lineaire component van die veranderingen*,

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Intro via veranderingen

dan worden die veranderingen eenvoudiger begrijpbaar
en in vele gevallen *berekenbaar*.

Het is ook duidelijk dat een dergelijke lineaire benadering van een functie f in een punt a in het algemeen ook enkel zinvol is in de omgeving van dat punt a. Maar, we hebben in de voorbeelden gezien dat het in de omgeving altijd wel erg goed werkt. Hoe groot die omgeving precies mag zijn, hangt (op een tamelijk ingewikkelde manier!) af van de gewenste nauwkeurigheid, van de preciese functie f en van het punt a.

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Intro via differentialen

Opmerking 9.4.1. !!! WORK IN PROGERESS DO NOT USE !!!!

Je kan hier op een ietwat onconventionele manier iets leren over afgeleiden.

We verwachten van u het volgende:

(a) u vertrouwt ons dat we weten wat we doen.

(b) u vertrouwt ons dat we u iets nuttigs willen bijleren.

(c) u gelooft ons als we zeggen dat er zoiets bestaat als een 'differentiaal'.

(d) u bent bereid minstens één uur met volledige concentratie deze module te bestuderen, en de voorbeelden en oefeningen te maken.

Onder die voorwaarden beloven wij u het volgende:

(a) we zullen u op een volgens ons zo efficiënt mogelijke manier leren rekenen en redeneren met afgeleiden.

(b) we geven u verder enkele erg spectaculaire toepassingen van deze differentialen.

We willen aan zoveel mogelijk reële functies f een zogenaamde 'differentiaal' associëren. We zullen u expliciet *niet* willen zeggen wat een differentiaal precies is, maar wel aan welke eigenschappen hij voldoet. Later zal ook duidelijk worden waarom het een (erg) nuttig begrip is.

Merk op dat dit enigszins kan vergeleken worden met het begrip *getal*: het is weinig waarschijnlijk dat je ooit een nauwkeurige definitie hebt geleerd van het begrip 'getal' die zowel toepasbaar is voor natuurlijke, reële en complexe getallen. Dat stoort niet echt, want je kent de eigenschappen van die getallen: optellen, vermenigvuldigen, distributiviteit, enzovoort, en dat volstaat voor alle praktische doeleinden.

We noteren de *differentiaal* van f (als hij bestaat) df. We eisen –voorlopig op willekeurig basis– dat deze differentialen zouden voldoen aan de volgende regels:

Axioma 9.4.1 (Basiseigenschappen van differentialen)**.**

(1) (dxregel) De functie $x : x \mapsto x$ heeft een differentiaal, die we dx noteren.

(2) (dcregel) De functie $c : x \mapsto c$, met $c \in \mathbb{R}$ heeft differentiaal $dc \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Als f, g reële functies zijn die een differentiaal hebben (genoteerd df resp. dg), dan geldt:

(3) (rekenregel) $g \cdot df$ en $df + dg$ zijn ook differentialen.

(4) (somregel) $d(f+g) = df + dg$

(5) (productregel) $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$

Een reële functie f die een differentiaal heeft, noemen we *differentieerbaar*.

Uitleg 9.4.1. We moeten nu verder onderzoeken of we -enkel op basis van deze regels- enerzijds interessante differentieerbare functies kunnen bekomen en anderzijds of we enige feeling kunnen opbouwen voor de precieze betekenis van de regels.

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Intro via differentialen

(a) De twee eerste regels geven een soort van beginstap: er is minstens één functie die een differentiaal heeft, namelijk de identieke functie, meest eenvoudig denkbare functie die elke x afbeeld op zichzelf. Wat die differentiaal precies is hoeven we voorlopig niet te weten, we spreken alleen af om die differentiaal van de functie $x \mapsto x$ met het symbool dx te noteren. Verder zijn ook de *constante* functies differentieerbaar, en hun differentiaal is steeds 0.

(b) De derde regel betekent dat we een differentiaal met een functie kunnen vermenigvuldigen, en dat we dan opnieuw een differentiaal krijgen. We kunnen ook twee differentialen optellen, en de som is weer een differentiaal. We eisen ook -zonder dat we het expliciet vermeld hebben- dat deze nieuwe vermenigvuldiging en optelling aan alle redelijke eigenschappen voldoen (dus bijvoorbeeld $1 \cdot df = df$, en $df + dg = dg + df$, en $0 + df = df$ etc.).

