KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Remediëring Wiskunde voor Biomedische Wetenschappen en Farmacie

(Versie 2026/08/25H.36)

# Inhoudsopgave

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Module 1
# Inleiding

(Versie 2026/08/25H.36)

# 1.1 Intro

Dit is de PDF versie van het online remediëringstraject wiskunde voor toekomstige studenten van de opleidingen **farmaceutische of biomedische wetenschappen** aan de KU Leuven.

**Niet geslaagd op de starttoets? Remediëring is verplicht.**

Als toekomstig student is het belangrijk dat je je vaardigheden en kennis goed inschat, ze opfrist en indien nodig opkrikt tot het verwachte niveau. Als je **niet geslaagd bent op de starttoets (ijkingtoets) farmaceutische wetenschappen of biomedische wetenschappen** (of een compatibele toets) en toch die opleiding wil volgen, dan moet je een **verplichte remediëring** volgen en als bewijs daarvan na je inschrijving een attest indienen.

Omdat de ijkingstoets uit een Deel Wiskunde en een Deel Chemie bestaat, zijn er twee aparte remediëringstrajecten:

- niet geslaagd op het geheel en niet geslaagd op het Deel Wiskunde: je moet deze verplichte remediëring wiskunde volgen.
- niet geslaagd op het geheel en niet geslaagd op het Deel Chemie: je moet de verplichte remediëring chemie volgen.

Afhankelijk van je resultaat voor de toetsonderdelen moet je dus enkel remediëring wiskunde, enkel remediëring chemie, of beide volgen.

Voor deze remediëring Wiskunde kan je kiezen tussen

- dit **online remediëringstraject** doorlopen, bij voorkeur minstens deels online wegens de oplossingen en feedback bij veel van de oefeningen, en daarna de **afsluitende toets** te maken. Aan het einde van de toets kan je een **remediëringsattest** downloaden dat je zal moeten opladen nadat je ingeschreven bent aan de KU Leuven. Je krijgt hiervoor automatisch een herinnering na je inschrijving.
- deelnemen aan de on-campus **zomercursussen**
  Die on-campus zomercursussen zijn anders gestructureerd en uitgebreider dan dit online remediëringstraject. Ook als je de on-campus zomercursus gaat volgen kan het toch nuttig zijn eerst dit online remediëringstraject te doorlopen. De afsluitende toets hoef je dan niet af te leggen, maar het mag vrijblijvend wel.

Merk op dat dit remediëringstraject geen *deelname* aan een starttoets kan vervangen. Meer info daarover vind je via de website van de ijkingstoets.

**Niet geslaagd op de starttoets, en niet geslaagd op Chemie?**

Dan moet je het online remediëringstraject chemie volgen.

**Wel geslaagd? Voorbereiding is nuttig.**

Ook als je wel geslaagd bent is een opfrissing wiskunde aangewezen, zeker bij een score lager dan 14/20. Je komt dan immers sterker en met meer vertrouwen aan de start.
Je kan ofwel de on-campus zomercursus volgen, dit online remediëringstraject doorlopen, of kiezen voor het handboek Zelfstudiemodule.

**Structuur van dit remediëringstraject**

Voor de meeste toekomstige studenten is dit een opfrissing van leerstof die ze al hebben gezien. Toch is geprobeerd om bij de invoering van begrippen en technieken ook voldoende rekening te houden met studenten waarvoor de leerstof volledig nieuw is.

Deze cursusnota's zijn beschikbaar in meerdere vormen:

CC BY-NC-SA 4.0

## 1.1 Intro

(a) als PDF, die je ofwel op je computer kan lezen, ofwel kan printen.

Als je de PDF op de computer leest, werken allerlei interne links naar oefeningen, definities en eigenschappen. In een geprinte versie verdwijnt een deel van die functionaliteit.

Via de KU Leuven website https://wet.kuleuven.be/schoolverlater/basiswiskunde vind je de online versie die extra functionaliteiten biedt.

(b) als online applicatie, met volgende extra functionaliteiten:

- interactieve antwoordmogelijkheden, met feedback en/of hints
- een aantal filmpjes

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Module 2
# Functies

(Versie 2026/08/25H.36)

## 2.1 Intuïtieve definitie van het begrip functie

Functies zijn erg fundamentele objecten in de wiskunde, die erg diverse fenomenen kunnen beschrijven.

**Definitie 2.1.1** (Pseudo-definities van het begrip functie)**.**

Een **functie** is iets dat voldoet aan volgende (allemaal min of meer equivalente) karakteriseringen:

- een *machine* of *black box* die voor elke toegelaten *input* telkens exact één *output* genereert.
- een bepaald soort *verband* tussen een *onafhankelijke variabele* en een *afhankelijke variabele*.
- een soort *formule* die *iets* verandert in *iets anders*.
- een *wiskundig object* dat een *functioneel verband* uitdrukt tussen andere *wiskundige objecten*.

Deze pseudo-definities zijn enigszins vaag, maar met de volgende voorbeelden, definities en eigenschappen zal het concept 'functie' een steeds duidelijkere en concretere invulling krijgen. Een typisch eerste voorbeeld om in gedachten te houden is de functie 'kwadrateer', die met elk getal zijn kwadraat associeert.

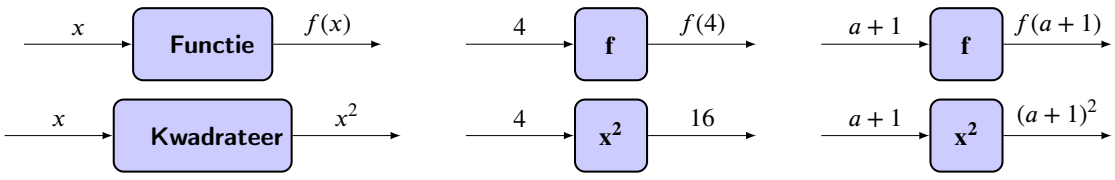
Een nuttige initiële voorstellingswijze van een functie bestaat uit een (in dit geval blauwe!) *black box*, die voor een bepaalde input $I$ een bepaalde output $O$ genereert:




Een **functie** is dus een ding dat een *input* omzet in een *output*. Ongeveer alles kan dienen als input en output van wiskundige functies, maar in wat volgt zullen we ons meestal concentreren op *reële functies*: dat zijn die functies waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn. Voor dergelijke reële functies zijn er allerlei interessante begrippen en eigenschappen die niet zomaar van toepassing zijn op meer algemene functies, zoals nulpunten, minima en maxima, grafieken, afgeleiden, integralen,....

Een functie heeft meestal een **naam**, soms gewoon $f$ van $f$unctie maar ook $h, g, f_1, f_2$ komen regelmatig voor. Enkele functies hebben standaardnamen of 'eigennamen': de vierkantswortel, sinus, logaritme, ....

Als symbool voor een willekeurige **input** gebruiken we meestal de letter $x$, maar ook andere letters zoals $t$, $n$, $x_1$,$x_2$ of $y$ en $y_1$ komen voor. In plaats van een willekeurige $x$ kan de input echter ook een concreet getal als 4 of zelfs een andere formule als $a+1$ zijn.




De **output** of het resultaat van de functie noteren we soms als een concrete formule, bijvoorbeeld $(x+3)^2$ als de input $x$ is. Dikwijls gebruiken we de naam van de functie, dus $f(x)$ of $h(t)$. Soms geven we ook een generieke naam aan de output, en dan is de letter $y$ daarvoor een erg populaire keuze. We schrijven dan typisch $y = f(x)$, en we bedoelen daarmee dat $f$ een functie is waar je $x$ kan instoppen en wat er dan uitkomt noemen we $y$, of $f(x)$.

In de formule $y = f(x)$ staat $x$ dus voor de input, $f$ voor de functie en $y$ voor de output. Pas op: die generieke naam $y$ voor de output veroorzaakt dikwijls verwarring, want de letter $y$ wordt bijvoorbeeld ook gebruikt voor de tweede coördinaat van een punt in het vlak en dat heeft weinig te maken met functiewaarden. Daarom vermijden we in deze cursus waar mogelijk om de output een naam te geven, en

CC BY-NC-SA 4.0

## 2.1 Intuïtieve definitie van het begrip functie

we noteren de functie die $x$ afbeeldt op $f(x)$ liefst als

$$f : x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad x \mapsto f(x),$$

maar niet als $x \to f(x)$. Let op het pijltje dat we hierboven gebruiken: dit heeft een voetje. Het pijltje zonder voet $\to$ gebruiken we in deze notatie dus niet.

We *lezen* de uitdrukking $f(x)$ als
$$\begin{cases} f \text{ van } x \\ \text{de functiewaarde van } f \text{ in } x \\ \text{het beeld van } f \text{ in } x \\ \text{het beeld van } x \text{ onder } f \text{ (of door } f\text{)} \end{cases}$$

Men zegt ook dat $f$ het element $x$ '*afbeeldt op* $f(x)$' of dat '$f$ *toepassen op* $x$' het element $f(x)$ oplevert.

**Voorbeeld 2.1.1.** Als we de 'kwadrateer'-functie $k$ noemen schrijven we dus:

$$k : x \mapsto x^2 \quad \text{of} \quad k : x \mapsto k(x) = x^2.$$

Voor deze functie $k$ geldt dat $k(2) = 2^2 = 4$, $k(4) = 4^2 = 16$ en $k(a+1) = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.
We *moeten* de functie geen naam geven, en schrijven ook $x \mapsto x^2$, $2 \mapsto 4$ en $a+1 \mapsto (a+1)^2$.

De functie $f : x \mapsto x^2 + 3$ heeft bijvoorbeeld volgende *functiewaarden*:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(0) = 0^2 + 3 = 3$ | | of | $0 \mapsto 0^2 + 3 = 3$ |
| $f(5) = 5^2 + 3 = 28$ | | | $5 \mapsto 5^2 + 3 = 28$ |
| $f(-5) = (-5)^2 + 3 = 28$ | | | $-5 \mapsto (-5)^2 + 3 = 28$ |
| $f(a+1) = (a+1)^2 + 3 = a^2 + 2a + 4$ | | | $a+1 \mapsto (a+1)^2 + 3 = a^2 + 2a + 4$ |

**Opmerking 2.1.1.** Bij elke inputwaarde moet precies één welbepaalde outputwaarde horen. Volgende constructies zijn dus *geen* functies:

- $f : x \mapsto$(de som van het aantal ogen van $x$ worpen met een dobbelsteen): de outputwaarden liggen niet vast.
- $f : x \mapsto$(een getal $a$ zodat $a^2 = x$): de outputwaarde is hierbij niet uniek bepaald, want 4 heeft zowel 2 als $-2$ als mogelijke outputwaarde.

**Voorbeeld 2.1.2** (Enkele reële functies)**.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| De functie 'plus 5': | $f(x) = x + 5$ | of | $x \mapsto x + 5$ | |
| De functie 'maal 6': | $f(x) = 6x$ | | $x \mapsto 6x$ | |
| De functie '7': | $f(x) = 7$ | | $x \mapsto 7$ | (een *constante* functie) |
| De functie '0': | $f(x) = 0$ | | $x \mapsto 0$ | (de *nulfunctie*) |
| De functie 'doe niets': | $f(x) = x$ | | $x \mapsto x$ | (de *identieke* functie) |
| De functie 'kwadrateer': | $f(x) = x^2$ | | $x \mapsto x^2$ | |
| De functie 'tegengestelde': | $f(x) = -x$ | | $x \mapsto -x$ | |
| De functie '$n$-de macht': | $f(x) = x^n$ | | $x \mapsto x^n$ | met $n \in \mathbb{N}$ |

CC BY-NC-SA 4.0

## 2.2 Domein en beeld van een functie

Functies veranderen *inputs* in *outputs*, en om te bepalen welk type inputs en outputs kunnen of mogen voorkomen voeren we twee belangrijke begrippen in: het *domein* en het *beeld* van een functie.

**Definitie 2.2.1** (Domein en beeld van een functie)**.**

Het **domein** $\operatorname{dom} f$ van een functie $f$ is de verzameling van alle ***toegelaten inputs*** van de functie.
Het **beeld** $\operatorname{bld} f$ van een functie $f$ is de verzameling van alle ***effectieve outputs*** van de functie.

Een functie $f$ van een verzameling $A$ naar een verzameling $B$ noteren we als

$$f : A \to B, x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad \begin{array}{rl} f : A & \to B \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$$

en we lezen: $f$ is een functie van $A$ naar $B$ die (een willekeurige) $x$ afbeeldt op $f(x)$.

Pas op: we gebruiken het woord *beeld* dus zowel voor

| | |
|---|---|
| het *beeld van een functie* | dus voor de *verzameling* $\operatorname{bld} f$, als voor |
| het *beeld van een getal* $x$ *onder de functie* $f$ | dus voor het *getal* $f(x)$. |

Het pijltje $\to$ staat tussen *verzamelingen*, terwijl pijltje $\mapsto$ aangeeft *waarop* een functie iets afbeeldt.

**Voorbeeld 2.2.1.**

Het *domein* van de functie $x \mapsto x^2$ is $\mathbb{R}$, want elk reëel getal *heeft* een uniek kwadraat.
Het *beeld* van de functie $x \mapsto x^2$ is $\mathbb{R}^+$, want elk *positief* reëel getal *is* een kwadraat.

Let op: sommige getallen *zijn* het kwadraat van *twee* getallen, bijvoorbeeld $9 = 3^2 = (-3)^2$, maar dat is hier niet relevant. En andere getallen zoals $-1$ *zijn geen* kwadraat van een reëel getal, maar dat betekent hier enkel dat bijvoorbeeld $-1$ niet tot het beeld behoort.
We schrijven dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$, of ook $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ wat soms handig is omdat het dikwijls niet eenvoudig is om het precieze beeld van een functie te bepalen. Je kan ook de functie $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ definiëren, waarbij je dan expliciet enkel positieve getallen toelaat als input.

In de notatie $f : A \to B, x \mapsto f(x)$

| | | |
|---|---|---|
| *moet* elk element van $A$ een beeld hebben: | $f : \cancel{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ | (want $-1 \mapsto ???$) |
| *mag* $A$ *kleiner* zijn dan *alle mogelijke inputs*: | $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ | |
| *moet* $B$ *alle beelden* uit $A$ bevatten: | $f : \mathbb{R} \to \cancel{[0,1]}, x \mapsto x^2$ | (want $f(2) = 2^2 \notin [0,1]$) |
| *mag* $B$ *groter* zijn dan de effectieve outputs: | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ | (maar $-1 \notin \operatorname{bld}(f)$) |

Bij $f : A \to B, x \mapsto f(x)$ kan je het domein (alle toegelaten inputs) en de doelverzameling (alle toegelaten outputs) direct aflezen, maar het *beeld*, de effectief voorkomende outputs, moet je berekenen.
Bij $f : x \mapsto f(x)$ veronderstellen we steeds het *grootst mogelijke domein*, dus de grootst mogelijke verzameling waarop $f$ is gedefinieerd, en kiezen meestal $\mathbb{R}$ als doelverzameling. Dus, met $f : x \mapsto 1/x$ bedoelen we $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$.

**Oefening 2.2.1.** Bepaal het *grootst mogelijke domein* met *bijhorend beeld* van volgende functies:

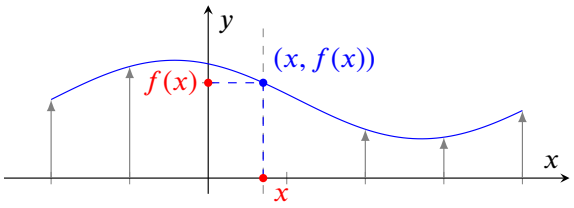
1. $f :$ ..... $\to$ ....., $x \mapsto x + 5$
2. $g :$ ..... $\to$ ....., $x \mapsto \sqrt{x - 5}$
3. $h_1 :$ ..... $\to$ ....., $x \mapsto -\sqrt{x}$
4. $h_2 :$ ..... $\to$ ....., $x \mapsto -\sqrt{-x}$

CC BY-NC-SA 4.0

## 2.3 Grafiek van een functie

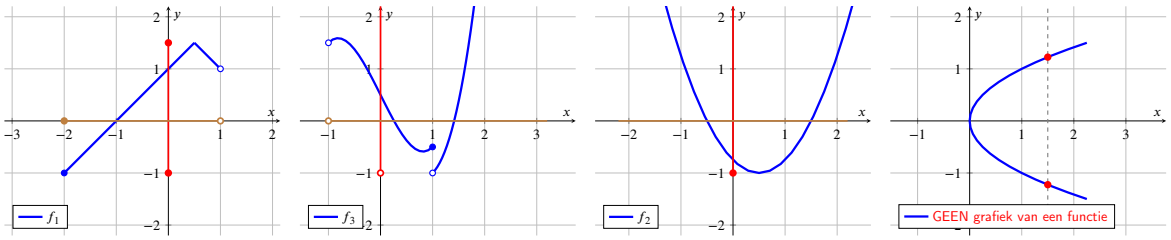
Een *reële functie* is een functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarbij dus zowel de input als de output reële getallen zijn. Dergelijke functie kan worden voorgesteld door een *grafiek*, waarop een aantal belangrijke eigenschappen direct kunnen worden afgelezen. In de praktijk worden functies dikwijls geïdentificeerd met hun grafiek.

**Definitie 2.3.1.** De **grafiek van een reële functie** $f$ is de kromme in het $xy$-vlak gevormd door de punten $(x, f(x))$ waarbij $x$ loopt over alle waarden van het domein.




De grafiek van de functie $f$ duidt dus boven elke $x$ in het domein via het punt $(x, f(x))$ aan op welk getal $f(x)$ op de $y$-as deze $x$ wordt afgebeeld. Als je de grafiek kent, *vind* je $f(x)$ als de *hoogte* van de grafiek in $x$, en als je de grafiek moet maken, *bepaalt* $f(x)$ de hoogte van die grafiek boven $x$. Daarbij ligt de grafiek *onder* de $x$-as als $f(x)$ negatief is.

Voor de meeste reële functies is de grafiek een vloeiende kromme, die eventueel wel kniks en gaten kan hebben of sprongen kan maken. De grafiek voldoet wel altijd aan de **'verticale-snijlijn-test**': elke verticale lijn snijdt de grafiek van een functie ten hoogste één keer, namelijk in het punt $(x, f(x))$ voor de verticale lijn door $(x, 0)$. Dit volgt uit de voorwaarde dat bij elke $x$ uit het domein van de functie $f$ slechts één functiewaarde $f(x)$ hoort. Voor $x$ *buiten* het domein snijdt de verticale door $(x, 0)$ de grafiek *niet*.




Per afspraak behoort een 'vol bolletje' tot de grafiek, terwijl een 'open bolletje' er geen deel van uitmaakt.

Domein en beeld zijn de projecties van de grafiek op de coördinaatassen:

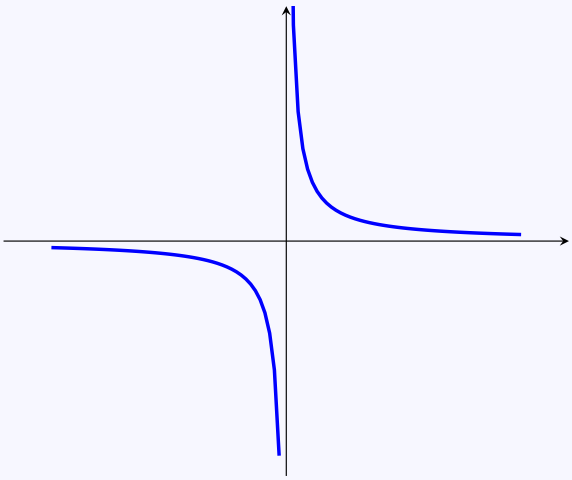
**Eigenschap 2.3.1.**

Het *domein* van een functie is de *verticale projectie* van haar grafiek op de *horizontale* $x$-as.
Het *beeld* van een functie is de *horizontale projectie* van haar grafiek op de *verticale* $y$-as.

**Voorbeeld 2.3.1.** De functie $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:

CC BY-NC-SA 4.0

## 2.3 Grafiek van een functie



Voor $x = 0$ is de functiewaarde $\frac{1}{x}$ niet gedefinieerd. Het domein is dus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ook het beeld van $f$ is gelijk aan $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De horizontale projectie van de grafiek op de *verticale* $y$-as toont immers dat de waarde $y = 0$ niet bereikt zal worden (hoewel voor zeer grote $x$-waarden de corresponderende $y$-waarden zeer dicht $y = 0$ naderen).

CC BY-NC-SA 4.0

## 2.4 Som en verschil van functies

Bij 'rekenen' denken we in eerste instantie aan 'rekenen met getallen', maar je kan ook 'rekenen met functies'. We beschouwen hier eerst de som en het verschil van *functies*, later volgen product en quotiënt. Er bestaan ook complexe operaties die geen veralgemeningen meer zijn voor operaties op getallen, zoals functies samenstellen, inverteren, afleiden en integreren.

We bestuderen de som en het verschil van *reële* functies $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We gebruiken meestal de korte schrijfwijze, dus $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ voor de functie met het grootst mogelijke domein $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$.

**Definitie 2.4.1** (Som, verschil en tegengestelde van reële functies)**.** Voor reële functies $f$ en $g$ geldt:

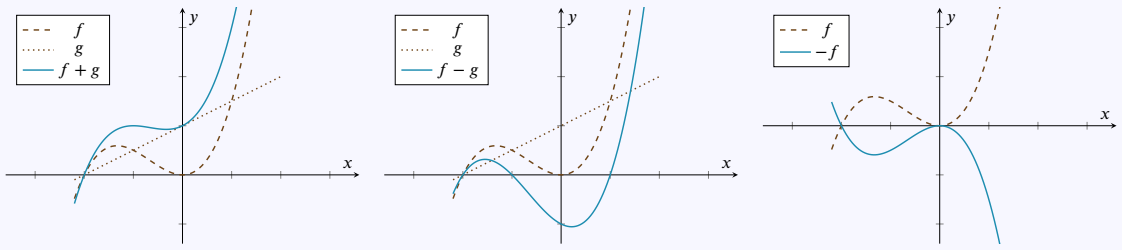
$$\begin{array}{rcccc} f+g & : & x \mapsto & (f+g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)+g(x) \\ f-g & : & x \mapsto & (f-g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)-g(x) \\ -f & : & x \mapsto & (-f)(x) & \overset{\text{def}}{=} & -f(x) \end{array}$$

Som en verschil van functies zijn gedefinieerd waar *beide functies* gedefinieerd zijn, en er geldt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| De | **som** | $f+g$ | beeldt $x$ af op de | som | $f(x)+g(x)$. |
| Het | **verschil** | $f-g$ | beeldt $x$ af op het | verschil | $f(x)-g(x)$. |
| De | **tegengestelde** | $-f$ | beeldt $x$ af op het tegengestelde | | $-f(x)$. |

**Voorbeeld 2.4.1.** Voor de functies $f : x \mapsto x^3 + 2x^2$ en $g : x \mapsto x + 2$ is

$$\begin{array}{rrl} \text{de som} & f+g: & x \mapsto x^3+2x^2+x+2 \\ \text{het verschil} & f-g: & x \mapsto x^3+2x^2-x-2 \\ \text{de tegengestelde} & -f: & x \mapsto -x^3-2x^2 \end{array}$$




**Opmerking 2.4.1.** Deze definitie bevat niets spectaculairs: de som van functies is wat iedereen verwacht wat een som van functies moet zijn. Merk wel op:

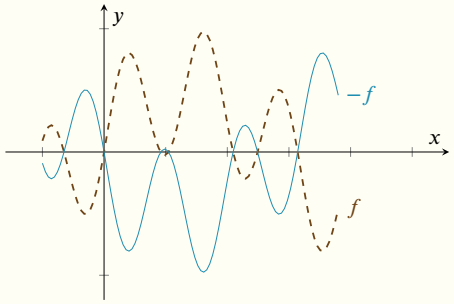
(a) De functies $f+g$ en $f-g$ zijn enkel gedefinieerd voor $x$-waarden waarvoor zowel $f$ als $g$ gedefinieerd is. Je kan dit ook formuleren als: het domein van de som en van het verschil is gelijk aan de doorsnede van het domein van $f$ en het domein van $g$.

(b) De som van twee functies $f$ en $g$ wordt 'puntsgewijs' gedefinieerd. Dat betekent dat de functiewaarde van $f+g$ in een punt enkel afhangt van de functiewaarden van $f$ en $g$ in dat punt. Voor andere operaties op functies zal dat niet steeds het geval zijn. Zo hangt de afgeleide van een functie in een bepaald punt af van de functiewaarden van de functie in de omgeving van dat punt, en de waarde van een primitieve functie hangt af van de waarden over een interval.

(c) De grafiek van $-f$ is de spiegeling van de grafiek van $f$ over de $x$-as.

CC BY-NC-SA 4.0

## 2.4 Som en verschil van functies




(d) De tegengestelde functie is een speciaal geval van het verschil: $-f = 0 - f$. (Merk op dat de 0 hier staat voor de nul*functie*: de functie die elke getal afbeeldt op het getal 0).

(e) Het verschil van functies is een speciaal geval van de som: $f - g = f + (-g)$ .
Elk verschil is dus ook een som, namelijk de som met het tegengestelde.

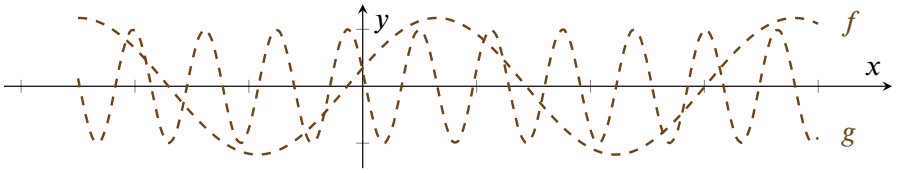
(f) Waar de functiewaarde van g strikt negatief is, ligt de grafiek van $f - g$ boven de grafiek van f.

(g) De *nulpunten* van $f - g$ zijn precies de snijpunten van de grafieken van f en g.

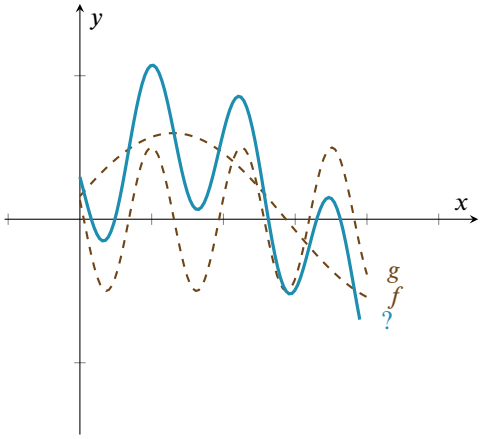
CC BY-NC-SA 4.0

## 2.5 Oefeningen som van functies

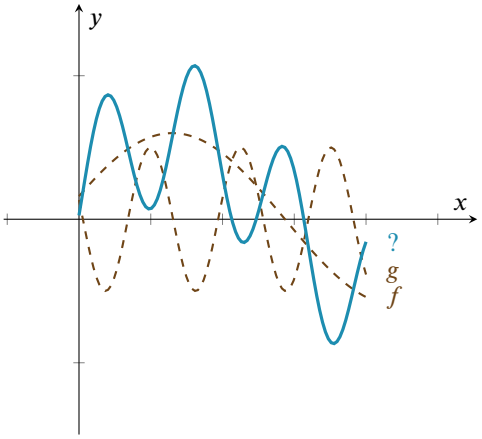
**Oefening 2.5.1.** De volgende figuur toont de grafiek van twee functies $f$ en $g$. Bepaal op elk van onderstaande figuren welke grafiek wordt getoond.



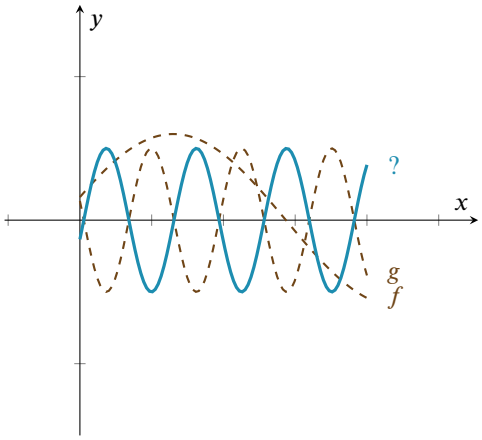

**1.** | $f+g$ | $f-g$ | $g-f$ | $-g$ | $f+2$ |



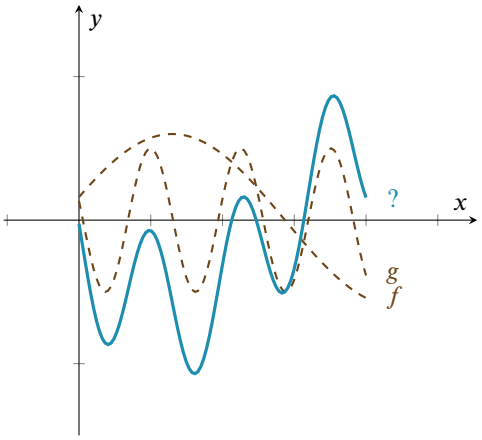

**3.** | $f+g$ | $f-g$ | $g-f$ | $-g$ | $f+2$ |




**2.** | $f+g$ | $f-g$ | $g-f$ | $-g$ | $f+2$ |




**4.** | $f+g$ | $f-g$ | $g-f$ | $-g$ | $f+2$ |




CC BY-NC-SA 4.0

# 2.6 Product en quotiënt van functies

**Definitie 2.6.1** (Product, quotiënt en omgekeerde van reële functies)**.**

Voor reële functies $f$ en $g$ geldt:

$$\begin{array}{rcccc} f\cdot g & : & x\mapsto & (f\cdot g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)\cdot g(x) \\ \dfrac{f}{g} & : & x\mapsto & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) & \overset{\text{def}}{=} & \dfrac{f(x)}{g(x)} \\ \dfrac{1}{f} & : & x\mapsto & \dfrac{1}{f}(x) & \overset{\text{def}}{=} & \dfrac{1}{f(x)}. \end{array}$$

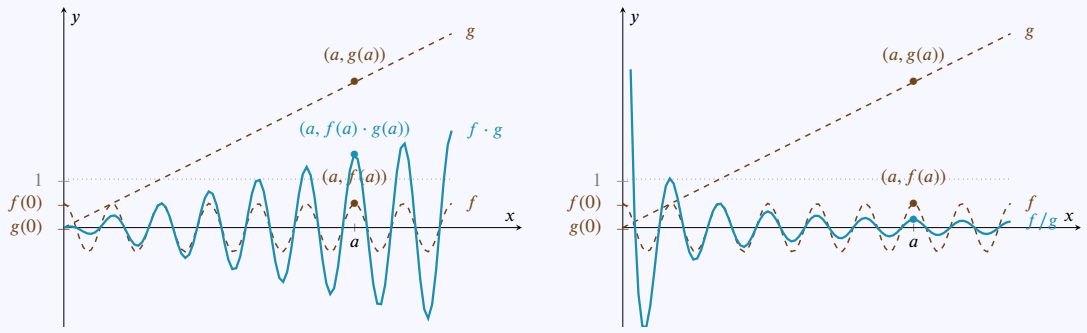
Merk op dat $\frac{f}{g}$ en $\frac{1}{f}$ niet gedefinieerd zijn in de punten waar de noemer nul wordt, en er geldt:

Het **product** $f\cdot g$ beeldt $x$ af op het product $f(x)\cdot g(x)$.

Het **quotiënt** $\frac{f}{g}$ beeldt $x$ af op het quotiënt $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Het **omgekeerde** $\frac{1}{f}$ beeldt $x$ af op het omgekeerde $\frac{1}{f(x)}$.

**Voorbeeld 2.6.1.** De grafiek van twee functies $f$ en $g$ en hun product $f\cdot g$ en quotiënt $\frac{f}{g}$:




**Opmerking 2.6.1.**

(a) Net als bij de functies $f+g$ en $f-g$ is de functie $f\cdot g$ enkel gedefinieerd voor $x$-waarden waarvoor zowel $f$ als $g$ gedefinieerd is. Het domein is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van $f$ en het domein van $g$.

(b) Het quotiënt $\frac{f}{g}$ is enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel $f$ als $g$ gedefinieerd zijn en $g(x)\neq 0$. Het domein van het quotiënt is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van $f$ en het domein van $g$ zonder de x-waarden waarbij $g(x)=0$.

(c) PAS OP: we gebruiken NIET de notatie $f^{-1}$ voor de omgekeerde functie, want die notatie is voorbehouden voor de *inverse* functie die we verder zullen bespreken. De *omgekeerde* functie en de *inverse* functie zijn twee *verschillende* begrippen!

(d) Op haar domein wordt de functie $f\cdot g$ nul in de nulpunten van $f$ *en* in de nulpunten van $g$. Inderdaad, $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ en dit product is enkel nul als $f(x)=0$ of $g(x)=0$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

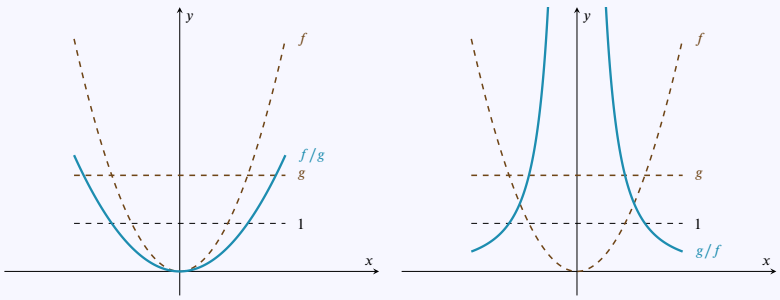
## 2.6 Product en quotiënt van functies

(e) De nulpunten van de functie $\frac{f}{g}$ zijn iets lastiger. Voor een nulpunt van $f$ waar de functie $g$ niet nul is, is er geen probleem: dat nulpunt van $f$ is ook een nulpunt van $\frac{f}{g}$. Neem bijvoorbeeld $f : x \mapsto x-1$ en $g : x \mapsto 2x$, dan hebben zowel $f$ als $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x-1}{2x}$ een nulpunt in $x = 1$.
Maar voor $f : x \mapsto x-1$ en $g : x \mapsto (x-1)^2$ is $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{1}{x-1}$. Deze functie is niet gedefinieerd in $x = 1$, en $x = 1$ is dus zeker geen nulpunt.
Ook de functies $f : x \mapsto x^2 - 1$ en $g : x \mapsto x - 1$ zijn beiden nul in het punt $x = 1$, maar hun quotiënt $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ heeft waarde 2 voor $x = 1$, en $x = 1$ is dus *geen nulpunt* van $\frac{f}{g}$.

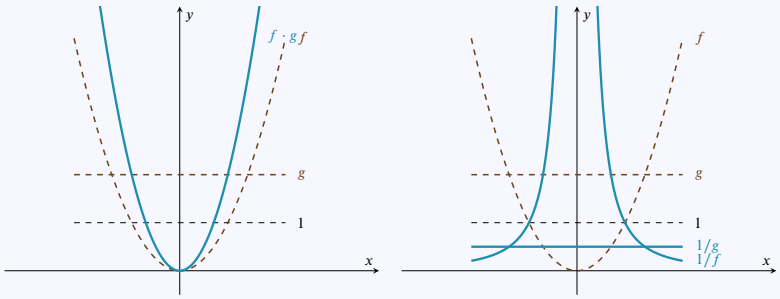
**Voorbeeld 2.6.2** (Extra voorbeeld met de functies $x \mapsto x^2$ en $x \mapsto 2$)**.**

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto 2$.

**1.** De grafieken van $f$ en $g$ en de quotiënten $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ en $\frac{g}{f} : x \mapsto \frac{2}{x^2}$:




**2.** De grafieken van $f$ en $g$, hun product $f \cdot g : x \mapsto 2x^2$ en hun omgekeerden $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $\frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{2}$:



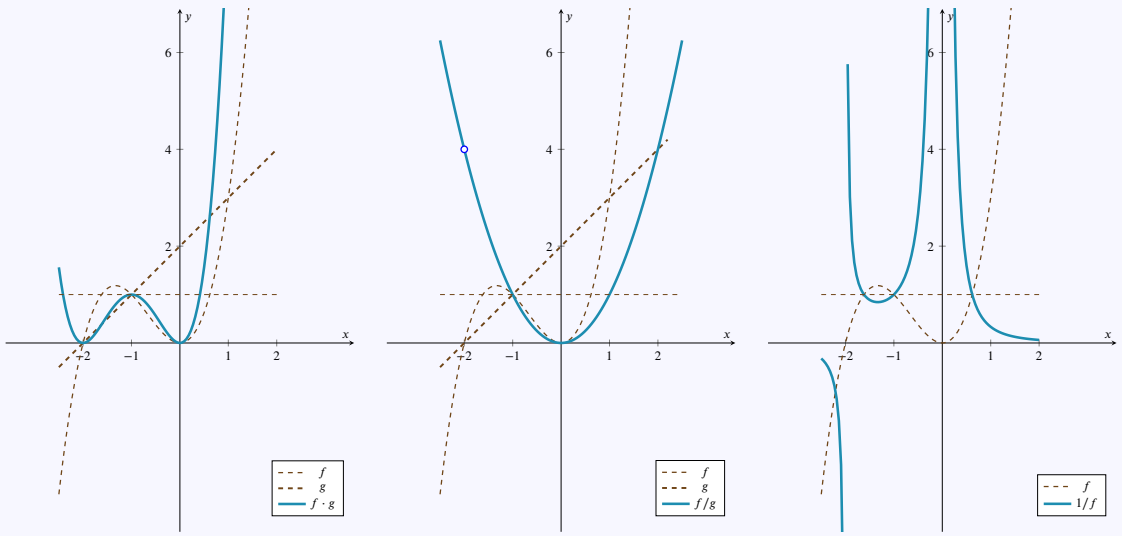

**Voorbeeld 2.6.3** (Nog meer extra voorbeelden)**.**

**1.** Voor de functies $f : x \mapsto x^3 + 2x^2$ en $g : x \mapsto x + 2$ is

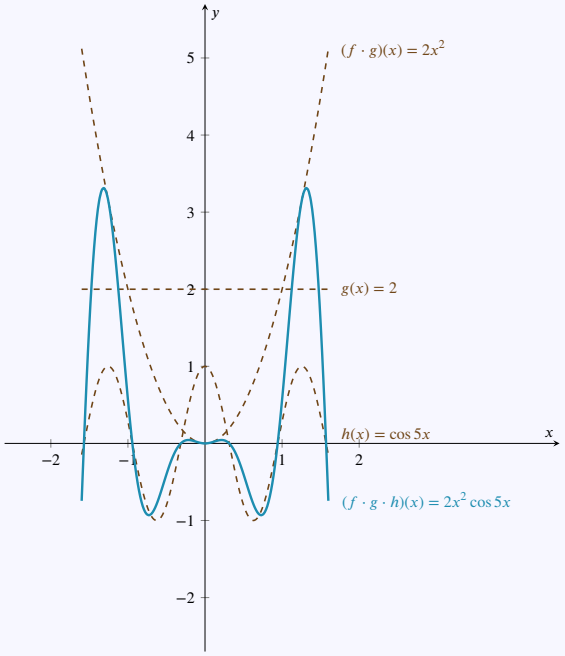
- het product $f \cdot g$ gelijk aan de functie $f \cdot g : x \mapsto (x^3 + 2x^2)(x+2) = x^4 + 4x^3 + 4x^2$
- het quotiënt $\frac{f}{g}$ gelijk aan de functie $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^3+2x^2}{x+2}$
- de omgekeerde $\frac{1}{f}$ gelijk aan de functie $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{x^3+2x^2}$

CC BY-NC-SA 4.0

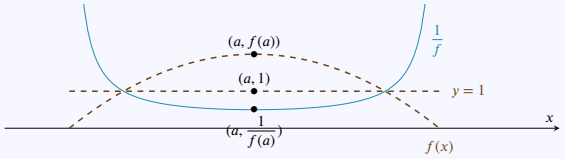
## 2.6 Product en quotiënt van functies




**2.** Het product van de drie functies $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto 2$, $h : x \mapsto \cos(5x)$ is de functie $f \cdot g \cdot h : x \mapsto 2x^2 \cos(5x)$.



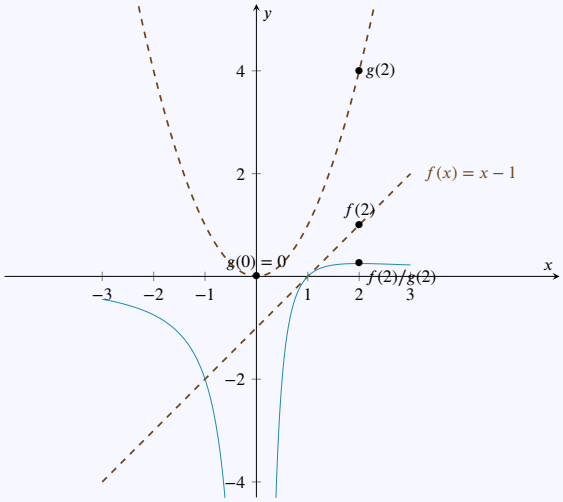

**3.** De grafiek van een functie $f$ en de omgekeerde functie $\dfrac{1}{f}$.




**4.** De grafiek van een functie $f : x \mapsto x - 1$, een functie $g : x \mapsto x^2$ en de functie $f/g : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2}$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 2.6 Product en quotiënt van functies




Merk op dat voor $x = 0$ is $g(x) = x^2 = 0$ dus is $\frac{f}{g}$ niet gedefinieerd in $x = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

## 2.7 Samenstellen van functies

Bewerkingen zoals $a+b$, $a-b$ en $a\cdot b$ met twee reële getallen $a$ en $b$ kan je eenvoudig uitbreiden tot bewerkingen met reële functies $f$ en $g$, en dat levert dan de *functies* $f+g$, $f-g$ en $f\cdot g$ op. Je kan deze operaties voor functies dus beschouwen als veralgemeningen van die voor getallen. Indien $f(x)=x+3$ en $g(x)=x^2$ krijgen we bijvoorbeeld:

$$(f+g)(x)=x^2+x+3 \qquad (f-g)(x)=-x^2+x+3 \qquad (f\cdot g)(x)=(x+3)x^2=x^3+3x^2$$

Er is echter ook een fundamenteel andere manier om een nieuwe functie te maken van twee bestaande functies. Je kan sommige functies namelijk eenvoudig *samenstellen*, dat betekent ze *na elkaar* toe te passen: *eerst* neem je $g(x)$, en dan pas je $f$ toe *op het resultaat* $g(x)$ van $g$, met als eindresultaat $f(g(x))$. Deze operatie is eigen aan functies en er is geen analoge operatie voor getallen.

**Definitie 2.7.1** (Samenstelling van twee functies)**.**

De **samengestelde functie** van twee reële functies $f$ en $g$, genoteerd met $f\circ g$ en gelezen als '$f$ *na* $g$' (of soms ook '$f$ van $g$'), is per definitie de functie die *eerst* $g$ toepast, en dan $f$, dus

$$f\circ g : x \mapsto \boxed{(f\circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x))}.$$

Merk op dat $f\circ g$ enkel gedefinieerd is waar de uitdrukking $f(g(x))$ betekenis heeft. Dat is voor de $x$ waarvoor $g(x)$ bestaat en bovendien ook $f(g(x))$ bestaat. Anders gezegd: het domein van $f\circ g$ bestaat uit alle $x$ in het domein van $g$ waarvoor $g(x)$ tot het domein van $f$ behoort.

**Voorbeeld 2.7.1.** Bekijk de twee functies: $f(x)=x+3$ en $g(x)=x^2$. De functie $g$ kwadrateert een getal terwijl de functie $f$ bij een getal drie optelt. De twee bewerkingen *na elkaar uitvoeren*, dus eerst $x$ kwadrateren (d.i. $g$ toepassen) en dan drie optellen bij het resultaat (d.i. $f$ toepassen op de uitkomst van $g$), levert *een nieuwe functie*:

$$x \overset{g}{\mapsto} x^2 \overset{f}{\mapsto} x^2+3 \quad \text{of} \quad f(g(x))=x^2+3.$$

Deze functie wordt de *samenstelling* van $f$ en $g$ genoemd en genoteerd als $f\circ g$ (lees: '$f$ na $g$').

Merk op dat de functie die *eerst* wordt uitgevoerd *laatst* staat in de notatie! Als je de bewerkingen omkeert (eerst drie optellen en dan kwadrateren), dan krijg je een andere functie:

$$x \overset{f}{\mapsto} x+3 \overset{g}{\mapsto} (x+3)^2 \quad \text{of} \quad g(f(x))=(x+3)^2=x^2+6x+9$$

De volgorde van de samenstelling speelt dus een belangrijke rol:

$$f\circ g : x \mapsto x^2+3 \qquad \text{en} \qquad g\circ f : x \mapsto (x+3)^2.$$

**Voorbeeld 2.7.2.** Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies

| $f$ | $g$ | $f\circ g$ | $g\circ f$ |
|---|---|---|---|
| $x\mapsto x^2$ | $x\mapsto x-3$ | $x\mapsto(x-3)^2$ | $x\mapsto x^2-3$ |
| $x\mapsto x^2$ | $x\mapsto x^2$ | $x\mapsto x^4$ | $x\mapsto x^4$ |
| $x\mapsto x^2$ | $x\mapsto 2$ | $x\mapsto 4$ | $x\mapsto 2$ |
| $x\mapsto x^2$ | $x\mapsto -x$ | $x\mapsto x^2$ | $x\mapsto -x^2$ |

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

# 2.8 Oefeningen samenstellen van functies

**Oefening 2.8.1.** Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies.

1. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
2. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$
3. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
4. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$

**Oefening 2.8.2.**

Schrijf volgende uitdrukkingen als samenstellingen van twee functies:

1. $(x+2)^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
2. $x^2+2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
3. $x^4 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
4. $2x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$
5. $4x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{x^2}\ \boxed{2x}\ \boxed{x+2}$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Module 3

# Veeltermen en veeltermfuncties

(Versie 2026/08/25H.36)

# 3.1 Eerstegraadsveeltermen

De meest eenvoudige veeltermen zijn die van de *eerste graad*. We bespreken hier enkele eigenschappen, en leggen het verband tussen de verwante begrippen *veelterm*, *functie* en *vergelijking*.

**Definitie 3.1.1.** Voor reële getallen $a$ en $b$ met $a \neq 0$ geldt:

- Een **eerstegraads*veelterm* in één onbekende** $x$ is een uitdrukking van de vorm
  $ax + b$ Vb: $2x - 3$
- Aan dergelijke veelterm is volgende **eerstegraads*functie*** geassocieerd:
  $x \mapsto ax + b$ Vb: $x \mapsto 2x - 3$
- Een **eerstegraads*vergelijking*** (of ook ***lineaire* vergelijking**) **in één onbekende** $x$ is een uitdrukking van de vorm
  $ax + b = 0$ Vb: $2x - 3 = 0$

**Opmerking 3.1.1.**

- Het woord *lineair* betekent in eerste instantie 'zoals een *lijn*', dus 'zoals een rechte'. Omdat een rechte een vergelijking heeft van de eerste graad, is het gebruik van het woord *lineair* uitgebreid naar 'van de eerste graad'. Voor vergelijkingen zijn 'lineair' en 'van de eerste graad' dus synoniemen. Maar voor functies heeft het begrip lineair in de wiskunde een beperktere en meer technische betekenis. Een functie is *lineair* als voor alle getallen $a$ en $b$ geldt dat $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$. In die betekenis is de functie $x \mapsto 2x$ wel degelijk lineair, maar de functie $x \mapsto 2x + 1$ is *niet* lineair. Daarom vermijden we het gebruik van het woord *lineair* voor functies en spreken we steeds over *eerstegraadsfuncties*. In sommige handboeken worden echter andere afspraken gemaakt.
- In de uitdrukking $ax + b$ heeft de letter $x$ de rol van *variabele* of *onbekende*, terwijl de letters $a$ en $b$ *parameters* of *constanten* zijn en dus *willekeurige getallen* voorstellen. In plaats van $x$ worden soms ook $y$, $z$ of $t$ gebruikt, en voor $a$ en $b$ komen ook $k, l, p, q, m, \alpha, \beta, \ldots$ dikwijls voor.