(c) De vierde regel zegt dat de differentiaal van een som gelijk is aan de som van de differentialen. Dat is een voor de hand liggende keuze.

(d) De vijfde regel is wat mysterieus, en hij is de belangrijkste van allemaal: om redenen die we verder in detail zullen uitleggen, kiezen we er niet voor om te zeggen dat de differentiaal van het product gelijk is aan het product van de differentialen.

Inderdaad, ten eerste hebben we nog helemaal niet gezegd wat het zou kunnen betekenen om differentialen met elkaar te vermenigvuldigen, en we zullen dat voorlopig ook niet doen. Het heeft dus (voorlopig) *geen* betekenis om differentialen met elkaar te vermenigvuldigen. Je kan een differentiaal wel met een functie vermenigvuldigen (dat is de derde regel, en je krijgt dan weer een differentiaal als uitkomst), maar niet met een andere differentiaal.

En ten tweede maken we de formule wat ingewikkelder dan op het eerste zicht voor de hand zou kunnen liggen. De differentiaal van het product is de som van elke factor met de differentiaal van de andere factor. Dus: $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$. Je moet dus van elke factor in het product de differentiaal nemen, en die vermenigvuldigen met de andere factor(en). De resultaten tel je bij elkaar op.

Voila, that's it.

Laat ons in de volgende voorbeelden/oefeningen onderzoeken wat we allemaal met deze regels kunnen doen. Uit de axioma's volgt dus dat er minstens enkele eenvoudige functies bestaan die een differentiaal hebben, en we zullen onderzoeken of we met behulp van de regels nieuwe differentialen kunnen berekenen.

Aan het einde van deze module vatten we alle resultaten samen, en later wordt duidelijk dat deze differentialen ook een interpretatie (of betekenis) hebben die ze van groot praktisch nut maakt.

Merk op: geïnteresseerde lezers die *echt* wiskunde willen leren, schrijven de vijf formules hierboven over op een leeg blad, en proberen *enkel* op basis van die regels $d(x^{2020} + 1984x + 1302)$ te bepalen. Hint: zoek eerst dx^2.

Om vertrouwd te worden met een nieuw begrip, is het dikwijls aangewezen om enkele zo eenvoudig mogelijke voorbeelden te onderzoeken. Daarna probeer je wat minder eenvoudige voorbeelden te onderzoeken, en in goede gevallen vind je een goed prototypisch voorbeeld waarmee het nieuwe begrip volledig duidelijk wordt.

Voorbeeld 9.4.1 (Differentiaal van veelvouden van x)**.**

1. $d(x + x) = 2\,dx$
2. $d7x = 7\,dx$
3. $d(1/2)x = 1/2\,dx$

Hieruit volgt dat voor elke getal $c \in \mathbb{R}$ geldt dat $d(cx) = c\,dx$, en meer algemeen dat ook $d(cf) = c\,df$ voor elke differentieerbare functie f.

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Intro via differentialen

Voorbeeld 9.4.2 (Differentiaal van machten van x).

1. $dx^2 = 2x\,dx$
2. $dx^3 = 3x^2\,dx$
3. $dx^4 = 4x^3\,dx$
4. $dx^{2020} = 2020x^{2019}\,dx$
5. $d(x^4 + x^2 + 1) = (4x^3 + 2x)\,dx$?

Hieruit volgt (per inductie) dat voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $dx^n = nx^{n-1}\,dx$.

Op basis van deze voorbeelden, kunnen we dus tamelijk eenvoudig differentialen van willekeurige veeltermen berekenen.

Voorbeeld 9.4.3 (Differentiaal van een lineaire functie).

1. Wat is de differentiaal $d(ax + b)$ van de lineaire functie $f : x \mapsto ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$?

$d(ax + b) = a\,dx$

Voorbeeld 9.4.4 (De differentiaal van $\frac{1}{x}$).

Bereken $d(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}\,dx$ (Hint: gebruik op een slimme manier de productregel)

Voorbeeld 9.4.5 (De differentiaal van x^{-2}).

Bereken $d(x^{-2}) = -2x^{-3}\,dx$

Voorbeeld 9.4.6 (De differentiaal van $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$). Bereken $d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

Uit voorgaande voorbeelden blijkt volgende eigenschap (die men ook wiskundig kan bewijzen, de eerste is eenvoudig, de tweede eigenschap hangt af van een precieze definitie voor x^r, die we niet hebben gegeven):

Eigenschap 9.4.1 (Gevolgen van de rekenregels). Zij f een reële differentieerbare functie, en $c, r \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$d(cf) = c\,df \tag{5}$$
$$d(x^r) = rx^{r-1}\,dx \tag{6}$$

Dus: een constante factor kunnen we gewoon uit de differentiaal naar voor halen, en voor de differentiaal van een macht is er een eenvoudige regel. We berekenen de differentiaal van enkele veeltermen.

Oefening 9.4.1. Bereken volgende differentialen:

1. $dx^5 = \ldots\ldots dx$
2. $d(x^5 + 4x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 7) = (\ldots\ldots)\,dx$
3. $d(2^5 + 4) = \ldots\ldots dx$

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Intro via differentialen

Voorbeeld 9.4.7.

1. Geldt ook voor elke f dat $d(f^2) = 2f\,dx$? Fout

Uitwerking: Voor $f(x) = (2x+1)^2$ blijkt dat $df = 4f\,dx$.

Wat werkt er wel? $d(f^2) = 2f\,df$ (want dat volgt uit de productregel toegepast op $f \cdot f$)

Voorbeeld 9.4.8.

1. Geldt ook voor elke f dat $d(\frac{1}{f}) = -\frac{1}{f^2}\,dx$? Fout

Uitwerking: Wat werkt er wel ? $d(\frac{1}{f}) = -\frac{1}{f^2}\,df$ (gebruik opnieuw de productregel voor $1 = f \cdot \frac{1}{f}$)

We geven -zonder bewijs- volgende eigenschap

Eigenschap 9.4.2. Zij f een reële functie die een differentiaal heeft.

Dan bestaat er steeds een unieke reële functie g zodat $df = g\,dx$

Opmerking 9.4.2. De eigenschap zegt *niet* dat de functie g zelf ook een differentiaal heeft.

Deze eigenschap zegt dus dat in zekere zin elke differentiaal df 'evenredig' is met de differentiaal dx, met als evenredigheidsfactor een *functie*. Deze uniek bepaalde functie noemen we per definitie de *afgeleide* functie van f:

Definitie 9.4.1 (Definitie van de afgeleide van een functie)**.**

Zij f een reële, differentieerbare functie (dus: een functie die een differentiaal heeft).

Dan noemen we de unieke reële functie uit de vorige eigenschap de *afgeleide functie* van f, en we noteren die functie

$$f'(x) \overset{\text{notatie}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \quad \text{of} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f \overset{\text{notatie}}{=} \frac{df}{dx} \overset{\text{notatie}}{=} f' \overset{\text{notatie}}{=} Df$$

.

Dus f' is de afgeleide functie van f als en slechts als

$$df = f'(x)\,dx$$

(als gelijkheid van differentialen), of dus

$$\frac{df}{dx} = f' \iff df = f'\,dx$$

Opmerking 9.4.3.

(a) Er is dus een overvloed aan notaties voor de afgeleiden (variaties met $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ en D, maar soms vind je ook y', $\dot{y}$ of $\frac{\delta}{\delta x}$. De reden is deels historisch verklaarbaar (Newton en Leibniz hadden elk hun eigen systeem), maar ook deels omdat geen enkele van de notaties echt voldoet in alle omstandigheden. Soms is de notatie met f' of $f'(x)$ erg handig, maar in andere

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Intro via differentialen

omstandigheden is $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$ veel duidelijker, of y' of dy.

(b) De *afgeleide* van een functie is dus opnieuw een functie (en *geen* differentiaal). Men kan de hele theorie van afgeleiden ook bespreken zonder het begrip differentiaal te gebruiken. Maar, bij integralen komen differentialen noodzakelijkerwijze toch voor. Je kan er dus even goed al direct mee te maken krijgen.