  Bij functies moet je dus steeds duidelijk aangeven *welke letter* de rol van variabele of onbekende heeft, en welke letters als parameters worden gebruikt. De notatie $x \mapsto ax + b$ zegt precies dat $x$ de variabele is, terwijl $z$ de variabele is in $z \mapsto pz + q$, en $a$ de variabele is in $a \mapsto 2a + 3$.

**Eigenschap 3.1.1.** Voor een eerstegraadsfunctie $x \mapsto ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, geldt:

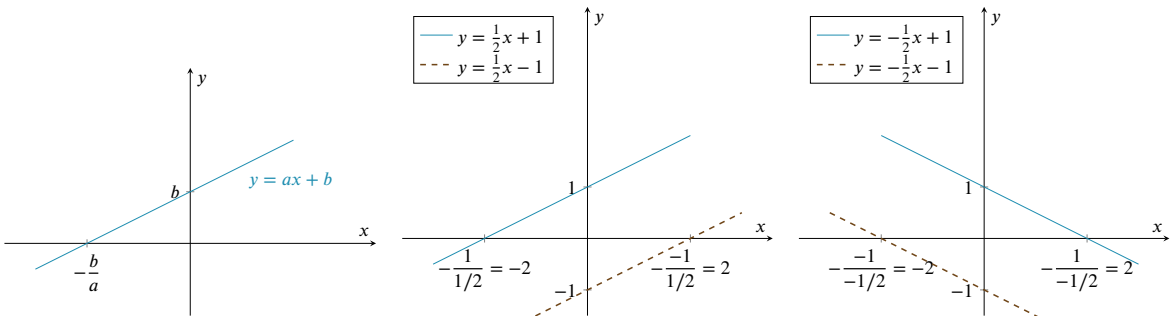
- de grafiek van de functie is een *rechte* met vergelijking $y = ax + b$ en **richtingscoëfficiënt** $a$.
- als $a$ positief is, is de functie strikt *stijgend* en als $a$ negatief is de functie strikt *dalend*.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de $y$-as is het punt $(0, b)$.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de $x$-as is het punt $(-\frac{b}{a}, 0)$. Het getal $-\frac{b}{a}$ is ook het (enige) *nulpunt* van de functie, en de (enige) oplossing van de vergelijking $ax + b = 0$.

Dit leidt tot volgend **tekenverloop** (ook *tekentabel*) voor de functie $x \mapsto ax + b$:

| $x$ | | $-b/a$ | |
|---|---|---|---|
| $ax + b$ met $a > 0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $ax + b$ met $a < 0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.1 Eerstegraadsveeltermen




**Opmerking 3.1.2.**

- We spreken meestal van *nulpunten* van een functie, *oplossingen* van een vergelijking en *wortels* van veeltermen, maar deze begrippen betekenen hetzelfde.
- als $a = 0$ reduceert de functie zich tot $x \mapsto 0x + b = b$, en dat is geen eerstegraadsfunctie maar een *constante* functie. De grafiek is dan de *horizontale* rechte met vergelijking $y = b$. Deze functie heeft *geen nulpunten* (en de grafiek dus geen snijpunten met de $x$-as), tenzij ook $b = 0$. In dat laatste geval zijn er *oneindig veel nulpunten* (en dus snijpunten), want dan is de functie de nulfunctie $x \mapsto 0$.

**Voorbeeld 3.1.1.**

**1.** Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $8 - 4x < 0$.

**Uitwerking:** Je kan het tekenverloop maken van de functie $x \mapsto ax + b = -4x + 8$.
Het nulpunt is $-b/a = 8/4 = 2$, en de coëfficiënt $a = -4$ is negatief, dus is de tekentabel

| $x$ | $\|\|$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $8 - 4x$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ |

De oplossingsverzameling is dus $V = ]2, +\infty[$.

In dit geval kan je natuurlijk veel beter de ongelijkheid oplossen via

$$\begin{aligned} 8 - 4x < 0 &\iff 8 < 4x \\ &\iff 2 < x \end{aligned}$$

De tekentabel wordt pas nuttig in meer ingewikkelde gevallen om eenvoudig een boekhouding bij te houden van de verschillende nulpunten en tekens.

**Definitie 3.1.2.** Een **eerstegraadsvergelijking** (of **lineaire vergelijking**) **in twee onbekenden** $x, y$ is een uitdrukking van de vorm

$ax + by + c = 0$ Vb: $2x + 3y - 4 = 0$

met $a, b, c \in \mathbb{R}$ waarbij $a$ en $b$ niet beide nul zijn.

**Eigenschap 3.1.2.**

De verzameling van alle punten $(x, y)$ in het vlak die voldoen aan de vergelijking $ax + by + c = 0$ vormen een rechte:

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.1 Eerstegraadsveeltermen

- Als $b \neq 0$ is kan je beide leden delen door $b$ :

$$y = -\frac{1}{b}(ax + c) \quad \text{of} \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

dit is de grafiek van de reële functie $x \mapsto mx + q$ met $m = -\frac{a}{b}$ en $q = -\frac{c}{b}$.

Alle punten $(x, y)$ in het vlak die voldoen aan de vergelijking $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ vormen dus een rechte met richtingscoëfficiënt $-\frac{a}{b}$ en snijpunt met de $y$-as $-\frac{c}{b}$.

- Als $b = 0$ is de vergelijking $ax + c = 0$, of dus $x = -\frac{c}{a}$. Merk op dat er geen voorwaarde is op $y$, en $y$ kan dus alle mogelijke waarden aannemen. Alle punten $(x, y)$ in het vlak die voldoen aan $x = -\frac{c}{a}$ vormen bijgevolg de verticale rechte $x = -\frac{c}{a}$.

**Opmerking 3.1.3.** We bespreken hier telkens *één* lineaire vergelijking. Meerdere vergelijkingen *tegelijk* oplossen (met mogelijk ook meer dan twee onbekenden) noemen we *stelsels van lineaire vergelijkingen* oplossen en behoort tot de zogenaamde *lineaire algebra*.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

## 3.2 Oplossen van $2\times 2$ stelsels

We bespreken hier enkele technieken om $2\times 2$ stelsels op te lossen.

**Voorbeeld 3.2.1.** Een groep van 8 toeristen wil een ritje maken met Vespa's. Er zijn Vespa's met of zonder zijspan. Op elke type is plaats voor twee personen, maar de Vespa's met zijspan hebben bovendien plaats voor 3 reistassen, de andere slechts voor 1 reistas. Het gezelschap heeft 6 reistassen. Hoeveel Vespa's moeten er van elk type worden gehuurd zodat er geen lege plaatsen zijn ?

| | met zijspan | zonder zijspan | nodig |
|---|---|---|---|
| personen | 2 | 2 | 8 |
| tassen | 3 | 1 | 6 |

Als $x$ het aantal Vespa's is *met* zijspan, en $y$ het aantal Vespa's *zonder*, dan zoeken we $x$ en $y$ zodat

$$\begin{cases} 2x+2y=8 & \text{(plaatsen voor de personen)} \\ 3x+\ \ y=6 & \text{(plaatsen voor de reistassen)} \end{cases}$$

Dit is *een lineair stelsel* van twee eerstegraadsvergelijkingen.

In dit geval kan je het probleem ook onmiddellijk *oplossen*, zelfs zonder de omweg van het opschrijven van een stelsel. Er zijn op basis van het aantal toeristen natuurlijk 4 Vespa's nodig, en zodra er één is met een zijspan is er ook precies voldoende plaats voor de reistassen.

Voor het oplossen van dergelijke lineaire stelsels bestaan verschillende methoden. We bespreken de substitutiemethode en de eliminatiemethode, en geven telkens eerst een voorbeeld.

**Voorbeeld 3.2.2.** Los volgend stelsel op met de *substitutiemethode*: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-4 \end{cases}$.

**Uitwerking:** Uit de eerste vergelijking $x+y=5$ kan je $x$ berekenen als $x=5-y$.
Die uitdrukking $y-5$ voor $x$ kan je substitueren in de tweede vergelijking $x-2y=-4$:

$$(5-y)-2y=-4 \Leftrightarrow -3y=-9$$

Hieruit volgt dat $y=3$. Je kan de waarde $y=3$ invullen in $x=5-y$ en vindt $x=5-3=2$.

De oplossing van het stelsel is dus $x=2$ en $y=3$, of ook $(x,y)=(2,3)$.

Merk op dat je dezelfde oplossing bekomt door de eerste vergelijking te herschrijven als $y=5-x$ en te substitueren in de tweede vergelijking. Je kan ook de tweede vergelijking herschrijven en substitueren in de eerste vergelijking. Al deze varianten leiden tot hetzelfde resultaat.

Algemeen kan je de substitutiemethode als volgt beschrijven:

**Algoritme 3.2.1.** Los een $2\times 2$ stelsel op met de **substitutiemethode** door

(a) uit één van de vergelijkingen één van de onbekenden op te lossen en

(b) in de andere vergelijking die onbekende te *substitueren* (vervangen) door de gevonden oplossing.

(c) Die andere vergelijking heeft nu nog maar één onbekende, en kan je oplossen,

(d) en die oplossing ingevuld in de vergelijking waarmee je gestart bent, levert de eindoplossing.

Indien men een strijdig stelsel of dubbele vergelijking heeft, zal bovenstaande algoritme niet zonder meer bruikbaar zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.2 Oplossen van $2\times 2$ stelsels

**Voorbeeld 3.2.3.** Los volgend stelsel op met de *eliminatiemethode*: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-4 \end{cases}$.

**Uitwerking:** Zodra $x$ en $y$ voldoen aan de twee vergelijkingen, voldoen ze ook aan de som of het verschil van die vergelijkingen.

Als je in dit geval de tweede vergelijking zou vervangen door het verschil van die tweede vergelijking met de eerste, dan blijkt de onbekende $x$ verdwenen (i.e. *geëlimineerd*) te zijn uit die tweede vergelijking:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ -3y=-9 \end{cases}$$

De tweede vergelijking heeft nu nog maar één onbekende, en is onmiddellijk oplosbaar: $y=3$. Door die oplossing $y=3$ in te vullen in de eerste vergelijking (nl. $x+y=5$), vind je $x+3=5$, dus $x=2$.

De oplossing van het stelsel is dus $x=2$ en $y=3$, of ook $(x,y)=(2,3)$.

Merk op dat er opnieuw verschillende eliminatiemethoden zijn, die allemaal tot diezelfde oplossing leiden.

Strikt genomen hebben we hier de eliminatiemethode enkel in de eerste stap gebruikt, en ze gecombineerd met substitutie om $x$ te berekenen. Het is mogelijk om ook $y$ te elimineren uit de eerste vergelijking, maar in de praktijk is dat voor $2\times 2$ stelsels meestal ingewikkelder dan nodig.

Algemeen kan je de eliminatiemethode als volgt beschrijven:

**Algoritme 3.2.2.** Los een $2\times 2$ stelsel op met de **eliminatiemethode** door

(a) bij één van de vergelijkingen een geschikt veelvoud van de andere op te tellen zodat één van de onbekenden wordt *geëlimineerd* (verdwijnt),

(b) die vergelijking met maar één onbekende op te lossen, en

(c) die oplossing in te vullen in de andere vergelijking.

Zie verder voor de gevallen met strijdige of dubbele vergelijkingen.

In de vorige voorbeelden was er telkens een *unieke* oplossing. Dat is echter niet altijd het geval, soms zijn er *geen* oplossingen, soms zijn er *oneindig veel* oplossingen. Volgende eigenschap zegt dat het niet kan voorkomen dat er 2,3 of 42 oplossingen zijn voor een lineair stelsel.

**Eigenschap 3.2.1.**

Een lineair stelsel heeft ofwel **geen**, ofwel **één**, ofwel **oneindig veel** oplossingen.

Een stelsel zonder oplossingen noemen we een **strijdig** stelsel.

De bovenstaande eigenschap kan intuïtief als volgt begrepen worden. Elke vergelijking in het stelsel definieert een rechte in het vlak. Wanneer we de oplossing van een stelsel zoeken, vragen we eigenlijk naar de oplossing van twee vergelijkingen *tezamen*. Een potentiële oplossing van het stelsel zal meetkundig deel moeten uitmaken van twee rechten *tezamen*. We stellen daarom de natuurlijke vraag: hoe kunnen twee rechten zich onderling verhouden in het vlak? Er zijn drie mogelijkheden: (1) ze zijn evenwijdig met elkaar en snijden elkaar dus in geen enkel punt, (2) ze snijden elkaar in één uniek punt, (3) ze *vallen samen* en hebben dus oneindig veel punten gemeenschappelijk. Deze drie scenario's komen overeen met de bovengenoemde drie opties betreffende het oplossen van $2\times 2$ stelsels.

**Opmerking 3.2.1** (Parameters en niet-unieke schrijfwijze)**.** Bij een stelsel met oneindig veel oplossingen is er minstens één variabele waarvoor je geen getalwaarde vindt, maar die je vrij kan kiezen

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.2 Oplossen van $2\times 2$ stelsels

met behulp van van een parameter $t$. We vinden dan typisch oplossingen van de vorm:

$$(x, y) = (t, a + bt)$$

De letters $a$ en $b$ zijn in praktijk concrete getallen (bv. 7 en 2) die voortkomen uit de opgave van het stelsel en $t \in \mathbb{R}$ is een parameter. Stel dat je na rekenwerk volgende oplossingen vindt:

$$(x, y) = (t, 1 + t), \quad t \in \mathbb{R}$$

maar je collega heeft als antwoord:

$$(x, y) = (1 + t, 2 + t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Hoewel dat op het eerste zicht *verschillende* oplossingen zijn, is dat eigenlijk toch niet het geval. Inderdaad, jij beweert dat de oplossingsverzameling gelijk is aan

$$\{(t, 1 + t) | \quad t \in \mathbb{R}\},$$

terwijl je collega zweert bij de verzameling

$$\{(1 + t, 2 + t) | \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Beide verzamelingen zijn echter aan elkaar gelijk, ze zijn enkel wat anders voorgesteld. Het is te vergelijken met $1/2$, $0,5$ of $50/100$.

Je kan inzien dat beide verzamelingen gelijk zijn door bijvoorbeeld de tweede te schrijven met aan andere letter :

$$\{(1 + t, 2 + t) | \quad t \in \mathbb{R}\} = \{(1 + u, 2 + u) | \quad u \in \mathbb{R}\}$$

en dan op te merken dat waarde $(t, 1 + t)$ overeenkomt met $(1 + (t - 1), 2 + (t - 1)) = (1 + u, 2 + u)$ in de tweede verzameling voor de parameterwaarde $u = t - 1$.

**Voorbeeld 3.2.4.** Stelsel zonder oplossingen: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Inderdaad, $x + y$ kan natuurlijk niet tegelijk gelijk zijn aan 1 en gelijk zijn aan 2.

Als je dergelijk stelsel oplost met *substitutie* bekom je uit de eerste vergelijking $x = 1 - y$, en dat invullen in de tweede vergelijking geeft $(1 - y) + y = 2$, of $1 = 2$ wat een strijdige vergelijking is. Er is dus geen oplossing van deze vergelijking, en dus zeker ook geen oplossing van het hele stelsel.

Als je dergelijk stelsel oplost met *eliminatie* bekom je als tweede vergelijking $0 = 1$, wat ook een strijdige vergelijking is. Er is dus geen oplossing.

**Voorbeeld 3.2.5.** Stelsel met oneindig veel oplossingen: $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$.

Inderdaad, telkens $y$ één kleiner is dan $x$ voldoen $x$ en $y$ aan beide vergelijkingen, bijvoorbeeld $(x, y) = (5, 4), (x, y) = (11, 10)$ of $(x, y) = (\pi + 1, \pi)$.

De oplossingen van het stelsel zijn $x = t, y = t - 1$, met $t \in \mathbb{R}$, wat je ook kan schrijven als $(x, y) = (t, t - 1)$, met $t \in \mathbb{R}$.

Pas wel op: je kan de oplossingen ook schrijven als $x = s + 1, y = s$, met $s \in \mathbb{R}$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.2 Oplossen van $2\times 2$ stelsels

Als je dergelijk stelsel oplost met *substitutie* bekom je uit de eerste vergelijking $x = y + 1$, en dat invullen in de tweede vergelijking geeft $2(y+1) - 2y = 2$, of $2 = 2$. De gelijkheid $2 = 2$ (eventueel nog te vereenvoudigen tot $1 = 1$ of $0 = 0$) legt geen extra voorwaarden op aan $x$ en $y$, want ze is altijd voldaan. Er is dus eigenlijk maar één vergelijking: de tweede bevat precies dezelfde voorwaarde op $x$ en $y$. Er is geen unieke oplossing, maar er zijn er oneindig veel.

Als je dergelijk stelsel oplost met *eliminatie* bekom je als tweede vergelijking $0 = 0$, wat ook een triviale, altijd voldane vergelijking is. Er blijft dus maar één vergelijking met twee onbekenden over, en dergelijke vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

Merk op dat het niet altijd onmiddellijk af te lezen is van een stelsel of het al dan oneindig veel oplossingen heeft.

Zo heeft ook $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = y + 2 \end{cases}$ oneindig veel oplossingen.

We illustreren dit nog verder met enkele voorbeelden:

**Voorbeeld 3.2.6.** Los volgend stelsel op: $\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$.

**Uitwerking:** Dit is het stelsel uit het vraagstuk over de toeristen, dat als volgt kan worden opgelost:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = 4 \\ y = 6 - 3x \end{cases} \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + (6 - 3x) = 4 \\ y = 6 - 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6 = 4 \\ y = 6 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 - 3x \end{cases} \underset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

De stappen hierboven zijn de volgende:

(1) de eerste vergelijking door 2 delen en de tweede vergelijking herschrijven
(2) $y$ substitueren in de eerste vergelijking
(3) $x$ invullen in tweede vergelijking

De oplossing is dus $(x, y) = (1, 3)$.

**Voorbeeld 3.2.7.** Los volgend stelsel op: $\begin{cases} -4x + 4y = -8 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

**Uitwerking:**

$$\begin{cases} -4x + 4y = -8 \\ x - y = 2 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases} \underset{(2)}{\Leftrightarrow} x - y = 2 \underset{(3)}{\Leftrightarrow} x = 2 + y$$

We gebruikten de volgende stappen:

(1) eerste vergelijking delen door $(-4)$
(2) twee gelijke vergelijkingen, je kan één schrappen
(3) $x$ schrijven in functie van $y$

Stel $y = t$ met $t \in \mathbb{R}$ dan wordt de oplossing gelijk aan $(x, y) = (2 + t, t)$, er zijn oneindig veel oplossingen.

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.2 Oplossen van $2 \times 2$ stelsels

**Voorbeeld 3.2.8.** Los volgend stelsel op: $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$.

**Uitwerking:**

$$\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3x + y = 2 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$$

We hebben hier de tweede vergelijking gedeeld door $(-1)$. Maar dan hebben we dat eenzelfde term $-3x + y$ tegelijkertijd gelijk moet zijn aan 2 en 1, wat natuurlijk niet kan. Daarom is dit stelsel strijdig en zijn er geen oplossingen.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

## 3.3 Tweedegraadsveeltermen

Vergelijkingen van de eerste graad in één onbekende hebben steeds één oplossing. Voor vergelijkingen van de tweede graad is de situatie iets ingewikkelder.

**Definitie 3.3.1.** Voor reële getallen $a, b, c$ met $a \neq 0$ geldt:

- Een **tweedegraadsveelterm in één onbekende** $x$ is een uitdrukking van de vorm

  $ax^2 + bx + c$ Vb: $2x^2 - 3x + 4$

- Aan dergelijke veelterm is volgende **(kwadratische) functie** geassocieerd:

  $x \mapsto ax^2 + bx + c$ Vb: $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$

- Een **tweedegraadsvergelijking** (ook **vierkantsvergelijking** of **kwadratische vergelijking**) **in één onbekende** $x$ is een uitdrukking van de vorm

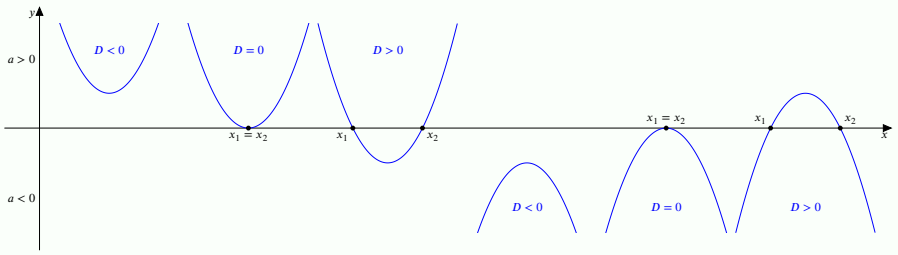
  $ax^2 + bx + c = 0$ Vb: $2x^2 - 3x + 4 = 0$

**Eigenschap 3.3.1.** Voor de functie $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ geldt:

- de grafiek van $f$ is een **parabool** met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$.
- als $a$ negatief is, is dat een **bergparabool**, als $a$ positief is, is dat een **dalparabool**.
- de nulpunten van $f$ zijn de oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, en die vinden we met behulp van de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ waarbij geldt dat
  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende reële** nulpunten.
  - Als $D = 0$ zijn er **twee gelijke reële** nulpunten.
  - Als $D < 0$ zijn er **geen reële** nulpunten.
- als $D \geq 0$ worden de nulpunten (of wortels) gegeven door

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(wortelformule)}$$

  Deze nulpunten zijn de snijpunten van de grafiek van $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ met de $x$-as. Als $D = 0$ is $x_1 = x_2$ en hebben we slechts 1 snijpunt met de $x$-as.
- de functie $f$ heeft volgend **tekenverloop** (of **tekentabel**):




  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende nulpunten** $x_1 < x_2$, en volgend tekenverloop:

| $x$ | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax^2 + bx + c$ met $a > 0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $ax^2 + bx + c$ met $a < 0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

## 3.3 Tweedegraadsveeltermen

– Als $D = 0$ zijn er **twee samenvallende nulpunten** $x_1 = x_2$, en volgend tekenverloop:

| $x$ | | $x_1 = x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $ax^2 + bx + c$ met $a > 0$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $ax^2 + bx + c$ met $a < 0$ | $-$ | $0$ | $-$ |

– Als $D < 0$ zijn er **geen nulpunten**, en volgend tekenverloop:

| $x$ | |
|---|---|
| $ax^2 + bx + c$ met $a > 0$ | $+$ |
| $ax^2 + bx + c$ met $a < 0$ | $-$ |

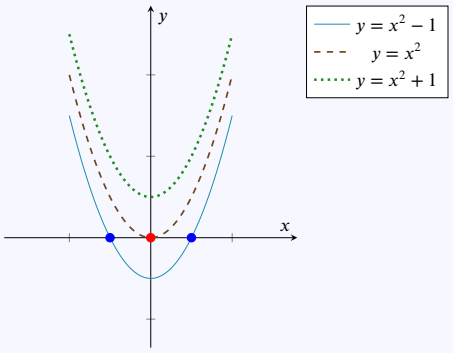
- de **top** van de parabool heeft als coördinaten $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- bij een bergparabool is $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ het **maximum** van $f$, bij een dalparabool het **minimum**.
- de **symmetrie-as** is de verticale rechte door de top, dus met vergelijking $x = -\frac{b}{2a}$.
- het bereik van een kwadratische functie gaat van min oneindig tot het maximum voor een bergparabool en van het minimum tot plus oneindig voor een dalparabool.
- de parabool snijdt de $y$-as in het punt $(0, c)$. (Vul $x = 0$ in in de vergelijking $ax^2 + bx + c$.)
- de parabool snijdt de $x$-as in de nulpunten van $f$. (Per definitie van het begrip nulpunt.)

**Voorbeeld 3.3.1.**

**1.** Bereken de nulpunten van de functies $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 - 1$ en $x \mapsto x^2 + 1$, en maak een tekening.

**Uitwerking:** De nulpunten van $x \mapsto x^2$ zijn $0$ (twee keer, maar aan elkaar gelijk), die van $x \mapsto x^2 - 1$ zijn $\pm 1$, en $x \mapsto x^2 + 1$ heeft geen reële nulpunten.

De grafieken van de overeenkomstige functies – waarop het aantal nulpunten direct afleesbaar is – zijn:




**2.** Geef de oplossingen van de vergelijking $x^2 + 5x + 6 = 0$.

**Uitwerking:** De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -2$ en $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -3$.

**3.** Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.3 Tweedegraadsveeltermen

**Uitwerking:** We vinden dat $D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$. Dus $x_1 = x_2 = \frac{-6}{2 \cdot 9} = \frac{-1}{3}$.

**4.** Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$.

**Uitwerking:** De nulpunten zijn $-2$ en $-3$. De coëfficiënt $a = 1$ is positief, dus is de tekentabel

| $x$ | | $x_1 = -3$ | | $x_2 = -2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + 5x + 6$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

De oplossingsverzameling is dus $V = ]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$.

**Eigenschap 3.3.2.**

Als $x_1$ en $x_2$ de wortels zijn van $ax^2 + bx + c$, dan kunnen we deze veelterm **ontbinden in factoren**:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ Vb: $2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2)$

**Voorbeeld 3.3.2.** Ontbind $2x^2 + 5x + 3$ in factoren.

**Uitwerking:**

De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \frac{-5+1}{4} = -1$ en $x_2 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2}$, en dus

$$2x^2 + 5x + 3 = 2\,(x - (-1))\left(x - (-\tfrac{3}{2})\right) = 2\,(x+1)\left(x + \tfrac{3}{2}\right) = (x+1)\,(2x+3)$$

**Opmerking 3.3.1.** Een veelgemaakte fout bij het ontbinden van factoren is het vergeten van de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm. Herneem vorig voorbeeld: Zowel $(x+1)(x+\frac{3}{2})$ als $2(x+1)(x+\frac{3}{2})$ hebben nulpunten $-1$ en $-\frac{3}{2}$, maar enkel $2(x+1)(x+\frac{3}{2}) = 2x^2 + 5x + 3$.
Je kan narekenen dat $(x+1)(x+\frac{3}{2}) = x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \neq 2x^2 + 5x + 3$.

**Opmerking 3.3.2.** Omdat $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2$ vind je door gelijkstelling van de gelijknamige coëfficiënten van $x$ ook dat

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{(product van de wortels)}$$

Het is dus niet nodig om de wortels zelf te berekenen als je enkel geïnteresseerd zou zijn in de som of het product van de wortels: die kan je immers beide direct afleiden uit de vergelijking.

Als $a = 1$ (en daar kan je altijd voor zorgen door te delen door $a$) is de vergelijking van de vorm $x^2 + bx + c = 0$ en worden de formules eenvoudiger:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad \text{(wortels)}$$

$$x_1 + x_2 = -b \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = c \qquad \text{(product van de wortels)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

# 3.4 Oefeningen eerste- en tweedegraadsveeltermen

**Oefening 3.4.1.** Los de volgende veeltermvergelijkingen op naar $x$.

**1.** $3x - 5 = x + 9$ $x = \ldots\ldots$

**2.** $(2x + 3)^2 - 25 = 0$ ……

**3.** $8x^2 - 24x = 0$ ……

**4.** $5x^2 + 2x - 5 = 3x^2 + 4x + 7$ ……

**5.** $x^2 - x + 1 = -5 + x$ ……

**6.** $x + 10 = -2x + \frac{1}{2}$ $x = \ldots\ldots$

**7.** $2x + 1 = 2x^2 - 3$ ……

**Oefening 3.4.2.** Geef het tekenverloop van de functie $f$ met het gegeven functievoorschrift. (Bepaal het nulpunt/ de nulpunten van de functie en vul de correcte tekens aan in de tabel.)

**1.** $f(x) = -x + 8$

| $x$ | | $\ldots\ldots$ | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | …… | 0 | …… |

**2.** $f(x) = -x^2 + 4x - 7$

| $x$ | |
|---|---|
| $f(x)$ | …… |

**3.** $f(x) = x^2 + 5x - 6$

| $x$ | | $\ldots\ldots$ | | $\ldots\ldots$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | …… | 0 | …… | 0 | …… |

**4.** $f(x) = x^2 - 6x + 9$

| $x$ | | $\ldots\ldots$ | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | …… | 0 | …… |

**5.** $f(x) = -(x - 2)(x + 2)$

| $x$ | | $\ldots\ldots$ | | $\ldots\ldots$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | …… | 0 | …… | 0 | …… |

**6.** $f(x) = 3x + 2$

| $x$ | | $\ldots\ldots$ | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | …… | 0 | …… |

**Oefening 3.4.3.** Ontbind in factoren

**1.** $x^2 + x - 6 = \ldots\ldots$

**2.** $3x^2 + 12x - 15 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.5 Veeltermen

Een veelterm in $x$ is een som van veelvouden van machten van $x$ zoals $x^{1302} + 11x^7 + 1830$:

**Definitie 3.5.1.** Een $n$-**de graadsveelterm in één onbekende** $x$ is een uitdrukking van de vorm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

met $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \ldots a_n \in \mathbb{R}$ en $a_n \neq 0$.

De $a_i x^i$ zijn **termen** van de veelterm, de $a_i$ zijn **coëfficiënten**, en $n$ is de **graad**.

Elke veelterm bepaalt een reële functie via evaluatie (i.e. invullen):

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto p(x)$$

Men noteert de graad van $p(x)$ soms met $\text{gr}(p(x)) \overset{\text{def}}{=} n$, en noemt $a_0$ de **constante term**.

**Voorbeeld 3.5.1.**

- $p(x) = 2x + 3$ is een eerstegraadsveelterm, met $p(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$ en $p(0) = 3$.
- $p(x) = 5x^2 - 7x + 2$ is een tweedegraadsveelterm, met $p(1) = 5 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 2 = 0$ .
- $p(x) = x^{2023} - 1$ is een veelterm van graad 2023, met $p(1) = 1 - 1 = 0$ en $p(2) = 2^{2023} - 1$.
- $p(x) = 7$ is een veelterm van graad 0, en $p(0) = p(1) = p(10) = 7$.
- $p(x) = ax + b$ is een eerstegraadsveelterm met 'parameters' of 'constanten' $a \neq 0$ en $b$.
- $p(x) = \sqrt{\pi}x^5 - e^y + \sin^2 \alpha$ is een veelterm in $x$ van de vijfde graad, met parameters $y$ en $\alpha$.
- $p(x) = x^2 - e^x$ is *geen* veelterm in $x$ omdat $x$ voorkomt in de exponentiële functie.

Je kan ook veeltermen in andere letters tegenkomen: $5t^2 + 3t$ en $t + \cos\alpha$ zijn veeltermen in $t$, en $e^{2x}u^2 - 1$ is een veelterm in $u$ (maar niet in $x$).

Je kan met veeltermen rekenen zoals met getallen:

**Eigenschap 3.5.1.**

$$\begin{aligned}
(x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)x + ab && \text{(distributiviteit twee lineaire termen)}\\
(x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2 && \text{(kwadraat van tweeterm, via } b = a)\\
(x-a)^2 &= x^2 - 2ax + a^2 && \text{(kwadraat van tweeterm, via } a \mapsto -a)\\
x^2 - a^2 &= (x-a)(x+a) && \text{(verschil van kwadraten, via } b = -a)
\end{aligned}$$

Voor derdemachten kan je met distributiviteit eenvoudig narekenen dat:

$$\begin{aligned}
(x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 && \text{(derdemacht van tweeterm)}\\
x^3 - a^3 &= (x-a)(x^2 + ax + a^2) && \text{(verschil van derdemachten)}
\end{aligned}$$

Net zoals bij meer algemene functies willen we dikwijls weten waar een veelterm nul wordt:

**Definitie 3.5.2** (Nulpunten van veeltermen)**.**

Een **nulpunt** (ook **nulwaarde** of **wortel**) van een veelterm $p(x)$ is een reëel getal $a$ waarvoor $p(a) = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.5 Veeltermen

**Voorbeeld 3.5.2** (Nulpunten van eenvoudige veeltermen)**.**

1. Het getal 3 is een nulpunt van $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ omdat $p(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$
2. Veelterm $x - 5$ heeft 5 als nulpunt(en).
3. Veelterm $x^2 - 4$ heeft $-2$ en 2 als nulpunt(en).
4. Veelterm $x^2 + 4$ heeft geen enkel reëel getal als nulpunt(en).

Net zoals gehele getallen kan je ook veeltermen ontbinden in factoren:

**Definitie 3.5.3** (Factoren van veeltermen)**.**

Een **factor** van een veelterm $p(x)$ is een veelterm $d(x)$ zodat $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$.

Een **triviale factor** heeft graad 0, is dus een getal, en beschouwen we meestal niet als 'echte' factor.

**Ontbinden in factoren** is een veelterm schrijven als product van zo veel mogelijk niet-triviale factoren.

**Voorbeeld 3.5.3** (Factoren van veeltermen)**.**

1. $x + 1$ is een factor van $x^2 - 1$ want $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.
2. Elk getal $a \in \mathbb{R}_0$ is een (triviale) factor van $x^2 - 1$ want $x^2 - 1 = a \cdot (\frac{1}{a}x^2 - \frac{1}{a})$.
3. $x + 2$ is geen factor van $x^2 - 1$ want voor elke getal $a \in \mathbb{R}$ is $x^2 - 1 \neq (x + 2)(x + a)$.
4. De veelterm $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ is ontbonden in factoren.

**Eigenschap 3.5.2** (Verband tussen factoren en nulpunten voor veeltermen)**.**

Een getal $a$ is nulpunt van een veelterm $p(x)$ als en slechts als $x - a$ een factor is van $p(x)$.

Of dus: $p(a) = 0 \iff p(x) = (x - a)q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$

**Opmerking 3.5.1.** Men kan aantonen dat elke reële veelterm kan geschreven worden als een product van factoren van de eerste graad en factoren van de tweede graad met een negatieve discriminant.

Wie vertrouwd is met complexe getallen $\mathbb{C}$ weet dat elke tweedegraadsveelterm *over de complexe getallen* nog verder kan ontbonden worden (bv. $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$). Dit leidt de zogenaamde **Hoofdstelling van de algebra**: over $\mathbb{C}$ is elke veelterm een product van lineaire termen.

CC BY-NC-SA 4.0

# 3.6 Algoritme voor Euclidische deling

Het **algoritme van Euclides** berekent voor veeltermen $p(x)$ en $d(x)$ het quotiënt $q(x)$ en de rest $r(x)$ zodat

$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$, met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x))$ Vb: $x^2 - 4x + 3 = (x+2)(x-6) + 15$, met $\text{gr}(15) < 1$

net zoals de staartdeling voor getallen $D$ en $d$ twee nieuwe getallen $q$ en $r$ oplevert zodat

$D = q \cdot d + r$ met $r < d$ Vb: $17 = 5 \cdot 3 + 2$ met $2 < 5$

Met de staartdeling 17 delen door 5 geeft $12 = 5 \cdot 3 + 2$, dus quotiënt 3 en rest 2.
Met de Euclidische deling $x^2 - 4x + 3$ delen door $x + 2$ levert $x^2 - 4x + 3 = (x+2) \cdot (x-6) + 15$, met quotiënt $x - 6$ en rest 15.

We geven eerst twee voorbeelden die in detail worden uitgewerkt, het eerste per video, het tweede per tekst. Daarna volgt de algemene procedure.

**Voorbeeld 3.6.1** (Euclidische deling per video uitgelegd)**.**

Bereken quotiënt en rest van de deling van veelterm $10x^3 + 21x^2 - 11x - 7$ door veelterm $5x + 3$.

**Uitwerking:** We zoeken dus veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x)) = 1$ zodat

$$10x^3 + 21x^2 - 11x - 7 = q(x) \cdot (5x+3) + r(x).$$

De procedure wordt in detail en in minder dan 8 minuten uitgelegd in volgende video (met dank aan de ons verder onbekende meneer MDO):

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/vlARWbDqJOA

Het algoritme voor de Euclidische deling leidt dus tot volgende schema:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
10x^3 & + & 21x^2 & - & 11x & - & 7 & 5x+3 \\
\cline{8-8}
-\,(10x^3 & + & 6x^2) & & & & & 2x^2+3x-4 \\
\cline{1-3}
 & & 15x^2 & - & 11x & - & 7 & \\
 & & -\,(15x^2 & + & 9x) & & & \\
\cline{3-5}
 & & & - & 20x & - & 7 & \\
 & & & - & 20x & - & 12 & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 5 &
\end{array}$$

Eindresultaat: $10x^3 + 21x^2 - 11x - 7 = (2x^2 + 3x - 4)(5x + 3) + 5$

**Voorbeeld 3.6.2** (Euclidische deling stap per stap uitgelegd)**.**

Bereken quotiënt en rest van de deling van veelterm $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ door veelterm $x - 3$.

**Uitwerking:** We zoeken dus veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x)) = 1$ zodat

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = q(x) \cdot (x-3) + r(x).$$

We gebruiken een aangepaste vorm van de staartdeling van natuurlijke getallen. Bestudeer het schema samen met de uitleg.

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.6 Algoritme voor Euclidische deling

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 2x^3 & + & x^2 & - & 5x & + & 2 & x-3 \\
(b)- & 2x^3 & - & 6x^2 & & & & & \hline \\
 & & & 7x^2 & - & 5x & + & 2 & 2x^2+7x+16 \\
(d)- & & & 7x^2 & - & 21x & & & (a)\quad (c)\quad (e) \\
 & & & & & 16x & + & 2 & \\
(f)- & & & & & 16x & - & 48 & \hline \\
 & & & & & & & 50 & \\
 & & & & & & & (g) &
\end{array}
$$

(a) Deel de hoogstegraadsterm van $p(x)$ door de hoogstegraadsterm van $d(x)$. Dus deel $2x^3$ door $x$. Schrijf dit 'voorlopig quotiënt' $2x^3/x = 2x^2$ in de rechterkolom.

(b) Vermenigvuldig de deler $x-3$ met het 'voorlopig quotiënt' $2x^2$ en schrijf dit product $(x-3)\cdot 2x^2 = 2x^3-6x^2$ onder het deeltal. Trek dit product $2x^3-6x^2$ af van het deeltal $2x^3+x^2-5x+2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen tegen elkaar weg. De 'voorlopige rest' is $2x^3+x^2-5x+2-(2x^3-6x^2) = 7x^2-5x+2$. Die 'voorlopige rest' is nog te groot, want de graad 2 van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad 1 van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(c) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de 'voorlopige rest' (dus $7x^2$) door de hoogstegraadsterm van de deler $x-3$, dus door $x$. Voeg deze component $7x^2/x = 7x$ toe aan het 'voorlopig quotiënt' in de rechterkolom.

(d) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met deze nieuwe component $7x$ en schrijf het product $7x\cdot(x-3)$ onder de 'voorlopige rest' $7x^2-5x+2$. Trek het product $7x^2-21x$ af van de 'voorlopige rest' $7x^2-5x+2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen weer tegen elkaar weg. De nieuwe 'voorlopige rest' is $7x^2-5x+2-(7x^2-21x) = 16x+2$. Deze 'voorlopige rest' $16x+2$ is nog te groot, want de graad van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(e) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de nieuwe 'voorlopige rest' $(16x)$ door $x$. Voeg 16 toe als nieuwe component van het 'voorlopig quotiënt'.

(f) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met die nieuwe component 16 en trek het product $16(x-3)$ af van de huidige 'voorlopige rest' $16x+2$. Dit geeft de nieuwe 'voorlopige rest' 50.

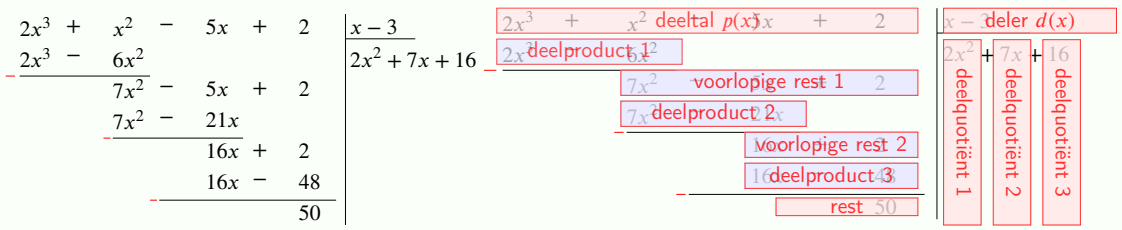
(g) Omdat de graad van deze 'voorlopige rest' strikt kleiner is dan de graad van de deler, is het onmogelijk dat we de rest nog kunnen schrijven als een product van de deler met nog iets. Dit beëindigt dus de procedure. 50 is de uiteindelijke rest, en $2x^2+7x+16$ is het uiteindelijke quotiënt.

Eindresultaat: $2x^3+x^2-5x+2 = (2x^2+7x+16)(x-3)+50$

De algemene procedure een een veelterm $p(x)$ te delen door een veelterm $d(x)$ is als volgt:

**Algoritme 3.6.3** (Algoritme Euclidische deling)**.**

Bereken $q(x)$ en $r(x)$ zodat $p(x) = q(x)\cdot d(x)+r(x)$ (met $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$).




(a) Plaats deeltal $p(x)$ en deler $d(x)$ in een *deelschema* volgens dalende machten van $x$. Gebruik voor eventuele ontbrekende machten in $p(x)$ nullen of open plaatsen.

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.6 Algoritme voor Euclidische deling

(b) Deel de hoogstegraadsterm van het deeltal door hoogstegraadsterm van de deler.
In het voorbeeld: $2x^3$ gedeeld door $x$ is $2x^2$.

(c) Schrijf dit eerste *deelquotiënt* op de quotientplaats.
In het voorbeeld: $2x^2$.

(d) Schrijf het product van dit deelquotiënt met de deler $d(x)$ onder het deeltal $p(x)$.
In het voorbeeld: $2x^2 \cdot (x-2) = 2x^3 - 6x^2$.

(e) Schrijf het *verschil* van deeltal en dit product als *voorlopige rest*.
In het voorbeeld: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 - (2x^3 - 6x^2) = 7x^2 - 5x + 2$.

(f) Deel de hoogstegraadsterm van de voorlopige rest door hoogstegraadsterm van de deler, en voeg het resultaat als deelquotiënt toe aan het (voorlopige) quotiënt.
In het voorbeeld: $7x^2$ gedeeld door $x$ is $7x$.

(g) Schrijf het product van dit extra deelquotiënt met de deler onder de recentste voorlopige rest.
In het voorbeeld: $7x \cdot (x-2) = 7x^2 - 21x$.

(h) Schrijf het verschil van vorige voorlopige rest en dit deelproduct als nieuwe voorlopige rest.
In het voorbeeld: $7x^2 - 5x + 2 - (7x^2 - 21x) = 16x + 2$.

(i) Herhaal de vorige drie stappen tot de graad van de voorlopige rest strikt kleiner is dan de graad van de deler.
In het voorbeeld: na één keer herhalen is de rest een constante, dus met graad kleiner dan 1.

**Voorbeeld 3.6.3.** Deel $2x^3 - 8$ door $x + 2$.

**Uitwerking:**

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
2x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 8 & x+2 \\
\cline{8-8}
2x^3 & + & 4x^2 & & & & & 2x^2 - 4x + 8 \\
\cline{1-3}
 & - & 4x^2 & + & 0x & - & 8 & \\
 & - & 4x^2 & - & 8x & & & \\
\cline{2-5}
 & & & & 8x & - & 8 & \\
 & & & & 8x & + & 16 & \\
\cline{4-6}
 & & & & & - & 24 &
\end{array}$$

Besluit: $2x^3 - 8 = (2x^2 - 4x + 8)(x + 2) - 24$

**Oefening 3.6.1.** Deel $-x^3 + 9x + 2$ door $x + 4$.

**Uitwerking:**

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
- & x^3 & + & 0x^2 & + & 9x & + & 2 & x+4 \\
\cline{9-9}
- & x^3 & - & 4x^2 & & & & & -x^2 + 4x - 7 \\
\cline{1-3}
 & & & 4x^2 & + & 9x & + & 2 & \\
 & & & 4x^2 & + & 16x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & - & 7x & + & 2 & \\
 & & & & - & 7x & - & 28 & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & & 30 &
\end{array}$$

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.6 Algoritme voor Euclidische deling

Besluit: $-x^3+9x+2=(-x^2+4x-7)(x+4)+30$

**Oefening 3.6.2.** Deel $4x^4+x^3+2x+1$ door $2x^2+1$.

**Uitwerking:**

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
4x^4 & + & x^3 & + & 0x^2 & + & 2x & + & 1 & 2x^2+1 \\
\cline{10-10}
-\,4x^4 & & & + & 2x^2 & & & & & 2x^2+\tfrac{1}{2}x-1 \\
\cline{1-8}
 & & x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & + & 1 & \\
 & & -\,x^3 & & & + & \tfrac{1}{2}x & & & \\
\cline{3-8}
 & & & - & 2x^2 & + & \tfrac{3}{2}x & + & 1 & \\
 & & & - & 2x^2 & & & - & 1 & \\
\cline{3-8}
 & & & & & & \tfrac{3}{2}x & + & 2 &
\end{array}$$

Besluit: $4x^4+x^3+2x+1=\left(2x^2+\frac{1}{2}x-1\right)(2x^2+1)+\left(\frac{3}{2}x+2\right)$

CC BY-NC-SA 4.0

# 3.7 Het schema van Horner

Het **rekenschema van Horner** berekent voor een nulpunt $a$ van een veelterm $p(x)$ een veelterm $q(x)$ zodat

$p(x) = (x-a)q(x)$ Vb: $x^3+x+2 = (x+1)(x^2-x+2)$

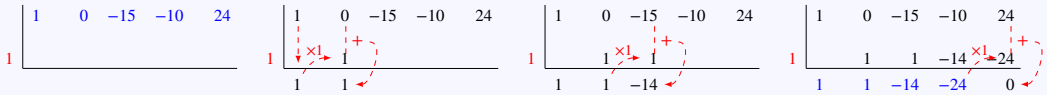
Vervolgens het schema toepassen op $q(x)$ geeft in goede gevallen een ontbinding in factoren van $p(x)$.

**Voorbeeld 3.7.1.** Vind veelterm $q(x)$ zodat voor $p(x) = x^4-15x^2-10x+24$ geldt $p(x) = (x-1)q(x)$.

**Uitwerking:**

Merk op dat 1 inderdaad een nulpunt is van $p(x)$, want $p(1) = 1^4-15\cdot 1^2-10\cdot 1+24 = 1-15-10+24 = 0$.

Het schema van Horner zegt dan dat je $q(x)$ als volgt kan berekenen:




(a) Zet de coëfficiënten van $p(x)$ in de eerste rij, volgens dalende machten van $x$.
Gebruik voor eventuele ontbrekende machten in $p(x)$ nullen.

(b) Plaats het nulpunt $a = 1$ op de tweede rij, links van de verticale streep.

(c) Breng de eerste coëfficiënt op de eerste rij op de derde rij (onder de horizontale streep).

(d) Schuif één kolom naar rechts

(e) Plaats op de tweede rij het product van $a$ met het getal op de derde rij van de kolom ervoor.

(f) Plaats op de derde rij de som van de twee waarden erboven.

(g) Herhaal vorige drie stappen voor alle kolommen.

(h) Als $a$ een nulpunt is van $p(x)$ dan moet de laatste waarde uiterst rechts onder de horizontale streep een 0 zijn. Zoniet maakte je een rekenfout of is $a$ toch geen nulpunt.

(i) Onder de horizontale streep vind je nu de lijst met coëfficiënten van $q(x)$ volgens dalende machten van $x$, waarbij je de laatste nul negeert.
Hier is $q(x) = x^3+x^2-14x-24$.

Het algoritme van Horner leert dus dat $x^4-15x^2-10x+24 = (x-1)(x^3+x^2-14x-24)$.