(c) Als f een functie is van een variabele y in plaats van een variabele x, dan geldt natuurlijk ook dat $df = f'(y)\,dy$. Er zitten hier geen addertjes onder het gras, maar we zullen u verder toch nog op een belangrijke subtiliteit moeten wijzen.

(d) Bovenstaande eigenschap zegt dat de verhouding tussen twee differentialen steeds een functie is. En die verhouding is per definitie de afgeleide functie. We kunnen de notatie $\frac{df}{dx} = f'$ ook begrijpen als een definitie van de deling van differentiaal df door dx, waarbij het quotiënt geen differentiaal is, maar een functie!

Merk op dat we nog steeds niets hebben gezegd over het al dan niet vermenigvuldigen van differentialen. We zullen daar in deze cursus trouwens niet veel over zeggen: je mag twee differentialen niet vermenigvuldigen met elkaar, totdat iemand u precies zou uitleggen hoe dat moet. (En eventueel ook wat dat dan zou betekenen. Maar je weet zelfs niet wat een differentiaal eigenlijk is, dat wordt dus zeker moeilijk.)

(e) (voor filosofen) het enige verschil tussen een 'afgeleide' en een 'differentiaal' is dus *per definitie* de dx die we wel achter een differentiaal schrijven, en *niet* achter een afgeleide functie. We kunnen de differentiaal dx dus beschouwen als een notatie om aan te duiden dat we een functie willen beschouwen als iets anders (namelijk een differentiaal), een beetje zoals we het symbool ° kunnen beschouwen als een notatie om een getal te beschouwen als een hoek.

(f) (voor pedagogen) in de meeste handboeken en cursussen wordt eerst (op een eerder onintuïtieve manier met limieten) de afgeleide gedefinieerd in een bepaald punt, dan wordt van al deze afgeleiden een nieuwe zogenaamde afgeleide functie gemaakt, en dan wordt -soms, maar meestal wordt het overgeslagen- de differentiaal gedefinieerd. Dat is voor alle praktische doeleinden wiskundig equivalent met wat wij hier doen (en verder zullen doen). Maar omdat zoals gezegd differentialen -al dan niet met die naam- toch voorkomen bij integralen, lijkt het niet onzinnig om er dan maar direct mee te beginnen.

Oefening 9.4.2. Bereken volgende afgeleiden

1. Als $f(x) = x^5$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

2. Als $f(x) = x^5 + 4x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 7$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

3. Als $f(x) = 2^5 + 4$, dan $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 9.4.3. Bereken volgende afgeleiden

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x + x^2) = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x + x^2 + x^3) = \ldots\ldots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Intro via differentialen

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4) = \ldots\ldots$

Met behulp van de notatie voor afgeleide functie, namelijk $df = f'\,dx$, kunnen we nu beter onderzoeken wat er precies gebeurt met de differentiaal van samengestelde functies:

Voorbeeld 9.4.9 (Differentiaal van een samengestelde functie)**.** We zoeken de differentiaal $d(5x+2)^2$

In dit geval kan je natuurlijk het kwadraat gewoon uitrekenen:

$$d(5x+2)^2 = d(25x^2+20x+4) = (50x+20)\,dx$$

Maar, voor grotere machten wordt dat snel complex. Men kan zich afvragen of er geen kortere weg is. Je kan opmerken dat $(5x+2)^2$ een kwadraat is, dus van de vorm $(f(x))^2$ met $f(x) = 5x+2$. Er geldt dat $df^2 = 2f\,df$, maar $f(x) = 5x+2$ en dus $df = 5dx$. Samen geeft dit $df^2 = 2\cdot f\cdot 5\cdot dx = 10(5x+2)\,dx = (50x+20)\,dx$.

$$d(5x+2)^2 = 2(5x+2)\cdot 5\cdot dx = 10(5x+2)\,dx$$

Dit voorbeeld veralgemeent onmiddellijk tot de zogenaamde kettingregel.

Eigenschap 9.4.3 (Kettingregel)**.**

Zij $f : x \mapsto f(x)$ een reële, differentieerbare functie.

Veronderstel dat x zelf nu ook een functie is van een nieuwe veranderlijke t: $x : t \to x(t)$, en dat die functie x (als functie van t nu!) een differentiaal heeft.

Dan geldt

$$df = f'(x)\,dx = f'(x(t))\cdot dx(t) = f'(x(t))\cdot x'(t)\,dt$$

Merk op dat de laatste lijn van de eigenschap tegelijk de formulering en het bewijs is van de kettingregel:

$$\begin{aligned} df &= f'(x)\,dx && \text{definitie afgeleide (van } f(x)) \\ &= f'(x(t))\cdot dx(t) && \text{invullen dat } x = x(t) \\ &= f'(x(t))\cdot x'(t)\,dt && \text{definitie afgeleide (van } x(t)) \end{aligned}$$

Merk op: je mag de functie x natuurlijk ook de naam g geven, en in plaats van t dan toch weer x nemen als variabele, en dan krijg je de klassiekere formulering:

$$d(f(g)) = f'(g)\cdot g'(x)\,dx$$

of, zonder differentialen,

$$(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'$$

TODO:

uitleggen dat (of verwijzen naar uitleg waarom...) we soms $f = f(x)$ schrijven om duidelijk te maken dat f een functie is van de variabele x. Dat is handig, omdat we dat in de meeste voorbeelde noodzakelijkerwijze zo moeten doen: er bestaat geen handig notatie voor lineaire functies, parabolen, goniometrische functies etc waarbij we de variabele niet expliciet vermelden. Waarom zouden we dat voor 'algemene' functies f wel altijd willen vermijden ??

Wel opmerken dat x als 'variabele' iets totaal anders is dan x als een willekeurig reëel getal. Maar: die dubbelzinnigheid komt zeer zeker ook elders al voor, en moet dus ook zeer zeker worden uitgelegd.

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Intro via differentialen

Dus: x is ofwel een willekeurig reële getal (of meer algemeen een willekeurig element van een verzameling). We schrijven dan $x \in \mathbb{R}$) (of $x \in A$.)

Ofwel is x een variable. Dat is eigenlijk precies hetzelfde als zeggen dat x een functie is, namelijk de identieke functie $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$. (NogToDo?: wijzen op het verschil van de betekenis van de drie x in de vorige formule!?)

Eigenschap 9.4.4 (Productregel en kettingregel voor meerdere functies)**.** $d(fgh) = ...$

$d(f(g(h(x)))) = ...$

Voorbeeld 9.4.10 (Voorbeelden kettingregel)**.** TODO (iets met echte differentialen: https://www.differentials.com/)

Eigenschap 9.4.5 (Afgeleide van de sinus)**.**

$$d\sin(x) = \cos(x)\,dx \text{ en } d\cos(x) = -\sin(x)\,dx$$

Bewijs: zie hierboven ?

END TODO

9.4.1 Algebraïsche interpretatie van differentialen

TO BE VERIFIED

Het blijkt dat de differentiaal zoals hierboven (via axioma's) gedefinieerd, bijzonder geschikt is om 'de lineaire component van een verandering' weer te geven.

Dat kan met behulp van wat men *differentiaal*getallen zou kunnen noemen.

Eerst een kleine uitweiding over de zogenaamde *complexe* getallen. Er bestaat natuurlijk geen getal $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $x^2 = -1$ (want alle kwadraten in $\mathbb{R}$ zijn positief ...). We kunnen dus geen vierkantswortel trekken uit -1. Maar, bij de studie van de complexe getallen hebben we een nieuw getal i gedefinieerd waarvoor wel geldt dat $i^2 = -1$. Het bleek dat we -nadat we een initiële schrik hadden overwonnen- met de complexe getallen $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ ongeveer op dezelfde wijze konden rekenen en redeneren als met de oude bekende reële getallen. Enkel het ordenen van getallen hebben we moeten opgeven: we kunnen twee complexe getallen niet met elkaar vergelijken.