Dit wordt erg duidelijk en volledig uitgelegd in het eerste deel van volgend filmpje:

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/P88ZvVsuLIA

Door het schema van Horner opnieuw toepassen, nu op de veelterm $x^3+x^2-14x-24$, vind je

$$x^3+x^2-14x-24 = (x+2)(x^2-x-12)$$

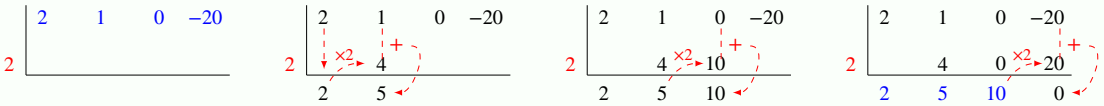
en de factor $x^2-x-12$ kan je ontbinden met de discriminant (of ook, zoals in het filmpje, met de eigenschap van som en product van de wortels). De volledige ontbinding in factoren wordt $p(x) = (x-1)(x+2)(x+3)(x-4)$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 3.7 Het schema van Horner

De algemene procedure om $p(x)$ te schrijven als veelvoud van $x-a$ (met $p(a)=0$) is als volgt:

**Algoritme 3.7.4** (Rekenschema van Horner). Bereken $q(x)$ zodat $p(x)=(x-a)q(x)$.
(Hier uitgewerkt met voorbeeld voor $a=2$ en $p(x)=2x^3+x^2-20=(x-2)q(x)$.)




(a) Zet de coëfficiënten van $p(x)$ in de eerste rij, volgens dalende machten van $x$.
Gebruik voor eventuele ontbrekende machten in $p(x)$ nullen.
In het voorbeeld is dat voor de veelterm $2x^3+x^2-20$ de rij $2,1,0,-20$

(b) Plaats het nulpunt $a$ op de tweede rij, links van de verticale streep. In het voorbeeld is dat $2$.

(c) Breng de eerste coëfficiënt op de eerste rij op de derde rij (onder de horizontale streep).

(d) Schuif één kolom naar rechts

(e) Plaats op de tweede rij het product van $a$ met het getal op de derde rij van de kolom ervoor.

(f) Plaats op de derde rij de som van de twee waarden erboven.

(g) Herhaal vorige drie stappen voor alle kolommen.

(h) Als $a$ een nulpunt is van $p(x)$ dan moet de laatste waarde uiterst rechts onder de horizontale streep een $0$ zijn. Zoniet maakte je een rekenfout of is $a$ toch geen nulpunt.

(i) Onder de horizontale streep vind je nu de lijst met coëfficiënten van $q(x)$ volgens dalende machten van $x$, waarbij je de laatste nul negeert.
In het voorbeeld is $q(x)=2x^2+5x+10$.

Het algoritme van Horner leert dus dat $2x^3+x^2-20=(x-2)(2x^2+5x+10)$.

**Oefening 3.7.1.** Ontbind de veelterm $p(x)=x^4-10x^2+9$ in factoren.

CC BY-NC-SA 4.0

# 3.8 Oefeningen Horner

**Oefening 3.8.1.** Bepaal voor onderstaande veeltermen telkens een *geheel* nulpunt $a$. Schrijf vervolgens de veelterm in de vorm $(x-a)q(x)$.

**1.** $x^4-2x^3+1$ heeft geheel nulpunt $\ldots\ldots$ en kan dus geschreven worden als $(x-\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

**2.** $x^3-x^2-5x+6$ heeft geheel nulpunt $\ldots\ldots$ en kan dus geschreven worden als $(x-\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

**Oefening 3.8.2.** Ontbind de volgende veeltermen in factoren.

**1.** $x^4-2x^3+x^2-2x=\ldots\ldots$

**2.** $x^3+4x^2-3x-18=\ldots\ldots$

**3.** $3x^3-5x^2-10x-6=\ldots\ldots$

**4.** $x^4-2x^3+2x-1=\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Module 4
# Exponentiële en logaritmische functies

(Versie 2026/08/25H.36)

# 4.1 Machten met gehele exponenten

Net zoals *vermenigvuldigen* 'herhaald optellen' is: $3 \times 2 \overset{\text{def}}{=} 2+2+2$ en $n \times a = a+a+\ldots+a$ ($n$ keer),
is *machtsverheffen* 'herhaald vermenigvuldigen': $2^3 \overset{\text{def}}{=} 2\times 2\times 2$ en $a^n \overset{\text{def}}{=} a\times a\times \ldots \times a$ ($n$ keer).

**Definitie 4.1.1** (Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent)**.**

De $n$**-de macht** van een reëel getal $a$, met $n \in \mathbb{N}$, genoteerd $a^n$, is

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1 \quad \text{als } a \neq 0$$
$$a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}} \quad \text{als } n \in \mathbb{N}_0.$$

Vb: $5^0 = 1$, $5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ factoren}} = 125$

We noemen $a$ het **grondtal** en $n$ de **exponent**.

Als $a$ niet nul is, definiëren we ook machten met *negatieve* exponenten:

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

Vb: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

.

De uitdrukkingen $0^0$ en $0^{-n}$ zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

**Oefening 4.1.1.** Bereken:

1. $5^2 = \ldots\ldots$
2. $-5^2 = \ldots\ldots$
3. $(-5)^2 = \ldots\ldots$
4. $(2+3)^2 = \ldots\ldots$
5. $2^2 + 3^2 = \ldots\ldots$
6. $(2+3)^2 - (2^2+3^2) = \ldots\ldots$
7. $2^{-1} = \ldots\ldots$
8. $10^3 = \ldots\ldots$
9. $10^{-3} = \ldots\ldots$

**Opmerking 4.1.1.** Onmiddellijke gevolgen van de definities:

1. $a^1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.
2. $a^0 = 1$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
3. $0^n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.
4. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
5. $0^z$ is niet gedefinieerd voor $z \in \mathbb{Z}^-$.
6. $1^n = 1$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

Omdat $a^2 = a \cdot a$ en $a^3 = a \cdot a \cdot a$ volgt ook direct dat

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= (a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5 \\ (a^2)^3 &= (a \cdot a)^3 = (a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a) = a^{2 \cdot 3} = a^6 \\ a^3 \cdot b^3 &= (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = (a \cdot b)^3 \end{aligned}$$

maar een uitdrukking als $a^2 \cdot b^3$ kan je niet schrijven als één macht, wel als $(a \cdot b)^2 \cdot b$.

In het algemeen gelden volgende rekenregels:

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.1 Machten met gehele exponenten

**Eigenschap 4.1.1** (Rekenregels machten)**.** Voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)} \\ (ab)^n &= a^n b^n && \text{(macht van product)} \\ (a^m)^n &= a^{mn} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{als } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{als } b \neq 0$$

Dezelfde regels gelden voor *gehele* $m, n \in \mathbb{Z}$ zolang het grondtal niet nul is bij negatieve exponenten.

Dezelfde regels gelden ook voor *reële* $m, n \in \mathbb{R}$ voor zover ze betekenis hebben (zie verder).

**Oefening 4.1.2.** Bereken volgende machten.

**1.** $2^2 \cdot 2^3 = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$

**2.** $(2^2)^3 = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$

**3.** $2^{(2^3)} = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$

**4.** $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^n$ met $n = \ldots\ldots$

**5.** $1302^5 \cdot 2^5 = a^5$ met $a = \ldots\ldots$

**Voorbeeld 4.1.1.** Bereken volgende machten.

**1.** $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$

**2.** $\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \cdot 9 = \frac{9}{4}$

CC BY-NC-SA 4.0

# 4.2 Machten en wortels

Voor *positieve* grondtallen $a \in \mathbb{R}_0^+$ wordt de machtsverheffing $a^m$ veralgemeend tot $a^{\frac{m}{n}}$ met *rationale exponenten* door eerst $a^{\frac{1}{n}}$ te definiëren, en dan $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. We vermelden kort ook $a^r$ met $r \in \mathbb{R}$.

**Definitie 4.2.1** ($n$-de machtswortel)**.**

De **macht** $a^{\frac{1}{n}}$, ook de $n$-**de machtswortel** $\sqrt[n]{a}$ of de $n$-**de wortel** van een *positief* reëel getal $a$ met $n \in \mathbb{N}_0$, is per definitie het uniek *positief* reëel getal $b$ waarvan de $n$-de macht gelijk is aan $a$:

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} \overset{\text{def}}{=} b \iff b^n = a$$

Vb: $2 = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} \iff 2^3 = 8$

We definiëren voor $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $m \in \mathbb{Z}$ ook

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Vb: $125^{\frac{2}{3}} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 5^2 = 25$

Als $n$ oneven is definieert dezelfde formule ook de $n$-de machtswortel van een *negatief* getal, namelijk als het unieke *negatieve* getal $b$ waarvan de $n$-de macht gelijk is aan $a$.

**Opmerking 4.2.1.**

(a) Voor $n = 2$ laat men de 2 in de wortel weg: $\sqrt{a} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

(b) Omdat $a^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$, is nu ook $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \in \mathbb{R}$ gedefinieerd, met $m \in \mathbb{Z}$.

(c) Pas op: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, want bv $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, terwijl $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2 \neq \sqrt{2}$.

(d) Deze definitie is enkel zinvol als een dergelijk positief reëel getal $b$ *bestaat* en *uniek* is. Precies om dat te garanderen moet de definitie voor *even* $n$ beperkt worden tot *positieve* $a$ en $b$. Inderdaad, voor negatieve $a$ *bestaat* er immers niet altijd een geschikte $b$, want er bestaat bv. geen $b \in \mathbb{R}$ zodat $b^2 = -2$. En als het getal $b$ niet beperkt wordt tot de *positieve* getallen, dan is dergelijke $b$ niet *uniek*, want bijvoorbeeld zowel $b = 2$ als $b = -2$ voldoen aan $b^2 = 4$.
Voor *oneven* machtswortels stelt dit probleem zich niet: $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ en $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$.

(e) Men kan ook $a^r$ definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$ (dus uitdrukkingen zoals $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$ en $\sqrt{7}^{\sqrt{\pi}}$). Dit is technisch enigszins subtiel en we geven hier geen exacte definitie. We zullen later reële exponenten nodig hebben bij het bestuderen van zogenaamde exponentiële functies zoals $x \mapsto 2^x$.

Ook voor rationale en reële exponenten (en dus voor wortels) gelden volgende bekende rekenregels:

**Eigenschap 4.2.1.** Voor $x, y > 0$ en $r, s \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{aligned} x^r x^s &= x^{r+s} && \text{(product met zelfde grondtal)} \\ (xy)^r &= x^r y^r && \text{(macht van product)} \\ (x^r)^s &= x^{rs} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$ax^r + bx^r = (a+b)x^r \qquad \text{(som van } \textit{gelijke} \text{ machten)}$$

Uit bovenstaande regels en de definities volgt ook

## 4.2 Machten en wortels

$$x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad 1^r = 1, \quad 0^r = 0 \ (r \neq 0)$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m} \qquad x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1}$$

en

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad \text{en} \quad a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x}$$

Het is dikwijls belangrijk te weten of twee uitdrukkingen met machten of wortels al dan niet aan elkaar gelijk zijn. Daarom worden dergelijke uitdrukkingen meestal als volgt vereenvoudigd. De procedure is eenvoudiger dan ze lijkt als je ze toepast op een voorbeeld.

**Algoritme 4.2.5** (Vereenvoudigen van wortelvormen en wortelvrij maken van de noemer)**.**

Om een vierkantswortel van de vorm $\sqrt{ax^n}$ $(a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z})$ te **vereenvoudigen**

(a) ontbind je $a$ in factoren

(b) haal je voor de *even* exponenten alle factoren uit de wortel

(c) haal je voor de *oneven* exponenten alle factoren behalve één uit de wortel

(d) behandel je daarbij exponenten van letters op dezelfde manier als die van getallen

Om van een breuk met een wortel in de noemer **de noemer wortelvrij** te maken

(a) vereenvoudig je indien mogelijk zowel de voorkomende wortelvormen als de breuk zelf

(b) vermenigvuldig je teller en noemer *met de wortel die voorkomt in de noemer*

(c) vereenvoudig je (opnieuw) zowel de voorkomende wortelvormen als de breuk zelf

**Voorbeeld 4.2.1.**

**1.** Vereenvoudig $\sqrt{200a^5}$.

**Uitwerking:** $\sqrt{200a^5} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2 \cdot a^5} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot a^4 \cdot a} = 2 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{2a} = 10a^2\sqrt{2a}$

**2.** Maak de noemer wortelvrij in $\sqrt{\frac{32}{12a}}$.

**Uitwerking:** $\sqrt{\frac{32}{12a}} = \sqrt{\frac{2^5}{2^2 \cdot 3a}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{3a}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3a}}{\sqrt{3a} \cdot \sqrt{3a}} = \frac{2\sqrt{2 \cdot 3a}}{3a} = \frac{2\sqrt{6a}}{3a}$

**Oefening 4.2.1.** Vereenvoudig volgende wortelvormen.

**1.** $-\sqrt{20} = \ldots\ldots$ **2.** $\sqrt{a^9} = \ldots\ldots$ **3.** $\sqrt{x^4 \cdot y^5} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

## 4.2 Machten en wortels

**Oefening 4.2.2.** Maak de noemer wortelvrij en vereenvoudig (met $b > 0$).

**1.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \ldots\ldots$

**2.** $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{5b^6}} = \ldots\ldots$

**3.** $\sqrt{\dfrac{32x^5y^4}{12x}} = \ldots\ldots$

**Oefening 4.2.3.** Vereenvoudig volgende uitdrukkingen (met $x, y \in \mathbb{R}_0^+$).

**1.** $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{64} = \ldots\ldots$

**2.** $\sqrt{x}\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = \ldots\ldots$

**3.** $\dfrac{4}{\sqrt{8}} = \ldots\ldots$

**4.** $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$

**5.** $\sqrt{48x^9y^4} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

# 4.3 Basisoefeningen machten

**Oefening 4.3.1.** Bereken

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^{\cdots\cdots}$
2. $(2^2)^3 = 2^{\cdots\cdots}$
3. $2^{(2^3)} = 2^{\cdots\cdots}$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^{\cdots\cdots}$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = \ldots\ldots^5$

**Oefening 4.3.2.** Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel $x, y, a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

1. $\dfrac{\sqrt{a}}{a^5} = \ldots\ldots$
2. $\left(x^6 y^8\right)^{-1/2} = \ldots\ldots$
3. $a^4 b \left(\dfrac{\sqrt{a^2 b^4}}{ab}\right)^3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

# 4.4 De logaritme

We kennen voor een gegeven grondtal $a$ en een gegeven exponent $r$ de *macht* $a^r$. Zo hoort bij grondtal 3 en exponent 2 de macht $3^2 = 9$ en bij grondtal 2 en exponent 3 de macht $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Bij *logaritmen* keren we de berekening om: we *vertrekken* van een gegeven grondtal $a$ en een gegeven macht $a^r$ en *zoeken* de *exponent* $r$ die hoort bij dat grondtal $a$ om die macht $a^r$ te bekomen. Als de macht geschreven is als $a^r$ kunnen we $r$ natuurlijk gewoon aflezen, maar als de macht is uitgerekend werkt dat niet meer. Zo zoeken we voor het grondtal 3 en het getal 9 de exponent $r$ zodat $3^r = 9$. Die is 2 want $3^{\mathbf{2}} = 9$. We noemen die exponent 2 de 3-logaritme van 9, en we noteren $\log_3 9 = 2$. We hebben dus:

$\log_3 9 = \mathbf{2}$ want $3^{\mathbf{2}} = 9$. Er geldt dus dat $3^{\log_3 9} = 9$ en $\log_3 3^2 = 2$.

$\log_2 8 = \mathbf{3}$ want $2^{\mathbf{3}} = 8$. Er geldt dus dat $2^{\log_2 8} = 8$ en $\log_2 2^3 = 3$.

**Definitie 4.4.1** (Logaritme)**.** De **logaritme met grondtal $a$ van $x$** of de **$a$-logaritme van $x$** is per definitie **de exponent $r$ waartoe men grondtal $a$ moet verheffen om $x$ als uitkomst te krijgen.**

We noteren die exponent $r$ als $\log_a x$. In symbolen wordt de definitie

$$\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$$

Vb: $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

of equivalent: $\log_a x$ is het unieke reële getal zodat $a^{\log_a x} = x$.

Deze definitie is enkel zinvol voor $a$ en $x$ positieve reële getallen met $a \neq 1$ (zie Opmerking **??**).

**Voorbeeld 4.4.1.** Je kan $\log_a x$ dus *direct aflezen* als je $x$ als een macht van $a$ kan schrijven:

1. $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
2. $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$
3. $\log 1000 = \log 10^3 = 3$
4. $\log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{-1} = -1$
5. $\log_4 4 = 1$
6. $\log_4 1 = 0$

**Opmerking 4.4.1.**

- In het secundair onderwijs gebruikt men dikwijls de notatie ${}^a\log x$, in de wetenschappen $\log_a x$.
- De definitie $\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$ lijkt erg op die van machtswortels $\sqrt[a]{x} = r \Longleftrightarrow r^a = x$, maar de rol van $a$ en $r$ is verwisseld: bij de wortel zoek je het *grondtal*, bij de logaritme de *exponent*.
- Net zoals wortels als $\sqrt{4}, \sqrt{25}$ en $\sqrt[3]{8}$ makkelijk te berekenen zijn terwijl je voor $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ of $\sqrt[3]{9}$ een rekentoestel nodig hebt, geldt voor logaritmen dat $\log_2 4, \log_5 25$ en $\log_2 8$ makkelijk te berekenen zijn, terwijl je voor $\log_3 8$ of $\log_5 30$ een rekentoestel nodig hebt.

**Opmerking 4.4.2.** Speciale grondtallen en argumenten waarvoor de logaritme niet bestaat:

| | | |
|---|---|---|
| $\log_1 5$ | bestaat niet: | er bestaat immers geen $r$ zodat $1^r = 5$, want $1^r$ is steeds 1. |
| $\log_0 5$ | bestaat niet: | er bestaat geen $r$ waarvoor $0^r = 5$, want $0^r$ is nul of ongedefinieerd. |
| $\log_5 0$ | bestaat niet: | er bestaat geen $r$ waarvoor $5^r = 0$, want $5^r$ is steeds strikt positief. |
| $\log_{-2} 5$ | bestaat niet: | er bestaat geen $r$ waarvoor $(-2)^r = 5$. Er bestaat zeker geen *natuurlijk* getal $r$ waarvoor $(-2)^r = 5$, en *rationale* getallen $r$ zijn problematisch omdat bijvoorbeeld $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$ niet bestaat. |
| $\log_5(-2)$ | bestaat niet: | er bestaat geen $r$ waarvoor $5^r = -2$, want $5^r$ is altijd positief. |

In de definitie van de logaritme $\log_a x$ moeten dus $a$ en $x$ inderdaad beperkt worden:

- het grondtal $a$ moet *strikt positief* zijn,

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.4 De logaritme

- het grondtal $a$ mag niet 1 zijn (want machten van 1 zijn altijd gelijk aan 1),
- het argument $x$ moet *strikt positief* zijn (want machten met een strikt positief grondtal $a$ zijn altijd strikt positief).

Het getal $\log_a x$ kan zelf *wel alle reële waarden aannemen*, en dus zowel negatief, nul als positief zijn.

Merk op dat de logaritme $\log_2 10$ wel bestaat, maar niet *exact* kan bepaald worden omdat je het getal 10 niet *exact* kan schrijven als een macht met grondtal 2. Omdat $2^3 < 10 < 2^4$ kunnen we wel besluiten dat $\log_2 10$ een waarde moet zijn tussen 3 en 4. Met een rekentoestel kunnen betere benaderende waarde worden gevonden. Zo is bijvoorbeeld $\log_2 10 \approx 3.3219$, afgerond op 4 decimalen.

In de praktijk komen twee grondtallen erg veel voor, en daarvoor is er telkens een speciale notatie:

**Definitie 4.4.2.**

De **tiendelige logaritme**, ook wel *Briggse logaritme* genoemd, is de logaritme met grondtal 10, en wordt per afspraak genoteerd zonder grondtal: $\log x \overset{\text{def}}{=} \log_{10} x$.

De **natuurlijke logaritme**, ook wel *Neperse logaritme* genoemd, is de logaritme met grondtal het **getal van Euler** $e \approx 2.718281$ en wordt genoteerd als $\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$.

De logaritme $\log_a x$ geeft de *grootte-orde* aan van $x$ in termen van $a$, namelijk hoeveel machten van $a$ er gaan in $x$. Voor de tiendelige logaritme gaat het dus om machten van 10, en (het gehele deel van) $\log x$ bepaalt het *aantal cijfers* van $x$: $\log 1000 = 3, \log 10^n = n$ en $3 < \log 1234 < 4$ en $5 < \log 123456 < 6$. Op dezelfde manier bepaalt voor informatici $\log_2 x$ het *aantal bits* dat nodig is om $x$ op te slaan.

De natuurlijke logaritme is ondermeer erg handig bij het berekenen van afgeleiden, en het gebruik van ln maakt dan allerlei formules veel eenvoudiger. De afkorting ln komt van het Latijnse 'logaritmus naturalis'.

Uit de definities volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

**Eigenschap 4.4.1** (Basisformules van de logaritme)**.**

Voor $x > 0$ en $a > 0$ met $a \neq 1$ geldt: $\log_a a^x = x$ en $a^{\log_a x} = x$

Voor $x = 0$ wordt dit: $\log_a 1 = 0$

Voor $x = 1$ wordt dit: $\log_a a = 1$.

Voor $a = 10$ wordt dit: $\log 10^x = x$ en $10^{\log x} = x$.

Voor $a = e = 2.7182\ldots$ wordt dit: $\ln e^x = x$ en $e^{\ln x} = x$.

**Oefening 4.4.1.** Bereken volgende logaritmen (zonder rekenmachine).

**1.** $\log_3 81 = \ldots\ldots$

**2.** $\log 100 = \ldots\ldots$

**3.** $\log 0.01 = \ldots\ldots$

**4.** $\log_2 64 = \ldots\ldots$

**5.** $\log_2 128 = \ldots\ldots$

**6.** $\log_2(4^7) = \ldots\ldots$

**7.** $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = \ldots\ldots$

**8.** $\log_9 3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

# 4.5 Basisoefeningen logaritmen

**Oefening 4.5.1.** Bereken indien mogelijk de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Indien de logaritme bestaat maar we deze niet exact kunnen berekenen, geef dan de grenzen aan (bv. $\log_3 10$ is een waarde tussen 2 en 3).

**1.** $\log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \ldots\ldots$

**2.** $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \ldots\ldots$

**3.** $\log_1 1$ : $\ldots\ldots$

**4.** $\log \frac{1}{1000} = \ldots\ldots$

**5.** $\ln \sqrt[3]{e^2} = \ldots\ldots$

**6.** $\log_6 1 = \ldots\ldots$

**7.** $\log_4 8 = \ldots\ldots$

**8.** $\log_5 10$ : $\ldots\ldots$

**9.** $\log_3(-3)^6 = \ldots\ldots$

**10.** $\log_{-3}(-3)^6$ : $\ldots\ldots$

**Oefening 4.5.2.** Bereken zonder rekenmachine.

**1.** $\log_2 64 = \ldots\ldots$

**2.** $\log_5 125 = \ldots\ldots$

**3.** $\log_2 \frac{1}{32} = \ldots\ldots$

**4.** $\log_6(36\sqrt{6}) = \ldots\ldots$

**5.** $\log 0,00001 = \ldots\ldots$

**6.** $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

# 4.6 Rekenregels voor logaritmen

Uit de rekenregels voor machten volgen enkele belangrijke rekenregels voor logaritmen.

Uit de formule $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ volgt door te stellen dat $a^r = x$ en $a^s = y$ de gelijkheid $x \cdot y = a^{r+s}$. Hiervan de $a$-logaritme nemen en opmerken dat $a^r = x$ hetzelfde betekent als $r = \log_a x$ levert

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a a^{r+s} = r + s = \log_a x + \log_a y$$

en dus:

**Eigenschap 4.6.1. Logaritme van een product**: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $(a, x, y \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1)$

In woorden: *de logaritme van een product is de som van de logaritmen.*
of: de logaritme zet een *product* om in een *som*.

**Voorbeeld 4.6.1.**

1. $\log 25 + \log 4 = \log(25 \cdot 4) = \log 100 = 2$
2. $\log_5 125 = \log_5(5 \cdot 25) = \log_5 5 + \log_5 25 = 1 + 2 = 3$
3. $\log_a x^2 = \log_a(x \cdot x) = \log_a x + \log_a x = 2 \log_a x$

Het laatste voorbeeld kan worden veralgemeend tot willekeurige machten: uit de formule $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ volgt door $a^r = x$ te stellen de gelijkheid $x^s = a^{r \cdot s}$. Van $x^s = a^{r \cdot s}$ de $a$-logaritmen nemen geeft

$$\log_a x^s = \log_a a^{r \cdot s} = s \cdot r = s \cdot \log_a x.$$

**Eigenschap 4.6.2. Logaritme van een macht:** $\log_a x^s = s \cdot \log_a x$ $(a, x \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1, s \in \mathbb{R})$

In woorden: *de logaritme zet een macht om in een product.*
of: de logaritme brengt *een exponent naar beneden* (of naar voor).

**Speciaal geval** $s = -1$: $\log_a x^{-1} = -\log_a x$

**Voorbeeld 4.6.2.** $\log_2 4^5 = 5 \log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10$ en $\log x^{1000} = 1000 \log x$

Het speciaal geval $\log_a x^{-1}$ geeft samen met de formule voor het product een formule voor het quotiënt:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x \cdot y^{-1}) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$$

**Eigenschap 4.6.3. Logaritme van een quotiënt:** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $(a, x, y \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1)$

In woorden: *de logaritme van een quotiënt is het verschil van de logaritmen.*
of: de logaritme zet een *quotiënt* om in een *verschil*.

**Voorbeeld 4.6.3.** $\log 500 - \log 5 = \log \frac{500}{5} = \log 100 = 2$

Stel dat je een getal $x$ hebt geschreven als een macht van $a$, dus $x = a^r$ *en* als een macht van $b$, dus $x = b^s$. Dan kan je onderzoeken of er een verband is tussen de exponenten $r$ en $s$. Welnu, de $a$-logaritme

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.6 Rekenregels voor logaritmen

nemen van de gelijkheid $x = b^s$ geeft samen met de equivalentie $x = b^s \iff s = \log_b x$ dat

$$\log_a x = \log_a b^s = s \cdot \log_a b = \log_b x \cdot \log_a b$$

**Eigenschap 4.6.4** (Verandering van grondtal).

**Verandering van grondtal:** $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ of $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$

**Speciaal geval** $x = a$: $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b} = (\log_a b)^{-1}$

Je kan de formule $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ lezen als: de $a$-logaritme van $x$ is een *herschaling* van de $b$-logaritme met een factor $\log_a b$. Of nog: de logaritmen met grondtal $a$ resp. $b$ zijn *evenredig*, met evenredigheidsfactor $\log_a b$

Ezelsbruggetje: je kan in $\log_a x$ formeel '$b \cdot \log_b$ inschuiven': $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ (met $b > 0$ willekeurig).

**Voorbeeld 4.6.4.**

1. $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{2}{3}$
2. $\dfrac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = 4$

**Waarschuwing 4.6.1.** Pas op voor volgende (te) veel gemaakte fouten:

~~$\log(x+y) = \log x + \log y$~~ want $\log(100+100) \neq \log 100 + \log 100$
omdat $\log 200 \neq 2 + 2 = 4 = \log 10000$

~~$\log(x+y) = \log x \cdot \log y$~~ want $\log(100+10) \neq \log 100 \cdot \log 10$
omdat $\log 110 \neq 2 \cdot 1 = 2 = \log 100$

~~$\log(x-y) = \dfrac{\log x}{\log y}$~~ want $\log(100-10) \neq \dfrac{\log 100}{\log 10}$
omdat $\log 90 \neq \dfrac{2}{1} = 2 = \log 100$

~~$(\log x)^n \neq n \cdot \log x$~~ want $(\log(10)^3 \neq 3 \cdot \log 10$
omdat $(\log 10)^3 = 1^3 = 1$ en $3 \cdot \log 10 = 3 \cdot 1 = 3$

In het algemeen kan je niet veel doen met de logaritme van een som of verschil. Er zijn enkel formules voor *logaritmen van* producten en quotiënten, en voor sommen of verschillen *van logaritmen*.

**Opmerking 4.6.1.** Eenvoudige rekentoestellen kennen soms enkel de functie 'log()' waarmee je wel $\log_{10}(25)$ kan berekenen, maar niet bijvoorbeeld $\log_2(25)$. Met behulp van de formule om van grondtal te veranderen bereken je $\log_2(25)$ dan toch als $\dfrac{\log 25}{\log 2}$.

Volgende voorbeeldoefeningen gebruiken telkens meerdere rekenregels om tot een oplossing te komen:

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.6 Rekenregels voor logaritmen

**Voorbeeld 4.6.5.** Schrijf de uitdrukking $2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z &= \log_3(x^2) - \log_3(y^3) + \log_3(z^{0.5}) \\ &= \log_3(x^2 z^{0.5}) - \log_3(y^3) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2 z^{0.5}}{y^3}\right) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2\sqrt{z}}{y^3}\right). \end{aligned}$$

Hierbij hebben we eerst de rekenregel voor machten gebruikt, daarna de rekenregel voor product en tenslotte de rekenregel voor quotiënt.

**Voorbeeld 4.6.6.** Schrijf de uitdrukking $\log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z &= \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + \log_{\frac{1}{5}}(z^2) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}(xz^2) - \log_{\frac{1}{5}}(yz) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz^2}{yz}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz}{y}\right). \end{aligned}$$

Opnieuw hebben we gebruik gemaakt van de rekenregel voor machten, de rekenregel voor product en de rekenregel voor quotiënt, in deze volgorde, en tenslotte de breuk binnen de logaritme vereenvoudigd.

**Voorbeeld 4.6.7.** Bereken de waarde van $\log_2 3 - \log_2 12$ zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Dat kan met behulp van de quotiëntregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 = \log_2\left(\frac{3}{12}\right) &= \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \log_2(2^{-2}) = -2. \end{aligned}$$

Een alternatieve manier gebruikt de productregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 = \log_2 3 - \log_2(3 \cdot 4) &= \log_2 3 - \log_2 3 - \log_2 4 \\ &= -\log_2(2^2) = -2. \end{aligned}$$

**Voorbeeld 4.6.8.** Als gegeven is dat $\log x = 2.4$ en dat $\log y = -1.1$, bereken dan $\log\left(\sqrt{x} \cdot y^3\right)$.

Dit kan gebeuren op twee manieren.

Eerst gebruiken we de betekenis van de logaritme om $x$ en $y$ te bepalen: $x = 10^{2.4}$ en $y = 10^{-1.1}$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.6 Rekenregels voor logaritmen

Dan geldt:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(\sqrt{10^{2.4}}\cdot(10^{-1.1})^3\right)\\ &= \log\left((10^{2.4/2})\cdot(10^{-1.1\cdot 3})\right)\\ &= \log\left(10^{1.2}\cdot 10^{-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{1.2-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{-2.1}\right) = -2.1.\end{aligned}$$

Anderzijds kunnen we gebruik maken van de rekenregels van logaritmen om de gegeven formule te herschrijven als een uitdrukking in $\log x$ and $\log y$:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(x^{0.5}\cdot y^3\right)\\ &= \log(x^{0.5}) + \log(y^3)\\ &= 0.5\cdot\log x + 3\cdot\log y\\ &= 0.5\cdot 2.4 + 3\cdot(-1.1) = 1.2 - 3.3 = -2.1.\end{aligned}$$

**Voorbeeld 4.6.9.** Herschrijf de uitdrukking $\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}}$ in functie van $\log_a x$, $\log_a y$ en $\log_a z$, weer door gebruik te maken van de rekenregels:

$$\begin{aligned}\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}} &= \log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)^{0.5}\\ &= 0.5\log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a(yz^2) - \log_a(ax)\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a y + \log_a(z^2) - \log_a a - \log_a x\right)\\ &= 0.5\cdot\left(-\log_a x + \log_a y + 2\log_a z - 1\right).\end{aligned}$$

We schrijven eerst de vierkantswortel als een macht, passen dan de rekenregel voor machten toe, vervolgens de regel voor quotiënt, de regel voor product en nogmaals de regel voor macht.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

# 4.7 Oefeningen rekenregels logaritmen

**Oefening 4.7.1.** Schrijf volgende uitdrukkingen in functie van $\log a$, $\log b$ en $\log c$ (met $a, b, c > 0$).

**1.** $\log \dfrac{a}{b^4} = \ldots\ldots$

**2.** $\log\left(c^3\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right) = \ldots\ldots$

**3.** $\log \dfrac{a^4bc}{\sqrt{bc^2}} = \ldots\ldots$

**Oefening 4.7.2.** Schrijf elke uitdrukking in functie van $\log x$, $\log(x-5)$ en $\log(x+1)$.

**1.** $\log \dfrac{x(x+1)}{x-5} = \ldots\ldots$

**2.** $\log\left((x+1)^2\sqrt{x-5}\right) = \ldots\ldots$

**3.** $\log\sqrt{\dfrac{x-5}{x^3(x+1)}} = \ldots\ldots$

**4.** $\log \dfrac{1}{(x+1)^2} = \ldots\ldots$

**Oefening 4.7.3.** Schrijf als één logaritme. $(x > 0, y > 0, z > 0)$

**1.** $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log(xy^2) + 5 \cdot \log y = \log \ldots\ldots$

**2.** $\dfrac{1}{2} \cdot \log_3\left(\dfrac{y}{x}\right) - \log_3\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \log_3 \ldots\ldots$

**3.** $\log_5(xy) - \log_5(yz) + \log_5(zx) = \log_5 \ldots\ldots$

**Oefening 4.7.4.** Schrijf elke uitdrukking als één enkele logaritme.

**1.** $\log(x+1) - \log x^2 + \dfrac{1}{2}\log(x-3) = \ldots\ldots$

**2.** $3 - \log x = \ldots\ldots$

**3.** $5\log(x-1) - \dfrac{1}{2}\log(x+3) = \ldots\ldots$

**Oefening 4.7.5.** Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Neem zeker pen en papier bij de hand, want je kan ze niet allemaal uit je hoofd uitrekenen.

**1.** $\log 25 + \log 40 = \ldots\ldots$

**2.** $\log_3 36 - \log_3 4 = \ldots\ldots$

**3.** $\log_9 25 - \log_3 15 = \ldots\ldots$

**4.** $\ln 108 - 2 \cdot \ln 6 + \ln\left(\dfrac{e}{3}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.7 Oefeningen rekenregels logaritmen

**Oefening 4.7.6.** Bereken zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

**1.** $e^{3\ln 2} = \ldots\ldots$

**2.** $4^{\log_2 3} = \ldots\ldots$

**3.** $27^{\log_3 2} = \ldots\ldots$

**Oefening 4.7.7.** Schrijf als één logaritme. Je mag het grondtal zelf kiezen. $(x > 0, y > 0)$

**1.** $\log_3 x + \log_9 x + \log_{\frac{1}{3}} x = \ldots\ldots$

**2.** $\log_5(4xy) - \log_{\frac{1}{5}}(4xy) = \ldots\ldots$

**Oefening 4.7.8.**

**1.** Schrijf onderstaande uitdrukking in functie van $\log(k-1)$, $\log k$ en $\log(k+1)$.

$$\log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ldots\ldots$$

**Oefening 4.7.9.**

**1.** Stel dat $y$ impliciet gegeven is als functie van $t$ door volgende formule:

$$2t = \frac{1}{3}[\ln(y-2) - \ln(y-5)]$$

Toon aan dat $y = \dfrac{5 - 2e^{-6t}}{1 - e^{-6t}}$

**Oefening 4.7.10.**

**1.** Toon aan dat $\log\dfrac{a}{b} - \log\dfrac{c}{d} = \log\dfrac{a}{c} - \log\dfrac{b}{d}$ (met $a, b, c, d > 0$).

**2.** Toon aan dat $\log\dfrac{2}{a} - \log\dfrac{2}{b} = \log\dfrac{b}{a}$ (met $a, b > 0$).

CC BY-NC-SA 4.0

# 4.8 Exponentiële functies

Aan twee positieve getallen $a$ en $r$ kunnen we de **macht** $a^r$ associëren, met **grondtal** $a$ en **exponent** $r$. Door nu in $a^r$ ofwel $a$, ofwel $r$ constant te houden en het andere getal in waarde te laten variëren krijgen we twee soorten *functies*, waarbij we de *variërende* grootheid met de letter $x$ aanduiden:

- een *vaste* waarde $r$ voor de exponent en een *variërend grondtal* $x$ (met $x$ in de plaats van $a$).
  Voor $r = 2$ krijgen we dan de *kwadraatfunctie* $x \mapsto x^2$.
  Voor $r = -1$ krijgen we $x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$, en voor $r = 1/2$ wordt dat $x \mapsto x^{1/2} = \sqrt{x}$.
  In het algemeen bekomen we een **machtsfunctie** met *exponent* $r$: $x \mapsto x^r$.
- een *vaste* waarde $a$ voor het grondtal en een *variërende exponent* $x$ (met $x$ in de plaats van $r$).
  Voor $a = 2$ krijgen we dan de functie $x \mapsto 2^x$.
  Deze functie noemen we een **exponentiële functie**, en we noteren ze ook als $\exp_2$:
  $$\exp_2 : x \mapsto 2^x$$
  Voor $a = 10$ krijgen we bijvoorbeeld $\exp_{10} : x \mapsto 10^x$.
  In het algemeen bekomen we een **exponentiële functie** $\exp_a$ met *grondtal* $a$: $\exp_a : x \mapsto a^x$.

**Definitie 4.8.1** (Exponentiële functie)**.**
De **exponentiële functie met grondtal** $a$ (met $a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd $\exp_a$, is de reële functie
$$\exp_a : x \mapsto a^x$$
waarbij $x$ alle reële waarden mag aannemen.

**Opmerking 4.8.1.**

- In de praktijk worden zowel de notaties $a^x$ als $\exp_a(x)$ gebruikt voor exponentiële functies.
- De haakjes rond het argument van $\exp_a$ worden dikwijls weggelaten: $\exp_a x = \exp_a(x) = a^x$.
- Het grondtal $a$ van een exponentiële functie moet worden beperkt:
  - $a$ mag niet negatief zijn, want dat geeft problemen voor *niet-gehele* waarden van de exponent $x$ (bv. $(-3)^{\frac{1}{2}}$)
  - $a$ mag niet gelijk zijn aan $0$, want dat geeft problemen voor *negatieve* exponenten $x$ (bv. $0^{-1} = 1/0$)
  - $a$ mag niet gelijk zijn aan $1$, want $1^x = 1$ voor alle $x$, en de functie $f : x \mapsto 1^x = 1$ is een *constante functie* met waarde $1$. Om technische redenen is het beter die functie niet te beschouwen als een exponentiële functie.

We bestuderen nu de *grafiek* van een exponentiële functie $\exp_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen $a$ groter dan $1$ en $a$ tussen $0$ en $1$.

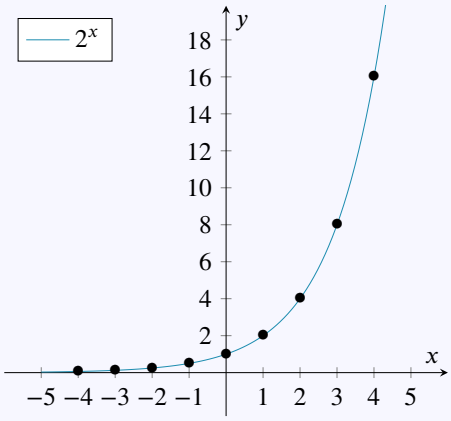
**Voorbeeld 4.8.1** (Het geval $a > 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_2$)**.**
We nemen als voorbeeld $a = 2$, en schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\exp_2 : x \mapsto 2^x$ met grondtal $2$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.8 Exponentiële functies

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = 2^x$ | $0.0625$ | $0.125$ | $0.25$ | $0.5$ | $1$ | $2$ | $4$ | $8$ | $16$ |

Dit levert een aantal punten op op de gezochte grafiek, namelijk de bolletjes op de figuur. Met een rekentoestel kunnen we ook functiewaarden berekenen voor niet-gehele waarden van $x$, bv. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4142$. Op die manier krijgen we een vrij precies beeld van de grafiek:

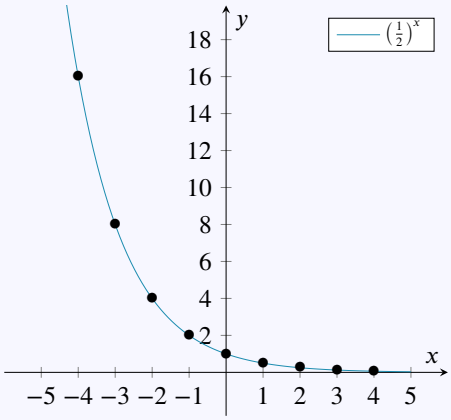



**Voorbeeld 4.8.2** (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_{\frac{1}{2}}$).

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$, en schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten op de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ | $16$ | $8$ | $4$ | $2$ | $1$ | $0.5$ | $0.25$ | $0.125$ | $0.0625$ |

Dit levert weer een aantal punten op op de grafiek. Met een rekentoestel kunnen we opnieuw functiewaarden voor niet-gehele waarden van $x$ berekenen, bv. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$. Op die manier krijgen we weer een vrij precies beeld van de grafiek:




CC BY-NC-SA 4.0

## 4.8 Exponentiële functies

Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = \frac{1}{2}$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* exponentiële functies:

**Eigenschap 4.8.1** (Eigenschappen van exponentiële functies).

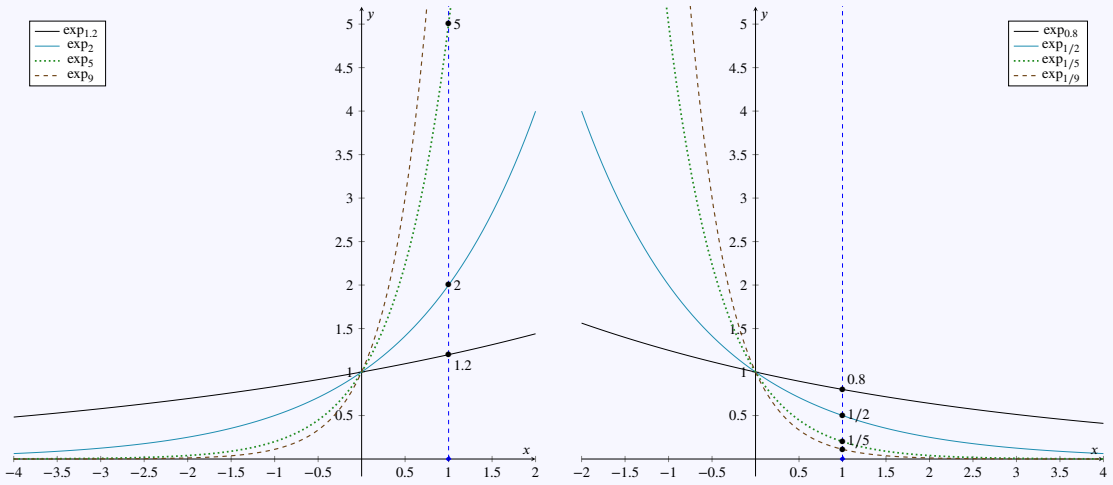
(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff a^x < a^y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff a^x > a^y$
(3) Het **domein** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$: $a^x$ is gedefinieerd voor alle reële getallen $x$
(4) Het **beeld** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: $a^x$ kan alleen strikt positieve waarden aannemen

De grafiek van $\exp_a$
(5) snijdt **de $y$-as** in het punt $(0,1)$: $a^0 = 1$
(6) snijdt **de $x$-as** niet: $a^x$ is nooit gelijk aan $0$
(7) snijdt **de rechte $x = 1$** in het punt $(1,a)$: $a^1 = a$

Omdat $\mathbb{R}$ het domein is van $\exp_a$ en $\mathbb{R}_0^+$ het beeld, is het volledige functievoorschrift

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto a^x.$$

**Voorbeeld 4.8.3** (Voorbeelden van exponentiële functies met verschillende grondtallen).




Omdat $\exp_a(0) = a^0 = 1$ gaan alle grafieken door het punt $(0,1)$, en omdat $\exp_a(1) = a^1 = a$ snijdt elke grafiek de verticale rechte $x = 1$ in het punt $(1,a)$.

In het geval $a > 1$ worden de functiewaarden willekeurig klein voor erg negatieve $x$. Als $0 < a < 1$ worden de functiewaarden willekeurig klein zodra $x$ voldoende groot is. Het begrip *asymptoot* dat we later zullen definiëren beschrijft dit fenomeen meer exact.

We weten nu voor een *gegeven grondtal* $a$ hoe de *grafiek* van $\exp_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal $a$, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$. Het geval $a = 1$ levert de constante functie $x \mapsto 1$ en is het grensgeval tussen dalende functies voor $a < 1$ en stijgende functies voor $a > 1$.

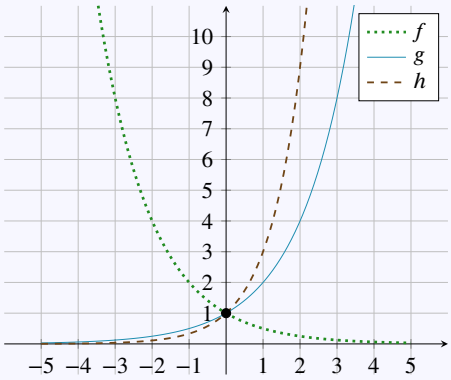
Stel dat we omgekeerd voor een *gegeven grafiek* van een exponentiële functie willen weten wat het *grondtal* is. Het stijgen of dalen van de grafiek bepaalt al onmiddellijk of het grondtal tussen $0$ en $1$ ligt dan wel groter is dan $1$. Maar er is meer: omdat $\exp_a(1) = a^1 = a$, is het grondtal $a$ gelijk aan de $y$-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de verticale rechte $x = 1$ (i.e. door $(1,0)$). Zelfs als we de *exacte* waarde niet kunnen aflezen op de grafiek, is minstens een goede schatting meestal wel mogelijk.

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.8 Exponentiële functies

**Voorbeeld 4.8.4** (Onderscheiden van exponentiële functies)**.**

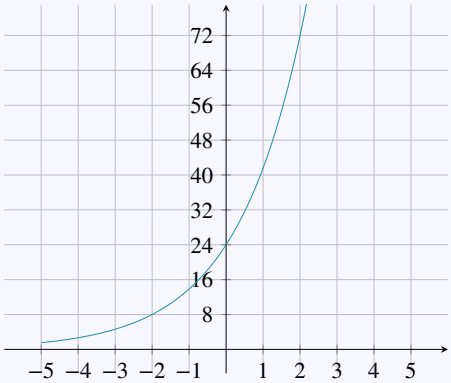
Hieronder worden de grafieken geschetst van drie functies $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \mapsto 2^x$ en $x \mapsto 3^x$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.




We kunnen eerst de grafieken onderscheiden op grond van hun vorm. De grafieken van $g$ en $h$ zijn stijgend, hun grondtal is dus groter dan 1. De grafiek van $f$ is dalend, dus is dat grondtal kleiner dan 1. Daarmee is het functievoorschrift van $f$ gevonden, want er is maar één keuzemogelijkheid met $a < 1$, namelijk $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
Om de grafieken van $g$ en $h$ te onderscheiden, kijken we naar de $y$-waarde voor $x = 1$: $g(1) = 2$ en $h(1) = 3$. $h$ is dus de functie $x \mapsto 3^x$ en $g$ is de functie $x \mapsto 2^x$.
Je kan ook redeneren dat 3 groter is dan 2 waardoor de functie $x \mapsto 3^x$ sneller stijgt dan de functie $x \mapsto 2^x$ en dat daarom $h$ bij $x \mapsto 3^x$ moet horen.

**Voorbeeld 4.8.5** (Bepalen functievoorschrift)**.**

Stel dat we weten dat onderstaande tekening de grafiek is van een functie $f(x) = ba^x$, met $a, b$ reële getallen. De punten $(-2, 8)$ en $(0, 24)$ behoren tot de grafiek. We willen het functievoorschrift bepalen, dus $a$ en $b$ vinden.



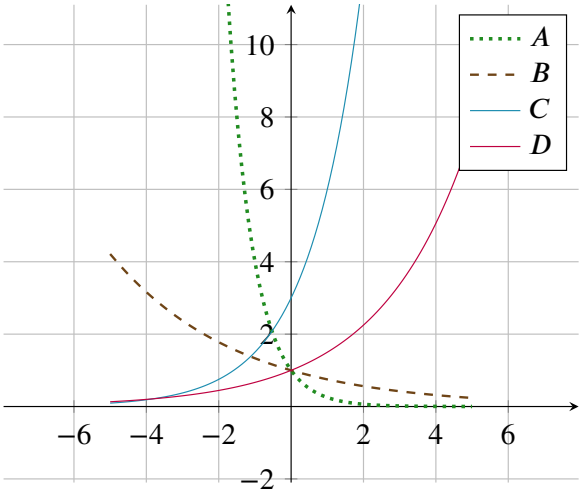

We weten dat $f(0) = 24$ en dat $f(-2) = 8$. Uit $24 = f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1$ volgt dat $b = 24$. Hiermee vinden we dan dat $f(-2) = 24 \cdot a^{-2} = 8$, dus dat $a^2 = 3$ of $a = \sqrt{3}$.

Merk op dat $a = -\sqrt{3}$ onmogelijk is, het grondtal $a$ van een exponentiële functie moet positief zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.8 Exponentiële functies

**Oefening 4.8.1.** Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?




1. $x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$ : | A | B | C | D |
2. $x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x$ : | A | B | C | D |
3. $x \mapsto 3 \cdot 2^x$: | A | B | C | D |
4. $x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)^x$ : | A | B | C | D |

**Oefening 4.8.2.**

1. Als $a > 1$, dan is $\exp_a$ een | stijgende | dalende | niet (altijd) gedefinieerde | functie.
2. Als $0 < a < 1$, dan is $\exp_a$ een | stijgende | dalende | niet (altijd) gedefinieerde | functie.
3. Als $\exp_a$ een dalende functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.
4. Als $\exp_a$ een stijgende functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.

Voor grondtal $a$ gelijk aan de specifieke waarde $e = 2.7182818\ldots$ verkrijgen we een veel voorkomende exponentiële functie $x \mapsto e^x$, die we meestal *de* exponentiële functie noemen, en korter noteren als exp:

**Definitie 4.8.2.** ***De* exponentiële functie** is de functie

$$\exp : x \mapsto e^x$$

met grondtal $e = 2.71\ldots$ (getal van Euler) (en ze wordt dus genoteerd *zonder subscript* $e$).

Door een positief getal $a$ te schrijven als $e^{\ln a}$ wordt *elke* macht *een macht van* $e$:

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$$

en zo wordt een *willekeurige* exponentiële functie een *herschaling* van *de* exponentiële functie $x \mapsto e^x$:

**Eigenschap 4.8.2.** Elke exponentiële functie $x \mapsto a^x$ kan geschreven worden als $x \mapsto e^{kx}$ met $k = \ln a$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.8 Exponentiële functies

**Voorbeeld 4.8.6.** De functie $x \mapsto 3^x$ is gelijk aan de functie $x \mapsto e^{\ln 3\, x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

# 4.9 Logaritmische functies

Door in de uitdrukking voor de logaritme $\log_a b$ het grondtal $a$ constant te houden en het getal $b$ te laten variëren, bekomen we een *functie*, namelijk een *logaritmische functie*:

**Definitie 4.9.1** (Logaritmische functie)**.**

De **logaritmische functie met grondtal** $a$ ($a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd als $\log_a$, is de reële functie

$$\log_a : x \mapsto \log_a x$$

waarbij $x$ enkel *strikt positieve waarden* mag aannemen.

**Opmerking 4.9.1.** Bij de invoering van de logaritme $\log_a b$ hebben we de noodzaak besproken om bovenstaande beperkingen op te leggen aan het grondtal $a$ en het argument $x$.

De haakjes rond het argument van de functie $\log_a$ worden dikwijls weggelaten: $\log_a x = \log_a(x)$.

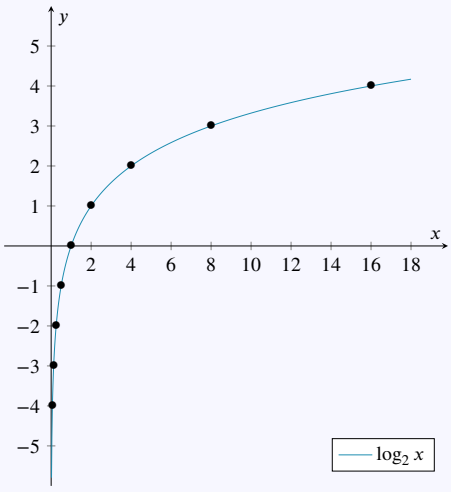
We bestuderen nu de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen $a$ groter dan 1 en $a$ tussen 0 en 1.

**Voorbeeld 4.9.1** (Het geval $a > 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_2$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_2 : x \mapsto \log_2(x)$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. Het ligt voor de hand om voor de $x$-waarden machten van 2 te kiezen, omdat daarvoor de 2-logaritme gemakkelijk te bepalen is.

| $x$ | 0.0625 | 0.125 | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \log_2(x)$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Dit levert voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:




**Voorbeeld 4.9.2** (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2}(x)$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2} : x \mapsto \log_{1/2}(x)$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. We kunnen dezelfde

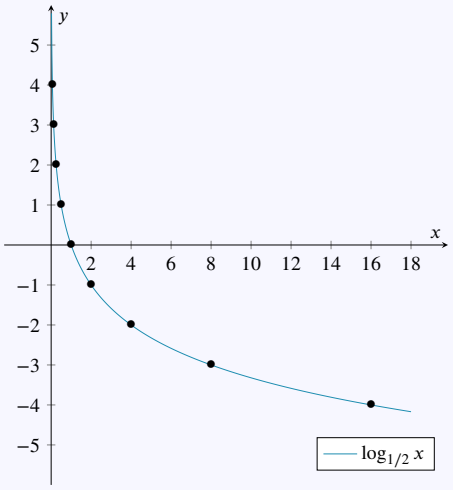
CC BY-NC-SA 4.0

## 4.9 Logaritmische functies

tabel hergebruiken:

| $x$ | 0.0625 | 0.125 | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \log_{1/2}(x)$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ |

Dit levert opnieuw voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:




Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = 1/2$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* logaritmische functies:

**Eigenschap 4.9.1** (Eigenschappen van logaritmische functies)**.**

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff \log_a x < \log_a y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff \log_a x > \log_a y$
(3) Het **domein** van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: de functiewaarde $\log_a x$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$
(4) Het **beeld** van $\log_a$ is $\mathbb{R}$: de functiewaarde $\log_a x$ kan alle reële waarden aannemen

De grafiek van $\log_a$
(5) snijdt **de $x$-as** in het punt $(1, 0)$: $\log_a 1 = 0$
(6) snijdt **de $y$-as** niet: voor $x = 0$ is $\log_a x$ niet gedefinieerd
(7) snijdt **de rechte $y = 1$** in het punt $(a, 1)$: $\log_a(a) = 1$

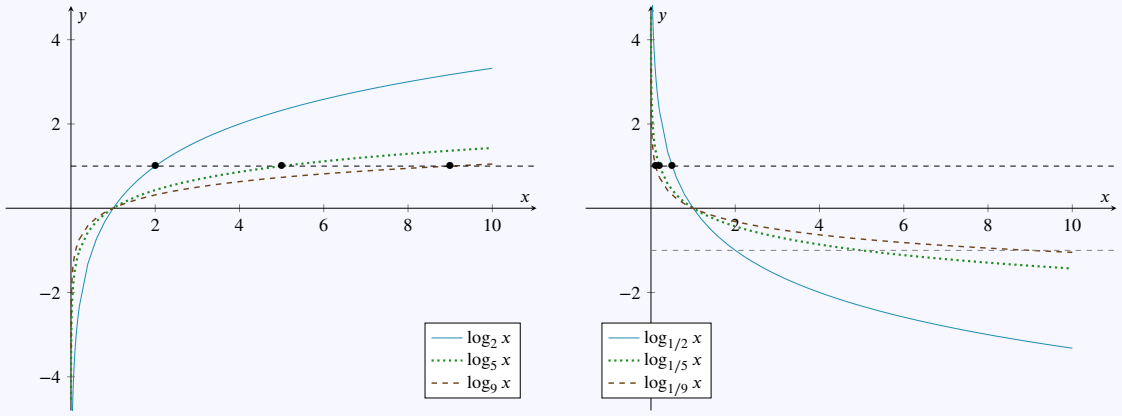
Omdat $\mathbb{R}_0^+$ het domein is van $\log_a$ en $\mathbb{R}$ het beeld, is het volledige functievoorschrift

$$\log_a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a x.$$

**Voorbeeld 4.9.3** (Voorbeelden van logaritmische functies met verschillende grondtallen)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.9 Logaritmische functies




De bovenstaande grafieken tonen aan dat voor grondtal $a > 1$ en $x$ zeer klein de grafiek naar $-\infty$ gaat. Indien het grondtal $0 < a < 1$ is, dan zal voor $x$ zeer klein de grafiek naar $+\infty$ gaan. In een latere module zal de terminologie van asymptoten ingevoerd worden, wat ons toelaat om dit meer exact te bespreken.

**Definitie 4.9.2.** De **natuurlijke logaritme** is de functie

$$\ln : x \mapsto \ln x$$

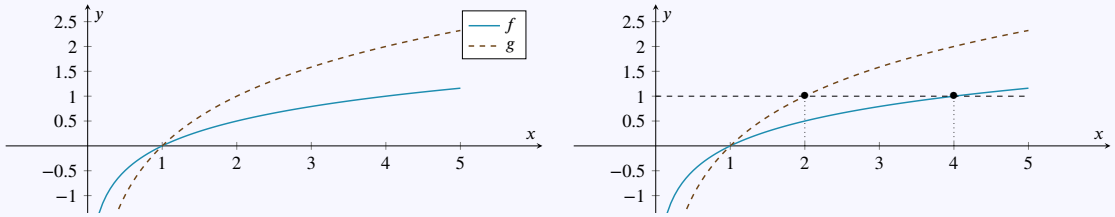
waarbij $\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$ met $e = 2.71\ldots$ (getal van Euler).

We weten nu voor een *gegeven grondtal* $a$ hoe de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal $a$, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$.

Stel dat we omgekeerd voor een *gegeven grafiek* van een logaritmische functie willen weten wat het *grondtal* is. Het stijgen of dalen van de grafiek bepaalt al onmiddellijk of het grondtal tussen 0 en 1 ligt dan wel groter is dan 1. Om de precieze waarde van $a$ te vinden volstaat het te zoeken naar **de waarde van $x$ die een functiewaarde 1 geeft:** immers, als $\log_a x = 1$, dan $x = a^1 = a$. We zoeken dus de $x$-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de horizontale rechte $y = 1$. Ook als de grafiek niet gedetailleerd genoeg is om de exacte waarde van $a$ terug te vinden, blijft een goede schatting wel mogelijk op deze manier.

**Voorbeeld 4.9.4** (Aflezen grondtal van grafiek)**.**

Hieronder worden de grafieken geschetst van de twee functies $x \mapsto \log_4(x)$ en $x \mapsto \log_2(x)$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.

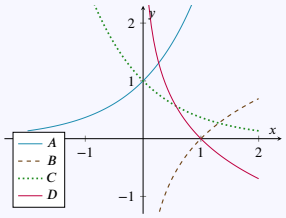



Omdat beide grondtallen groter zijn dan 1, kunnen we beide grafieken niet onderscheiden op grond van hun vorm. We weten echter dat het grondtal terug te vinden is als de $x$-waarde waarvoor de functiewaarde gelijk is aan 1. We tekenen daarom de horizontale rechte $y = 1$ en kijken waar deze de twee grafieken snijdt. De $x$-coördinaat van het snijpunt komt overeen met het grondtal. Het blijkt dat $f$ de grafiek is van $x \mapsto \log_4(x)$ en $g$ de grafiek van $x \mapsto \log_2(x)$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 4.9 Logaritmische functies

**Voorbeeld 4.9.5.** Welke grafiek hoort bij de functie $x \mapsto \ln(x)$?



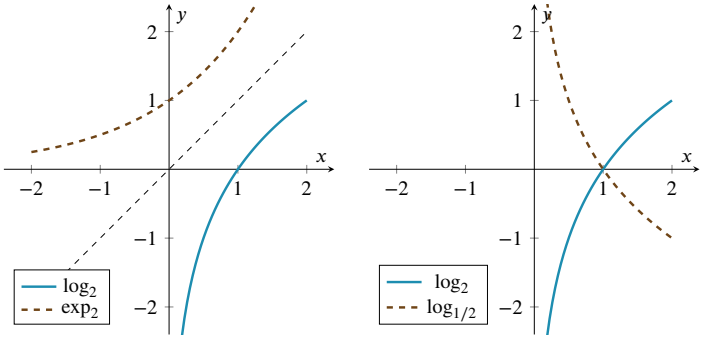

Deze vraag kunnen we beantwoorden louter op basis van de vorm van de grafieken. Omdat $x \mapsto \ln(x)$ een logaritmische functie is, is deze enkel gedefinieerd voor strikt positieve waarden van $x$. Omdat het grondtal $e > 1$, moet de grafiek stijgend zijn. Enkel grafiek $\boldsymbol{B}$ voldoet hieraan.

Als je in de formules $\log_a a^x = x$ en $a^{\log_a x}$ de machten schrijft met de $\exp_a$ krijg je volgende eigenschap:

**Eigenschap 4.9.2.** De functies $\log_a$ en $\exp_a$ zijn elkaars *inverse*:

$$\log_a(\exp_a x) = x \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\exp_a(\log_a x) = x \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

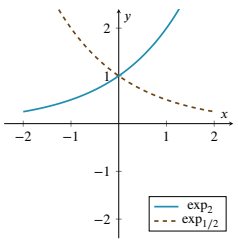
Als inverse functies zijn de grafieken elkaars *spiegelbeeld ten opzichte van de eerste bissectrice*.




Uit de formule voor verandering van grondtal $\log_{1/a} x = \dfrac{\log_a x}{\log_a 1/a} = \dfrac{\log_a x}{-1} = -\log_a x$ volgt:

**Eigenschap 4.9.3.** De functies $\log_a$ en $\log_{1/a}$ zijn elkaars *tegengestelde*, en hun grafieken zijn dus elkaars *spiegelbeeld ten opzichte van de x-as*.

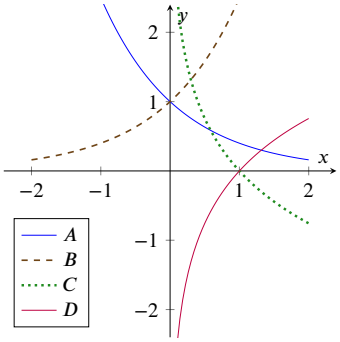
Merk op dat iets gelijkaardigs geldt voor de exponentiële functie: $\exp_{1/a}(x) = (1/a)^x = a^{-x} = \exp_a(-x)$, en dus heeft $\exp_{1/a}$ in $x$ dezelfde waarde als $\exp_a$ in $-x$, en dus zijn de grafieken van $\exp_a$ en $\exp_{1/a}$ onderling *gespiegeld ten opzichte van de y-as*:




CC BY-NC-SA 4.0

## 4.9 Logaritmische functies

**Oefening 4.9.1.** Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?




1. $x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x$: A B C D
2. $x \mapsto \log_{2/5}(x)$: A B C D
3. $x \mapsto \log_{5/2}(x)$: A B C D
4. $x \mapsto \left(\frac{5}{2}\right)^x$: A B C D

**Opmerking 4.9.2** (Eigenschappen logaritmische functies)**.**

De rekenregels voor logaritmen leveren soms extra eigenschappen op van logaritmische functies. Zo kan je de op het eerste zicht tamelijk ingewikkelde functie $x \mapsto \log_4(2^x)$ herschrijven als

$$\log_4(2^x) = x \cdot \log_4(2) = x \cdot \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = x/2.$$

en vaststellen dat $\log_4(2^x)$ gewoon de lineaire functie $x \mapsto \frac{1}{2}x$ is.

**Oefening 4.9.2.** Herschrijf volgende uitdrukkingen zonder exponentiële of logaritmische functies:

1. $4^{\log_2(x)} = \ldots\ldots$
2. $27^{\log_3(x)} = \ldots\ldots$

**Voorbeeld 4.9.6** (Domein logaritmische functie)**.**

Bepaal het domein van de functie $x \mapsto \log_3\left(\frac{3}{4-x}\right)$. Bepaal dus alle mogelijke reële waarden van $x$ waarvoor het functievoorschrift geldig is.

- De noemer van de breuk binnen de logaritme mag niet nul mag zijn: $4 - x \neq 0$ en dus $x \neq 4$.
- Een logaritme kan enkel berekend worden voor een strikt positief getal, en dus moet $\frac{3}{4-x} > 0$. Omdat de teller positief is, moet ook de noemer dat dus zijn: $4 - x > 0$ of $x < 4$.

Alleen als aan deze twee voorwaarden voldaan is, kan de functiewaarde bepaald worden.

Het domein van deze functie is dus het (oneindige) interval $]-\infty, 4[$.

**Oefening 4.9.3.** Bepaal het domein van de functie $x \mapsto \ln(\sqrt{2x} - 4)$: $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Module 5
# Goniometrie

(Versie 2026/08/25H.36)

# 5.1 Intro Goniometrie

Goniometrie (of driehoeksmeting) is het deel van de wiskunde dat zich bezighoudt met de studie van hoeken en driehoeken.

De natuurlijke getallen zijn de bouwstenen van het 'tellen'. Deze worden uitgebreid tot gehele getallen, rationale getallen en reële getallen. In de meetkunde zijn de bouwstenen punten en rechten. We bekomen een voor de hand liggende uitbreiding door twee halfrechten uit hetzelfde punt te bestuderen: dergelijke constructie vormt een *hoek*.

Om dergelijke hoeken te bestuderen voeren we het begrip *georiënteerde hoek* in en leren we hoeken *meten* in *radialen* en aflezen op de *goniometrische cirkel*. Dat leidt tot de definitie van sinus, cosinus en tangens gevolgd door een collectie eigenschappen en formules.

We zullen die sinus, cosinus en tangens ook als zogenaamde *goniometrische functies* bestuderen.

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.2 Goniometrische cirkel

Hoeken worden traditioneel *gemeten in (boog)graden*, waarbij een rechte hoek $90°$ is, een gestrekte hoek $180°$ en de nulhoek $0°$ of $360°$. Het maatgetal van een georiënteerde hoek is daarbij slechts bepaald 'op $360°$ na': per afspraak zijn $20°$, $20° + 360° = 380°$, $20° + 720° = 740°$ en $20° - 360° = -340°$ allemaal maatgetallen van *dezelfde georiënteerde hoek*.

De keuze voor (boog)graden, die onderverdeeld zijn in (boog)minuten en (boog)seconden is historisch gemotiveerd, en gebaseerd op een zestigtallig talstelsel. Je kan het vergelijken met het meten van lengtes in mijl, el of voet. Er is een meer natuurlijke manier om hoeken te meten, die eigenlijk zelfs geen willekeurige keuze van een nieuwe eenheid vraagt. We zullen hiervoor een hoek bekijken op de goniometrische cirkel.

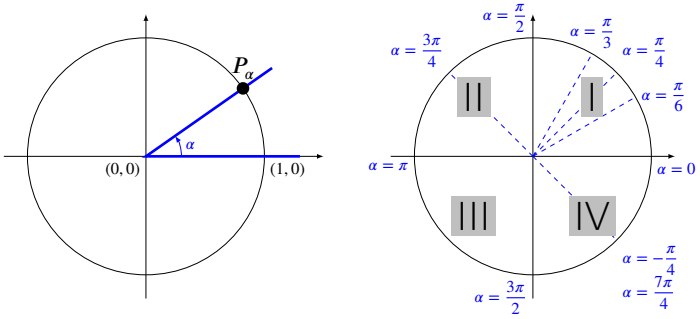
Door verschuiven en draaien (maar niet spiegelen) kan je het hoekpunt van een georiënteerde hoek in de oorsprong van het vlak leggen, en het eerste been op de positieve $x$-as. Dat leidt tot volgende definities:

**Definitie 5.2.1.**

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong.

Met elke georiënteerde hoek $\alpha$ komt een uniek **beeldpunt** $P_\alpha$ van de goniometrische cirkel overeen door het hoekpunt van $\alpha$ te verschuiven naar de oorsprong, het eerste been op de positieve $x$-as te leggen en het unieke snijpunt van het tweede been met de goniometrische cirkel $P_\alpha$ te noemen. Omgekeerd bepaalt elk punt $P_\alpha$ van de goniometrische cirkel een georiënteerde hoek $\alpha$.

De goniometrische cirkel wordt verdeeld in vier **kwadranten**, die vanaf rechtsboven tegen de klok in genummerd worden met Romeinse cijfers I, II, III, IV zoals op de figuur hieronder.




*Hoeken* komen dus overeen met *punten van de goniometrische cirkel* en in de praktijk wordt meestal geen onderscheid gemaakt tussen het punt $P_\alpha$ en de hoek $\alpha$.

Omdat de omtrek van een cirkel met straal één gelijk is aan $2\pi$, ligt het voor de hand om een hoek die éénmaal ronddraait maatgetal $2\pi$ te geven; een 'halve draai', dus een gestrekte hoek heeft dan maat $\pi$, en de helft daarvan, dus een rechte hoek, heeft maatgetal $\pi/2$. Deze manier van hoeken meten noemt men 'meten in radialen'. Op bovenstaande figuur zijn enkele hoeken gemeten in radialen aangeduid.

Het blijkt wiskundig veel handiger hoeken te meten in *radialen* dan in *graden*. De formules voor afgeleiden van sinus en cosinus werken bijvoorbeeld enkel als de hoeken worden gemeten in radialen.

Het maatgetal van een georiënteerde hoek is slechts bepaald 'op $2\pi$ na', dus per afspraak zijn $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{-11\pi}{6}$ allemaal maatgetallen van dezelfde hoek.

We schrijven dikwijls $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

Als symbool voor radialen wordt **rad** gebruikt, maar het wordt meestal niet geschreven. Men schrijft dus meestal *een hoek met grootte* $\pi$ in plaats van *een hoek met grootte* $\pi$ *rad*.

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.2 Goniometrische cirkel

**Opmerking 5.2.1.**

- De **lengte van de cirkelboog** tussen de twee benen van een hoek is gelijk aan het maatgetal van die hoek uitgedrukt in radialen, wanneer we dit maatgetal kiezen tussen $0$ en $2\pi$. Dit verklaart waarom men soms het begrip *booglengte* gebruikt voor de grootte van een hoek.
- Het verband tussen een hoek gemeten in graden en radialen wordt gegeven door $360° = 2\pi$, en dus geldt ook $90° = \frac{\pi}{2}$ en $180° = \pi$. Voor enkele gekende hoeken geldt dus $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{3\pi}{2} = 270°$, ... Merk op dat de grootte in radialen erg dikwijls wordt uitgedrukt als een veelvoud van $\pi$.
- Een gestrekte hoek van $180°$ meet $\pi$ radialen, en dus komt één graad overeen met $\frac{\pi}{180} \approx 0.017\ldots$ rad. Omgekeerd komt $1$ rad overeen met ongeveer $\frac{180°}{\pi} \approx 57,\ldots°$.
- Zowel het maatgetal van een hoek als de hoek zelf worden meestal genoteerd met Griekse letters. We spreken dus zowel van 'de hoek $\alpha$' (waarbij $\alpha$ een letter is, namelijk de naam van de hoek) als 'de hoek met grootte $\alpha$' (waar $\alpha$ dan staat voor een getal, namelijk het maatgetal van de hoek). Het maatgetal is altijd in radialen uitgedrukt, tenzij er expliciet staat $\alpha°$. De dubbelzinnigheid tussen een 'hoek' en 'de grootte van een hoek' is gelukkig compatibel met de optelling van hoeken: de grootte van de som van twee hoeken is de som van de groottes.
- Het symbool ° kan begrepen worden als een afkorting voor 'maal $\frac{2\pi}{360}$', waardoor dus graden automatisch worden omgezet naar radialen: $7° = 7 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{14\pi}{360} = \frac{7\pi}{180}$. De breuk $\frac{2\pi}{360}$ moet je daarbij niet echt onthouden, want een hoek van $360°$ moet worden omgezet naar $2\pi$, en daarvoor moet je natuurlijk vermenigvuldigen met $\frac{2\pi}{360}$.

**Voorbeeld 5.2.1** (Omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd)**.**

Van graden omzetten naar radialen gaat met behulp van *de regel van drie*. Vertrek van het feit dat $360°$ gelijk is aan $2\pi$ radialen en bereken dan hoeveel radialen één graad is, en daarna hoeveel radialen bijvoorbeeld 7 graden zijn. Met dezelfde redenering zet je radialen om naar graden.

| Graden | Radialen |
|---|---|
| $360°$ | $2\pi$ |
| $: 2$ | $: 2$ |
| $180°$ | $\pi$ |

| Graden | Radialen |
|---|---|
| $360°$ | $2\pi$ |
| $: 360$ | $: 360$ |
| $1°$ | $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ |
| $\times 7$ | $\times 7$ |
| $7°$ | $\frac{7\pi}{180}$ |

| Graden | Radialen |
|---|---|
| $360°$ | $2\pi$ |
| $: 2\pi$ | $: 2\pi$ |
| $\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$ | $1$ |
| $\times 7$ | $\times 7$ |
| $\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$ | $7$ |

Een hoek van $180°$ meet $\pi$ radialen, $7°$ is gelijk aan $\frac{7\pi}{180}$ radialen en $7$ radialen is gelijk aan $\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$.

CC BY-NC-SA 4.0

# 5.3 Goniometrische getallen

Door een georiënteerde hoek op de goniometrische cirkel te plaatsen bekomen we een punt op die cirkel, en dergelijk punt heeft $x$ en $y$ coördinaten. Deze coördinaten zijn per definitie de cosinus en de sinus van die hoek. We zullen verder zien dat wegens de stelling van Pythagoras deze definitie overeenkomt met de mogelijk meer vertrouwde definities met aanliggende en overstaande zijden in een driehoek.

**Definitie 5.3.1.**

Als $P_\alpha$ het punt is op de goniometrische cirkel dat hoort bij een hoek $\alpha$, dan is

de **cosinus** van de hoek $\alpha$ per definitie de $x$-coördinaat van het punt $P_\alpha$, en

de **sinus** van de hoek $\alpha$ per definitie de $y$-coördinaat van het punt $P_\alpha$:

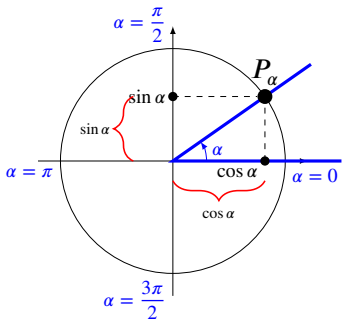
$$P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Per definitie is ook

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{(tangens)} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{(secans)}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{(cotangens)} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{(cosecans)}$$

We noemen de $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$ de **goniometrische getallen** van een hoek.




**Oefening 5.3.1.** Lees volgende waarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 2\pi = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$
2. $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$
3. $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$
4. $\cos(-\pi) = \ldots\ldots$ $\sin(-\pi) = \ldots\ldots$

De vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ (of de Stelling van Pythagoras) geeft onmiddellijk de hoofdformule van de goniometrie omdat het punt $P_\alpha$ op de goniometrische cirkel coördinaten $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ heeft:

**Eigenschap 5.3.1** (Hoofdformule van de goniometrie)**.** Voor elke hoek $\alpha$ geldt:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \text{(hoofdformule goniometrie)}$$

Hieruit volgt onmiddellijk ook dat

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \cos^2\alpha\text{)}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \sin^2\alpha\text{)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.3 Goniometrische getallen

**Opmerking 5.3.1.**

Let op de notatie voor machten: $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2 = \cos^2(\alpha) \neq \cos(\alpha^2) = \cos\alpha^2$.

Merk ook op dat in het algemeen $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$ en $\cos 2\alpha \neq 2\cos\alpha$.

Inderdaad, $\cos(\alpha+\beta) \stackrel{?}{=} \cos\alpha + \cos\beta$ werkt al niet voor bijvoorbeeld $\beta = 0$:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha+0) \neq \cos\alpha + \cos 0 = \cos\alpha + 1$$

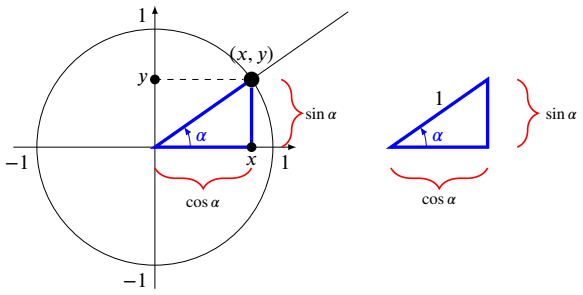
en $\cos 2\alpha \stackrel{?}{=} 2\cos\alpha$ werkt niet voor bijvoorbeeld $\alpha = 0$

$$\cos(2\cdot 0) = \cos 0 = 1 \text{ maar } 2\cdot\cos 0 = 2\cdot 1 = 2$$

Gelijkaardige problemen doen zich voor bij sinus, tangens, secans en cosecans. Er bestaat een hele collectie formules om toch de goniometrische getallen van sommen te berekenen.

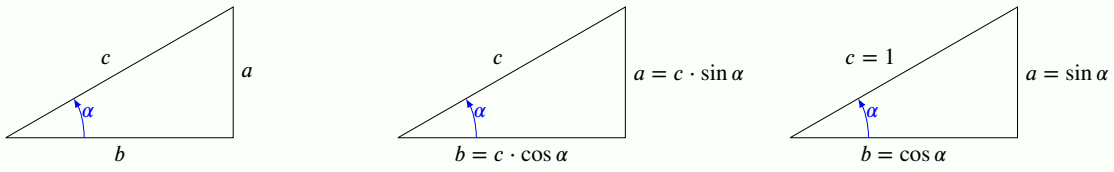
### 5.3.1 Rechthoekige driehoeken

Voor *scherpe hoeken* kunnen we de sinus en cosinus ook bekijken in een **rechthoekige driehoek**. Omdat het punt $P_\alpha = (x, y)$ op de goniometrische cirkel ligt, heeft de schuine zijde van de rechthoekige driehoek op onderstaande figuur lengte 1. De lengte van de *aanliggende zijde* van hoek $\alpha$ is gelijk aan $\cos\alpha$, de lengte van de *overstaande zijde* is $\sin\alpha$.




De volgende eigenschap veralgemeent dit voor rechthoekige driehoeken waarvan de schuine zijde niet noodzakelijk lengte 1 heeft. Het volstaat dan te *herschalen* met de lengte van de schuine zijde:

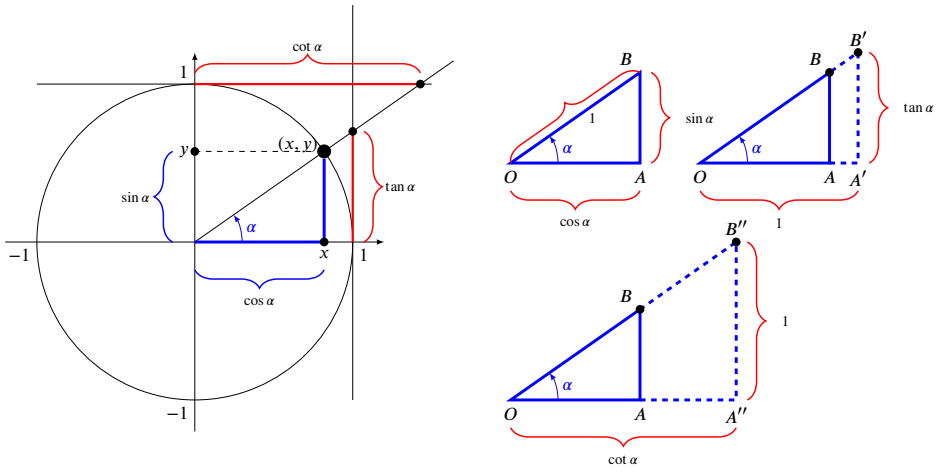
**Eigenschap 5.3.2** (Sinus en cosinus in een rechthoekige driehoek)**.**



## 5.3 Goniometrische getallen

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ | $= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$ | $a = \sin\alpha \cdot c$ | SOS |
| $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ | $= \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$ | $b = \cos\alpha \cdot c$ | CAS |
| $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ | $= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ | $a = \tan\alpha \cdot b$ | TOA |
| $\cot\alpha = \frac{b}{a}$ | $= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ | $b = \cot\alpha \cdot a$ | cotangens |

De cosinus en de sinus van een hoek $\alpha$ kan je op de goniometrische cirkel aflezen op de *assen*. Ook de tangens en de cotangens kan je aflezen, en wel op de *raaklijnen* aan de goniometrische cirkel in punten $(1,0)$ en $(0,1)$:




**Opmerking 5.3.2.**

- We lezen de cosinus af op de $x$-as, en de sinus op de $y$-as.
  We zien dat $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ en $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$
- We lezen de *tangens* af op de verticale *raak*lijn $x = 1$. Dat volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle A'OB'$
  want in driehoek $\measuredangle AOB$ geldt $\tan\alpha = \frac{|AB|}{|AO|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
  terwijl in driehoek $\measuredangle A'OB'$ geldt dat $\tan\alpha = \frac{|A'B'|}{|A'O|} = \frac{|A'B'|}{1} = |A'B'|$.
  Dus is $|A'B'| = \tan\alpha$.
  Op analoge wijze lezen we de cotangens af op de horizontale rechte $y = 1$.
  We zien dat $\tan\alpha$ en $\cot\alpha$ alle mogelijk reële waarden kunnen aannemen.
- De formule $a = c \cdot \sin\alpha$ betekent dat de sinus precies het getal is waarmee we de lengte van de *schuine* zijde van een driehoek moeten vermenigvuldigen om de lengte van de *overstaande* zijde te bekomen. Idem voor cosinus en aanliggende zijde.

### 5.3.2 Standaardhoeken

Voor enkele hoeken zijn er eenvoudige formules voor de goniometrische getallen. Deze hoeken komen in de praktijk regelmatig voor, en het is handig en belangrijk de *exacte uitdrukkingen* te kennen.

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.3 Goniometrische getallen

De waarden in volgende eigenschap zijn eenvoudig te onthouden: schrijf de hoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ van klein naar groot. De bijhorende sinussen zijn dan een rijtje halve vierkantswortels van klein naar groot. De cosinus is hetzelfde rijtje omgekeerd, en de tangens is natuurlijk het quotiënt van de sinus en de cosinus. Merk op dat $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

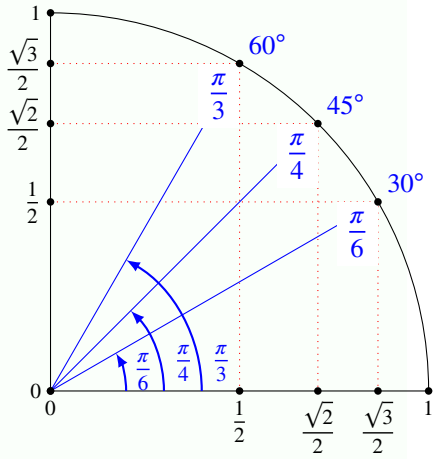
**Opmerking 5.3.3.**

Een rekenmachine geeft enkel numerieke oplossingen, en het is soms veel handiger om met uitdrukkingen als $\sqrt{2}$ te rekenen dan met $1,41421\ldots$. Dat is bijvoorbeeld het geval als je de waarde even verder moet kwadrateren, wat met goniometrische formules wel eens voorkomt.

Met de goniometrische cirkel bepaal je ook de goniometrische getallen van verwante hoeken in de andere kwadranten: de sinus lees je af op de rechte $x = 0$ (dus de $y$-as), de tangens op de rechte $x = 1$, de cosinus op de rechte $y = 0$ (dus de $x$-as), en de cotangens op de rechte $y = 1$. Je kan ook het *teken* van de sinus, cosinus en tangens dadelijk aflezen.

BELANGRIJK: leer dit niet van buiten, maar bestudeer het tot je er de evidentie van inziet.

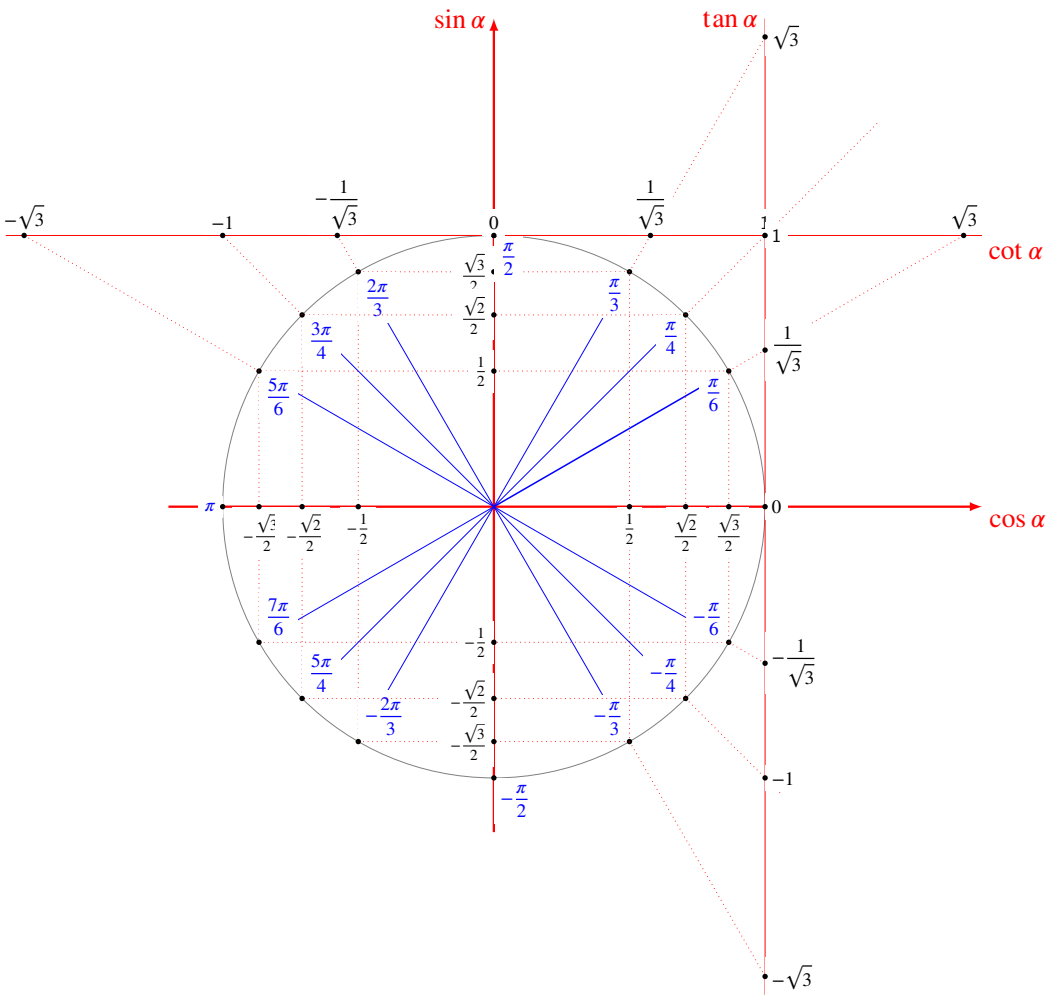
**Eigenschap 5.3.3** (Goniometrische getallen van standaardhoeken)**.**




| $\alpha$ | $0$<br>$0°$ | $\frac{\pi}{6}$<br>$30°$ | $\frac{\pi}{4}$<br>$45°$ | $\frac{\pi}{3}$<br>$60°$ | $\frac{\pi}{2}$<br>$90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{\sqrt{\mathbf{0}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{\mathbf{1}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{\mathbf{4}}}{2}$ |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | / |

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.3 Goniometrische getallen




CC BY-NC-SA 4.0

## 5.4 Verwante hoeken

Op de goniometrische cirkel zien we dat er eenvoudige verbanden zijn tussen de goniometrische getallen van zogenaamde *verwante* hoeken. Uit de gekende waarden voor sinus, cosinus, tangens en cotangens van enkele *standaardhoeken*, volgen dus ook de waarden van veel meer hoeken. Bovendien kunnen we het berekenen van goniometrische getallen van een willekeurige hoek steeds herleiden tot het berekenen van een goniometrisch getal van een hoek uit het eerste kwadrant.

**Definitie 5.4.1** (Verwante hoeken)**.** Elke hoek $\alpha$ heeft volgende zogenaamde **verwante** hoeken:

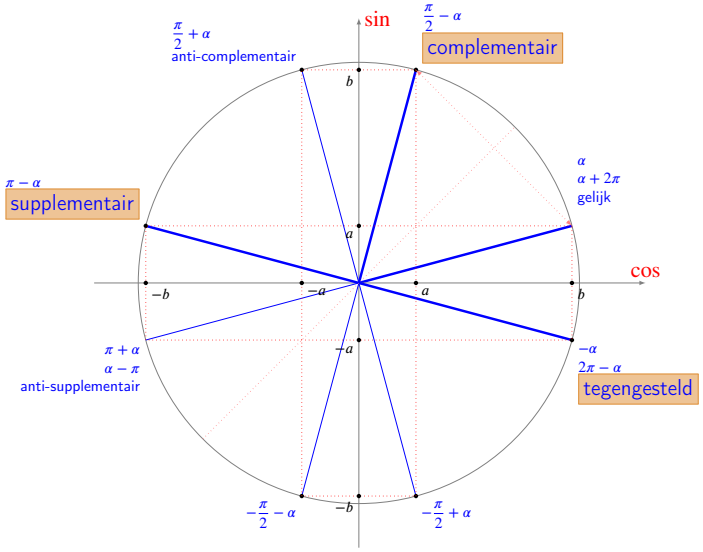
| | | |
|---|---|---|
| $-\alpha$ | is de **tegengestelde** hoek | (de som van $\alpha$ en $-\alpha$ is gelijk aan $0$) |
| $\pi - \alpha$ | is de **supplementaire** hoek | (de som van $\alpha$ en $\pi - \alpha$ is gelijk aan $\pi$) |
| $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | is de **complementaire** hoek | (de som van $\alpha$ en $\frac{\pi}{2} - \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$) |
| $\pi + \alpha$ | is de **anti-supplementaire** hoek | (het verschil van $\alpha$ en $\pi + \alpha$ is gelijk aan $\pi$) |
| $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | is de **anti-complementaire** hoek | (het verschil van $\alpha$ en $\frac{\pi}{2} + \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$) |

Uit deze definitie volgt direct volgende eigenschap:

**Eigenschap 5.4.1.**

- Twee hoeken zijn *tegengesteld* als hun som gelijk is aan de *nulhoek*, *supplementair* als hun som gelijk is aan een *gestrekte* hoek, en *complementair* als hun som gelijk is aan een *rechte* hoek.
- Tegengestelde hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzichte van de $x$-as, supplementaire hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzichte van de $y$-as en complementaire hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzicht van de *eerste* bissectrice.

Op een tekening ziet dat er uit als volgt:




Het is *niet* zinvol deze figuur of volgende tabellen van buiten te leren. Het is *wel* zinvol de goniometrische getallen van verwante hoeken direct te leren aflezen. Hierbij is $\sin\alpha = a$ en $\cos\alpha = b$, en de goniometrische getallen van de verwante hoeken zijn dan $a$, $b$, $-a$ of $-b$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.4 Verwante hoeken

**Eigenschap 5.4.2.**

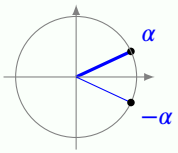
| Cosinus: | (op de $x$-as) | | Sinus: | (op de $y$-as) | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | $= \cos(-\alpha)$ | $= b$ | $\sin\alpha$ | $= \sin(\pi-\alpha)$ | $= a$ |
| $\cos(\pi-\alpha)$ | $= \cos(\pi+\alpha)$ | $= -b$ | $\sin(-\alpha)$ | $= \sin(\pi+\alpha)$ | $= -a$ |
| $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ | $= \cos(\alpha-\frac{\pi}{2})$ | $= a$ | $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ | $= \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ | $= b$ |
| $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ | $= \cos(-\frac{\pi}{2}-\alpha)$ | $= -a$ | $\sin(-\frac{\pi}{2}-\alpha)$ | $= \sin(\alpha-\frac{\pi}{2})$ | $= -b$ |

Per type van verwante hoek geeft dat volgende lijst verbanden tussen de *goniometrische getallen*:

**Eigenschap 5.4.3** (Verwante hoeken)**.**

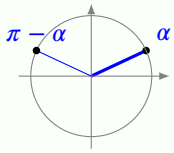
Tegengestelde hoeken

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos\alpha\\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



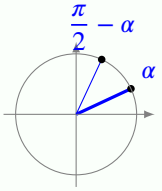

Supplementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(\pi-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



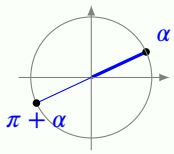

Complementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \tan\alpha\end{aligned}$$



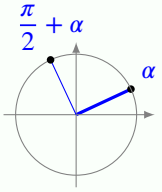

Anti-supplementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\pi) &= -\sin\alpha\\ \cos(\alpha\pm\pi) &= -\cos\alpha\\ \tan(\alpha\pm\pi) &= \tan\alpha\\ \cot(\alpha\pm\pi) &= \cot\alpha\end{aligned}$$




Anti-complementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\alpha\\ \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\cot\alpha\\ \cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\tan\alpha\end{aligned}$$




CC BY-NC-SA 4.0

# 5.5 Oefeningen goniometrie

**Oefening 5.5.1.** Zet om van graden naar radialen of omgekeerd.

| *Graden* | *Radialen* |
|---|---|
| $120°$ | …… |
| $8°$ | …… |
| …… ° | $7\pi/4$ |
| …… ° | $\pi/10$ |
| $90°$ | …… |
| $1°$ | …… |
| …… ° | $7\pi/5$ |

**Oefening 5.5.2.** Lees de waarden van volgende goniometrische getallen af op de cirkel:

**1.** $\cos 0° = \ldots\ldots$

**2.** $\cos \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$

**3.** $\cos 90° = \ldots\ldots$

**4.** $\cos \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$

**5.** $\sin 0° = \ldots\ldots$

**6.** $\sin \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$

**7.** $\sin 90° = \ldots\ldots$

**8.** $\sin \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$

**9.** $\tan \frac{\pi}{3} = \ldots\ldots$

**10.** $\cos \frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$

**11.** $\tan \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$

**12.** $\cot \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$

**Oefening 5.5.3.** Duid het juiste antwoord aan (er is telkens precies één antwoord correct).

**1.** De hoeken $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{5\pi}{6}$ zijn

| tegengesteld | complementair | supplementair |
|---|---|---|

**2.** $\cos \frac{5\pi}{4}$ is gelijk aan

| $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ | $\cos \frac{\pi}{4}$ | $\cos \frac{3\pi}{4}$ |
|---|---|---|

**3.** $\sin(\pi - 23)$ is gelijk aan

| $-\sin(23)$ | $\sin(23)$ | $\cos(23)$ |
|---|---|---|

**4.** $\sin(2\pi + 1)$ is gelijk aan

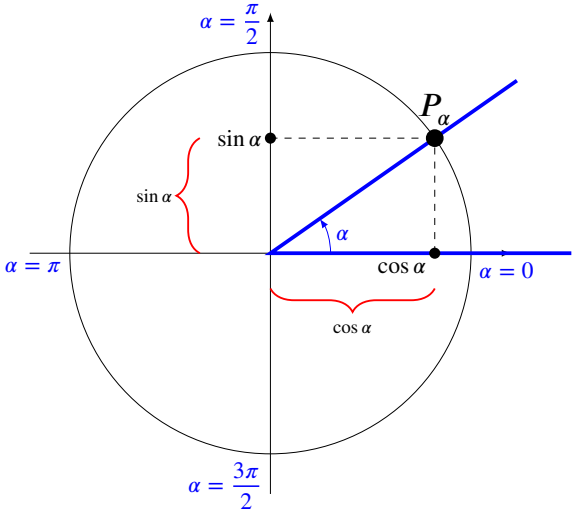
| $-\sin 1$ | $\sin 1$ | $\cos 1$ |
|---|---|---|

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.5 Oefeningen goniometrie

**Oefening 5.5.4.** Zoek aan de hand van de goniometrische cirkel (zie onder) waaraan volgende uitdrukkingen gelijk zijn.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** $\cos(\pi - \alpha) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| **2.** $\sin(\alpha - \pi) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| **3.** $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| **4.** $\sin(\pi + \alpha) =$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| **5.** $\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$ | $-\tan\alpha$ | $-\cot\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\cot\alpha$ |




**Oefening 5.5.5.** Bereken zonder rekentoestel. Gebruik de gekende goniometrische getallen en de formules voor tegengestelde, (anti)supplementaire en (anti)complementaire hoeken.