We hergebruiken nu de truk-van-de-complexe-getallen voor nog een nieuwe soort getallen, de differentiaal-getallen. In plaats van een nieuw getal i met $i^2 = -1$, kiezen we nu een nieuw 'getal' dx met $(dx)^2 = 0$, en we definieren de *differentiële getallen* $\mathbb{D} = \{a + b \cdot dx | a, b \in \mathbb{R}\}$. Men kan nagaan dat de differentiële getallen ook ongeveer net zo werken als de reële getallen: je kan ze optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Merk op dat differentiële getallen, en zeker de notatie $\mathbb{D}$ *niet* gebruikelijk zijn in de wiskunde. We hebben ze hier tijdelijk ingevoerd als didactische truk. In de literatuur vind je erg vergelijkbare concepten onder de naam 'infinitesimalen' of 'nilpotente elementen', maar die komen enkel in meer gevorderde teksten voor. En het woord infinitesimaal wordt voor allerlei verwante, maar niet noodzakelijk identieke dingen gebruikt. U weze gewaarschuwd.

Er geldt nu volgende spectaculaire eigenschap, die we omwille van haar grote belang, en verrassend resultaat, in detail zullen bewijzen:

Eigenschap 9.4.6. Zij f een differentieerbare reële functie en $x + dx \in \mathbb{D}$ een differentiëel getal.

Dan geldt, als gelijkheid van differentiële getallen (dus in $\mathbb{D}$) dat

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x) \cdot dx \in \mathbb{D}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Intro via differentialen

Bewijs We moeten enerzijds een betekenis geven aan de uitdrukking $f(x+dx)$ (want f is een reële functie, en het is dus niet onmiddellijk duidelijk of het wel zinvol is om f te evalueren in een differentieel getal $x+dx$). Anderzijds moeten we aantonen dat dat getal gelijk is aan het getal $f(x)+f'(x)\,dx$).

We definiëren eerst $f(x+dx)$ voor differentieerbare functies f. Voor de twee types startfuncties (de constante functies en de identieke functie) ligt de definitie voor de hand;

$c : x \mapsto c$ beeldt $x+dx$ af op c

$x : x \mapsto x$ beeldt $x+dx$ af op $x+dx$

Als f en g differentieerbaar zijn, dan definiëren we

$(f+g)(x+dx) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+dx)+g(x+dx)$

$(f\cdot g)(x+dx) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+dx)\cdot g(x+dx)$

(waarbij de laatste $\cdot$ de vermenigvuldiging in $\mathbb{D}$ is)

We zullen nu aantonen dat het differentiaal getal dx voldoet aan de axioma's van differentialen.

En daarvoor volstaat het te bewijzen dat de bewering geldt voor de basisdifferentialen, en dat als de bewering geldt voor f en g, dat ze dan behouden blijft door de afgesproken rekenregels.

(a) Als f de constante functie $a : x \mapsto a$ is, dan geldt dat zowel x als $x+dx$ op a worden afgebeeld, en dat de afgeleide 0 is, en dus wordt het te bewijzen $f(x+dx) = f(x)+f'(x)\cdot dx$ in dit geval $a = a+0\cdot dx$, wat zeker juist is.

(b) Als f de identieke functie $x : x \mapsto x$ is, dan is de afgeleide functie de constante functie 1, en dus wordt $f(x+dx) = f(x)+f'(x)\cdot dx$ in dit geval $x+dx = x+1\cdot dx$, wat ook zeker klopt.

(c) Voor de somregel nemen we aan dat $f(x+dx) = f(x)+f'(x)\cdot dx$ en $g(x+dx) = g(x)+g'(x)\cdot dx$ en dan geldt dus ook dat

$$\begin{aligned}(f+g)(x+dx) &= f(x+dx)+g(x+dx) && (7)\\ &= f(x)+f'(x)\cdot dx+g(x)+g'(x)\cdot dx && (8)\\ &= (f+g)(x)+(f+g)'(x)\cdot dx && (9)\end{aligned}$$

(d) Voor de productregel nemen we ook aan dat de formule klopt voor f en g, en we bewijzen dat

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x+dx) &= f(x+dx)\cdot g(x+dx) && (10)\\ &= (f(x)+f'(x)\cdot dx)\cdot(g(x)+g'(x)\cdot dx) && (11)\\ &= f(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)\,dx+f'(x)g(x)\,dx+f'(x)g'(x)(dx)^2 && (12)\\ &= (f\cdot g)(x)+(f(x)g'(x)+f'(x)g(x))\,dx+0 && (13)\\ &= (f\cdot g)(x)+(f\cdot g)'(x)\,dx && (14)\end{aligned}$$

Omdat het differentiaalgetal dx dus voldoet aan alle axiomas van differentialen, gelden ook alle eigenschappen van differentialen voor differentiaalgetallen. Dit beeindigt het bewijs. ■

Wat hebben we geleerd? We kunnen de differentiaal begrijpen als 'het lineaire stuk van de verandering'. Het merkwaardige is dat dat lineaire stuk aan relatief eenvoudige rekenregels voldoet, en dat het lineaire deel van de verandering dus in vele gevallen relatief eenvoudig kan worden berekend met behulp van deze rekenregels!