**1.** $\sin(135°) =$ ... ...

**2.** $\tan(3\pi/4) =$ ... ...

**3.** $\cos(-30°) =$ ... ...

**4.** $\sin(-120°) =$ ... ...

**5.** $\tan(-\frac{5\pi}{6}) =$ ... ...

**6.** $\cot(390°) =$ ... ...

**Oefening 5.5.6.** Bereken volgende goniometrische getallen door gebruik te maken van de gekende waarden van de standaardhoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ en de symmetrieën voor de verwante hoeken.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** $\cos\frac{\pi}{3} =$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| **2.** $\cos\frac{2\pi}{3} =$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.5 Oefeningen goniometrie

**3.** $\cos\frac{5\pi}{6} =$

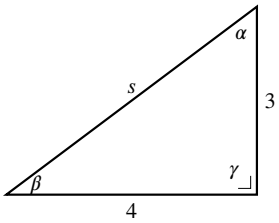
**4.** $\sin\frac{7\pi}{4} =$

**5.** $\cos\frac{-\pi}{2} =$

**6.** $\cos\frac{-2\pi}{3} =$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

**Oefening 5.5.7.** We bekijken een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden met lengte 3 en 4 (zie tekening). Bereken de lengte van de schuine zijde $s$. Bereken ook de sinus en cosinus van elk van de hoeken $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$.




**1.** $s =$ … …

**2.** $\sin\alpha =$ … …

**3.** $\cos\alpha =$ … …

**4.** $\sin\beta =$ … …

**5.** $\cos\beta =$ … …

**6.** $\sin\gamma =$ … …

**7.** $\cos\gamma =$ … …

**Oefening 5.5.8.** Bepaal $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ en $\cot\alpha$ en het kwadrant waarin $\alpha$ ligt in het volgende geval (zonder gebruik te maken van een rekenmachine):

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \text{en} \qquad \sin\alpha < 0.$$

**1.** $\alpha$ ligt in het | I$^{e}$ | II$^{e}$ | III$^{e}$ | IV$^{e}$ | kwadrant.

**2.** $\sin\alpha =$ … …

**3.** $\tan\alpha =$ … …

**4.** $\cot\alpha =$ … …

**Oefening 5.5.9.** Bepaal $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\cot\alpha$ en het kwadrant waarin $\alpha$ ligt in het volgende geval

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.5 Oefeningen goniometrie

(zonder gebruik te maken van een rekenmachine):

$$\tan\alpha = -\frac{3}{4} \qquad \text{en} \qquad \sin\alpha > 0.$$

**1.** $\alpha$ ligt in het | I$^{e}$ | II$^{e}$ | III$^{e}$ | IV$^{e}$ | kwadrant.

**2.** $\cot\alpha = \ldots\ldots$

**3.** $\sin\alpha = \ldots\ldots$

**4.** $\cos\alpha = \ldots\ldots$

**Oefening 5.5.10.** Verzeker je ervan dat de volgende gelijkheden correct zijn door het linker- of rechterlid van de gelijkheid, of beide, te herschrijven met behulp van goniometrische formules.

**1.** $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

**2.** $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

**Oefening 5.5.11.** Vereenvoudig (dit wil zeggen, schrijf met behulp van één goniometrisch getal).

**1.** $\cos^2 3 - \sin^2 3$

**2.** $2\sin 3\cos 3$

**3.** $\sin(5\alpha)\cos(3\alpha) + \cos(5\alpha)\sin(3\alpha)$

**4.** $\cos(5\alpha)\cos(3\alpha) + \sin(5\alpha)\sin(3\alpha)$

**Oefening 5.5.12.** Schrijf als een product van goniometrische getallen.

**1.** $\sin 3 - \sin 5$

**2.** $\cos 2 + \cos 7$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

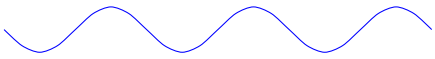
# 5.6 Goniometrische functies

Met een hoek $\alpha$ hebben we een getal $\sin\alpha$ geassocieerd. Door nu de hoek $\alpha$ te laten *variëren* (dus 'variabel' te maken), bekomen we een *functie* in de 'variabele' $\alpha$. In de wiskunde gebruiken we dikwijls de letter $x$ voor variabelen. We zullen hier dus ook meestal spreken van $\sin x$ in plaats van $\sin\alpha$. Ook van de cosinus, de tangens en de cotangens kunnen we functies maken.

**Definitie 5.6.1** (Goniometrische functies)**.**

De **goniometrische functies** zijn de reële functies sinus, cosinus, tangens en cotangens:

$$\begin{aligned}
\sin &: \quad x \mapsto \sin(x) \\
\cos &: \quad x \mapsto \cos(x) \\
\tan &: \quad x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\cot &: \quad x \mapsto \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

We gaan nu na hoe de grafieken van deze functies er uit zien. We nemen als voorbeeld $\sin : x \mapsto \sin(x)$, waarvan velen de vorm kennen of minstens herkennen: 

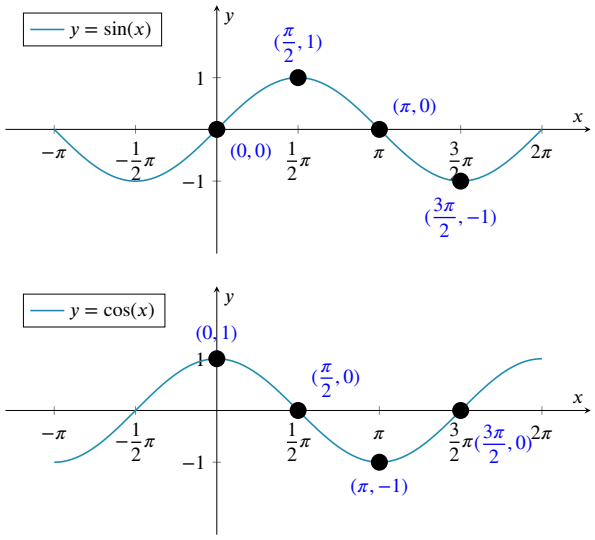
Zonder aanduidingen op de assen ziet de grafiek van $\cos : x \mapsto \cos(x)$ er net hetzelfde uit. Het is dus belangrijk om te weten waar de nulpunten, de maximale en de minimale waarden liggen.

**Oefening 5.6.1.** Lees volgende functiewaarden af op de goniometrische cirkel:

**1.** $\sin 0 = \ldots\ldots$ $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$ $\sin\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin 2\pi = \ldots\ldots$

**2.** $\cos 0 = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\cos\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$

Met de waarden uit vorige oefening kunnen we nu enkele waarden op de $x$-as en $y$-as noteren:



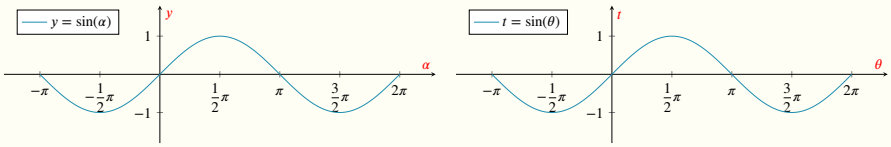

**Opmerking 5.6.1.**

- Als we sinus, cosinus en tangens als functies beschouwen, geldt dat in principe *altijd* met de variabele uitgedrukt in radialen.

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.6 Goniometrische functies

- Als we de sinus beschouwen als een functie, gebruiken we dikwijls de letter $x$ als variabele eerder dan $\alpha$. Vooral in toepassingen gebruikt men ook andere letters. Men tekent dan bijvoorbeeld ook grafieken in een $\alpha y$-vlak of een $\theta t$-vlak

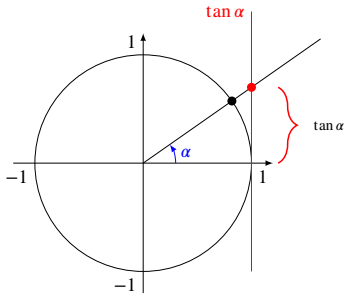



- Het domein van sin en van cos is $\mathbb{R}$ en het beeld is $[-1,1]$.
  Met de uitgebreidere notatie voor functies kunnen we dus ook schrijven

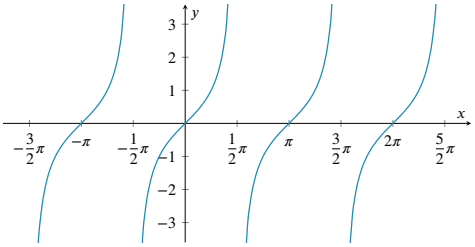
$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \sin(x)$$

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \cos(x)$$

Voor de tangensfunctie $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ merken we op dat ze niet gedefinieerd is in de nulpunten van de noemer, dus als $\cos x = 0$ zoals bijvoorbeeld in $\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ of algemeen als $x \in \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Waar $\sin x = 0$ zal ook de tangensfunctie nul zijn.



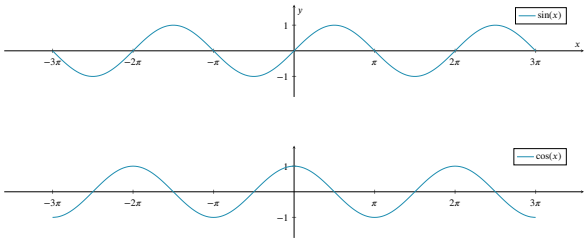

We lezen op de goniometrische cirkel af dat $\tan 0 = 0$, en dat naarmate de hoek groter wordt ook de tangens van de hoek groter wordt. Als de hoek de waarde $\dfrac{\pi}{2}$ krijgt, dan bestaat de tangens niet meer, dan wordt deze 'oneindig'. Volledig gelijkaardig wordt de tangens steeds negatiever als de hoek varieert van $0$ tot $-\dfrac{\pi}{2}$. De grafiek van $x \mapsto \tan(x)$ ziet er als volgt uit:

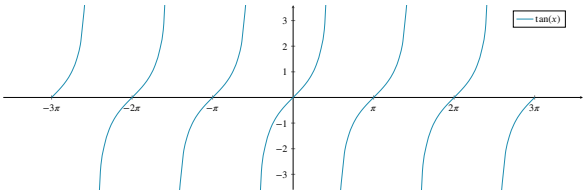



Op de grafieken van sin, cos en tan lees je onderstaande eigenschappen af (die je dus niet van buiten moet leren).

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.6 Goniometrische functies




**Eigenschap 5.6.1** (Eigenschappen van goniometrische functies)**.**

(a) de nulpunten van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft nulpunten in $\frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$

(b) de maxima en minima van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft maxima in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de sinusfunctie heeft minima in $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft maxima in $2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft minima in $\pi + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft geen maxima of minima

(c) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ en $\tan(x + \pi) = \tan(x)$

(d) de sinus over een afstand $\frac{\pi}{2}$ naar links verschuiven geeft de cosinus: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

(e) de cosinus over een afstand $\frac{\pi}{2}$ naar rechts verschuiven geeft de sinus: $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

(f) de tangensfunctie heeft *verticale asymptoten* in de punten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$: in die punten zelf is de tangens niet gedefinieerd, maar de grafiek komt er wel willekeurig dicht tegen de verticale rechten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

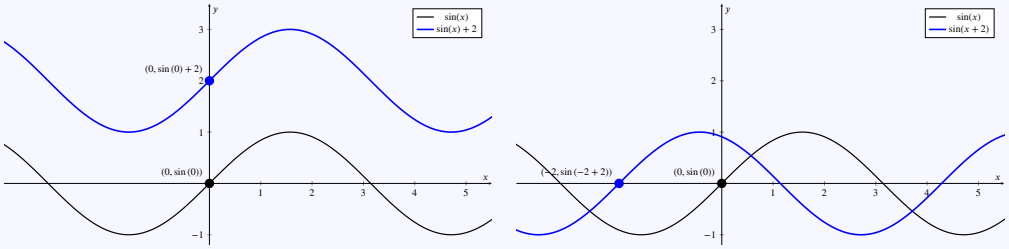
Eigenschap (c) betekent dat sinus, cosinus en tangens *periodische functies* zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

# 5.7 Verschuiven en herschalen van goniometrische functies

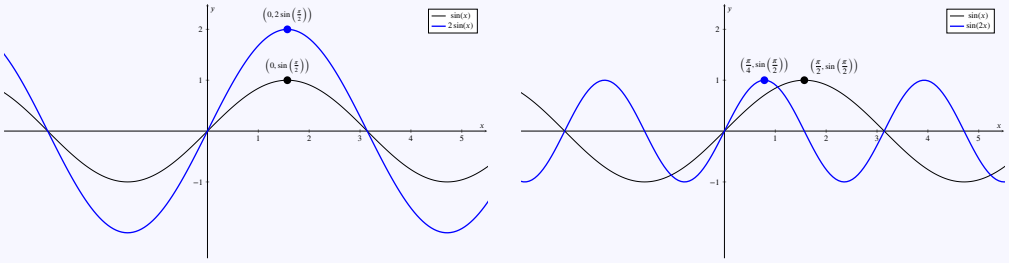
Via verschuiven en herschalen introduceren we de zogenaamde algemene sinusfunctie.

**Voorbeeld 5.7.1.** Verschuivingen: $x \mapsto \sin(x)+2$ en $x \mapsto \sin(x+2)$.




- De grafiek van $x \mapsto \sin(x)+2$ verschuift 2 *eenheden naar boven* t.o.v. die van $x \mapsto \sin(x)$.
  Dit is eenvoudig te begrijpen want $x \mapsto \sin(x)+2$ komt 2 hoger terecht dan $\sin(x)$.
- De grafiek van $x \mapsto \sin(x+2)$ verschuift 2 *eenheden naar links* t.o.v. die van $x \mapsto \sin(x)$.
  Dit is wat subtieler: $x \mapsto \sin(x+2)$, en dus $x-2 \mapsto \sin((x-2)+2) = \sin(x)$.
  Bij $\sin(x+2)$ kom je al 2 *vroeger*, bij $x-2$, in de oorspronkelijke functiewaarde $\sin(x)$ terecht.
- Bij $x \mapsto \sin(x+2)$ werkt de verschuiving vòòr de sinus, dus op de input $x$, i.e. langs de $x$-as.
  Bij $x \mapsto \sin(x)+2$ werkt de verschuiving nà de sinus, dus op het beeld $y$, i.e. langs de $y$-as.

**Voorbeeld 5.7.2.** Herschalingen: $x \mapsto 2\sin(x)$ en $x \mapsto \sin(2x)$.




- De grafiek van $x \mapsto 2\sin(x)$ is met *een factor* 2 *verticaal uitgerokken* t.o.v. die van $x \mapsto \sin(x)$.
  Dit is eenvoudig te begrijpen want $x \mapsto 2\sin(x)$ is dubbel zo groot als $\sin(x)$.
- De grafiek van $x \mapsto \sin(2x)$ is met *een factor* 2 *horizontaal ingedrukt* t.o.v. die van $x \mapsto \sin(x)$.
  Dit is wat subtieler: $x \mapsto \sin(2x)$, dus $\frac{x}{2} \mapsto \sin(2 \cdot \frac{x}{2}) = \sin(x)$.
  Bij $x \mapsto \sin(2x)$ kom je halfweg $x$, al bij $\frac{x}{2}$, terecht op de oorspronkelijke functiewaarde $\sin(x)$ .
- Bij $x \mapsto \sin(2x)$ werkt de herschaling vòòr de sinus, dus op de input $x$, i.e langs de $x$-as.
  Bij $x \mapsto 2\sin(x)$ werkt de herschaling nà de sinus, dus op het beeld $y$, i.e. langs de $y$-as.

**Opmerking 5.7.1.** Je kan verschuiving en herschaling ook met elkaar combineren.

Start met $x \mapsto \sin(x)$. Eerst 2 eenheden naar rechts verschuiven geeft $x \mapsto \sin(x-2)$. Daarna herschalen met een factor $\frac{1}{2}$ vervangt $x$ door $\frac{1}{2}x$ in *de huidige functie* $x \mapsto \sin(x-2)$:

$$x \mapsto \sin(\tfrac{1}{2}x-2).$$

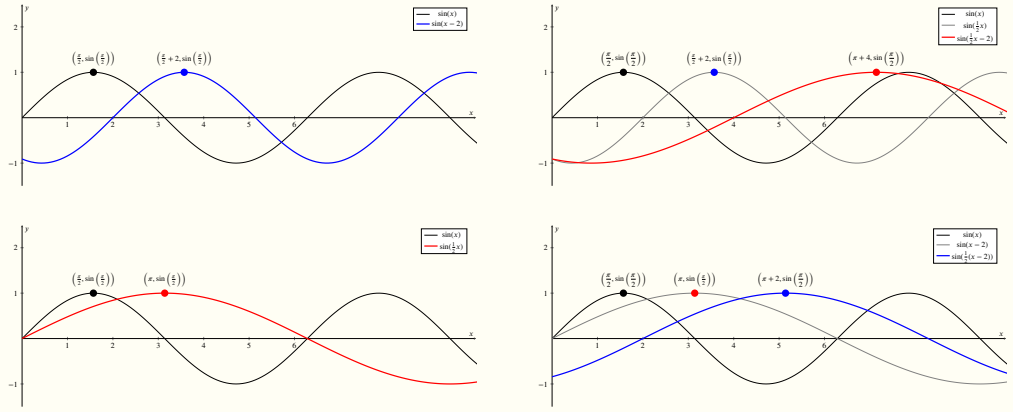
*Opgepast:* de volgorde van deze twee operaties is belangrijk: eerst de functie herschalen via $x \mapsto$

CC BY-NC-SA 4.0

## 5.7 Verschuiven en herschalen van goniometrische functies

$\sin(\frac{1}{2}x)$, en dan $x \mapsto \sin(\frac{1}{2}x)$ twee eenheden naar rechts schuiven geeft een *andere* functie

$$x \mapsto \sin(\tfrac{1}{2}(x-2)) = \sin(\tfrac{1}{2}x - 1)$$



Volgende definitie/eigenschap vat alles samen:

**Eigenschap 5.7.1.** De **algemene sinusfunctie** is de functie $x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x-c)) + d$, waarbij de parameters $a, b, c$ en $d$ volgende betekenis hebben:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ is een | *verticale* | *herschaling* | met factor $a > 0$. |
| $b$ is een | *horizontale* | *herschaling* | met factor $b > 0$. |
| $c$ is een | *horizontale* | *verschuiving* | met grootte $c$ naar rechts. |
| $d$ is een | *verticale* | *verschuiving* | met grootte $d$ naar boven. |

Je kan dit onthouden want

$a$ en $b$ zijn herschalingen als factor in een product.
$c$ en $d$ zijn verschuivingen als term in een som (of verschil).
$a$ en $d$ werken op de *functiewaarde*, dus langs de $y$-as.
$b$ en $c$ werken op de *inputwaarde*, dus langs de $x$-as.

Als $a < 0$ wordt de grafiek bovendien *gespiegeld* rond de $x$-as.
Als $b < 0$ wordt de grafiek bovendien *gespiegeld* rond de $y$-as.

Wat verwarrend kan blijven is dat de grafiek van $x \mapsto \sin(x-c)$ naar **rechts** opschuift (met $c > 0$). Deze verschuivingen en herschalingen zijn trouwens ook direct toepasbaar op meer algemene functies.

Experimenteer zelf: GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/apx9m8zp

**Opmerking 5.7.2.** Volgende termen worden gebruikt bij trillingen, waar $x$ de tijd is (en $a, b > 0$):

- $a$ is de **amplitude**
- $p = \frac{2\pi}{b}$ is de periode, dus de tijd nodig voor één volledige trilling.
- $f = \frac{1}{p} = \frac{b}{2\pi}$ is de **frequentie**, dus het aantal trillingen per (tijds-)eenheid.
- $c$ bepaalt de **fase**: de verschuiving op begintijdstip $x = 0$.
- $d$ bepaalt de **evenwichtstoestand**.

Men ziet de algemene sinusfunctie dus ook regelmatig in de vorm $t \mapsto A\sin((2\pi f) \cdot t - C) + D$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

# 5.8 Periodiciteit van goniometrische functies

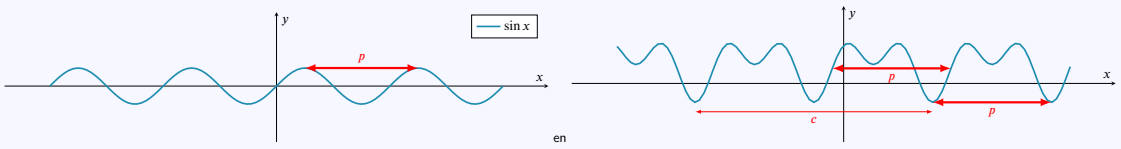
De sinus en cosinus zijn prototypische voorbeelden van zogenaamde *periodieke functies*:

**Definitie 5.8.1.** Een reële functie is **periodiek** (soms ook **periodisch**) als de grafiek zich na een zekere periode steeds opnieuw herhaalt.

Technisch: als er een getal $c > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x+c) = f(x)$.

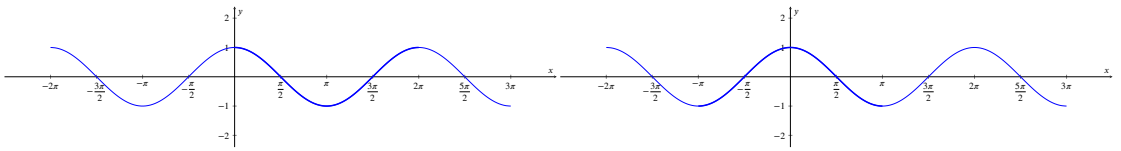
De **periode** $p$ van $f$ is de *kleinste* strikt positieve $c$ waarvoor deze eigenschap geldt.

**Voorbeeld 5.8.1.**

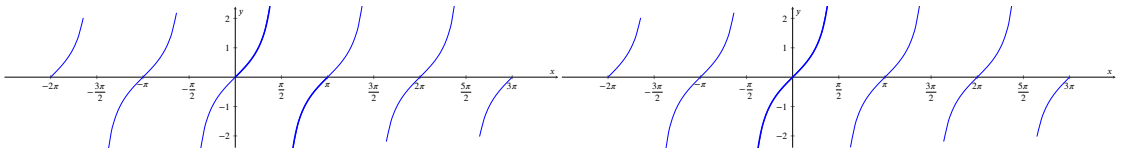



**Oefening 5.8.1.**

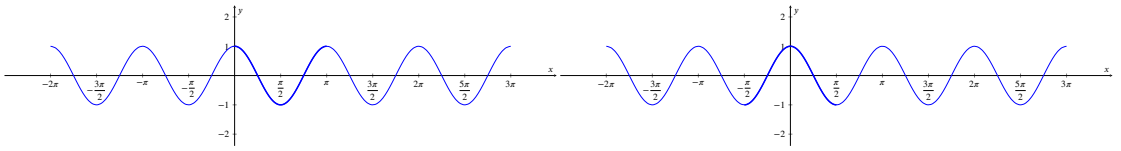
**1.** De functie $\cos(x)$ heeft periode | 1 | $\pi/2$ | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ |



**2.** De functie $\tan(x)$ heeft periode | 1 | $\pi/2$ | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ |



**3.** De functie $\cos(2x)$ heeft periode | 1 | $\pi/2$ | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ |



CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Module 6
# Limieten en asymptoten

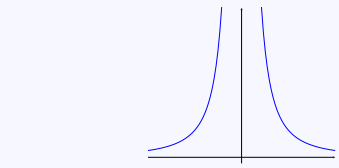
(Versie 2026/08/25H.36)

# 6.1 Definitie limieten

Functies zoals $x \mapsto \frac{1}{x}$ of $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ zijn niet gedefinieerd in $x = 0$ maar bestaan wel *in de buurt* van $x = 0$.

Met het begrip *limiet van een functie $x \mapsto f(x)$ als $x$ naar $0$ gaat* kan in goede gevallen het gedrag van $f$ rond $0$ worden weergegeven. We geven hier enkel een eerder informele definitie, bepalen dan enkele basislimieten en beschrijven daarna hoe met rekenregels vanaf die basislimieten ingewikkeldere limieten kunnen worden bepaald. Limieten worden gebruikt bij integralen en afgeleiden, maar ook bij asymptoten en het bestuderen van het verloop van functies.

**Voorbeeld 6.1.1.** De functie $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



| $y = \frac{1}{x^2}$ | $0$ | $\downarrow$ | $0.01$ | $1$ | $100$ | $\uparrow$ | $+\infty$ | $\uparrow$ | $100$ | $1$ | $0.01$ | $\downarrow$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $\leftarrow$ | $-10$ | $-1$ | $-0.1$ | $\rightarrow$ | $0$ | $\leftarrow$ | $0.1$ | $1$ | $10$ | $\rightarrow$ | $+\infty$ |

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $1/x^2$ niet gedefinieerd, maar zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat *in de buurt van $x = 0$ de functiewaarden steeds groter* worden.

Dat *alle* functiewaarden *onbeperkt groter* worden naarmate $x$ dichter bij $x = 0$ komt noteren we als

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \text{of} \quad \frac{1}{x^2} \to +\infty \text{ als } x \to 0$$

en we zeggen:

- de **limiet** van de functie $x \mapsto 1/x^2$ als $x$ naar $0$ gaat is **plus oneindig** of
- de functie $x \mapsto 1/x^2$ **gaat naar** plus oneindig als $x$ naar nul **gaat**, of
- de functie $x \mapsto 1/x^2$ **wordt** plus oneindig als $x$ nul **wordt**.

We voeren daarbij dus zowel het begrip 'limiet' als het begrip 'plus oneindig' $(+\infty)$ in.

Als $x$ steeds *groter* wordt, dan komen de functiewaarden $1/x^2$ willekeurig dicht bij nul te liggen. Dat alle functiewaarden willekeurig dicht bij nul komen naarmate $x$ groter wordt noteren we als

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{1}{x^2} \to 0 \text{ als } x \to +\infty$$

en we zeggen:

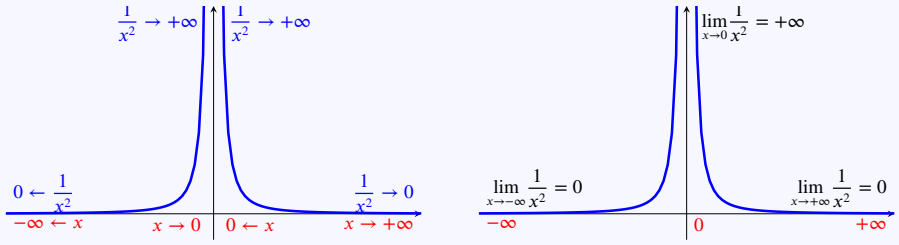
- de **limiet** van de functie $x \mapsto 1/x^2$ als $x$ naar $+\infty$ gaat is $0$.

Hetzelfde gebeurt als $x$ erg negatief wordt: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

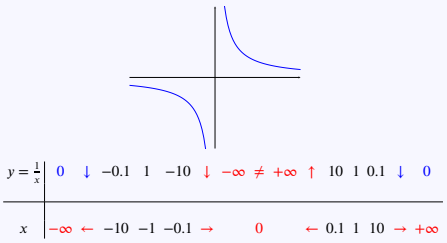
De situatie wordt verduidelijkt op volgende tekening:

CC BY-NC-SA 4.0

## 6.1 Definitie limieten



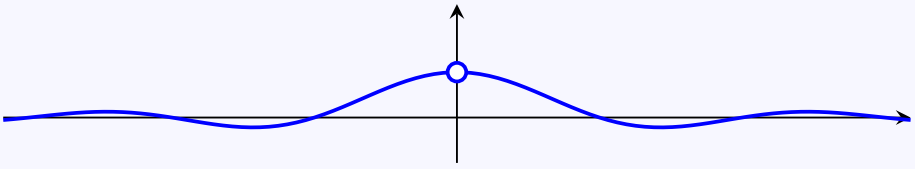

**Voorbeeld 6.1.2.** De functie $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



| $y = \frac{1}{x}$ | $0$ | $\downarrow$ | $-0.1$ | $1$ | $-10$ | $\downarrow$ | $-\infty \neq +\infty$ | $\uparrow$ | $10$ | $1$ | $0.1$ | $\downarrow$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty \leftarrow$ | | $-10$ | $-1$ | $-0.1 \rightarrow$ | | $0$ | | $\leftarrow 0.1$ | $1$ | $10 \rightarrow$ | | $+\infty$ |

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $1/x$ niet gedefinieerd, en zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat *in de buurt van* $x = 0$ de functiewaarden steeds *groter* worden voor positieve $x$, maar dat ze steeds *kleiner* worden voor negatieve $x$. We zeggen in dat geval dat de limiet van de functie $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ als $x \to 0$ *niet bestaat*. In dit geval kunnen de begrippen *linkerlimiet* en *rechterlimiet* voor 'naderen langs links' of 'naderen langs rechts' de situatie beschrijven.

**Voorbeeld 6.1.3.** De functie $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



| $x$ | $\frac{\sin x}{x}$ |
|---|---|
| $0$ | niet gedefinieerd |
| $0.01$ | $0.999983$ |
| $0.1$ | $0.998334$ |
| $1$ | $0.841470$ |
| $10$ | $-0.054402$ |
| $100$ | $-0.005063$ |

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $\dfrac{\sin x}{x}$ niet gedefinieerd, maar zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat in de buurt van $x = 0$ de functiewaarden *willekeurig dicht* bij $1$ komen te liggen.

Dat alle functiewaarden willekeurig dicht bij één komen naarmate $x$ dichter bij nul ligt noteren we als

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

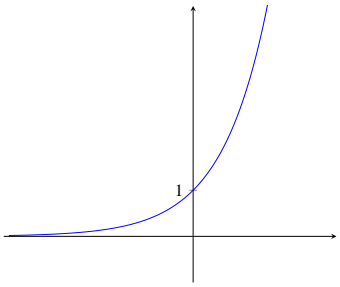
en we zeggen: de *limiet* van de functie $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ als $x$ naar $0$ gaat is $1$.

Op dezelfde manier blijkt dat $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ en ook $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

**Oefening 6.1.1.** Lees de volgende limieten af op de grafiek.

CC BY-NC-SA 4.0

## 6.1 Definitie limieten




**1.** $\lim_{x\to+\infty} e^x =$ | 0 | 1 | $+\infty$ | $-\infty$ | bestaat niet |

**2.** $\lim_{x\to-\infty} e^x =$ | 0 | 1 | $+\infty$ | $-\infty$ | bestaat niet |

**3.** $\lim_{x\to 0} e^x =$ | 0 | 1 | $+\infty$ | $-\infty$ | bestaat niet |

Limieten zijn vooral nuttig om het gedrag van functies te bestuderen op de grens (of de 'limiet') van hun domein. Dat kunnen bijvoorbeeld geïsoleerde punten zijn waar de functie niet gedefinieerd is zoals nulpunten van de noemer, maar dankzij de begrippen $+\infty$ en $-\infty$ werkt het ook voor 'heel erg grote waarden' van $x$. Het blijkt dat het begrip ook werkt voor punten die tot het domein zelf behoren.

Een formele wiskundige definitie van het begrip limiet is enigszins ingewikkeld, en we beperken ons hier tot volgende pseudo-definitie:

**Definitie 6.1.1** (Intuïtieve pseudo-definitie van limiet)**.** Voor een reële functie $f$ en voor $L$ en $c$ telkens ofwel een reëel getal ofwel één van de symbolen $+\infty$ of $-\infty$, zeggen en schrijven we dat

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x) = L \quad &\iff \text{de } \textbf{limiet} \text{ van } f \text{ in } c \text{ is gelijk aan } L \\
&\iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } L \\
&\iff \text{als } x \text{ naar } c \text{ gaat, dan gaat } f(x) \text{ naar } L \\
&\iff \text{als } x \to c, \text{ dan } f(x) \to L \\
&\iff \text{voor alle } x\text{-waarden erg dicht bij } c \text{ liggen de functiewaarden } f(x) \text{ zeer dicht bij } L.
\end{aligned}$$

Niet voor alle functies $f$ en alle getallen $c$ bestaat de limiet $\lim_{x\to c} f(x)$ .

In eenvoudige gevallen zijn limieten dus uitdrukkingen zoals $\lim_{x\to 2}(x+3) = 5$. Door ook de symbolen $+\infty$ en $-\infty$ toe te laten kunnen we echter ineens ook beschrijven wat er gebeurt als de variabele $x$ groot wordt, zoals bij $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ of als de functiewaarden groot worden, zoals bij $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Als de functiewaarden niet naar één vaste waarde gaan, dan bestaat de limiet niet. Voor $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ worden de functiewaarden erg groot voor grote positieve $x$, maar ze zijn negatief voor negatieve $x$.
Als een functie niet gedefinieerd is in de buurt van $c$ is het onmogelijk functiewaarden te berekenen als $x$ naar $c$ gaat. Dan bestaat de limiet niet, zoals bijvoorbeeld voor $\lim_{x\to-5} \sqrt{x}$, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ of $\lim_{x\to-\infty} \ln x$.

**Opmerking 6.1.1.**

- In de definitie van $\lim_{x\to c} f(x)$ heeft de waarde $f(c)$ van $f$ in $c$ – als die al bestaat – geen enkel belang : enkel de waarden van $f$ *in de buurt van* $c$ bepalen de limiet.
  We zullen verder wel zien dat zodra $f$ *continu* is in $c$ geldt dat $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 6.1 Definitie limieten

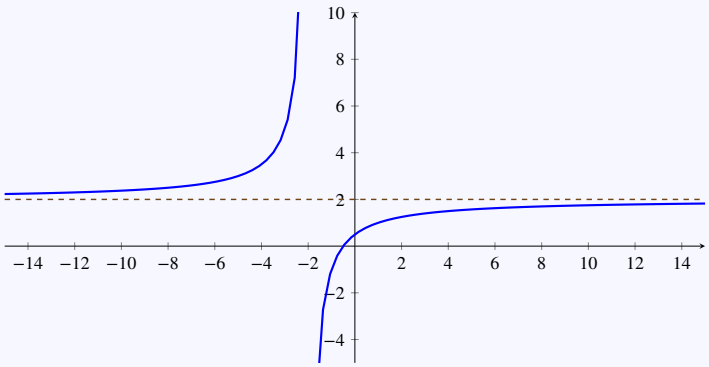
- In de uitdrukking $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ligt $c$ op de $x$-as (het domein van $f$), en de limiet $L$ op de $y$-as.
- Het symbool $\infty$ voor 'oneindig' is voorlopig enkel een notatie voor 'wordt willekeurig groot'. Verder zal met rekenregels de betekenis van $+\infty$ en $-\infty$ concreter worden vastgelegd.
- Let op: $x < c$ is hetzelfde als $c > x$. *Zowel* de tekens $<$ en $>$ *als* de volgorde zijn belangrijk.
- Het lezen van $x \to c$ als '$x$ gaat naar $c$' geeft een zeker dynamisch aspect: $x$ wordt verondersteld te 'bewegen' naar iets. Het is belangrijk te beseffen dat het resultaat of de 'uitkomst' van zo'n limiet, dus datgene wat met het symbool $\lim_{x\to c} f(x)$ wordt aangeduid, gewoon een bepaald getal is of het symbool $\pm\infty$.
- De uitdrukking 'de limiet $\lim_{x\to c} f(x)$ bestaat' wordt in de wiskunde in twee mogelijke betekenissen gebruikt: soms bedoelt men 'de limiet bestaat en is eindig', maar soms bedoelt men ook 'de limiet bestaat maar is eventueel $\pm\infty$'. In deze cursus gebruiken we de tweede optie.
- De limiet van $f$ als $x$ gaat naar $c$ is enkel bepaald als $f$ gedefinieerd is in de buurt van $c$, zoals meestal het geval is bij punten of randpunten van het domein van $f$. Zo kunnen we spreken van de limiet van $f(x) = \sqrt{x}$ in de punten $1$ en $\pi$ en $81$ (punten van het domein), of in $0$ of $+\infty$ (punten 'op de rand van het domein'), maar de limiet in de punten $-1$ en $-314$ heeft *geen* betekenis want het is niet mogelijk om $\sqrt{x}$ te bepalen als $x$ gaat naar $-1$. Ook de limieten $\lim_{x\to-\infty} \ln x$ en $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ bestaan niet.

CC BY-NC-SA 4.0

## 6.2 Definitie linker- en rechterlimieten

Soms bestaat een limiet niet omdat de functiewaarden langs links naar een andere waarde gaan dan langs rechts. Zo worden voor $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ de functiewaarden erg groot voor grote positieve $x$, maar ze zijn negatief voor negatieve $x$. Dat fenomeen kan wiskundig worden beschreven mer linkerlimieten en rechterlimieten.

**Voorbeeld 6.2.1.** De functie $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$ heeft volgende grafiek en functietabel:

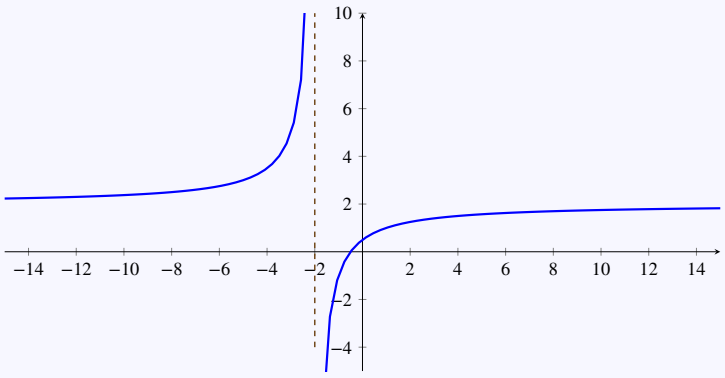



| $x$ | $\frac{2x+1}{x+2}$ |
|---|---|
| 10 | 1.75 |
| 100 | 1.97058823 |
| 1000 | 1.99700599 |
| 10000 | 1.99970006 |
| 100000 | 1.99997000 |
| 1000000 | 1.99999700 |
| ↓ | ↓ |
| $+\infty$ | 2 |

| $x$ | $\frac{2x+1}{x+2}$ |
|---|---|
| −10 | 2.375 |
| −100 | 2.03 |
| −1000 | 2.003 |
| −10000 | 2.0003 |
| −100000 | 2.00003 |
| −1000000 | 2.000003 |
| ↓ | ↓ |
| $-\infty$ | 2 |

Zowel in de tabel als op de grafiek blijkt dat $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2} = 2$ en ook $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x+2} = 2$.

Maar in de buurt van $x = -2$ geeft *langs links naderen* een ander resultaat dan *langs rechts naderen*:




| $x$ | $\frac{2x+1}{x+2}$ |
|---|---|
| −3 | 5 |
| −2.1 | 32 |
| −2.01 | 302 |
| −2.001 | 3002 |
| −2.0001 | 30002 |
| ↓ | ↓ |
| −2 | $+\infty$ |

| $x$ | $\frac{2x+1}{x+2}$ |
|---|---|
| −1 | −1 |
| −1.9 | −28 |
| −1.99 | −298 |
| −1.999 | −2998 |
| −1.9999 | −29998 |
| ↓ | ↓ |
| −2 | $-\infty$ |

Bovenstaand fenomeen rond $x = -2$ wordt beschreven met de begrippen linkerlimiet en rechterlimiet.

**Definitie 6.2.1** (Intuïtieve pseudo-definitie van linker- en rechterlimiet)**.**

Voor een reële functie $f$, voor een reëel getal $c$ en voor $L$ ofwel een reëel getal ofwel één van de symbolen $+\infty$ of $-\infty$, zeggen en schrijven we dat

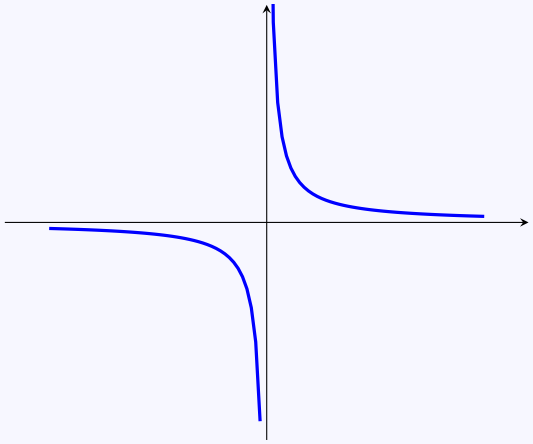
## 6.2 Definitie linker- en rechterlimieten

$$\lim_{\substack{x\to c\\<}} f(x) = L \iff \text{de } \textbf{linkerlimiet} \text{ van } f \text{ als } x \text{ gaat naar } c \text{ is gelijk aan } L$$
$$\iff \text{als } x \to c \text{ langs links (dus met } x < c\text{), dan } f(x) \to L$$
$$\iff \text{voor } x \text{ voldoende dicht bij } c \text{ en kleiner dan } c$$
$$\text{nadert } f(x) \text{ willekeurig dicht tot } L.$$

$$\lim_{\substack{x\to c\\>}} f(x) = L \iff \text{de } \textbf{rechterlimiet} \text{ van } f \text{ als } x \text{ gaat naar } c \text{ is gelijk aan } L$$
$$\iff \text{als } x \to c \text{ langs rechts (dus met } c < x\text{), dan } f(x) \to L$$
$$\iff \text{voor } x \text{ voldoende dicht bij } c \text{ en groter dan } c$$
$$\text{nadert } f(x) \text{ willekeurig dicht tot } L.$$

Linker- en rechterlimieten zijn alleen zinvol voor $c \in \mathbb{R}$ en worden niet gebruikt voor limieten naar $\pm\infty$. Maar ook $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \sqrt{x}$ bestaat niet, want $\sqrt{x}$ is niet gedefineerd voor negatieve $x$. Er geldt wel $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \sqrt{x} = 0$.

**Voorbeeld 6.2.2.** De functie $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



| $x$ | $1/x$ |
|---|---|
| $-\infty$ | $0$ |
| $\uparrow$ | $\uparrow$ |
| $-1000$ | $-0.001$ |
| $-100$ | $-0.01$ |
| $-10$ | $-0.1$ |
| $-1$ | $-1$ |
| $-0.1$ | $-10$ |
| $-0.01$ | $-100$ |
| $-0.001$ | $-1000$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| $0$ | $-\infty$ |

| $x$ | $1/x$ |
|---|---|
| $0$ | $+\infty$ |
| $\uparrow$ | $\uparrow$ |
| $0.001$ | $1000$ |
| $0.01$ | $100$ |
| $0.1$ | $10$ |
| $1$ | $1$ |
| $10$ | $0.1$ |
| $100$ | $0.01$ |
| $1000$ | $0.001$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| $+\infty$ | $0$ |

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $\dfrac{1}{x}$ niet gedefinieerd, en zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat in de buurt van $x = 0$ en $x$ positief de functiewaarden *willekeurig groot* worden. Maar, in de buurt van $x = 0$ met $x$ negatief worden de functiewaarden *willekeurig klein*. Dit fenomeen noteren we als

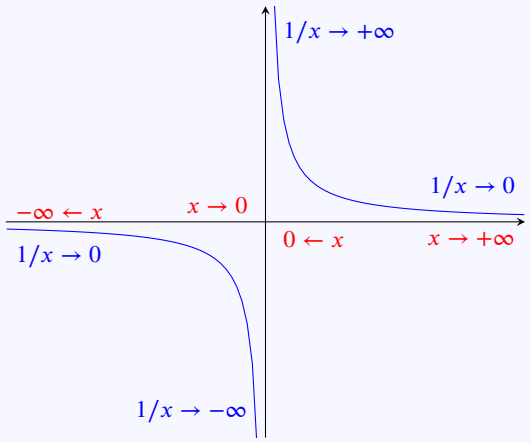
$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$$

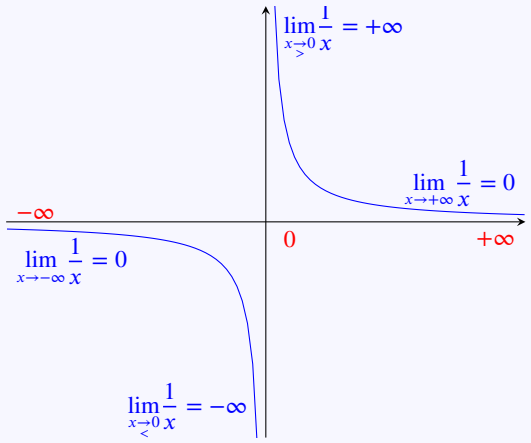
en we zeggen dat de *linkerlimiet* van de functie $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ als $x$ naar 0 gaat min oneindig is, en de *rechterlimiet* plus oneindig is.

De situatie wordt verduidelijkt op volgende tekening:

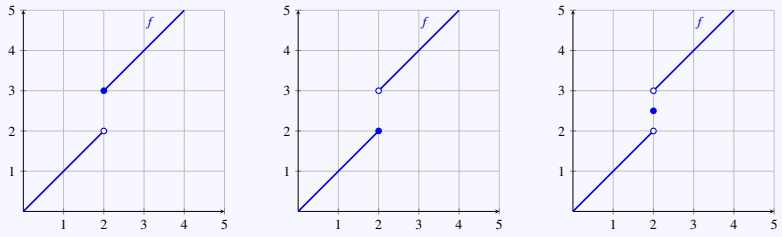
CC BY-NC-SA 4.0

## 6.2 Definitie linker- en rechterlimieten



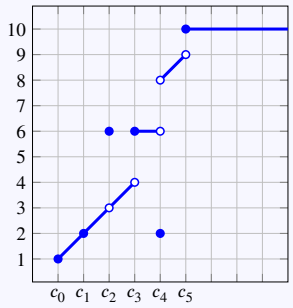




**Voorbeeld 6.2.3.** Linker- en rechterlimiet aflezen op een grafiek.




In de drie gevallen is de linkerlimiet als $x \to 2$ gelijk aan 2 en de rechterlimiet gelijk aan 3.
In de drie gevallen bestaat de limiet als $x \to 2$ niet.
De waarde van $f$ in het punt 2 heeft geen belang bij het bepalen van limieten als $x \to 2$.

**Voorbeeld 6.2.4.** Beschouw de functie $f$ met onderstaande grafiek en bijhorende limieten.




| | | | |
|---|---|---|---|
| in $c_0$ : | $\lim_{x \to c_0, x<c_0} f(x)$ geen betekenis | $\lim_{x \to c_0, x>c_0} f(x) = 1$ | $\lim_{x \to c_0} f(x) = 1$ (randpunt) |
| in $c_1$ : | $\lim_{x \to c_1, x<c_1} f(x) = 2$ | $\lim_{x \to c_1, x>c_1} f(x) = 2$ | $\lim_{x \to c_1} f(x) = 2$ |
| in $c_2$ : | $\lim_{x \to c_2, x<c_2} f(x) = 3$ | $\lim_{x \to c_2, x>c_2} f(x) = 3$ | $\lim_{x \to c_2} f(x) = 3$ |
| in $c_3$ : | $\lim_{x \to c_3, x<c_3} f(x) = 4$ | $\lim_{x \to c_3, x>c_3} f(x) = 6$ | $\lim_{x \to c_3} f(x)$ bestaat niet |
| in $c_4$ : | $\lim_{x \to c_4, x<c_4} f(x) = 6$ | $\lim_{x \to c_4, x>c_4} f(x) = 8$ | $\lim_{x \to c_4} f(x)$ bestaat niet |
| in $c_5$ : | $\lim_{x \to c_5, x<c_5} f(x) = 9$ | $\lim_{x \to c_5, x>c_5} f(x) = 10$ | $\lim_{x \to c_5} f(x)$ bestaat niet |

De waarde $f(c_2) = 6$ speelt geen enkele rol bij het bepalen van de limiet van $f$ in $c_2$: als $x$ dicht bij $c_2$ ligt, dan ligt $f(x)$ dicht bij 2. Bij de definitie van limiet zijn enkel de waarden *in de buurt* belangrijk. Op dezelfde manier speelt bij het bepalen van de limiet van $f$ in $c_4$ de waarde $f(c_4) = 2$ geen enkele rol: de limiet kijkt enkel in de buurt van $c_4$, en niet in $c_4$ zelf.

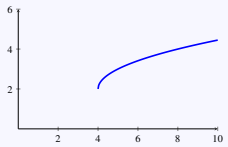
De functie $f$ maakt sprongen in $c_2, c_3, c_4$ en $c_5$, en het begrip 'limiet' tracht de waarde te bepalen die $f$ zou moeten gehad hebben als de grafiek van $f$ vloeiend zou zijn geweest. We zullen dat later nog exacter formuleren aan de hand van het begrip continuïteit. We kunnen alvast het volgende observeren: als $x$ langs links naar $c_4$ gaat, had die waarde 6 moeten zijn. Als $x$ langs rechts naar $c_4$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

## 6.2 Definitie linker- en rechterlimieten

gaat, had de waarde 8 moeten zijn. Deze waarden zijn niet aan elkaar gelijk, dus bestaat de limiet niet. Bovendien zijn zowel de linker- als de rechterlimiet verschillend van de functiewaarde $f(c_4) = 2$.

**Voorbeeld 6.2.5.** Beschouw de functie $x \mapsto 2 + \sqrt{x-4}$.




De **rechterlimiet** bestaat: $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} (2 + \sqrt{x-4}) = 2$

De **linkerlimiet** bestaat niet: $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ <}} (2 + \sqrt{x-4})$ is zinloos, want voor $x < 4$ is $\sqrt{x-4}$ niet gedefinieerd.

In deze cursus spreken we in dergelijke gevallen toch ook van **de limiet** $\lim\limits_{x\to 4} (2 + \sqrt{x-4})$, waarbij dus begrepen wordt dat in dit geval $x$ enkel langs rechts naar 4 kan gaan.

Volgende eigenschap geeft een precies verband tussen enerzijds limieten en anderzijds linker-en rechterlimieten. We noemen **een randpunt van het domein** elk punt op of aan de rand van het domein, met als typische voorbeelden de punten $a$ en $b$ van intervallen $[a, b]$, $[a, b[$ of $]a, b[$.

**Eigenschap 6.2.1.**

De limiet in een punt dat *geen randpunt* is van het domein bestaat als en slechts als

de linker- *en* de rechterlimiet er bestaan en beide aan elkaar gelijk zijn:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to c\\ <}} f(x) = L \text{ en } \lim_{\substack{x\to c\\ >}} f(x) = L$$

In randpunten van het domein bestaat de limiet zodra de linker- *of* de rechterlimiet er bestaan.

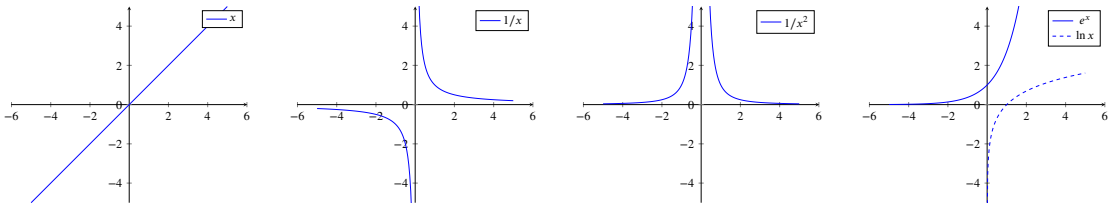
In sommige handboeken worden andere afspraken gemaakt over de precieze betekenis van het begrip 'randpunt' en 'limiet in een randpunt', en zegt men bv. dat in een randpunt toch geen limiet bestaat maar enkel een rechterlimiet. Dat is bv. van belang voor de limiet naar 0 van de vierkantswortel of de logaritme.

CC BY-NC-SA 4.0

## 6.3 Oefeningen basislimieten

Volgende oefening maakt je vertrouwd met het aflezen van limieten op grafieken.

**Oefening 6.3.1.** Bepaal volgende limieten op basis van volgende grafieken.




1. $\lim_{x\to+\infty} x = \ldots\ldots$
2. $\lim_{x\to-\infty} x = \ldots\ldots$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$
5. $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$
6. $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$
9. $\lim_{x\to+\infty} e^x = \ldots\ldots$
10. $\lim_{x\to-\infty} e^x = \ldots\ldots$
11. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = \ldots\ldots$
12. $\lim_{x\to-\infty} \ln x = \ldots\ldots$
13. $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = \ldots\ldots$
14. $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln x = \ldots\ldots$
15. $\lim_{x\to 0} \ln x = \ldots\ldots$

In volgende oefening moet je redeneren over limietgedrag bij relatief eenvoudige samengestelde functies, zonder de grafiek te tekenen.

**Oefening 6.3.2.** Bepaal volgende limieten via een redenering op basis van het gekende gedrag van de functies $e^x, \ln x$ en $\frac{1}{x}$. Je hoeft de grafieken van $e^{1/x}$ en $\ln(1+\frac{1}{x})$ hiervoor niet te kennen.

1. $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \ldots\ldots$
2. $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = \ldots\ldots$
3. $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \ldots\ldots$
4. $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\frac{1}{x}} = \ldots\ldots$
5. $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} e^{\frac{1}{x}} = \ldots\ldots$
6. $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) = \ldots\ldots$
7. $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) = \ldots\ldots$
8. $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(1+\frac{1}{x}) = \ldots\ldots$
9. $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln(1+\frac{1}{x}) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

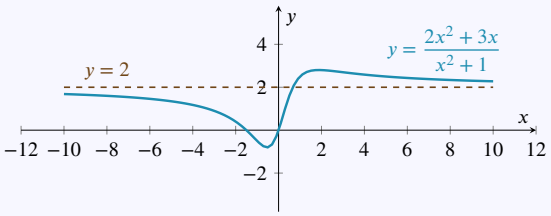
## 6.4 Asymptoten

Soms nadert de grafiek van een functie willekeurig dicht een rechte, die we dan asymptoot noemen:

**Definitie 6.4.1.** Een **asymptoot** is een rechte waartoe de grafiek van een functie willekeurig dicht nadert.

Men spreekt van **horizontale asymptoot (HA), verticale asymptoot (VA) of schuine asymptoot (SA)** naargelang de rechte respectievelijk horizontaal, verticaal of schuin is.

**Voorbeeld 6.4.1.** De functie $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{x^2+1}$ heeft de rechte $y = 2$ als (horizontale) asymptoot.

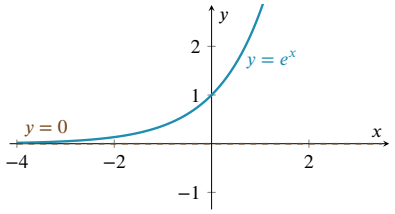


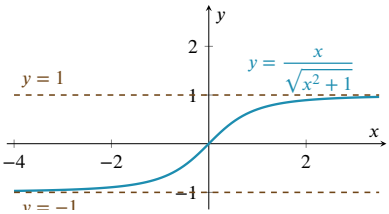

De grafiek van de functie komt inderdaad steeds dichter en dichter bij de horizontale rechte op hoogte 2 voor steeds groter wordende $x$-waarden, positief of negatief.

**Eigenschap 6.4.1.** Een functie $f$ heeft rechte $y = a$ als **horizontale asymptoot** als en slechts als

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{of / en} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

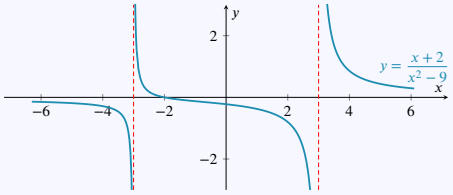
In bovenstaand voorbeeld bestonden beide limieten, en waren ze bovendien aan elkaar gelijk. Er bestaan ook functies waar slechts één van beide limieten bestaat, of waar ze wel beide bestaan maar verschillende waarden hebben. In dat geval heeft de functie twee horizontale asymptoten: één links en één rechts.




Nulpunten van de noemer kunnen leiden tot oneindige limieten, en dus tot een verticale asymptoot:

**Voorbeeld 6.4.2.** De functie $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-9}$ heeft de twee rechten $x = \pm 3$ als verticale asymptoten.



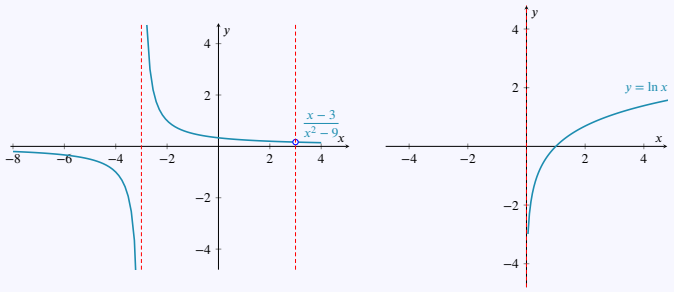

Verticale asymptoten komen enkel voor bij linker- of rechterlimieten die oneindig worden:

## 6.4 Asymptoten

**Eigenschap 6.4.2.** Een functie $f$ heeft rechte $x = a$ als **verticale asymptoot** als en slechts als

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of / en} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty$$

**Voorbeeld 6.4.3.** Niet elk nulpunt van de noemer moet aanleiding geven tot een verticale asymptoot, en niet elke verticale asymptoot komt voor in een nulpunt van de noemer.
Zo heeft de logaritmische functie wel een verticale asymptoot $x = 0$ maar geen noemer, en dus zeker geen nulpunten van de noemer.
En de functie $x \mapsto \dfrac{x-3}{x^2-9}$ heeft in $x = 3$ wel een nulpunt in de noemer, maar geen verticale asymptoot.




De noemer $x^2-9$ heeft nulpunten $x = \pm 3$, maar slechts één van deze nulpunten levert een asymptoot op. Inderdaad, via het merkwaardig product $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ volgt dat

$$\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

en dus is er in feite slechts één nulpunt van de noemer. In dit punt heeft de functie een verticale asymptoot $x = -3$. Let wel op dat de functie $f$ niet gedefinieerd is voor $x = 3$, omdat dit een nulpunt was van de originele schrijfwijze van $f(x)$ en dus niet tot het domein van $f$ behoorde.

**Opmerking 6.4.1.**

Een *eindige limiet* voor $x$ *naar oneindig* geeft een horizontale asymtoot, en een *oneindige (linker-of rechter-)limiet* voor $x$ naar $a \in \mathbb{R}$ geeft een verticale asymptoot.

Merk op: hoewel je kan argumenteren dat ook een *raaklijn* de grafiek willekeurig dicht nadert (namelijk in het raakpunt), noemen we een raaklijn toch *geen asymptoot*. Een asymptoot moet de grafiek ergens 'naderen zonder te raken', en dat kan enkel 'in oneindig', langs de $x$-as voor een HA of langs de $y$-as voor een VA. Als bij het naderen zowel langs de $x-as$ als langs de $y-as$ naar oneindig gegaan wordt, spreekt men van een schuine asymptoot, maar dat geval behandelen we hier niet.

**Oefening 6.4.1.** Bepaal de horizontale en verticale asymptoten van de volgende functies.

1. $f(x) = 2x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{1-x^2}$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

## 6.5 Schuine asymptoten

Soms nadert de grafiek van een functie voor grote $x$ een *schuine* rechte.

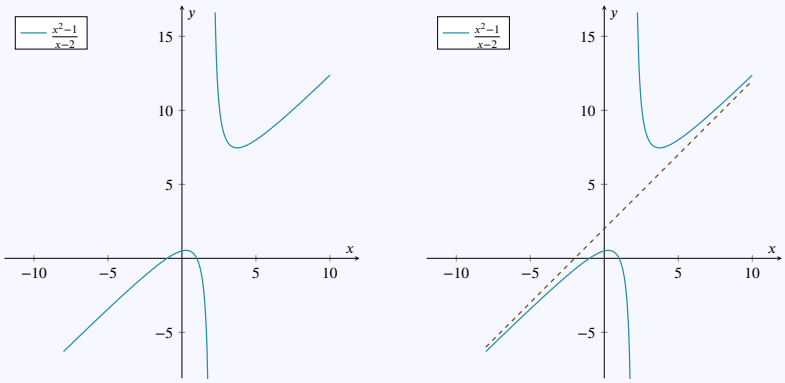
**Voorbeeld 6.5.1.** Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2}$.

Wegens het nulpunt $x = 2$ van de noemer dat geen nulpunt is van de teller, weten we dat er een verticale asymptoot is in $x = 2$. Je kan je afvragen hoe de functie zich gedraagt voor erg grote $x$.

Als $x \to \infty$ worden de termen $-1$ en $-2$ irrelevant en wordt $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2} \overset{|x| \text{ groot}}{\approx} \dfrac{x^2}{x} = x$, en dus is

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x-2} = +\infty \qquad \text{en} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x-2} = -\infty.$$

Op de tekening zie je dat in dit geval eigenlijk meer kan worden gezegd: de grafiek van $f$ lijkt steeds dichter naar een welbepaalde rechte te gaan. Merk opdat dat niet altijd het geval is: de grafiek van $x \mapsto x^2$ nadert *niet* naar een rechte.




Via de Euclidische deling vind je

$$\frac{x^2-1}{x-2} = (x+2) + \frac{3}{x-2} \qquad \left(\frac{\text{deeltal}}{\text{deler}} = \text{quotiënt} + \frac{\text{rest}}{\text{deler}}\right)$$

en voor grote $x$ wordt de term $\dfrac{3}{x-2}$ erg klein, en dus is $f(x) \overset{|x| \text{ groot}}{\approx} x+2$.

Het quotiënt van de Euclidische deling geeft in dit geval dus de rechte waartoe de grafiek nadert voor grote $x$.

Omdat $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x-2} = 0$ geldt ook

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{x-2} - (x+2)\right) = 0$$

en dit wordt precies de voorwaarde opdat de rechte $y = x+2$ een schuine asymptoot zou zijn van de functie $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-2}$.

Met andere woorden: hoe groter de $x$-waarden worden (voor negatieve en positieve $x$), hoe kleiner het verschil tussen $f(x)$ en de rechte $x+2$ wordt.

In het algemeen definiëren we schuine asymptoten als volgt:

CC BY-NC-SA 4.0

## 6.5 Schuine asymptoten

**Definitie 6.5.1** (Schuine asymptoten)**.**

De rechte $y = ax + b$ (met $a \neq 0$) is een **schuine asymptoot** van een functie $f$ als en slechts als

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 \qquad \text{(schuine asymptoot in } +\infty\text{)}$$

$$\text{of} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 \qquad \text{(schuine asymptoot in } -\infty\text{)}$$

De parameters $a$ en $b$ van een schuine asymptoot kunnen berekend worden met de volgende limieten:

**Eigenschap 6.5.1.**

De rechte $y = ax + b$ (met $a \neq 0$) is een **schuine asymptoot** van een functie $f$ als en slechts als

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} & = a \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) & = b \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} & = a \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax) & = b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Als minstens één van deze limieten niet bestaat of oneindig is, dan heeft $f$ *geen* schuine asymptoot.

Voor rationale functies is het vaak makkelijker om de Euclidische deling uit te voeren.

**Oefening 6.5.1.** Geef de vergelijking van alle asymptoten van volgende functies (voor zover ze er hebben).

1. $x \mapsto \dfrac{x^2-4}{x-1}$
2. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$
3. $x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$
4. $x \mapsto \dfrac{x-2}{x}$
5. $x \mapsto \dfrac{(x-3)(x^2-4)}{x^2-1}$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Module 7
# Afgeleiden

(Versie 2026/08/25H.36)

# 7.1 Intro afgeleiden

Het begrip *afgeleide* komt frequent voor in allerlei wetenschappelijke en andere contexten. De techniek van afgeleiden laat toe om erg precies, erg efficiënt en in erg uiteenlopende situaties te bestuderen hoe verschillende *veranderingen van elkaar afhangen*.

Vele fenomenen zoals bewegingen, temperatuursverlopen, productievolumes, epidemies en hoogteprofielen van wielerwedstrijden kunnen beschreven worden als functies. *Afgeleiden* zeggen dan iets over de *veranderingen van de functiewaarden*. Hoe *verandert* de temperatuur, het geproduceerde volume, het aantal besmette personen als de tijd, de prijs of de sociale contacten veranderen? In vele contexten is de *waarde* van de functie zelfs minder belangrijk dan de *verandering van de waarde*. Een renner die een berg oprijdt, hecht op cruciale momenten in de wedstrijd meer belang aan de *verandering van de hoogte*, dat is de steilheid van de berg, dan aan de *absolute hoogte* op dat punt. De winst die iemand behaalt bij een belegging in aandelen hangt niet zozeer af van de *waarde* van de aandelen op een bepaald ogenblik, maar van de *verandering van die waarde* tussen de aankoop en de verkoop.

In deze context begrijpen we functies dikwijls als een verband tussen een 'onafhankelijke' variabele (de tijd, de prijs, de lockdown maatregelen) en de 'afhankelijke' variabele (de temperatuur, de hoeveelheid geproduceerde producten of het aantal besmette personen).

Afgeleiden geven informatie over de *verhouding* tussen *de verandering van de afhankelijke variabele* ten opzichte van *de verandering van de onafhankelijke variabele*. Als je de onafhankelijke variabele varieert, wat gebeurt er dan met de afhankelijke variabele? Stijgt die, of daalt die, en hoe snel of hoe traag gebeurt dat? Je kan hetzelfde ook begrijpen in termen van *gevoeligheid*: hoe gevoelig is de afhankelijke variabele aan een wijziging in de onafhankelijke variabele? Bijvoorbeeld: hoe *gevoelig* is de aangroei van virussen aan temperatuurswijzigingen? Hoe gevoelig is de economische groei aan toenemende inflatie?

In wat volgt hebben we de leerstof over afgeleiden als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Enkele voorbeelden en een wiskundige definitie

(3) Enkele basisregels over het berekenen van afgeleiden

(4) Regels voor producten en quotiënten van functies

(5) Regels voor samenstellingen van functies

(6) De afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

(7) De afgeleiden van goniometrische functies

(8)

CC BY-NC-SA 4.0

# 7.2 Definitie afgeleide

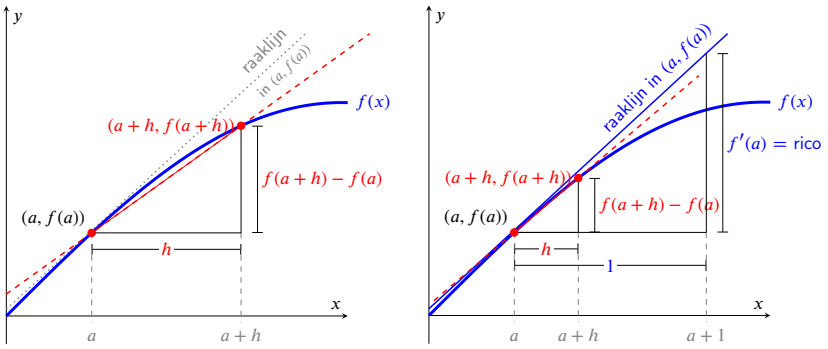
De *afgeleide van een reële functie in een punt* is een getal dat de helling van de grafiek in dat punt meet (concreet: het is de *richtingscoëfficiënt* van de *raaklijn* in dat punt). Je kan ook zeggen dat de afgeleide de *gevoeligheid* meet van de afhankelijke variabele voor veranderingen van de onafhankelijke variabele.

**Definitie 7.2.1.** De **afgeleide** van een reële functie $f$ in $a$, genoteerd $f'(a)$ is het getal

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

als deze limiet bestaat en eindig is, en we noemen $f$ dan **afleidbaar** of **differentieerbaar in** $a$.

De **afgeleide functie** is de functie $f' : x \mapsto f'(x)$, die enkel gedefinieerd is waar $f$ afleidbaar is.




**Opmerking 7.2.1.** Door $a$ te vervangen door $x_0$ en $h$ door $x - x_0$ wordt $h \to 0$ nu $x \to x_0$ en:

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

De afgeleide $f'(x_0)$ zegt dat $f(x)$ in de onmiddellijke omgeving van $x_0$ ongeveer $f'(x_0)$ keer zo snel verandert als $x$. Inderdaad, voor $x$ voldoende dicht bij $x_0$ geldt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x_0),$$

en dus $$f(x)-f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

of nog $$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

De laatste uitdrukking leidt tot de vergelijking van de raaklijn in $x_0$ aan de grafiek van $f$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

waarbij $f'(x_0)$ dus de **richtingscoefficiënt** van de raaklijn is.

Soms gebruikt men ook de notatie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \stackrel{\text{def}}{=} f'$ voor de afgeleide. Vooral bij integralen is dat handig.

In de praktijk bereken je een afgeleide nooit met deze definitie, maar met eenvoudige rekenregels.

CC BY-NC-SA 4.0

# 7.3 Basisregels

De basisregels voor afgeleiden behandelen het afleiden van machten, sommen en scalaire veelvouden. Deze basisregels worden later aangevuld met de regels voor producten en quotiënten en voor samenstellingen.

We geven telkens twee versies van de basisregels: eerst met de notatie $f'$, en vervolgens met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

**Eigenschap 7.3.1** (Basisregels voor machten)**.**

De afgeleiden van de constante functie $x \mapsto c$ en de machtsfunctie $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn

$$(x^r)' = rx^{r-1} \qquad (c)' = 0$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$

Merk op dat de machtregel voor *alle* reële exponenten geldt, en niet alleen voor natuurlijke getallen.

**Voorbeeld 7.3.1.**

1. $(1)' = 0$
2. $(\pi^2)' = 0$
3. $(x)' = 1$
4. $(x^2)' = 2x$
5. $(x^3)' = 3x^2$
6. $(x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
7. $(x^{-1/2})' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$
8. $(x^{n+42})' = (n+42)x^{n+41}$
9. $(x^{\pi})' = \pi x^{\pi-1}$

**Opmerking 7.3.1.**

De afgeleide van een **constante functie** $x \mapsto c$ is de nulfunctie $x \mapsto 0$: $\left(\sqrt{2}\right)' = 0$

De afgeleide van de **identieke functie** $x \mapsto x$ is de constante functie $x \mapsto 1$: $x' = 1$.
Inderdaad, dit volgt uit de formule $(x^r)' = rx^{r-1}$ voor $r = 1$: $x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$.

De afgeleide van een macht brengt een **kopie van de exponent naar voor** en **vermindert de exponent met** 1: $(x^5)' = 5x^4$ en $(x^{-2})' = -2x^{-3}$.

**Oefening 7.3.1.** Bereken volgende afgeleiden:

1. $(x^{3/2})' = \ldots\ldots$
2. $(x^{2/3})' = \ldots\ldots$
3. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \ldots\ldots$

Er zijn ook eenvoudige regels voor de som en scalaire veelvouden:

**Eigenschap 7.3.2** (Basisregels voor som en scalair veelvoud)**.**

De afgeleiden van som $f + g$ en scalair veelvoud $cf$ van afleidbare functies $f$ en $g$ en $c \in \mathbb{R}$ zijn

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$

CC BY-NC-SA 4.0

## 7.3 Basisregels

**Oefening 7.3.2.**

1. $(7x)' = \ldots\ldots$
2. $(7x^2)' = \ldots\ldots$
3. $(7x+1)' = \ldots\ldots$
4. $(7x^2+7x)' = \ldots\ldots$
5. $(2(x+1))' = \ldots\ldots$
6. $(x(x+1))' = \ldots\ldots$

**Opmerking 7.3.2.**

**De afgeleide van een scalair veelvoud is het scalair veelvoud van de afgeleide**: $(5x)' = 5x' = 5$.
of ook: **bij afleiden mag je constanten buiten brengen**: $(cf)' = cf'$.

**De afgeleide van een som is de som van de afgeleiden**: $(7+5x)' = 7' + (5x)' = 0 + 5 = 5$.
of ook: **afgeleiden mag je term per term berekenen**: $(f+g)' = f' + g'$.

Deze twee regels zijn samen equivalent met volgende regel:

$$(af+bg)' = af' + bg' \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af+bg) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$$

of: **de afgeleide van een lineaire combinatie is de lineaire combinatie van de afgeleiden**.

Met deze beperkte set van regels kunnen de afgeleiden van *alle* veeltermen berekend worden.

**Oefening 7.3.3.** Bereken volgende afgeleiden van veeltermen:

1. $\left(1+x+x^2\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(1+x+x^2+x^3\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(x+2x^2+3x^3+4x^4\right)' = \ldots\ldots$
5. $\left(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)' = \ldots\ldots$
6. $\left(\sqrt{\pi}+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4\right)' = \ldots\ldots$

**Oefening 7.3.4.** Bereken volgende afgeleiden

1. $\left(4x^2+8x+9\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(4x^2+8x+3^2\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left((2x)^2+8x+3^2\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(4x(x+2)+3^2\right)' = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

## 7.4 Product- en quotiëntregel

Met volgende formules kan je de afgeleiden berekenen van *producten en quotiënten* van functies:

**Eigenschap 7.4.1** (Productregel en quotiëntregel)**.**

De *afgeleide van het product* $f \cdot g$ en *het quotiënt* $\frac{f}{g}$ van afleidbare functies $f$ en $g$ is

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{(productregel)} \qquad \text{en} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \text{(quotiëntregel)}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2}$

**Opmerking 7.4.1.**

De productregel zegt dat de *afgeleide van een product* van functies $f \cdot g$ berekend wordt door

- de afgeleide van de eerste factor te vermenigvuldigen met de tweede factor,
- de afgeleide van de tweede factor te vermenigvuldigen met de eerste factor,
- en de *som* te maken van die resultaten: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Bij een product van *meerdere functies* pas je de productregel herhaaldelijk toe:

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h)' &= (f \cdot (g \cdot h))' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g \cdot h)' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g' \cdot h + g \cdot h') \\ &= f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'\end{aligned}$$

Dus: leid *elke* factor af, vermenigvuldig die afgeleide met de andere factoren en tel alle producten op.

**Voorbeeld 7.4.1.** Bereken de afgeleide van volgende functies.

**1.** $x \mapsto (x^3 + 7x - 1) \cdot (5x + 2)$

**Uitwerking:** Deze functie is het product van $x^3 + 7x - 1$ en $5x + 2$, en de productregel zegt dan dat

$$\begin{aligned}\big((x^3 + 7x - 1) \cdot (5x + 2)\big)' &= (x^3 + 7x - 1)' \cdot (5x + 2) + (x^3 + 7x - 1) \cdot (5x + 2)' \\ &= (3x^2 + 7) \cdot (5x + 2) + (x^3 + 7x - 1) \cdot (5) \\ &= 15x^3 + 6x^2 + 35x + 14 + 5x^3 + 35x - 5 = 20x^3 + 6x^2 + 70x + 9\end{aligned}$$

Je kan voor deze functie ook eerst de haakjes uitwerken en dan de regels van machten toepassen.

**2.** $x \mapsto \frac{x^2}{3x - 1}$

**Uitwerking:** Deze functie is het quotiënt van $x^2$ en $3x - 1$, en de quotiëntregel zegt dan dat

$$\left(\frac{x^2}{3x - 1}\right)' = \frac{(3x - 1)(2x) - (x^2)(3)}{(3x - 1)^2} = \frac{6x^2 - 2x - 3x^2}{(3x - 1)^2} = \frac{x(3x - 2)}{(3x - 1)^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

## 7.4 Product- en quotiëntregel

**3.** $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}\left(2x - x^2\right)$

**Uitwerking:** De wortel herschrijf je als een macht: $x^{\frac{2}{3}}(2x - x^2)$. De productregel zegt dan dat

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\left(2x - x^2\right)\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2x - x^2) + x^{\frac{2}{3}}(2 - 2x)$$

**Oefening 7.4.1.** Bereken de afgeleide van volgende functies.

**1.** $x \mapsto (x^3 + 27)(x^4 - 1)$

**2.** $x \mapsto \dfrac{2x + 3}{4x + 5}$

**3.** $x \mapsto \dfrac{x + 1}{x - 1}$

**4.** $x \mapsto (x^{42} + x^{13} + 1)(x^{2020} - 1)$

**5.** $x \mapsto x \cdot \sqrt{x} \cdot (x^3 + 1)$

**Oefening 7.4.2.** Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = x \cdot x^2$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

# 7.5 Kettingregel

De zogenaamde *kettingregel* laat toe om de afgeleide te berekenen van *samengestelde* functies.

**Eigenschap 7.5.1.** De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies $f$ en $g$ is

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \textbf{(kettingregel)}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(g(x))\big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big(g(x)\big) \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)$

**Extra: subtiliteiten bij de formulering met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.**

Bij samengestelde functies is er een wat subtiel maar erg belangrijk onderscheid tussen

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(g(x))\big) = \frac{\mathrm{d}(f\circ g)}{\mathrm{d}x}(x)$, de afgeleide van de samengestelde functie $f\circ g$

en $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big(g(x)\big)$, de afgeleide van de functie $f$, geëvalueerd in $g(x)$.

De kettingregel zegt: de afgeleide $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(g(x))\big)$ is het *product* van $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big(g(x)\big)$ met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$.

Voor niet-samengestelde functies heeft de plaats van $f$ en $(x)$ typisch geen belang: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.
En ja, dat is verwarrend ...

**Opmerking 7.5.1.**

De afgeleide van een *samenstelling* van functies bereken je **van buiten naar binnen**:

- bereken de afgeleide van de *buitenste* functie en evalueer in de binnenste: $f'(g(x))$,
- bereken de afgeleide van de *binnenste* functie en evalueer in $x$: $g'(x)$,
- maak het *product* van die resultaten: $(f\circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Bij de kettingregel let je zowel op de plaats van de *afgeleiden*: $(f\circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
als op de plaats van de *functies*: $(f\circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Merk ook op dat ergens wel logisch is om $f'$ in $g(x)$ te evalueren, en niet in $x$. Inderdaad, $f'(x)$ is mogelijk betekenisloos voor $x$ in het domein van $f\circ g$: bij $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en $g : x \mapsto x^2 - 5$ is $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ niet gedefinieerd in $x = -3$, maar $f(g(-3)) = \sqrt{(-3)^2 - 5} = \sqrt{9-5} = 2$ wel, en $f'(g(-3)) = \frac{1}{2\sqrt{(-3)^2-1}} = \frac{1}{4}$ ook.

Anderzijds is het ook logisch dat de afgeleide $f(g(x))'$ niet gewoon $f'(g(x))$ kan zijn: de functie $g : x \mapsto 100x$ drukt de grafiek van $f$ erg samen in de $x$-richting, en dus worden de raaklijnen veel steiler. Hier is $g'(x) = 100$, en dus $(f(100x))' = 100f'(100x)$, en zijn de rico's bij $f(100x)$ precies 100 keer groter dan die bij $f(x)$.

Bij een samenstelling van *meerdere functies* pas je de kettingregel herhaaldelijk toe:

$$\begin{aligned}\big(f(g(h(x)))\big)' &= f'(g(h(x))) \cdot \big(g(h(x))\big)' \\ &= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)\end{aligned}$$

en dus $\big(e^{\sin 5x}\big)' \underset{e^{g(h(x))}}{=} \big(e^{\sin 5x}\big) \cdot (\sin 5x)' \underset{\sin(h(x))}{=} \big(e^{\sin 5x}\big) \cdot (\cos 5x) \cdot (5x)' = 5 \cdot \big(e^{\sin 5x}\big) \cdot (\cos 5x)$

CC BY-NC-SA 4.0

## 7.5 Kettingregel

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

**Voorbeeld 7.5.1.** Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (5x+2)^3$

**Uitwerking:** De functie $x \mapsto (5x+2)^3$ is de samenstelling van $f : x \mapsto x^3$ en $g : x \mapsto 5x+2$ want $f(g(x)) = f(5x+2) = (5x+2)^3$.
Omdat $f' : x \mapsto 3x^2$ en $g' : x \mapsto 5$ zegt de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ dat

$$\Big( \underbrace{(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f(g(x))} \Big)' = \underbrace{3(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{5}_{g'(x)} = 15(5x+2)^2 = 15(25x^2+20x+4)$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(5x+2) = 3(5x+2)^2 = 3(25x^2+20x+4)$.

Zodra je voldoende vertrouwd bent met de kettingregel kan je zonder $f$ en $g$ direct schrijven

$$\big((5x+2)^3\big)' = 3(5x+2)^2 \cdot (5x+2)' = (125x^2+30x+12) \cdot 5 = 375x^2+300x+60.$$

Met de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie wordt dit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^3 = 3(5x+2)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2) = (125x^2+30x+12) \cdot 5 = 375x^2+300x+60.$$

Merk op dat je in dit voorbeeld de kettingregel niet *moet* gebruiken:

$$\big((5x+2)^3\big)' = \big(125x^3+300x^2+60x+8\big)' = 375x^2+300x+60.$$

**Voorbeeld 7.5.2.** Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sqrt{x^3-7}$

**Uitwerking:** De functie $x \mapsto \sqrt{x^3-7}$ is de samengestelling van $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en $g : x \mapsto x^3-7$ want $f(g(x)) = f(x^3-7) = (x^3-7)^{1/2}$.
Omdat $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en $g' : x \mapsto 3x^2$ zegt de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ dat

$$\Big( \underbrace{(\overbrace{x^3-7}^{g(x)})^{1/2}}_{f(g(x))} \Big)' = \underbrace{\frac{1}{2}(\overbrace{x^3-7}^{g(x)})^{-1/2}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{(3x^2)}_{g'(x)} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-7}}$$

**Voorbeeld 7.5.3.** Berekenen de afgeleide van de functie $f : [-2,+\infty[ \to \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sqrt{3x+6}$.

**Uitwerking:** Hiervoor gebruik je zowel de *productregel* als de *kettingregel*. De productregel levert

$$f'(x) = \Big(x \cdot \sqrt{3x+6}\Big)' = (x)' \cdot \sqrt{3x+6} + x \cdot \Big(\sqrt{3x+6}\Big)'$$

en met de kettingregel vind je $\Big(\sqrt{3x+6}\Big)' = \dfrac{1}{2\sqrt{3x+6}} \cdot (3x+6)' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+6}}$,

zodat $\Big(x \cdot \sqrt{3x+6}\Big)' = 1 \cdot \sqrt{3x+6} + x \cdot \dfrac{3}{2\sqrt{3x+6}} = \dfrac{2(3x+6)}{2\sqrt{3x+6}} + \dfrac{3x}{2\sqrt{3x+6}} = \dfrac{9x+12}{2\sqrt{3x+6}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 7.5 Kettingregel

**Oefening 7.5.1.** Bereken de afgeleide van volgende functies.

**1.** $x \mapsto (x^3 + 27)^{15}$

**2.** $x \mapsto (27x^3 + 5)^{15}$

CC BY-NC-SA 4.0

# 7.6 Basisoefeningen afgeleiden

**Oefening 7.6.1.** Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\left(x^{1/3}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(x^{-1/3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(9x^9\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(x^4 - 4x\right)' = \ldots\ldots$

**Oefening 7.6.2.** Bereken de afgeleide van volgende functies op twee manieren:

1. $(x^2 \cdot x^2)' = \ldots\ldots$
2. $\left((3x+5)^2\right)' = \ldots\ldots$

**Oefening 7.6.3.** Bereken de afgeleide van volgende rationale functies.

1. $\left(\frac{x-4}{x}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(\frac{x}{x+3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(\frac{1}{x+5}\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(\frac{4-x}{3-x}\right)' = \ldots\ldots$

**Oefening 7.6.4.** Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t^{-2} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 - 2\sqrt{x} + 5x - 2) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5 - x^4) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2x^{-n} = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1+x)(x+2)\big) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^{-3}(t+5)^7\right) = \ldots\ldots$
7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sqrt{1-2\theta} = \ldots\ldots$
8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2 - 7x + 8} = \ldots\ldots$
9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2+3)^4} = \ldots\ldots$

**Oefening 7.6.5.** Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het gegeven punt.

1. $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als $x$-coördinaat 1. $\ldots\ldots$
2. $f(x) = 1 - x^2$ in het punt met als $x$-coördinaat 2. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

# 7.7 Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide kan men aantonen dat:

**Eigenschap 7.7.1.** De afgeleide van de exponentiële en logaritmische functie zijn

$$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x$ $\qquad$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1}$

De kettingregel en het feit dat $a = e^{\ln a}$ en $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ geeft dan

**Gevolg 7.7.1.** Omdat $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ en $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x$ (met $a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$) geldt dat

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \ln a$ $\qquad$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

**Opmerking 7.7.1.**

- De afgeleide van $e^x$ is terug $e^x$. Dit is een erg handige en belangrijke eigenschap van de functie $e^x$ en ze kan beschouwd worden als de *definitie* van het getal $e$: het getal $e$ is het unieke getal $a \in \mathbb{R}$ waarvoor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x \stackrel{?}{=} a^x$.
- De afgeleide van $\ln x$ is $1/x$. Het lijkt wat merkwaardig dat in de mooie reeks van afgeleiden-van-een-macht-is-terug-een-macht (namelijk $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^r = r x^{r-1}$) ineens een vreemde eend opduikt: ook de afgeleide van $\ln x$ blijkt een macht te zijn (namelijk $x^{-1}$).
- De functie $x \mapsto e^x$ is essentieel de enige functie die gelijk is aan haar afgeleide. Inderdaad, stel dat voor een functie $f$ geldt dat $f = f'$. De quotiëntregel toegepast op $f(x)/e^x$ geeft dan:

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{e^x f'(x) - f(x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x(f'(x) - f(x))}{(e^x)^2} \stackrel{f'(x)=f(x)}{=} 0$$

  Omdat de afgeleide nul is, is $f(x)/e^x = c$ voor een constante $c \in \mathbb{R}$, en dus is $f(x) = ce^x$.

**Voorbeeld 7.7.1.**

**1.** De afgeleide van $f : x \mapsto \ln(x^{100})$ is $f' : x \mapsto \frac{100}{x}$

**Uitwerking:** Beschouw $f$ als samenstelling van $g(x) = \ln(x)$ en $h(x) = x^{100}$ en pas de kettingregel toe:

$$f'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{x^{100}} \cdot 100x^{99} = 100 \cdot \frac{1}{x} = \frac{100}{x}$$

Uit de rekenregels van logaritmen volgt echter gemakkelijker dat $\ln(x^{100}) = 100 \cdot \ln(x)$ en $(100 \cdot \ln x)' = \frac{100}{x}$.

**2.** De afgeleide van $f : x \mapsto x^4 - 4^x$ is $f' : x \mapsto 4x^3 - ln4 \cdot 4^x$

**3.** De afgeleide van $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$ is $f' : x \mapsto \frac{1-x}{e^x}$

CC BY-NC-SA 4.0

## 7.7 Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

**Uitwerking:** $\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{1e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{(1-x)}{e^x}$

**4.** De afgeleide van $f : x \mapsto e^{x^2}$ is $f' : x \mapsto 2x \cdot e^{x^2}$

**Uitwerking:** $(e^{x^2})' \overset{\text{kettingregel}}{=} e^{x^2} \cdot 2x$

**Oefening 7.7.1.**

**1.** De afgeleide van $f : x \mapsto x^4 \ln x$ is $f' : x \mapsto \ldots\ldots$

**2.** De afgeleide van $f : x \mapsto xe^{2x}$ is $f' : x \mapsto \ldots\ldots$

**3.** De afgeleide van $f : x \mapsto \frac{\ln x}{2^x}$ is $f' : x \mapsto \ldots\ldots$

**Oefening 7.7.2.** Bereken volgende afgeleiden.

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2 - x^2 + 3e^{-x}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

**2.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x + 3^x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4^{2x}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

**4.** $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x \ln x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

**5.** $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

**6.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3^{x^2}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

**Oefening 7.7.3.** Bereken volgende afgeleiden.

**1.** $(\pi^x)' = \ldots\ldots$

**2.** $(x^\pi)' = \ldots\ldots$

**3.** $(25 \cdot 7^x)' = \ldots\ldots$

**4.** $((a+7)^x)' = \ldots\ldots$

**5.** $(\ln x^2)' = \ldots\ldots$

**6.** $(\ln x^r)' = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

# 7.8 Afgeleiden van goniometrische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide kan men aantonen dat:

**Eigenschap 7.8.1** (Afgeleiden goniometrische functies)**.**

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

**Opmerking 7.8.1.**

- De afgeleide van de sinus is de cosinus en de afgeleide van de cosinus is *min* de sinus. Vind uzelf een ezelsbruggetje om die regel te onthouden. Sommigen onthouden SICO, voor (afgeleide van) SInus is COsinus, maar dat kan ongetwijfeld beter.
- De afgeleide van de sinus is niet zo eenvoudig te berekenen met de definitie, en we leggen hier niet uit *waarom* de afgeleide van de sinus gelijk is aan de cosinus.
- Zodra je weet dat $(\sin x)' = \cos x$ volgt met de kettingregel wel direct de formule voor $(\cos x)'$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \overset{\text{beide leden afleiden}}{\Longrightarrow} 2\cos x(\cos x)' + 2\sin x\cos x = 0 \implies (\cos x)' = -\sin x$$

- En de formule voor $(\tan x)'$ volgt dan eenvoudig uit de quotiëntregel:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot (\sin x)' - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- Omdat $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ kan je ook schrijven

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

wat soms handig is omdat het de afgeleide van de tangens schrijft in functie van een tangens.

**Voorbeeld 7.8.1.** Bereken de afgeleiden van de functies $x \mapsto \sin x^2$ en $x \mapsto \sin^2 x$ .

**1.** De afgeleide van $x \mapsto \sin x^2$ is de functie $x \mapsto 2x\cos x^2$.

**Uitwerking:** De functie $h : x \mapsto \sin(x^2)$ is de samenstelling van $f : x \mapsto \sin x$ en $g : x \mapsto x^2$ want $h(x) = \sin(x^2) = f(g(x))$. Omdat $f'(x) = \cos x$ en $g'(x) = 2x$ zegt de kettingregel $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ dat

$$\Big(\underbrace{\sin(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{\cos(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{2x}^{g'(x)} = 2x\cos x^2$$

Indien je voldoende vertrouwd bent met de kettingregel kan je zonder $f$ en $g$ direct schrijven

$$\big(\sin x^2\big)' = \cos x^2 \cdot \big(x^2\big)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$$

CC BY-NC-SA 4.0

## 7.8 Afgeleiden van goniometrische functies

en met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ wordt dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$$

**2.** De afgeleide van $x \mapsto \sin^2 x$ is de functie $x \mapsto 2\sin x\cos x$.

**Uitwerking:** De functie $x \mapsto \sin^2 x = (\sin x)^2$ is de samenstelling van $g : x \mapsto x^2$ en $f : x \mapsto \sin x$ want $(\sin x)^2 = g(f(x))$. Omdat $g' : x \mapsto 2x$ en $f' : x \mapsto \cos x$ zegt de kettingregel $\big(g(f(x))\big)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ dat

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{\sin x}^{f(x)})^2}_{g(f(x))}\Big)' = \underbrace{(2\overbrace{\sin x}^{f(x)})}_{g'(f(x))} \cdot \overbrace{\cos x}^{f'(x)} = 2\sin x\cos x$$

Indien je voldoende vertrouwd bent met de kettingregel kan je zonder $f$ en $g$ direct schrijven

$$\big(\sin^2 x\big)' = \big((\sin x)^2\big)' = (2\sin x)\cdot(\sin x)' = 2\sin x\cdot\cos x$$

en met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ wordt dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^2 = 2(\sin x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

Merk op dat je het antwoord nog kan herschrijven als $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

**Oefening 7.8.1.** Bereken volgende afgeleiden.

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin 42x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

**2.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x^{42}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin^{42} x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

**4.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos^{42} x$ heeft als afgeleide $f'(x) = \ldots\ldots$

**Oefening 7.8.2.** Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sin x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

# 7.9 Oefeningen afgeleiden speciale functies

**Oefening 7.9.1.** Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $(x + \sin x)' = \ldots\ldots$
2. $(x - \cos x)' = \ldots\ldots$
3. $(7e^x)' = \ldots\ldots$
4. $(e^{7x})' = \ldots\ldots$
5. $(\sin x + e^x)' = \ldots\ldots$

**Oefening 7.9.2.** Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2\cos t) = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(4x+5) = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \ldots\ldots$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(-8x^2-1) = \ldots\ldots$
7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3 3x = \ldots\ldots$
8. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t\ \sin(t^2)) = \ldots\ldots$
9. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t^2) = \ldots\ldots$

**Oefening 7.9.3.** Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $(2e^{-x})' = \ldots\ldots$
2. $(e^{2x})' = \ldots\ldots$
3. $(e^{x+2})' = \ldots\ldots$
4. $(e^{2x+2})' = \ldots\ldots$
5. $(e^{x^2})' = \ldots\ldots$
6. $(e^{2x^2+3})' = \ldots\ldots$
7. $(e^{x^2+2x+3})' = \ldots\ldots e^{x^2+2x+3}$
8. $(e^{1-x^2})' = \ldots\ldots$
9. $(2e^{\sqrt{x}})' = \ldots\ldots$

**Oefening 7.9.4.** Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sin t^2} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^{\sin x+2x} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{1+\tan x} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

## 7.9 Oefeningen afgeleiden speciale functies

**4.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \ldots\ldots$

**5.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin(3x)\cdot\cos(2x)\big) = \ldots\ldots$

**6.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{2x-1} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

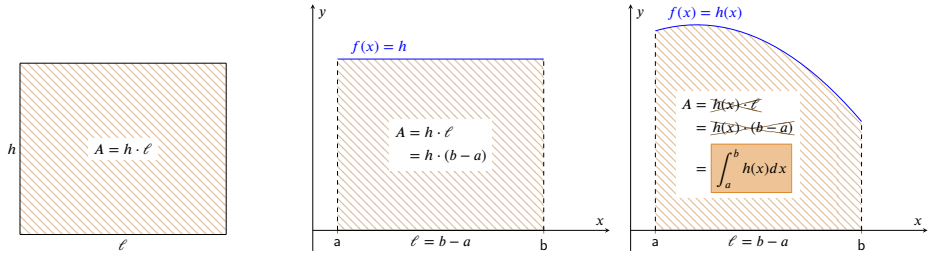
# Module 8
# Integralen

(Versie 2026/08/25H.36)

# 8.1 Definitie van integralen

Het rekenen met *integralen* is absoluut fundamenteel in vele wetenschappen. De uitvinding van de integraalrekening in de zeventiende eeuw heeft mee de basis gelegd van de wetenschappelijke en industriële revolutie die het leven op aarde de voorbije drie eeuwen enorm heeft veranderd. Het is niet overdreven te stellen dat zonder integralen mechanica, relativiteitstheorie, chemie, economie, Google, Facebook en Twitter allemaal ondenkbaar zouden zijn. U heeft het enorme voorrecht er zo dadelijk mee kennis te maken. Voor sommigen is dat herhaling, maar voor anderen is dit een volledig nieuw concept.