9.4.2 Formularium

We kunnen alle eigenschappen van differentialen als volgt samenvatten:

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Intro via differentialen

Eigenschap 9.4.7. Zij f, g differentieerbare functies, $a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$d(f+g)$	$=$	$df + dg$	(somregel)
$d(f \cdot g)$	$=$	$f \cdot dg + g \cdot df$	(productregel)
$d\left(\frac{f}{g}\right)$	$=$	$\frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$	(quotiëntregel)
$d(f(g(x)))$	$=$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$	(kettingregel)
da	$=$	0	(d van constante)
$d(ax)$	$=$	$a\,dx$	(d van scalair veelvoud)
$d(x^r)$	$=$	$rx^{r-1}\,dx$	(d van macht)
$d(e^x)$	$=$	$e^x\,dx$	(d van exponentiële)
$d(a^x)$	$=$	$a^x \ln a\,dx$	(d van a^x)
$d(\ln x)$	$=$	$\frac{dx}{x}$	(d van ln)
$d(\log_a x)$	$=$	$\frac{dx}{x \ln a}$	(d van log)
$d(\sin x)$	$=$	$\cos x\,dx$	(d van sinus)
$d(\cos x)$	$=$	$-\sin x\,dx$	(d van cosinus)
$d(\tan x)$	$=$	$\frac{dx}{\cos^2 x} = (1+\tan^2 x)\,dx$	(d van tangens)
$d(\text{bgsin}\, x)$	$=$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	(d van boogsinus)
$d(\text{bgcos}\, x)$	$=$	$\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$	(d van boogcosinus)
$d(\text{bgtan}\, x)$	$=$	$\frac{dx}{1+x^2}$	(d van boogtangens)

CC BY-NC-SA 4.0

9.5 Intro via youtube

Opmerking 9.5.1. We maken hier op een ietwat onconventionele manier kennis met het begrip *afgeleide*.

We vermijden daarbij zoveel mogelijk tekst, en tonen enkel filmpjes.

We verwachten van u het volgende:

(a) u vertrouwt ons dat 3Blue1Brown weten wat ze doen.

(b) u vertrouwt ons dat we u iets nuttigs willen bijleren.

(c) u bent bereid de meeste filmpjes met volledige concentratie te bestuderen, en bovendien later voorbeelden en oefeningen te maken.

(d) u concentreert zich op *afgeleiden*, en vermijdt de *afleidingen* en *verleidingen* van het zootje soms grappige maar verder nutteloze rotzooi dat op hetzelfde youtube platform wordt aangeboden.

Onder die voorwaarden beloven wij u het volgende:

(a) u zal u op een volgens ons zo efficiënt mogelijke manier vertrouwd worden met afgeleiden.

(1) Hoofdstuk 1: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=WUvTyaaNkzM

(2) Hoofdstuk 2: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=9vKqVkMQHKk

(3) Hoofdstuk 3: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=S0_qX4VJhMQ

(4) Hoofdstuk 4: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=YG15m2VwSjA

(5) Hoofdstuk 5: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=m2MIpDrF7Es

(6) Hoofdstuk 6: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=qb40J4N1fa4

(7) Hoofdstuk 7: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=kfF40MiS7zA

(8) Hoofdstuk 8: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=rfG8ce4nNh0

(9) Hoofdstuk 9: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=FnJqaIESC2s

(10) Hoofdstuk 10: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=BLkz5LGWihw

(11) Hoofdstuk 11: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=3d6DsjIBzJ4

(12) Hoofdstuk 12: YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=CfW845LNObM

CC BY-NC-SA 4.0