In zijn meest eenvoudige vorm is de integraalrekening een directe veralgemening van de formule voor de *oppervlakte van een rechthoek*. De formule $h \cdot \ell$ berekent de oppervlakte van een rechthoek met lengte $\ell$ en hoogte $h$. Integralen berekenen de oppervlakte van 'rechthoeken met een variërende hoogte':




De integraal $\int_a^b h(x)dx$ drukt dus de oppervlakte uit van de 'rechthoek' met bovenkant de functie $h(x)$. Wat wiskundiger uitgedrukt: de integraal is *de oppervlakte onder de grafiek* van een functie:

**Definitie 8.1.1** (Bepaalde integraal)**.**

De **bepaalde integraal** van een continue, *positieve* functie $f$ over een interval $[a, b]$, genoteerd als

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

is de *oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van $f$, de $x$-as en de grenzen $x = a$ en $x = b$.

We noemen $a$ en $b$ de **integratiegrenzen** en $[a, b]$ het **integratie-interval**.

Merk op dat deze bepaalde integraal dus enkel een naam en een notatie is voor een oppervlakte, en ons dus geenszins vooruit helpt om die oppervlakte ook te *berekenen*.

Gelukkig zijn wiskundigen er in geslaagd om een op het eerste zicht erg merkwaardig verband te leggen met de *omgekeerde bewerking van afleiden*. Dat leidt tot de zogenaamde **onbepaalde integralen** en is wat abstracter en minder motiverend dan oppervlaktes berekenen, maar het levert onmiddellijk krachtige rekenmethodes op.

De 'verzameling van alle functies die als afgeleide de functie $f$ hebben' noemen we de **onbepaalde integraal** van de functie $f$ en een wat formele maar niet zo erg belangrijke definitie gaat als volgt:

**Definitie 8.1.2** (Onbepaalde integraal)**.**

De **onbepaalde integraal** van een functie $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, genoteerd $\int f(x)\,dx$, is de *verzameling van alle functies met als afgeleide* $f$. Deze functies zijn allemaal elkaar gelijk op een constante na en noteren we als

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{notatie}}{=} F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{met } F \text{ zodanig dat } F' = f.$$

## 8.1 Definitie van integralen

We noemen $f(x)$ de **integrand**, $x$ de **integratievariabele** en $c$ de **integratieconstante**.
Het berekenen van een $F$ zodat $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ noemt men het **integreren** van $f(x)$.
Een functie $F$ zodat $F' = f$ noemt men ook een **primitieve functie** van $f$.

We zullen verder rekenregels bespreken om functies te integreren.

Omwille van de prachtige en erg krachtige **Hoofdstelling van de integraalrekening** is dat een zinvolle bezigheid, want daardoor kunnen we *bepaalde integralen effectief berekenen*:

de *bepaalde integraal* $\int_a^b f(x)dx$
(*interessant*, want de oppervlakte of meer algemeen
een product-met-een-verandererende-grootheid)
kan *berekend* worden door
een *onbepaalde integraal* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ met $F(x) = \int f(x)dx$
(*saai*, want wat abstract omgekeerde-van-afleiden maar wel *berekenbaar*).

**Eigenschap 8.1.1** (Hoofdstelling van de integraalrekening)**.**

Als $\int f(x)dx = F(x) + c$ op een interval $[a, b]$ dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a) \qquad \overset{\text{notatie}}{=} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Met deze formule kan je een *bepaalde* integraal berekenen door de overeenkomende *onbepaalde* integraal te berekenen en dan de integratiegrenzen in te vullen.

Deze stelling en de rekenregels voor onbepaalde integralen laten spectaculaire berekeningen toe: de afgelegde weg bij variërende snelheden, de winst bij variërende verkoopprijzen, het aantal corona-slachtoffers bij variërende omstandigheden.

**Voorbeeld 8.1.1.** Bereken de afstand die een auto heeft afgelegd na 10 seconden als hij aan een constant snelheid van 90 km/u rijdt.

**Uitwerking:** In één uur zitten 3600 seconden (want 60 minuten van elk 60 seconden), en dus legt die auto in één seconde 90/3600 km af, of 90000/3600 = 900/36 = 25 m. Na 10 seconden heeft die auto dus 280 meter afgelegd.

**Voorbeeld 8.1.2.** Bereken de afstand die een auto heeft afgelegd na 10 seconden als hij in die 10 seconden optrekt van stilstand tot 100 km/u. Neem aan dat de versnelling lineair verloopt, dus na 1 seconde 10 km/u, na 2 seconden 20 km/u, na 3 sec 30 km/u en zo verder tot 100 km/u na 10 sec.

**Uitwerking:** De auto legt nu elke seconde een *verschillende* afstand af, en een eenvoudige toepassing van de regel van drie werkt nu niet meer om de totale afstand te berekenen. Het is duidelijk dat een optrekkende wagen aanzienlijk minder ver zal raken dan een wagen met de constante maximumsnelheid.

Na $t$ seconden is de snelheid $10 \cdot t$ km/u, en je kan de afgelegde weg dan schrijven als

$$\int_0^{10} (10 \cdot t)dt$$

CC BY-NC-SA 4.0

## 8.2 Basisintegralen

De onbepaalde integraal van een functie $f$ is per definitie $\int f(x)dx = F(x)+c$ met $F' = f$. Dit betekent dat integreren en differentiëren elkaars inverse zijn. Voor een aantal functies is het zeer gemakkelijk om de onbepaalde integraal te vinden: namelijk voor de uitkomsten van de basisafgeleiden. Inderdaad, neem als voorbeeld $(\sin x)' = \cos x$. Stel dat je een functie $F$ zoekt waarvan de afgeleide gelijk is aan het rechterlid, dus gelijk aan $f(x) = \cos x$. De formule voor de afgeleide zegt dan dat $F(x) = \sin x$ als afgeleide $f(x) = \cos x$ heeft. Het volstaat dus om de reeks basis*afgeleiden* van *rechts naar links* te lezen om een hele reeks basis*integralen* te vinden. In onderstaand overzicht is de afgeleide van het rechterlid steeds de integrand in het linkerlid.

**Eigenschap 8.2.1** (Basisintegralen)**.** (met $c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}, r \neq -1, a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$)

$$\begin{array}{lcllcl}
\displaystyle\int 0\,dx & = & c & \displaystyle\int dx & = & x+c \\
\displaystyle\int x^r\,dx & = & \dfrac{1}{r+1}x^{r+1}+c & \displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x|+c \\
\displaystyle\int e^x\,dx & = & e^x+c & \displaystyle\int a^x\,dx & = & \dfrac{a^x}{\ln a}+c \\
\displaystyle\int \sin x\,dx & = & -\cos x+c & \displaystyle\int \cos x\,dx & = & \sin x+c \\
\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx & = & \tan x+c & \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx & = & -\cot x+c \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx & = & \mathrm{bgsin}\,x+c & \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx & = & \mathrm{bgtan}\,x+c
\end{array}$$

**Opmerking 8.2.1.**

Een *basisintegraal* uitrekenen is eenvoudig want die zoek je op in de tabel. Merk op dat je dus wel snel moet kunnen herkennen *of* een bepaalde integraal al dan niet een basisintegraal is. Je moet bijvoorbeeld geen berekeningsmethode zoeken voor $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$, want deze integraal staat in de tabel.

**Voorbeeld 8.2.1.** Basisintegralen:

(a) $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+c$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

(c) $\displaystyle\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2}+c = -\frac{1}{2x^2}+c$

(d) $\displaystyle\int 7^x\,dx = \frac{7^x}{\ln 7}+c$

De rekenregels voor som en scalaire veelvouden zijn analoog aan deze voor afgeleiden:

**Eigenschap 8.2.2.** Voor integreerbare functies $f$ en $g$ en $a, b \in \mathbb{R}$ gelden volgende formules:

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int af(x)\,dx & = & \displaystyle a\int f(x)\,dx & \text{(veelvoud)} \\
\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx & = & \displaystyle\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx & \text{(som)} \\
\displaystyle\int (af(x)+bg(x))\,dx & = & \displaystyle a\int f(x)\,dx+b\int g(x)\,dx & \text{(lineaire combinatie)}
\end{array}$$

De rekenregel voor de som noemt men ook *integratie door splitsing*.

CC BY-NC-SA 4.0

## 8.2 Basisintegralen

**Voorbeeld 8.2.2.** $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$, met $c \in \mathbb{R}$.

Als we de uitwerking heel nauwkeurig zouden noteren krijgen we:

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\left(\int x\,dx\right) = 2\left(\frac{x^2}{2} + c\right) = x^2 + 2c = x^2 + c', \text{ met } c' \in \mathbb{R}.$$

We noteren dit echter korter, zonder expliciet $c' = 2c$ te stellen: $\int 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

We veralgemenen vorig voorbeeld: Als $F$ een primitieve functie is van $f$, dan is

$$2\int f(x)\,dx = 2(F(x) + c) = 2F(x) + 2c, \quad c \in \mathbb{R}$$

We stellen $2c = c'$. Als $c$ een willekeurige constante is, dan is $c' = 2c$ ook een willekeurige constante.

$$2\int f(x)\,dx = 2F(x) + c', \quad c' \in \mathbb{R}$$

Omdat zowel $c$ als $c'$ willekeurige constanten voorstellen kunnen we ook noteren dat

$$2\int f(x)\,dx = 2F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Opmerking 8.2.2.**

Als in de functie $f$ meerdere letters voorkomen (bijvoorbeeld zowel de letter $t$ als $x$), dan is steeds één letter de integratieveranderlijke, en beschouwen we de andere letter(s) als constanten of parameters. Welke letter de integratieveranderlijke is wordt aangeduid door het symbool $dx$ of $dt$:

$$\int (tx^2)\,dx \neq \int (tx^2)\,dt.$$

Immers, $\int (tx^2)\,dx = t\int x^2\,dx = \frac{tx^3}{3} + c$ en $\int (tx^2)\,dt = x^2\int t\,dt = \frac{x^2t^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

**Oefening 8.2.1.** Bereken volgende onbepaalde integralen:

**1.** $\int x^{-2}\,dx = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** Basisintegraal $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ voor $r = -2$

**2.** $\int e^x\,dx = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** Dit is een basisintegraal.

**3.** $\int 8^x\,dx = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** Dit is een basisintegraal.

**4.** $\int x^3 \cdot \sqrt{x}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

## 8.2 Basisintegralen

**5.** $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a=3$ en $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{bgtan}\,x + c$ is een basisintegraal.

**6.** $\int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a=\frac{1}{2}$ en $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$ is een basisintegraal.

**7.** $\int 2^8 x\,dx = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a=2^8$ en $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$.

**8.** $\int 2y\,dy = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** We hebben hier enkel de letter $x$ vervangen door $y$.

**9.** $\int ax\,dx = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** Hier is $a$ een constante en $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a$ een constante.

**10.** $\int tx\,dx = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** Hier is $t$ is een constante.

**11.** $\int tx\,dt = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** Hier is $t$ de integratievariabele en $x$ dus een constante.

**12.** $\int \cos y\,dy = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** Want $(\sin y)' = \cos y$. Dit is een basisintegraal.

**13.** $\int \sin t\,dt = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** Want $(\cos t)' = -\sin t$. Dit is een basisintegraal.

**14.** $\int 2^{3x}\,dx = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** Gebruik $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$. Dit kan ook met substitutie (zie verder).

**15.** $\int e^{2x}\,dx = \ldots\ldots$

**Uitwerking:** Gebruik $e^{2x} = (e^2)^x$ en $\ln(e^2) = 2$. Dit kan ook met substitutie (zie verder).

Merk op dat je ook kan schrijven $e^{2x} = (e^x)^2$, maar dan kan je toch nog *niet* de formule voor $\int x^2 dx$ toepassen.

CC BY-NC-SA 4.0

## 8.2 Basisintegralen

**Oefening 8.2.2.** Bereken volgende onbepaalde integralen door splitsing:

1. $\int \left(3x^2 + 2x + 1\right)\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int \left(3x^2 + 2x + \cos x + 7^x\right)\, dx = \ldots\ldots$
3. $\int \dfrac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + 21}{x^3}\, dx = \ldots\ldots$

Soms moet je een beetje creatief zijn om door splitsing een integraal te schrijven als een som van basisintegralen:

**Oefening 8.2.3.** Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int 1\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \ldots\ldots$

**Waarschuwing 8.2.1** (Veelgemaakte fouten)**.**

- De onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen WEL:

  *som* $\displaystyle\int (\cos x + x^2)\, dx = \int \cos x\, dx + \int x^2\, dx = \sin x + \frac{x^3}{3} + c$

  *constante factor* $\displaystyle\int 3x^2\, dx = 3\int x^2\, dx = 3\,\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$

- Een onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen NIET:

  integraal van *product* $\displaystyle\int \cos x \cdot x^2\, dx = \int \cos x\, dx \cdot \int x^2\, dx$

  integraal van *samenstelling* $\displaystyle\int (\cos x)^2\, dx = \frac{(\cos x)^3}{3} + c$

  Er bestaan *geen algemene regels*, maar wel een aantal *technieken* die we verder zullen bespreken.

**Oefening 8.2.4.** Zijn volgende gelijkheden juist of fout? Verklaar.

1. Juist | Fout $\displaystyle\int (x \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int x dx\right) \cdot \left(\int x\, dx\right)$
2. Juist | Fout $\displaystyle\int (2 \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int 2 dx\right) \cdot \left(\int x\, dx\right)$
3. Juist | Fout $\displaystyle\int (2 \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} 2 \cdot \left(\int x\, dx\right)$
4. Juist | Fout $\displaystyle\int x^2\, dx \stackrel{?}{=} \left(\int x\, dx\right)^2$

CC BY-NC-SA 4.0

# 8.3 Integratie door substitutie

**Voorbeeld 8.3.1.** Berekening van de integraal $\int (2x+5)^7\,dx$.

**Uitwerking:** De integraal $\int (2x+5)^7\,dx$ kan in principe berekend worden door de zevende macht uit te rekenen, ofwel met distributiviteit via $(2x+5)^7 = (2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)$, ofwel met het Binomium van Newton, en dan term per term te integreren. Dat kan, maar het is wel erg veel rekenwerk.

Je kan met wat nadenken in dit geval het uitwerken van de macht vermijden, door op te merken dat de integrand een 7-de macht is, en dus een klein beetje lijkt op de basisintegraal

$$\int u^7\,du = \frac{u^8}{8} + c, \text{ met } u = 2x+5.$$

Als we in $u^7\,du$ de $u$ vervangen door $2x+5$, krijgen we

$$u^7\,du = (2x+5)^7\,d(2x+5) = (2x+5)^7\cdot 2\,dx,$$

waar we gebruik maakten van de eigenschap $df = f'(x)dx$ en dus $d(2x+5) = 2dx + 0 = 2dx$. De gelijkheid $u^7\,du = (2x+5)^7\cdot 2\,dx$ integreren geeft

$$\int u^7\,du = \int (2x+5)^7\cdot 2\,dx.$$

Hierbij lijkt het rechterlid erg op de gezochte integraal, en het linkerlid is eenvoudig uit te rekenen. Dus:

$$\int (2x+5)^7\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+5)^7\,2dx \overset{\frac{d}{dx}(2x+5)=2}{=} \frac{1}{2}\int (2x+5)^7\,d(2x+5) \overset{2x+5=u}{=} \frac{1}{2}\int u^7\,du = \frac{1}{2}\frac{u^8}{8}+c \overset{u=2x+5}{=} \frac{(2x+5)^8}{16}+c$$

We hebben dus - met wat geluk weliswaar - de integraal $\int (2x+5)^7\,dx$ uitgerekend *zonder* de zevende macht van $2x+5$ te berekenen.

De uitkomst is al direct ontbonden in factoren, dat is veel bondiger en duidelijker dan wanneer we de zevende macht hadden uitgerekend en de resulterende veelterm van graad 7 term per term hadden geïntegreerd. Als je ook zou geïnteresseerd zijn in nulpunten van de uitkomst is deze ontbinding in factoren bijzonder nuttig.

Bovenstaand voorbeeld leidt onmiddellijk tot volgende meer algemene regel

**Eigenschap 8.3.1** (Substitutieregel)**.**

Omdat $\frac{d}{dx}(ax+b) = a$ en dus $d(ax+b) = a\,dx$ of ook $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$ geldt dat

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^n\,d(ax+b) = \frac{1}{a}\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}$$

Dus: als je een macht van $ax+b$ integreert, komt er een extra factor $\frac{1}{a}$ in de uitkomst.

**Oefening 8.3.1.** Bereken volgende integralen:

**1.** $\int (5x+7)^6\,dx = \ldots\ldots$

**2.** $\int (7x+6)^5\,dx = \ldots\ldots$

Merk op dat dezelfde techniek ook kan worden toegepast voor moeilijkere integralen:

CC BY-NC-SA 4.0

## 8.3 Integratie door substitutie

**Voorbeeld 8.3.2.** Uitdaging: bereken de integraal $\int \sin(x)\cos(x)dx$.

**Uitwerking:**

Omdat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x)$, en dus $d\sin(x) = \cos(x)\,dx$ kan je met $u = \sin(x)$ schrijven

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = \int \sin(x)\,d\sin(x) = \int u\,du = \frac{1}{2}v^2 + c = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$$

Sommige slimmeriken zullen opmerken dat je even goed $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x)$ had kunnen gebruiken om dan met $v = \cos(x)$ te schrijven

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = -\int \cos(x)\,d\cos(x) = -\int u\,du = -\frac{1}{2}u^2 + c = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + c$$

wat *een andere uitkomst* lijkt te geven.

Andere slimmeriken herkennen de formule $\sin 2x = 2\sin(x)\cos(x)$, en rekenen als volgt:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(x)dx &= \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \sin(2x)\,d(2x) \\ &= \frac{1}{4}\int \sin(u)\,du \\ &= -\frac{1}{4}\cos(u) + c \\ &= -\frac{1}{4}\cos(2x) + c\end{aligned}$$

wat *nog een andere uitkomst* geeft.

Dit lijkt een ernstig probleem: afhankelijk *hoe* je iets berekent krijg je *een andere uitkomst*.

Gelukkig moet je echter maar even nadenken om vast te stellen dat wegens $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ en dus $\cos^2(x) = -\sin^2(x) + 1$ de eerste uitkomsten omwille van de willekeurige constante $c$ eigenlijk toch gelijk zijn!

En gelukkig is ook $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$, en dus is

$$-\frac{1}{4}\cos(2x) + c = -\frac{1}{4}(2\cos^2(x) - 1) + c = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + (c + \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + c_1$$

Iedereen kan hier dus vaststellen dat de wiskunde goed en mooi in elkaar zit: er zijn hier drie manieren om hetzelfde te berekenen, maar op het eerste gezicht geven die een verschillend resultaat. Dank zij de goniometrische formules en het gelukkige feit dat we voldoende voorzichtig zijn geweest om de integraal maar 'op een constante na' vast te leggen, komt alles toch in orde.

CC BY-NC-SA 4.0

## 8.4 Partiële integratie

De *productregel voor afgeleiden* leidt tot de interessante methode van '*partiële integratie*'.

Volgend inleidend voorbeeld berekent de integraal van een speciaal gekozen product:

**Voorbeeld 8.4.1.** Bereken de integraal $\int xe^x\,dx$.

**Uitwerking:** De productregel voor afgeleiden toepassen op het product $x \cdot e^x$ geeft

$$\begin{aligned} d(x \cdot e^x) &= (dx) \cdot e^x + x(de^x) \\ &= e^x dx + xe^x dx \end{aligned}$$

en de gelijkheid $d(x \cdot e^x) = e^x dx + xe^x dx$ integreren levert

$$\int d(x \cdot e^x) = \int e^x dx + \int xe^x dx.$$

De eerste twee integralen zijn direct te berekenen en wat overblijft is de gezochte integraal:

$$xe^x + c = e^x + \int xe^x dx$$

en bijgevolg is

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$$

We hebben dus - met wat geluk weliswaar - de integraal $\int xe^x\,dx$ uitgerekend.

De techniek van partiële integratie veralgemeent dit voorbeeld.

De regel voor partiële integratie volgt onmiddellijk uit de regel voor de afgeleide van het product van twee functies $f$ en $u$.

$$(f(x) \cdot u(x))' = f'(x) \cdot u(x) + f(x) \cdot u'(x)$$

Inderdaad, als we beide leden integreren krijgen we

$$\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = \int f'(x) \cdot u(x)\,dx + \int f(x) \cdot u'(x)\,dx.$$

Na termen van lid veranderen krijgen we

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = \int (f(x) \cdot u(x))'\,dx - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Omdat $\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = f(x) \cdot u(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ wordt dit

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x) \cdot u(x) - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Dit is de formule voor partiële integratie, zo genoemd omdat de integraal $\int f(x) \cdot u'(x)\,dx$ gedeeltelijk, dus partieel, is geïntegreerd: we hebben al een deel van de primitieve functie, namelijk $f(x) \cdot u(x)$, en er blijft nog een ander - hopelijk eenvoudiger te berekenen - deel over, namelijk $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$. We hebben $f(x) \cdot u(x)$ genoteerd en niet $f(x) \cdot u(x) + c$, omdat het resultaat van de berekening van de tweede term van het rechterlid, $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$, ook slechts op een constante na bepaald is.

CC BY-NC-SA 4.0

## 8.4 Partiële integratie

**Eigenschap 8.4.1** (Partiële integratie)**.**

Omdat $d(u \cdot f) = u \cdot df + f \cdot du$ (kettingregel), en dus $\int d(u \cdot f) = \int u \cdot df + \int f \cdot du$ kan de integraal van het product $\int f(x)u'(x)\,dx$ worden geschreven als

$$\int f(x)u'(x)\,dx = u(x) \cdot f(x) - \int u(x) \cdot f'(x)\,dx$$

of korter genoteerd:

$$\int f\,du = f \cdot u - \int u\,df\,.$$

In oefeningen wordt dikwijls $\overset{P.I.}{=}$ geschreven om het gebruik van partiële integratie aan te duiden.

**Opmerking 8.4.1.** Men schrijft de regel voor partiële integratie ook dikwijls met functies $f$ en $g$:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

of met functies $u$ en $v$ waarbij $du = u'(x)dx$ en $dv = v'(x)dx$:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

De uitdaging bij partiële integratie is de integrand te schrijven als een product $f(x) \cdot w(x)$ zodat

- de factor $w(x)$ makkelijk kan worden geïntegreerd. Je vindt $W(x)$ zodat
$$\int w(x)\,dx = W(x) + c$$
- ook $f'(x) \cdot W(x)$ kan worden geïntegreerd. Je vindt $H(x)$ zodat
$$\int W(x)f'(x)\,dx = H(x) + c.$$

In dat geval is de integraal $\int f(x)w(x)\,dx$ berekend:

$$\int f(x)w(x)\,dx = f(x) \cdot W(x) - H(x) + c.$$

**Voorbeeld 8.4.2.** Bereken $\int xe^x\,dx$.

Gebruik de formule $\int f\,du = f \cdot u - \int u\,df$ met $f(x) = x$ en $du = u'(x)\,dx = e^x\,dx$. Dan geldt

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x\,dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{d(e^x)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{e^x}_{u(x)}\underbrace{dx}_{df}$$
$$= xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

## 8.4 Partiële integratie

De keuze van $f$ en $u$ ligt niet vast. Stel dat we hier een andere keuze hadden gemaakt voor $f$ en $u$, namelijk $f(x) = e^x$ en $u'(x) = x$. Dan is $f'(x) = e^x$ en $u(x) = \frac{x^2}{2}$. Partiële integratie geeft dan

$$\int xe^x \, dx \overset{P.I.}{=} e^x \, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 e^x \, dx.$$

In de tweede integraal is de macht van $x$ *verhoogd* van 1 naar 2. Dus de $x$ in de eerste integraal wordt een $x^2$ in de tweede integraal. Met deze keuze van $f$ en $u$ wordt de nieuwe integraal *nog ingewikkelder dan de oorspronkelijke*. Hoewel de gelijkheid correct is, helpt ze niet. *Een goede keuze* voor $f$ en $u$ is dus erg belangrijk.

**Voorbeeld 8.4.3.** Bereken $\int x \sin x \, dx$.

**Uitwerking:** Gebruik de formule $\int f \, du = f \cdot u - \int u \, df$ met $f(x) = x$ en $du = u'(x) \, dx = \sin x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x \, dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{d(-\cos x)}_{du} &\overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} \underbrace{dx}_{df} \\
&= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\
&= -x \cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

## 8.5 Oefeningen integralen

**Oefening 8.5.1.** Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{1}{3-x}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{x}{3-x}\,dx = \ldots\ldots$

**Oefening 8.5.2.** Bereken volgende onbepaalde integralen

1. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{\ln x}{x\ln x - x}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \ldots\ldots$
4. $\int \frac{1}{5^{2x}}\,dx = \ldots\ldots$
5. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = \ldots\ldots$
6. $\int x(1+x)^{3/2}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Module 9

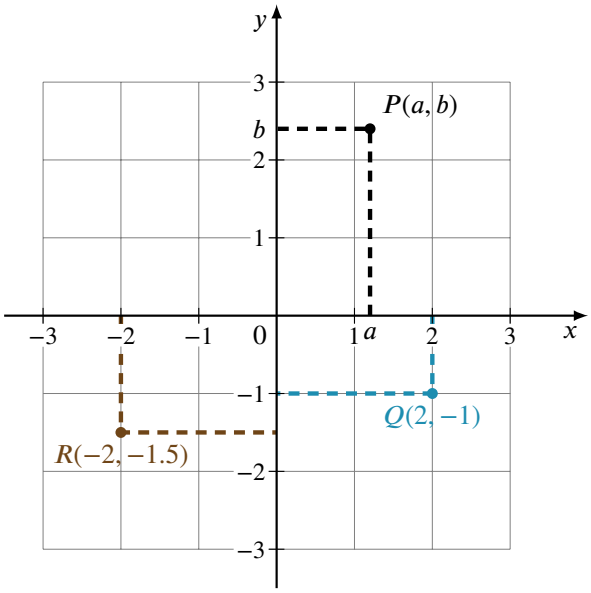
# Vlakke meetkunde

(Versie 2026/08/25H.36)

# 9.1 Cartesiaans assenstelsel en coördinaten

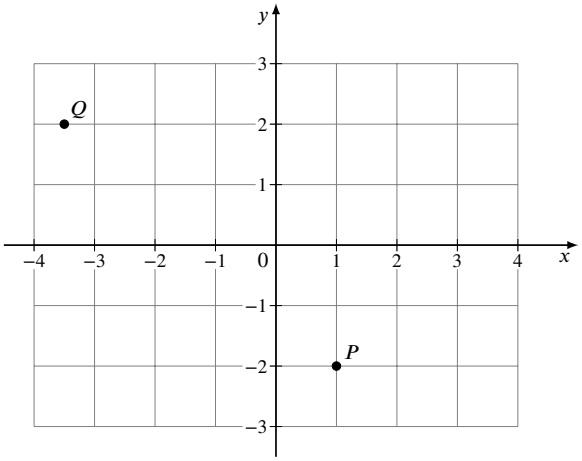
Een **cartesiaans assenstelsel** bestaat uit een horizontale $x$-as en een verticale $y$-as die loodrecht op elkaar staan en waarbij de eenheden op beide assen even groot zijn.

Ten opzichte van dergelijk assenstelsel wordt elk punt volledig beschreven door *een koppel* $(a, b)$ *reële getallen* (de **coördinaten** van het punt): eerst de horizontale $x$-coördinaat en dan de verticale $y$-coördinaat.
We noteren $P(a, b)$ voor punt $P$ met coördinaten $(a, b)$.
We gebruiken dikwijls ook de letters $x$ en $y$ voor de coördinaten zelf: $P(x, y)$ is dan het punt met $x$-coördinaat het getal $x$ en $y$-coördinaat het getal $y$.



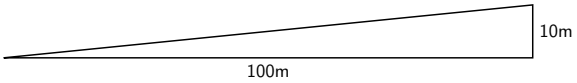

Via coördinaten kunnen meetkundige problemen worden opgelost door ze met algebraïsche methoden *uit te rekenen*. Dergelijke meetkunde met coördinaten noemt men soms ook *analytische* meetkunde.

**Oefening 9.1.1.** De coördinaten van $P$ zijn (… … , … …), die van $Q$ zijn (… … , … …).



## 9.2 De vergelijking van een rechte

De *helling* van een weg wordt meestal uitgedrukt als *een percentage*. Een helling van 10% betekent dan dat je per 100m horizontale afstand met 10m stijgt. Soms is het nuttig een helling uit te drukken *met graden* eerder dan met een percentage. Bij een helling van 100% stijg je 1m op elke 1m horizontale verplaatsing, en dat komt dus overeen met een helling van 45°.




$$\text{Helling} = \frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{10}{100} = 0.1 \quad (= 10\%).$$

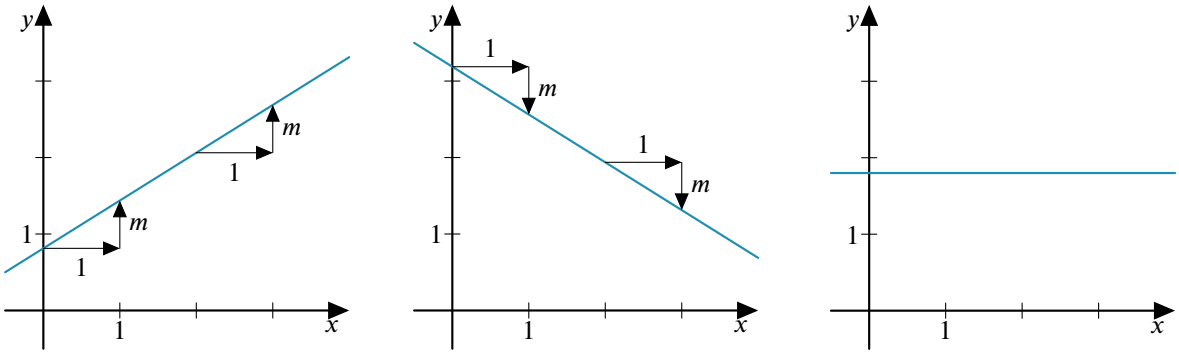
De wiskundige term voor helling-als-percentage is *richtingscoëfficiënt*, soms afgekort to rico:

**Definitie 9.2.1.** De **richtingscoëfficiënt** of **rico** van een rechte is de *helling* van die rechte.

Als de rechte door de punten $(x_1, y_1)$ en $(x_2, y_2)$ gaat, is de rico $m$ gelijk aan

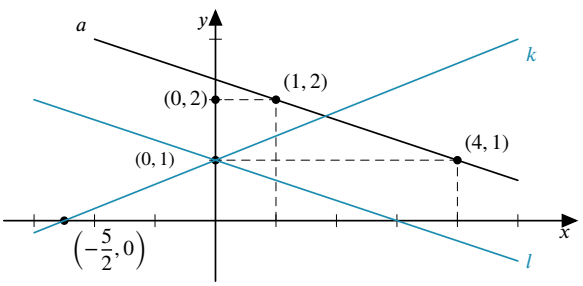
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left( \text{of ook } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right).$$

Bij **stijgende** rechten is $m > 0$ en bij **dalende** rechten is $m < 0$. Voor horizontale rechten is $m = 0$. Voor verticale rechten is de rico niet gedefinieerd, intuïtief kan je denken dat dergelijk rechte oneindig steil is.




$m > 0$ $m < 0$ $m = 0$

**Oefening 9.2.1.** Bepaal de rico's van de rechten $k$ en $l$.




Antwoord: $m_k =$ …… en $m_l =$ ……

## 9.2 De vergelijking van een rechte

**Eigenschap 9.2.1.** De vergelijking van een niet-verticale rechte $l$ kan steeds geschreven worden in de vorm

$$l \leftrightarrow \boxed{y = mx + q},$$

waarbij $m$ de rico is en $q$ het snijpunt met de $y$-as. De vergelijking kan op verschillende manieren worden opgesteld:

- De rechte $l$ door het **punt** $(x_1, y_1)$ met **rico** $m_l$.
  Het punt $(x, y)$ behoort tot de rechte $l$ als en slechts als

$$l \leftrightarrow \boxed{y - y_1 = m_l(x - x_1)}.$$

- De rechte $l$ door de **twee punten** $(x_1, y_1)$ en $(x_2, y_2)$ met $x_1 \neq x_2$.
  Het punt $(x, y)$ behoort tot de rechte $l$ als en slechts als

$$l \leftrightarrow \boxed{(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)}.$$

De vergelijking van een verticale rechte is steeds van de vorm $\boxed{x = b}, b \in \mathbb{R}$.
De vergelijking van een horizontale rechte is steeds van de vorm $\boxed{y = q}, q \in \mathbb{R}$.

**Oefening 9.2.2.** Stel een vergelijking op van een rechte door twee punten.

**1.** De rechte door $(-5, -2)$ en $(-1, -3)$ heeft als vergelijking $y = \ldots\ldots$

**2.** De rechte door $(0, 0)$ en $(2, 3)$ heeft als vergelijking $y = \ldots\ldots$

**3.** De rechte door $(1, 6)$ met rico $-4$ heeft als vergelijking $y = \ldots\ldots$

**Oefening 9.2.3.**

**1.** Voldoet het punt $(1000, -1750)$ aan de vergelijking van de rechte $a \leftrightarrow y = -2x + 250$? Ja Nee

**2.** Behoort het punt $(5, 1)$ tot $b \leftrightarrow y - 20 = 4x$? Ja Nee

**Definitie 9.2.2** (Cartesiaanse vergelijkingen van een rechte)**.**
Een **cartesiaanse vergelijking** van een rechte is een uitdrukking van de vorm

$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad (\text{ of ook } ax + by = d)$$

met $a$ en $b$ niet beide nul. Een punt $(x_0, y_0)$ ligt op de rechte ligt als en slechts als $ax_0 + by_0 + c = 0$.

**Eigenschap 9.2.2.** Voor de rechte met vergelijking $ax + by + c = 0$ geldt:

CC BY-NC-SA 4.0

## 9.2 De vergelijking van een rechte

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a = 0$ | $\iff$ | de rechte is evenwijdig met de $x$-as | $\iff$ | $y = k$ |
| $b = 0$ | $\iff$ | de rechte is evenwijdig met de $y$-as | $\iff$ | $x = k$ |
| $c = 0$ | $\iff$ | de rechte gaat door de oorsprong | $\iff$ | $ax + by = 0$ of $y = kx$ of $x = k'y$ |

**Opmerking 9.2.1.** Voor niet-vertikale rechten kan je eenvoudig wisselen tussen de cartesiaanse vergelijking en de standaardvergelijking:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{met } b \neq 0 \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \iff y = mx + q \quad \text{met } m = -\frac{a}{b} \text{ en } q = -\frac{c}{b}$$

**Voorbeeld 9.2.1.** Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door de oorsprong en $(3, 6)$: $y = 2x$✓
2. door $(0, 1)$ en $(3, 7)$: $y = 2x + 1$✓
3. door de oorsprong en $(-1, -2)$: $y = 2x$✓
4. door $(0, 0)$ en $(-1, -1)$: $x = y$✓
5. door $(0, 0)$ en $(1, 2)$: $y = 2x$✓
6. door $(0, 1)$ en $(-1, -1)$: $y = 2x + 1$✓
7. door $(1, 2)$ en $(-1, -2)$: $y = 2x$✓

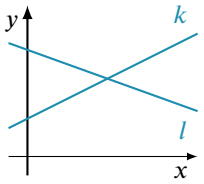
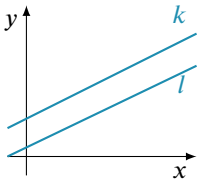
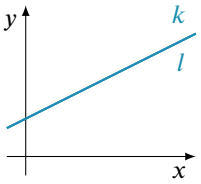
**Oefening 9.2.4.** Teken de rechten met volgende vergelijkingen. Duidt telkens de snijpunten aan met de assen en de richtingscoëfficiënten.

1. $y = 3x + 2$
2. $y = 2x + 3$
3. $y = -3x$
4. $y = -2x + 3$

CC BY-NC-SA 4.0

# 9.3 Onderlinge ligging van rechten

Twee rechten met vergelijkingen van de vorm $y = mx + q$ kunnen volgende *relatieve posities* hebben:

| **Snijdend** | **Evenwijdig** | **Samenvallend** |
|---|---|---|
|  |  |  |
| **één** snijpunt<br>rico's verschillend<br>constante termen irrelevant<br>Voorbeelden:<br>$y = x + 1$ en $y = 2x + 1$ | **geen** snijpunten<br>**rico's gelijk**<br>constante termen verschillend<br>$y = x + 1$ en $y = x + 2$ | **oneindig veel** snijpunten<br>**rico's gelijk**<br>**constante termen gelijk**<br>$y = x + 1$ en $y = x + 1$ |

**Opmerking 9.3.1.**

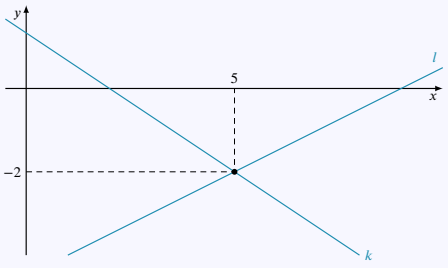
- Er is wat terminologische verwarring mogelijk of *samenvallende* rechten al dan niet ook *evenwijdig* zijn. Volgens bovenstaand schema is dat *niet* het geval: evenwijdige rechten hebben *geen* gemeenschappelijke punten, en samenvallende rechten hebben er oneindig veel. In de praktijk is het soms toch gebruikelijk om ook samenvallende rechten 'evenwijdig' te noemen.
- Samenvallende rechten hebben *dezelfde* vergelijking van de vorm $y = mx + q$. Maar let op: vergelijkingen van de vorm $ax + by + c = 0$ van samenvallende rechten moeten enkel *evenredig* zijn. Zo zijn de rechten $y = 2x + 4$ en $x = 2 - \frac{1}{2}y$ wel degelijk samenvallend (of 'gelijk').
- We bespreken verder nog een speciaal geval van snijden, namelijk *loodrecht* snijden.

**Voorbeeld 9.3.1.** Beschouw de rechten $k \leftrightarrow 2x + 3y - 4 = 0$ en $l \leftrightarrow x - 2y - 9 = 0$.

De rechten $k$ en $l$ snijden als ze een gemeenschappelijk punt hebben, dus als er één punt $(x^*, y^*)$ is dat voldoet aan beide vergelijkingen. Dit punt moet dus een unieke oplossing zijn van het stelsel

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0, \\ x - 2y - 9 = 0. \end{cases}$$

Oplossen van dit stelsel, bijvoorbeeld door het dubbele van de tweede vergelijking af te trekken van de eerste vergelijking, levert $7y + 14 = 0$, en dus $y = -2$. Deze waarde $y = -2$ substitueren in een van de bovenstaande vergelijkingen levert $x = 5$. Besluit: de rechten $k$ en $l$ snijden in het punt $(5, -2)$.




**Oefening 9.3.1.**

CC BY-NC-SA 4.0

## 9.3 Onderlinge ligging van rechten

**1.** Door een punt buiten een rechte | gaat precies één rechte | gaat geen enkele rechte | gaan oneindig veel rechten | evenwijdig aan die rechte.

**2.** Door een punt buiten een rechte | gaat precies één rechte | gaat geen enkele rechte | gaan oneindig veel rechten | die die rechte snijdt.

**3.** Door een punt buiten een rechte | gaat precies één rechte | gaat geen enkele rechte | gaan oneindig veel rechten | die samenvalt met die rechte.

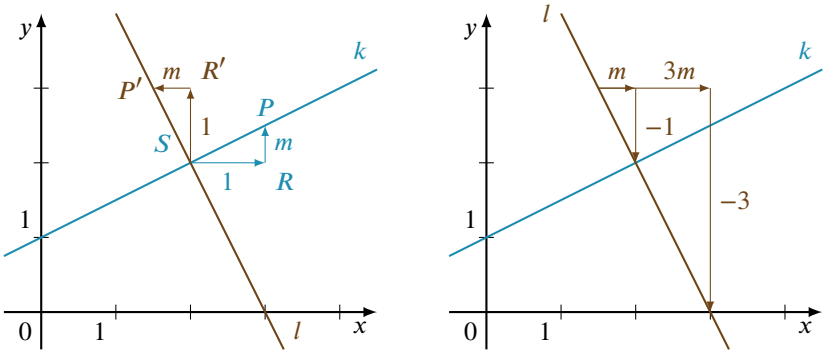
**4.** Door een punt buiten een rechte | gaat precies één rechte | gaat geen enkele rechte | gaan oneindig veel rechten | die samenvalt met die rechte.

**Oefening 9.3.2.** Als $k$ en $l$ verschillende evenwijdige rechten zijn, en $l$ en $m$ zijn onderling verschillende evenwijdige rechten, dan | zijn $k$ en $m$ verschillend en evenwijdig | kunnen $k$ en $m$ zowel snijdend als evenwijdig zijn | kunnen $k$ en $m$ zowel samenvallend als evenwijdig zijn | zijn $k$ en $m$ snijdend |.

Er is een interessant verband tussen de rico's van twee rechten die elkaar **loodrecht** (ook **orthogonaal** ) snijden, dus onder een hoek van $90°$.

Als een rechte $k$ loodrecht staat op een rechte $l$, dan kan je $l$ verkrijgen door een rotatie van $k$ over $90°$ rond hun snijpunt.

De rico $m$ van $k$ is de stijging van $k$ na een horizontale afstand 1, dus de afstand $|RP|$. We bepalen nu de rico van de rechte $l$. Na de rotatie over $90°$ zien we dat een beweging naar links met $m$ eenheden gepaard gaat met een stijging van 1 eenheid. Met andere woorden: een horizontale beweging van $m$ eenheden naar rechts (bv. vanuit $P'$) is gekoppeld aan een verticale beweging van $-1$ eenheid. Een horizontale beweging van $3m$ naar rechts veroorzaakt een verticale beweging van $-3$, .... Dus $m_l = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{-3}{3m} = \ldots$.




Samengevat:

**Eigenschap 9.3.1.**

Twee (niet-verticale) rechten $k$ en $l$ staan **loodrecht op elkaar** als hun rico's voldoen aan

$$m_k = -\frac{1}{m_l} \text{ of dus } \boxed{m_k \cdot m_l = -1}$$

Elke verticale rechte staat loodrecht op elke horizontale rechte.

CC BY-NC-SA 4.0

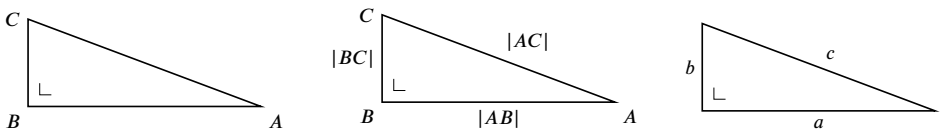
## 9.4 Afstanden tussen punten en een rechte

**Definitie 9.4.1.** We noteren met $|AB|$ de **afstand** tussen twee punten $A$ en $B$. Er geldt $|AB| = |BA|$.

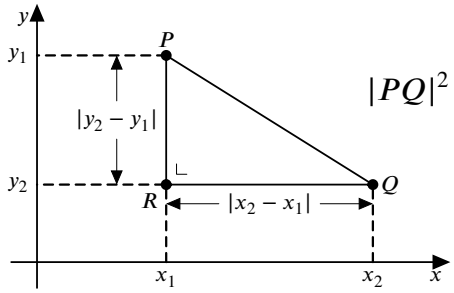
De bekendste stelling uit de hele wiskunde geeft een verband tussen afstanden in een rechthoekige driehoek:

**Eigenschap 9.4.1** (Stelling van Pythagoras)**.**

Een driehoek $ABC$ heeft een rechte hoek in $B$ als en slechts als $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$.




In de analytische meetkunde kunnen we de stelling van Pythagoras formuleren in termen van Cartesische coordinaten. We vinden de afstand $|PQ|$ tussen twee punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ via de constructie van de rechthoekige driehoek $PQR$.




$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |PR|^2 + |RQ|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

**Eigenschap 9.4.2.** De **afstand** tussen punt $P$ met coördinaten $(x_1, y_1)$ en $Q$ met coördinaten $(x_2, y_2)$ is

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**Voorbeeld 9.4.1.** De afstand tussen punt $P$ met coördinaten $(2, 3)$ en $Q$ met coördinaten $(-2, -1)$ is

$$|PQ| = \sqrt{((-2) - 2)^2 + ((-1) - 3)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5.66$$

**Oefening 9.4.1.** De afstand tussen de punten $(-1, 0)$ en $(2, 4)$ is ... ...

**Stelling 9.4.1.** De afstand tussen een punt $P = (x_0, y_0)$ en een rechte $L$ met cartesische vergelijking $ax + by + c = 0$ is:

$$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Bewijs.** *Het onderstaande bewijs is enkel ter interesse en moet niet gekend worden*:

Als de cartesische vergelijking van de rechte $L$ gegeven is door $ax + by + c = 0$ vinden we onmiddelijk dat

## 9.4 Afstanden tussen punten en een rechte

de rico $m_L = -\frac{a}{b}$ is. De afstand tussen een punt $P = (x_0, y_0)$ en de de rechte $L$ kan gevonden worden via de rechte die loodrecht staat op $L$ en door het punt $P$ gaat. Noem $T$ de rechte die loodrecht staat op $L$. Noem verder $Q = (f, g)$ het snijpunten van de rechten $L$ en $T$. We weten dat de rico van $L$ gelijk is aan $\frac{b}{a}$ want voor twee loodrechte rechten geldt $m_L \cdot m_T = -1$. We hebben de volgende gelijkheid voor de rico van $L$:

$$\frac{y_0 - g}{x_0 - f} = \frac{b}{a}$$

of nog $a(y_0 - g) - b(x_0 - f) = 0$. Kwadrateren we dit, dan krijgen we

$$a^2(y_0 - g)^2 + b^2(x_0 - f)^2 = 2ab(y_0 - g)(x_0 - f)$$

Het idee van het bewijs is om de expressie $\big(a(x_0 - f) + b(y_0 - g)\big)^2$ op twee manieren te schrijven. Enerzijds, hebben we:

$$\begin{aligned}\big(a(x_0 - f) + b(y_0 - g)\big)^2 &= a^2(x_0 - f)^2 + 2ab(y_0 - g)(x_0 - f) + b^2(y_0 - g)^2 \\ &= (a^2 + b^2)((x_0 - f)^2 + (y_0 - g)^2)\end{aligned}$$

Anderzijds, hebben we ook dat

$$(a(x_0 - f) + b(y_0 - g))^2 = (ax_0 + by_0 - af - bg))^2 = (ax_0 + by_0 + c)^2$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit het feit dat $(f, h)$ op de rechte $ax + by + c = 0$ ligt.

Stellen we nu de bovenstaande twee expressies gelijk aan elkaar, dan krijgen we:

$$(a^2 + b^2)((x_0 - f)^2 + (y_0 - g)^2) = (ax_0 + by_0 + c)^2$$

We vinden dus dat de afstand tussen $P$ en de rechte $L$ gelijk is aan:

$$d(P, L) = \sqrt{(x_0 - f)^2 + (y_0 - g)^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Voorbeeld 9.4.2.** We zoeken de afstand tussen het punt $P = (5, 1)$ en de rechte gegeven door $y = 3x + 1$. Toepassen van bovenstaande formule geeft:

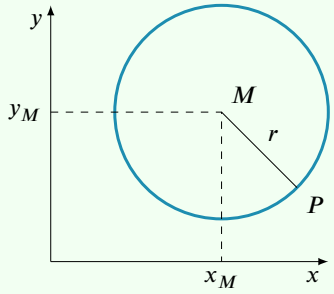
$$d = \frac{|3 \cdot 5 - 1 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

# 9.5 De vergelijking van de cirkel

**Definitie 9.5.1.** De **cirkel** met **middelpunt** $M$ en **straal** $r$, genoteerd $C(M,r)$, is de verzameling van alle punten die op een afstand $r$ van het punt $M$ liggen.

Dus: een punt $P$ ligt op $C(M,r)$ als en slechts als $|PM| = r$.




De vergelijking van een cirkel is een nodige en voldoende voorwaarde waar de coördinaten van een punt aan moeten voldoen opdat dit punt op de cirkel zou liggen. De voorwaarde $|PM| = r$ is equivalent met

$$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r$$

waarbij $(x, y)$ de coördinaten zijn van het punt $P$, en $(x_M, y_M)$ de coördinaten van het middelplunt $M$. Door linkerlid en rechterlid te kwadrateren, bekomen we de vergelijking van de cirkel:

**Eigenschap 9.5.1.** De cirkel $C(M,r)$ met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal $r$ heeft als vergelijking

$$C(M,r) \leftrightarrow (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$$

**Voorbeeld 9.5.1.** De cirkel met middelpunt $M = (0,2)$ en straal 3 heeft als vergelijking

$$C(M,3) \leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

of dus

$$C(M,3) \leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Door de kwadraten uit te rekenen krijgen we ook

$$C(M,3) \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$$

**Oefening 9.5.1.** Ligt $(2,3)$ op de cirkel met middelpunt $(1,-1)$ en straal 4?

| Ja | Nee |
|---|---|

**Oefening 9.5.2.** Stel de vergelijking op van de cirkel met gegeven middelpunt en straal:

1. $M(-1,0)$ en $r = 1$
2. $M(5,2)$ en $r = 4$

**Oefening 9.5.3.** Bepaal het middelpunt en de straal van volgende cirkel: $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 20$

CC BY-NC-SA 4.0

## 9.6 Oefeningen analytische vlakke meetkunde

**Oefening 9.6.1.** Stel een vergelijking op van de rechte door

(a) $(-2,2)$ en loodrecht op $3x-4y+5=0$

(b) $(-2,1)$ en loodrecht op $x$-as

(c) $(-3,1)$ en evenwijdig met de rechte $2y=x-5$

(d) $(-2,5)$ en evenwijdig met de $x$-as

**Oefening 9.6.2.** Bepaal de onderlinge ligging van de volgende rechten.

(a) $a \leftrightarrow y=2x-3$ en $b \leftrightarrow y=-3+2x$

(b) $a \leftrightarrow y=-x$ en $b \leftrightarrow y=x$

(c) $a \leftrightarrow y=3x+4$ en $b \leftrightarrow y=-3x-4$

(d) $a \leftrightarrow y=-5x+1$ en $b \leftrightarrow 2y=-10x-6$

**Oefening 9.6.3.** Bepaal de gemeenschappelijke punten van de volgende rechten.

(a) $c \leftrightarrow 2x-6y+8=0$ en $d \leftrightarrow x-3y+4=0$

(b) $e \leftrightarrow x-2y-3=0$ en $f \leftrightarrow 3x-6y-2=0$

(c) $g \leftrightarrow 3x-y=2$ en $h \leftrightarrow 2x-2y=0$

**Oefening 9.6.4.** Bepaal de vergelijking van de rechte $r$ door het punt $P(-2,3)$ loodrecht op de rechte $s$ met vergelijking $y=-4x+7$.

**Oefening 9.6.5.** Zoek alle punten die even ver liggen van het punt $A(5,2)$ als van het punt $B(-1,4)$.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Module 10

# Appendix: Rekentechnieken breuken, haakjes, ontbinden

(Versie 2026/08/25H.36)

# 10.1 Haakjes en ontbinden in factoren

Optellen $(2+3)$ en vermenigvuldigen $(2\cdot 3)$ zijn de twee basisoperaties met getallen. Bij combinaties zoals $2+3\cdot 5$ wordt om historische redenen eerst vermenigvuldigd en dan opgeteld, dus $2+3\cdot 5 = 2+(3\cdot 5) = 2+15 = 17$. Als je de andere volgorde wil *moet* je haakjes zetten: $(2+3)\cdot 5 = 5\cdot 5 = 25$.

Zeker zodra er ook met letters wordt gerekend, wordt het snel belangrijk om naargelang het geval van sommen producten te kunnen maken, of omgekeerd van producten sommen te maken:

| | | |
|---|---|---|
| $2\cdot(a+3) = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2a+6$ | product wordt som | (weliswaar met een term $2a$ die zelf een product is) |
| $2\cdot a+6 = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2\cdot(a+3)$ | som wordt product | (weliswaar met een factor $a+3$ die zelf een som is) |

*Uitwerken van haakjes* betekent *producten* herschrijven als *sommen*: $2(a+b) = 2a+2b$.
*Ontbinden in factoren* betekent een *som* (of getal) herschrijven als een *product*: $2a^2+6a = 2a(a+3)$.

Voor 'haakjes uitwerken' en 'ontbinden' gelden dezelfde regels, maar ze moeten telkens in de andere richting worden gelezen. Van links naar rechts zeggen ze hoe je een product (of een macht, dat is ook een product) schrijft als een som, maar van rechts naar links gelezen zeggen ze hoe je een som schrijft als een product.

**Eigenschap 10.1.1.** Voor rekenen met letters of met reële getallen geldt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a+b)c$ | $=$ | $ac+bc$ | (distributiviteit van $\cdot$ t.o.v. $+$) |
| $a(c+d)$ | $=$ | $ac+ad$ | (idem, maar met som rechts) |
| $(a+b)(c+d)$ | $=$ | $ac+ad+bc+bd$ | ( want gelijk aan $(a+b)c+(a+b)d$) |
| $-(a+b)$ | $=$ | $-a-b$ | ( want $(-1)(a+b) = (-1)a+(-1)b$) |
| $(a+b)^2$ | $=$ | $a^2+2ab+b^2$ | (kwadraat van een tweeterm) |
| $(a-b)^2$ | $=$ | $a^2-2ab+b^2$ | (kwadraat van tweeterm via $(a+(-b))^2$) |
| $a^2-b^2$ | $=$ | $(a+b)(a-b)$ | (verschil van twee kwadraten) |

Als referentie vermelden we ook volgende formules voor hogere machten:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad \text{(derdemacht van een tweeterm)}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \text{(Binomium van Newton)}$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad \text{(som van derdemachten)}$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad \text{(verschil van derdemachten)}$$

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1}) \qquad \text{(verschil van } n^{\text{de}} \text{ machten)}$$

$$a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1}) \qquad \text{(som } n^{\text{de}} \text{ machten, } n \textbf{ oneven})$$

**Oefening 10.1.1.** Werk de haakjes uit en vereenvoudig:

**1.** $a(x+3)-3a = \ldots\ldots$

**2.** $ax+3+(-ax) = \ldots\ldots$

**3.** $2ax+3-(-ax) = \ldots\ldots$

**4.** $1-(x-y+1)+x = \ldots\ldots$

**5.** $1-(x-y-1) = \ldots\ldots$

**6.** $1-(p-q)+p = \ldots\ldots$

**Oefening 10.1.2.** Werk de haakjes uit:

CC BY-NC-SA 4.0

## 10.1 Haakjes en ontbinden in factoren

**1.** $2(a+3)^2 = \ldots\ldots$

**2.** $2(a-3)^2 = \ldots\ldots$

**3.** $2(-a-3)^2 = \ldots\ldots$

**4.** $(x+y)(x+3y)^2 = \ldots\ldots$

**Voorbeeld 10.1.1.** Breng de voorgestelde factor buiten de haakjes, en vereenvoudig zo ver mogelijk.

**1.** $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot \left(4p+5\right)$

**Uitwerking:**

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4(p+1)) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4p + 4) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (4p+5)\,.
\end{aligned}$$

**2.** $(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) = \frac{4r}{3} \cdot (5)$

**Uitwerking:**

$$\begin{aligned}
(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) &= \frac{4r}{3} \cdot (3p+2) - \frac{4r}{3} \cdot 3 \cdot (p-1) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3 \cdot (p-1)) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3p + 3) \\
&= \frac{4r}{3} \cdot 5.
\end{aligned}$$

**3.** $\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 = \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2)$

**Uitwerking:**

$$\begin{aligned}
\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 &= \frac{xs}{8} \cdot 1 + \frac{xs}{8} \cdot 2s + \frac{xs}{8} \cdot 24x^2s^2 \\
&= \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2).
\end{aligned}$$

**Oefening 10.1.3.** Ontbind in factoren.

**1.** $81x^2y^2 - 25 = \ldots\ldots$

**2.** $9r^2 - 24r + 16 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

## 10.2 Basisoefeningen haakjes

**Oefening 10.2.1.** Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan en vereenvoudig:

1. $23 \cdot (1000 - 1) = \ldots\ldots$
2. $(923 + 77)/4 = \ldots\ldots$
3. $-\dfrac{2x + 4xy}{-2x} = \ldots\ldots$
4. $p - (p + q) + 2q = \ldots\ldots$

**Oefening 10.2.2.** Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan en vereenvoudig:

1. $18x + 24y + 30z = \ldots\ldots$
2. $20ab^3 + 30bc + 25b^2c^3\sqrt{d} = \ldots\ldots$
3. $-9x^2y - 3xy = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{p^2q^3}{8} - \dfrac{p^2q}{2} + pq = \ldots\ldots$

**Oefening 10.2.3.** Ontbind in factoren (of vul aan), met $u, s, t \in \mathbb{R}$.

1. $24st + 12t - 60ut = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{st^2}{8} + \dfrac{s^2t^2}{12} + s^2t = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{2s + 3}{2} + (2s + 3)^2 = \dfrac{2s + 3}{2} \cdot (\ldots\ldots)$
4. $\left(\dfrac{5s}{8}\right)(u - 1) - 5s(3u + 1) = \left(\dfrac{5s}{8}\right) \cdot (\ldots\ldots)$

**Oefening 10.2.4.** Ontbind in factoren, met $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $25x^2y^4 - 64 = \ldots\ldots$
2. $4x^2 + 24xy + 36y^2 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

# 10.3 Breuken (basis)

Een breuk is een uitdrukking zoals $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ of $\frac{12}{10}$ waarmee je eenvoudig *verhoudingen* kunt weergeven. Je kunt met breuken ook *rekenen* en je kunt ze *omzetten naar kommagetallen*. Rekenen met kommagetallen is – zeker met een rekenmachine – erg handig maar dikwijls is rekenen met breuken toch veel duidelijker en sneller. Het is daarom belangrijk met beide vertrouwd te zijn.

**Voorbeeld 10.3.1** (Breuken en pralines)**.**

Een bekende Belgische chocolatier verkoopt zeer lekkere (maar jammer genoeg ook tamelijk dure) pralines in doosjes van 8 stuks. In elk doosje zitten er steeds twee met witte chocolade en zes met bruine chocolade. Dit betekent dat twee van de acht pralines wit zijn en zes van de acht pralines bruin. Twee-van-de-acht schrijf je wiskundig als $\frac{2}{8}$, zes-van-de-acht als $\frac{6}{8}$.

Het is duidelijk dat als je twee doosjes koopt er vier-van-de-zestien, dus $\frac{4}{16}$ witte pralines zijn. Als de chocolatier ook kleinere doosjes met dezelfde verhouding witte en bruine pralines zou willen verkopen, kan dat enkel in doosjes van vier, met één witte en drie bruine pralines.

Hoeveel doosjes je ook koopt, telkens zal er één op de vier pralines wit zijn. We zeggen

$$\text{één vierde of } \frac{1}{4} \text{ of ook wel } 1/4 \text{ (van de) pralines is wit.}$$

Het is duidelijk dat $1/4$, $2/8$ of $25/100$ precies *dezelfde verhouding* uitdrukken van witte pralines ten opzichte van alle pralines.

We zullen verder in deze tekst uitleggen waarom je ook kan zeggen dat 25% van de pralines wit is, of dat de verhouding van de witte pralines ten opzichte van alle pralines 1 op vier is, of dat er 0,25 keer zoveel witte pralines zijn als er in het totaal pralines zijn.

**Oefening 10.3.1** (Uitdaging?)**.**

Wie tijd heeft om even na te denken kan opmerken dat je ook kan zeggen dat er *drie keer zoveel* bruine pralines zijn als witte pralines. Je kunt je dan afvragen waar dat getal *drie* precies vandaan komt als één op *vier* van alle pralines wit is. En hoe werkt dat als één op zes, of één op drie van alle pralines wit is? Wat is dan de verhouding van de witte pralines ten opzichte van de bruine?

Met de *breuk* $\frac{1}{4}$ komt het *getal* $0,25$ overeen door 'de breuk uit te rekenen als een deling': $\frac{1}{4} = 1/4 = 0,25$. Merk wel op dat ook de breuken $\frac{2}{8}$ en $\frac{25}{100}$ overeenkomen met het getal $0,25$. Het blijkt handig om af te spreken dat breuken zoals $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{25}{100}$ en $\frac{0,25}{1}$ allemaal aan elkaar gelijk zijn.

We leggen deze afspraken formeler vast in volgende definitie:

**Definitie 10.3.1.**

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\boxed{\frac{a}{b}}$, met $a$ en $b$ getallen, met $b \neq 0$.

We noemen $a$ de **teller** van de breuk, $b$ de **noemer**, en de streep tussen beide getallen de **breukstreep**.

De **(getal)waarde** van $\frac{a}{b}$ is het resultaat van de deling van $a$ door $b$, meestal een kommagetal.

Twee breuken $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ zijn aan elkaar **gelijk** als ze dezelfde waarde hebben.

Merk op dat twee breuken met onderling verschillende tellers en noemers dus toch aan elkaar gelijk kunnen zijn: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{50}{100}$ want ze hebben allemaal de waarde $0,5$.

CC BY-NC-SA 4.0

## 10.3 Breuken (basis)

Alle breuken die gelijk zijn aan $\frac{1}{2}$ kan je schrijven als $\frac{k \cdot 1}{k \cdot 2}$ met $k$ een getal verschillend van nul:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} \qquad \frac{50}{100} = \frac{50 \cdot 1}{50 \cdot 2} \quad \text{en} \quad \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{2\pi \cdot 1}{2\pi \cdot 2}$$

en al deze breuken zijn ook onderling gelijk want ze hebben elk waarde $\frac{1}{2} = 0,5$. In het algemeen geldt:

**Eigenschap 10.3.1.** Voor reële getallen $a, b$ en $k$ met $b \neq 0$ en $k \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$$

Vb: $\frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{5}{15}$ en $\frac{-1}{-2} = \frac{(-1) \cdot (-1)}{(-1) \cdot (-2)} = \frac{1}{2}$

Uit deze eigenschap volgt dat in een breuk geldt dat:
teller en noemer mag je vermenigvuldigen met eender welk getal (behalve 0)
teller en noemer mag je delen door eender welk getal (behalve 0)

**Opmerking 10.3.1** (Veel te veel gemaakte fouten)**.**

Sommigen gebruiken tot hun scha en schande ook ongeoorloofde varianten van deze schrappingsregel:

$$\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} \neq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{(schrap al wat stoort)}$$

$$\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} \neq \frac{0}{0+1} = 0 \quad \text{(schrap al wat stoort)}$$

$$\frac{2x}{2x+1} = \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}+1} \neq \frac{x}{x+1} \quad \text{(schrap al wat stoort)}$$

Erg dikwijls zijn de getallen in de breuk *gehele* getallen, en dan is volgende afspraak zinvol:

**Definitie 10.3.2.**

Een breuk is **vereenvoudigd** als er geen gemeenschappelijke factor meer kan worden weggedeeld.

**Voorbeeld 10.3.2.** De breuk $\frac{1}{3}$ is vereenvoudigd, maar $\frac{2}{6}$, $\frac{-1}{-3}$ en $\frac{x}{3x}$ zijn dat niet.

**Voorbeeld 10.3.3.** Vereenvoudig de breuk $\frac{36}{48}$.

**Uitwerking:** Er zijn twee mogelijkheden om een breuk te vereenvoudigen:

- Je ziet of zoekt de grootst mogelijke gemeenschappelijke deler van de teller en de noemer en deelt die weg. Je krijgt onmiddellijk de vereenvoudigde breuk. Nadeel is dat het vinden van die grootste gemeenschappelijke deler soms niet zo eenvoudig is.
  De grootste gemeenschappelijke deler van 36 en 48 is 12, dus geldt
  $$\frac{36}{48} = \frac{36/12}{48/12} = \frac{3}{4}.$$
- Je ziet of zoekt eender welke deler van teller en noemer en deelt die weg. Daarna zoek je opnieuw een gemeenschappelijke deler, totdat er geen meer zijn. Nadeel is dat je dikwijls moet zoeken en delen; voordeel is dat het zoeken makkelijker is.
  $$\frac{36}{48} = \frac{36/2}{48/2} = \frac{18}{24} = \frac{18/2}{24/2} = \frac{9}{12} = \frac{9/3}{12/3} = \frac{3}{4}$$
  De volgorde waarin je deze delers vindt, maakt niet uit. Zo had je bijvoorbeeld ook eerst kunnen delen door 3. Misschien had je 6 als gemene deler gevonden; dat had ook gewerkt.

CC BY-NC-SA 4.0

## 10.3 Breuken (basis)

**Opmerking 10.3.2.** De teller en noemer beide **delen of vermenigvuldigen met hetzelfde getal** verandert de waarde van een breuk niet. Meestal wordt gevraagd of verwacht een breuk zo ver mogelijk te vereenvoudigen. Vergeet dit dus niet!

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

## 10.4 Breuken: bewerkingen

Om breuken op te tellen moet je ze op gelijke noemer brengen, vermenigvuldigen doe je door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar. Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met zijn omgekeerde. Wie voldoende vertrouwd is met de volgende rekenregels kan dit hoofdstukje overslaan. Maar 'voldoende vertrouwd' moet je in dit geval wel lezen als 'tamelijk heel erg vertrouwd, zodat je echt niet meer moet nadenken over deze regels'.

**Eigenschap 10.4.1** (Basisbewerkingen breuken)**.**

Zodra de noemers verschillend zijn van 0, gelden volgende regels voor breuken:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$ (kruisproduct) Vb: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \iff 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{ad + cb}{bd}$ (som) Vb: $\frac{1}{2} + \frac{5}{7} = \frac{7}{14} + \frac{10}{14} = \frac{17}{14}$

$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ (tegengestelde) Vb: $-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2-3}{2} = \frac{-3+2}{2} \neq \frac{3+2}{2}$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ (product) Vb: $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ (maal omgekeerde) Vb: $\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{7}{10}$

Enkel voor wie toch wat onzeker is over rekenen met breuken, leggen we verder de regels in detail uit. De anderen kunnen dit deeltje overslaan.

**Opmerking 10.4.1.**

De equivalentie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$ noemt met **kruiselings vermenigvuldigen**, en is dikwijls de snelste manier om breuken weg te werken. De regel volgt uit het op gelijke noemer brengen:

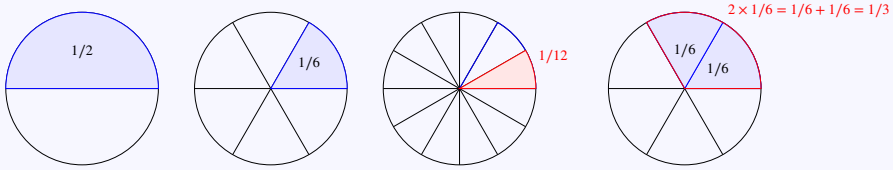
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad \text{want} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b} \iff ad = bc$$

We noemen $-\frac{a}{b}$ de **tegengestelde breuk**, en $\frac{b}{a}$ de **omgekeerde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Delen door een breuk $\frac{a}{b}$ is dus hetzelfde als vermenigvuldigen met zijn omgekeerde $\frac{b}{a}$.

**Voorbeeld 10.4.1** (Breuken en taarten)**.**

Als $T$ één taart voorstelt, dan is $\frac{1}{2}T$ een halve taart, en $\frac{1}{6}T$ een zesde deel van een taart.




Het is duidelijk dat twee keer één zesde van een taart samen één derde geeft, dat de helft van één zesde stuk één

CC BY-NC-SA 4.0

## 10.4 Breuken: bewerkingen

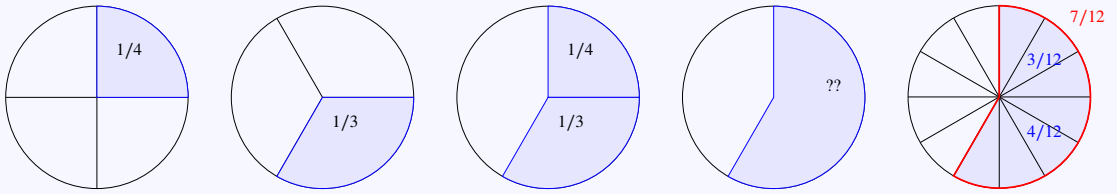
twaalfde van de taart is. In formules wordt dat

$$\frac{1}{6}T + \frac{1}{6}T = 2 \cdot \frac{1}{6}T = \frac{2}{6}T = \frac{1}{3}T$$

en

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}T = \frac{1}{12}T$$

De situatie wordt jammer genoeg ingewikkelder als je bij één derde van een taart een stuk van één vierde van een taart toevoegt. Hoeveel taart heb je dan ...?
We visualiseren deze optelling hieronder:




In de tekening zie je dat je een beetje meer dan een halve taart hebt. Dat blijkt ook uit de getallen: een derde stuk van een taart is natuurlijk groter dan een vierde stuk. Om een halve taart te maken, heb je bij de één vierde taart nog één vierde taart nodig. Met zo'n derde deel heb je dus te veel. Maar hoeveel precies?

De geniale oplossing is om het vierde stuk nog eens in drie te verdelen, dan heb je drie twaalfde van de taart, en het derde deel in vier te verdelen, dat levert vier twaalfde van de taart. Samen heb je dus $3+4=7$ twaalfden. Deze breuk kun je niet eenvoudiger met één getal of één verhouding zeggen....

Om te vermijden dat je steeds diep moet nadenken over het optellen van stukken taart, hebben wiskundigen gelukkig een gemakkelijke rekenregel gevonden om ongelijke stukken taart op te tellen: je brengt alles op gelijke noemer. Dat is natuurlijk gewoon hetzelfde als de taart in 12 verdelen, maar zodra je ermee vertrouwd bent, hoef je niet meer aan de taart te denken.

**Eigenschap 10.4.2.**

Breuken optellen of aftrekken doe je door ze eerst op gelijke noemer te brengen:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{ad+cb}{bd}$$

Vb: $\frac{1}{2} + \frac{5}{7} = \frac{7}{14} + \frac{10}{14} = \frac{17}{14}$

**Voorbeeld 10.4.2** (Sommen met getallen)**.**

Erg eenvoudige gevallen: $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$ en $\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3-4}{5} = \frac{-1}{5}$

Een beetje moeilijker: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$

The Next Level: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

**Voorbeeld 10.4.3** (Sommen met letters)**.**

Erg eenvoudig: $\frac{3+a}{5} + \frac{a}{5} = \frac{3+2a}{5} = \frac{7}{5}$ en $\frac{x+1}{x} - \frac{1-2x}{x} = \frac{x+1-(1-2x)}{x} = \frac{3x}{x} = 3$

Wat moeilijker: $\frac{a+1}{2a} + \frac{1}{2} = \frac{a+1}{2a} + \frac{a}{2a} = \frac{2a+1}{2a}$

The Next Level: $\frac{a+b}{2a} + \frac{a-b}{3b} = \frac{3ba+3b^2}{6ab} + \frac{2a^2-2ab}{6ab} = \frac{2a^2+ab+3b^2}{6ab}$

CC BY-NC-SA 4.0

## 10.4 Breuken: bewerkingen

**Voorbeeld 10.4.4** (Een wat ingewikkelder geval)**.**

Bereken $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{41}{24}$.

Je moet beide breuken op gelijke noemer brengen. Het gemakkelijkste is als gemeenschappelijke noemer het product te nemen van de noemers, namelijk $6\cdot 8=48$. Dat werkt *altijd*.

We maken dus in de eerste breuk $\frac{5}{6}$ de noemer 48 door de noemer te vermenigvuldigen met 8. Om de breuk gelijk te maken, moeten we ook de teller vermenigvuldigen met 8. Voor de tweede breuk doen we hetzelfde, maar nu vermenigvuldigen we teller en noemer met 6:

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 8}{6\cdot 8}=\frac{40}{48} \quad \text{en} \quad \frac{7}{8}=\frac{7\cdot 6}{8\cdot 6}=\frac{42}{48}$$

We hebben nu twee breuken met gelijke noemer, dus kunnen we die optellen:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{40}{48}+\frac{42}{48}=\frac{40+42}{48}=\frac{82}{48}$$

Maar, de breuk $\frac{82}{48}$ kan je nog vereenvoudigen door teller en noemer door twee te delen:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{82}{48}=\frac{41}{24}$$

Probeer telkens je einduitkomst zo ver mogelijk te vereenvoudigen!

Een tweede manier om een gelijke noemer te krijgen is door de methode van het kleinste gemene veelvoud, afgekort kgv. (Het kgv van 2 getallen is het kleinste getal dat een veelvoud is van allebei de getallen.) Het kgv van 6 en 8 is 24. 24 is een veelvoud van 6, maar ook van 8. Het is bovendien het kleinste getal dat zulk een veelvoud is. We kiezen dus als gemeenschappelijke noemer het getal 24. Dat betekent dat we in de breuk $\frac{5}{6}$ moeten vermenigvuldigen met 4, en voor de breuk $\frac{7}{8}$ teller en noemer vermenigvuldigen met 3:

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24} \text{ en } \frac{7}{8}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24}$$

Opnieuw vinden we twee breuken met gelijke noemers, die kunnen we dus optellen:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{20}{24}+\frac{21}{24}=\frac{41}{24}$$

De uitkomst is meteen in vereenvoudigde vorm. Dit heb je vaak als je de methode van het kgv toepast. Dit is niet altijd even gemakkelijk. Je mag zelf kiezen hoe je het doet.

**Voorbeeld 10.4.5** (Een uitgebreid voorbeeld met drie breuken)**.**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9} &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{9} && \text{sommen en verschillen van links naar rechts}\\
&= \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}\right)+\frac{1}{9} && \text{de gemeenschappelijke noemer wordt } 2\cdot 3\\
&= \left(\frac{3-2}{6}\right)+\frac{1}{9} && \text{breuken met dezelfde noemer}\\
&= \frac{1}{6}+\frac{1}{9}\\
&= \frac{1\cdot 3}{6\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{9\cdot 2} && \text{gemeenschappelijke noemer wordt } 18\\
&= \frac{3}{18}+\frac{2}{18}\\
&= \frac{3+2}{18}=\frac{5}{18} && \text{breuken met dezelfde noemer optellen door som van tellers}
\end{aligned}$$

Bij deze opgave had je in plaats van het kgv van 6 en 9 ook gewoon $6\cdot 9=54$ als gelijke noemer kunnen nemen. Dat is wel al een groot getal om mee te rekenen. Bovendien zou je de einduitkomst moeten vereenvoudigen. Probeer waar mogelijk het kgv te nemen.

CC BY-NC-SA 4.0

## 10.4 Breuken: bewerkingen

**Opmerking 10.4.2.** Breuken kan je enkel optellen of aftrekken als je ze op gelijke noemer brengt!

**Definitie 10.4.1.** Het **tegengestelde** van een breuk is 'min de breuk', waarbij je het minteken ook in de teller of in de noemer mag zetten:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Vb: $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$ en $-\frac{b+1}{1-b} = \frac{-b-1}{1-b} = \frac{b+1}{b-1}$

**Opmerking 10.4.3.** Zet het minteken voor de breuk steeds **voor de hele teller**, en gebruik dus haakjes:

$$-\frac{3+5}{7} = \frac{-(3+5)}{7} = \frac{3+5}{-7}.$$

Er gebeuren wel eens grote ongelukken omdat iemand even vergeet dat $-\frac{3+5}{7} \neq \frac{-3+5}{7}$.

Omgekeerd geldt dus ook dat als er één getal in de teller een minteken heeft, je dat minteken niet zonder meer voor de hele breuk mag plaatsen: $\frac{-2+5}{4} \neq -\frac{2+5}{4}$, want $\frac{-2+5}{4} = \frac{-(2-5)}{4} = -\frac{2-5}{4}$.

Net zoals met de teller, moet je ook bij de noemer opletten met haakjes: $\frac{6}{-2+3} \neq -\frac{6}{2+3}$ maar wel

$$\frac{6}{-2+3} = \frac{6}{-(2-3)} = -\frac{6}{2-3} = \frac{-6}{2-3}.$$

Breuken **vermenigvuldigen** is een stuk eenvoudiger dan breuken optellen:

**Eigenschap 10.4.3.**

Je vermenigvuldigt breuken door tellers met tellers, en noemers met noemers te vermenigvuldigen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Vb: $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}$

**Voorbeeld 10.4.6.**

Erg eenvoudige geval: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$

Vermenigvuldig met een getal: $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$

**Eigenschap 10.4.4.**

Een breuk delen door een getal is de *noemer* vermenigvuldigen met dat getal.

**Voorbeeld 10.4.7.** $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$

Delen door 5 is vermenigvuldigen met $\frac{1}{5}$. Let er wel op de *hele noemer* te vermenigvuldigen:

$$\frac{2}{3+2} : 5 = \frac{2}{(3+2)} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{(3+2) \cdot 5} = \frac{2}{25}$$

Volgende regel geldt voor delen door een breuk:

CC BY-NC-SA 4.0

## 10.4 Breuken: bewerkingen

**Eigenschap 10.4.5.**

Delen door een breuk is *vermenigvuldigen met het omgekeerde* van die breuk

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Vb: $\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{7}{10}$

Dit is een eenvoudig toe te passen regel:

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} : \frac{2}{3} &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} && \text{delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk} \\ &= \frac{12}{10} && \text{breuken vermenigvuldigen is tellers en noemers vermenigvuldigen} \\ &= \frac{6}{5} && \text{teller en noemer zijn deelbaar door 2} \end{aligned}$$

Meestal schrijven we de deling van breuken als *een breuk van breuken*: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$

waarbij je een goede scheiding maakt tussen tellers en noemers door de middelste breukstreep breed genoeg te maken. Er geldt dus:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

CC BY-NC-SA 4.0

# 10.5 Basisoefeningen breuken

**Oefening 10.5.1.** Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\ldots\ldots$
2. $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=\ldots\ldots$
3. $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\ldots\ldots$
4. $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\ldots\ldots$
5. $\frac{15}{6}\cdot\frac{3}{2}=\ldots\ldots$
6. $\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{22}\cdot\frac{4}{18}=\ldots\ldots$
7. $\frac{6}{5}:\frac{2}{15}=\ldots\ldots$
8. $\frac{12}{25}:\frac{18}{35}=\ldots\ldots$
9. $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}=\ldots\ldots$
10. $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=\ldots\ldots$

**Oefening 10.5.2.** Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $20\cdot(\frac{5}{4}-\frac{4}{5})=\ldots\ldots$
2. $-\frac{6}{27}+\frac{27}{1}+\frac{16+14}{9}-\frac{3}{14+13}-3\cdot 9=\ldots\ldots$
3. $-\frac{(1-a)-2}{a+1}=\ldots\ldots$ $(a\neq -1)$

**Oefening 10.5.3.** Schrijf als een zo eenvoudig mogelijke breuk. Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan.

1. $\frac{a-b}{c}-\frac{a-2b}{2c}=\ldots\ldots$
2. $\frac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}}=\ldots\ldots$
3. $\frac{1-\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2}{b}}=\ldots\ldots$
4. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}=\ldots\ldots$
5. $a+\frac{a}{1+a}=\ldots\ldots$
6. $1+\frac{a}{1+a}=\ldots\ldots$
7. $1+\frac{1}{1+a}=\ldots\ldots$
8. $a+\frac{1}{1+a}=\ldots\ldots$
9. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}=\ldots\ldots$
10. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}}=\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Module 11
# Appendix: Steekkaarten

(Versie 2026/08/25H.36)

# Functies

## Definities functies en veeltermfuncties

| | |
|---|---|
| Een (reële) **functie** | $f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ is een procedure die met elk getal $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ het uniek gedefinieerde getal $f(x)$ associeert. |
| Een **functievoorschrift** | van een functie $f$ is een *formule* die $f(x)$ berekent voor elke $x \in A$. |
| Het **domein** $\operatorname{dom} f$ | is de verzameling $A$ van alle mogelijke inputs van de functie. |
| Het **bereik** $\operatorname{bld} f$ | is de verzameling van alle mogelijke outputs van de functie. |
| De **grafiek** | van een functie is de verzameling $\{(x, f(x)) \mid x \in A)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, en is typisch een kromme in het $xy$-vlak die elke verticale rechte hoogstens één keer snijdt. |
| Een **veeltermfunctie** | is een functie waarvan het voorschrift een veelterm is, dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, met $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0 \in \mathbb{R}$. |
| De **graad** | van de veelterm (en van de veeltermfunctie) is de hoogste macht die voorkomt (dus $n$ als $a_n \neq 0$). |
| Een **constante functie** | is een functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op eenzelfde reëel getal $c$. De grafiek is een horizontale rechte op hoogte $y = c$. |
| De **nulfunctie** | is de constante functie die elke $x \in \mathbb{R}$ afbeeldt op 0. De graad van de nulfunctie is onbepaald, alle andere constante functies zijn veeltermfuncties van graad 0. |
| Een **eerstegraadsfunctie** | is een veeltermfunctie van graad één, dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$, met **nulpunt** (of nulwaarde) $x = -\frac{b}{a}$. De grafiek is een rechte met vergelijking $y = ax + b$ en helling of **richtingscoëfficiënt** of rico $a$, en snijpunt met de $y$-as in $(0, b)$. |
| Een **tweedegraadsfunctie** | is een veeltermfunctie van graad twee, dus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$, en $a \neq 0$. |

De nulpunten zijn $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ als de zogenaamde **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ positief is. Als de discriminant strikt negatief is zijn er geen nulpunten.

De nulpunten $x_{1,2}$ leveren de ontbinding $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

De grafiek is een **dalparabool** als $a > 0$ en een **bergparabool** als $a < 0$, telkens met **top** in $\left(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})\right)$.

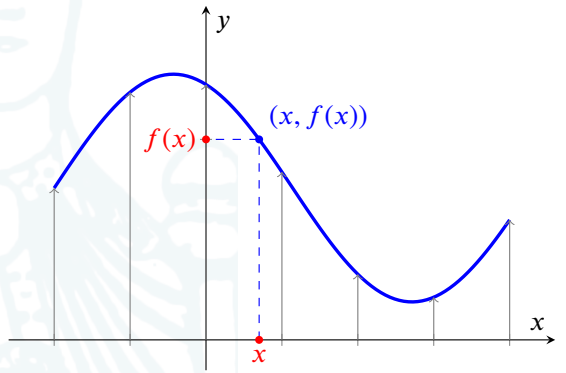
## Samenstellen van functies

Bij het **samenstellen van functies** wordt de output van één functie de input van een volgende functie:

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x)), \quad \text{waarbij} \quad (f \circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)) \quad \text{(lees als: } f \textit{ na } g \text{ van } x\text{)}.$$

Ingewikkelde functies worden opgebouwd via som, product en samenstelling van eenvoudigere basisfuncties.

## Grafiek van een functie




## Inverse functies

Soms kan een functie worden 'ongedaan gemaakt' door haar **inverse** $f^{-1}$ die uit de output van $f$ terug de input berekent. Voor elke $y$ in het bereik van $f$ waarvoor een *unieke input* bestaat, geldt: $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$. Dit is equivalent aan de voorwaarden $f^{-1}(f(x)) = x$ en $f(f^{-1}(x)) = x$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pas op: | *de waarde van de inverse functie* | $f^{-1}(x)$ | is meestal niet gelijk aan |
| | *het inverse (of omgekeerde) van de functiewaarde* | $(f(x))^{-1} = 1/f(x)$. | Let dus op de plaats van de exponent. |

## Rationale en irrationale functies

| | | |
|---|---|---|
| Een **rationale functie** | heeft als voorschrift een quotiënt van twee veeltermfuncties | vb: $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$ of $g(x) = \frac{1}{x}$ |
| Een **irrationale functie** | heeft een voorschrift met een niet-verwijderbare wortelvorm van de variabele. | $f(x) = \sqrt[5]{x^2+1} + \sqrt{x}$ of $h(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-3}}$ of $g(x) = \sqrt{2x+3}$. |
| Een **vierkantswortelfunctie** | heeft als voorschrift $f(x) = \sqrt{g(x)}$, met $g(x)$ een veelterm van graad $\geq 1$. | $f(x) = \sqrt{2x+3}$ of $h(x) = \sqrt{2x^2+3x+1}$ |

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

# Exponentiële en logaritmische functies

## Definitie

De **exponentiële functie met grondtal** $a$
(met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$), is de reële functie

$$\exp_a : x \mapsto a^x$$

De **logaritmische functie met grondtal** $a$
(met $a > 0$ en $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}_0^+$), is de reële functie

$$\log_a : x \mapsto \log_a x$$

Beide functies zijn elkaars inverse:

$$\log_a(\exp_a x) = x \quad \text{of} \quad \log_a a^x = x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\exp_a(\log_a x) = x \qquad a^{\log_a x} = x \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

## Definitie en eigenschappen van logaritmen

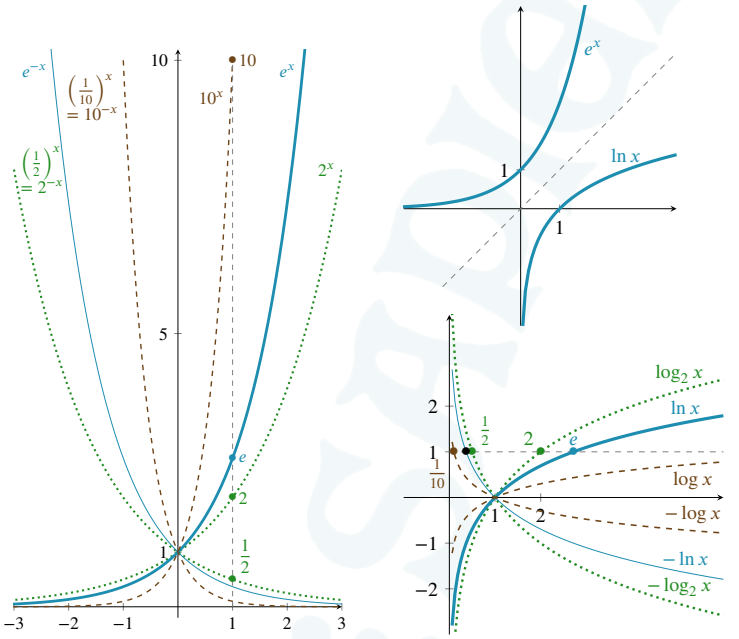
**Definitie $a$-logaritme van $x$:** $\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$ of ook: $\log_a x$ is het unieke reële getal zodat $a^{\log_a x} = x$.

Onmiddellijke gevolgen: $\log_a 1 = 0$ en $\log_a a = 1$ en $\log_a a^x = x$

Notatie speciale grondtallen: $\log x \overset{\text{def}}{=} \log_{10} x$ en $\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$ met $e \approx 2.7182$ **getal van Euler**.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\log_a(x \cdot y)$ | $=$ | $\log_a x + \log_a y$ | *de **logaritme van een product** is de som van de logaritmen.* |
| $\log_a \frac{x}{y}$ | $=$ | $\log_a x - \log_a y$ | *de **logaritme van een quotiënt** is het verschil van de logaritmen.* |
| $\log_a x^r$ | $=$ | $r \cdot \log_a x$ | *de **logaritme van een macht** brengt de exponent naar voor.* |
| $\log_a x^{-1}$ | $=$ | $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ | *de **logaritme van het omgekeerde** is het tegengestelde van de logaritme* |
| $\log_b x$ | $=$ | $\frac{\log_a x}{\log_a b}$ | **verandering van grondtal** (het geval $x = a$ geeft $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ ) |
| $\log_a(x + y)$ | $\neq$ | ~~$\log_a x \cdot \log_a y$~~ | *de logaritme van een som is **NIET** het product van de logaritmen.* |
| $\log_a(x + y)$ | $\neq$ | ~~$\log_a x + \log_a y$~~ | *de logaritme van een som is **NIET** de som van de logaritmen.* |
| $\log_a(x \cdot y)$ | $\neq$ | ~~$\log_a x \cdot \log_a y$~~ | *de logaritme van een product is **NIET** het product van de logaritmen.* |

## Grafieken van exponentiële en logaritmische functies










## Eigenschappen van exponentiële functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff a^x < a^y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff a^x > a^y$

(3) Het **domein** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$: $a^x$ is gedefinieerd voor alle reële getallen $x$
(4) Het **beeld** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: $a^x$ kan alleen strikt positieve waarden aannemen

De grafiek van $\exp_a$
(5) snijdt **de $x$-as** niet: $a^x$ is nooit gelijk aan 0
(6) snijdt **de $y$-as** in het punt $(0, 1)$: $a^0 = 1$
(7) snijdt **de rechte $x = 1$** in het punt $(1, a)$: $a^1 = a$

Hoe groter het grondtal, hoe *sneller* de grafiek stijgt/daalt.

## Eigenschappen van logaritmische functies

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff \log_a x < \log_a y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff \log_a x > \log_a y$

(3) Het **domein** van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: $\log_a x$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$
(4) Het **beeld** van $\log_a$ is $\mathbb{R}$: $\log_a x$ kan alle reële waarden aannemen

De grafiek van $\log_a$
(5) snijdt **de $x$-as** in het punt $(1, 0)$: $\log_a 1 = 0$
(6) snijdt **de $y$-as** niet: voor $x = 0$ is $\log_a x$ niet gedefinieerd
(7) snijdt **de rechte $y = 1$** in het punt $(a, 1)$: $\log_a(a) = 1$

Hoe groter het grondtal, hoe *minder snel* de grafiek stijgt/daalt.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0 (2026/08/25H.36)
Remediëring Wiskunde
Biomedische Wetenschappen en Farmacie
KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

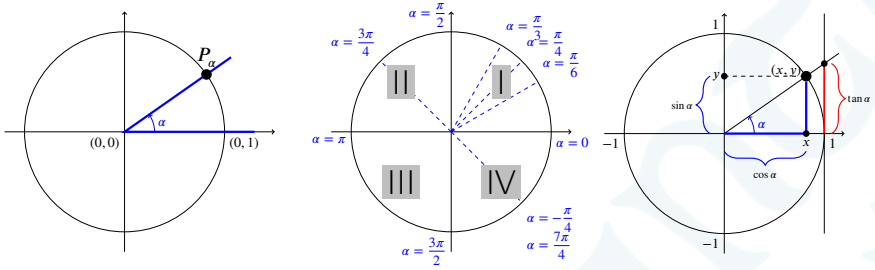
# Goniometrie

## Goniometrische cirkel

Een **georiënteerde hoek** of **draaiingshoek** is een meetkundige figuur bestaande uit een **hoekpunt** $O$ met een **eerste been** of **beginbeen** $OA$ en een **tweede been** of **eindbeen** $OB$. Twee dergelijke hoeken zijn gelijk als ze door verschuiven en draaien op elkaar kunnen worden gelegd.

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong, verdeeld in vier **kwadranten**, genummerd van rechtsboven tegen de klok in met Romeinse cijfers I, II, III, IV.

Elke hoek $\alpha$ komt overeen met een uniek **beeldpunt** $P_\alpha$ op deze cirkel (en vice versa).




De **cosinus** en **sinus** van $\alpha$ zijn per definitie de coördinaten van $P_\alpha$: $P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

De **tangens** van $\alpha$ is de verhouding van sinus tot cosinus: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Voor scherpe hoeken volgt dan uit de stelling van Pythagoras:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Schuine zijde}} \quad \text{SOS} \quad a = \sin\alpha \cdot c$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Aanliggende zijde}}{\text{Schuine zijde}} \quad \text{CAS} \quad b = \cos\alpha \cdot c$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Aanliggende zijde}} \quad \text{TOA} \quad a = \tan\alpha \cdot b$$

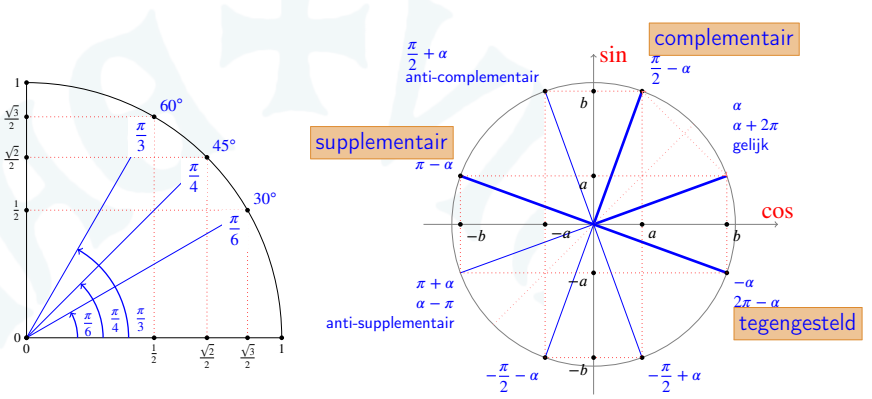
**Hoofdformule van de goniometrie**: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Ook deze formule volgt onmiddellijk uit de stelling van Pythagoras.

## Graden en radialen

Hoeken worden gemeten in graden (°) of in radialen (**rad**, en dikwijls als veelvoud van $\pi$). Beiden worden in elkaar omgerekend via de gelijkheid $180° = \pi \text{ rad} = \pi$,
en er geldt dus bijvoorbeeld $60° = 60° \cdot \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{\pi}{3}$ en $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{180°}{\pi} = 45°$.

## Gekende goniometrische getallen en verwante hoeken




## Goniometrische formules

**Som**

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \text{en dus } \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \text{en dus } \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

**t-Formules:** $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$ en dus $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$ met $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$

**Simpson:**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

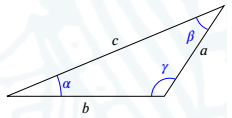
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Via verwante hoeken zijn varianten met andere tekens af te leiden.

## Driehoeken oplossen

**Sinusregel** $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ of natuurlijk ook $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ etc.

**Cosinusregel** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ veralgemeent Pythagoras (met $\gamma = \pi/2$) en $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ($\gamma = \pi$ en dus $c = a + b$)



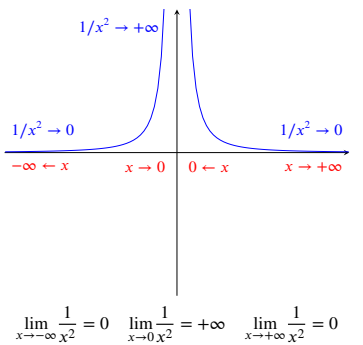

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04
CC BY-NC-SA 4.0 KU Leuven (2026/08/25H.36)

# Limieten en asymptoten

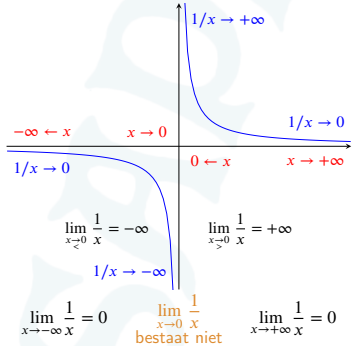
## Basislimieten

| | $x \to -\infty$ | $x \overset{<}{\to} 0$ | $x \to 0$ | $x \overset{>}{\to} 0$ | $x \to +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \mapsto x$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $0$ | $-\infty$ | X | $+\infty$ | $0$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ | $0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $0$ |
| $x \mapsto e^x$ | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $+\infty$ |
| $x \mapsto \ln x$ | X | X | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

## Voorbeelden $f(x) = 1/x$ en $f(x) = 1/x^2$




$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$




$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ bestaat niet $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Beide functies $1/x$ en $1/x^2$ hebben
$y = 0$ als horizontale asymptoot en $x = 0$ als verticale asymptoot.

## Definitie

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ lees je als de **limiet** van $f$ als $x$ gaat naar $c$ is gelijk aan $L$
en betekent als $x$ nadert naar $c$ dan nadert $f(x)$ tot $L$

$\lim_{x\overset{<}{\to}c} f(x) = L$ lees je als de **linkerlimiet** van $f$ als $x$ gaat naar $c$ is gelijk aan $L$
en betekent als $x \to c$ langs links (dus met $x < c$), dan $f(x) \to L$

$\lim_{x\overset{>}{\to}c} f(x) = L$ lees je als de **rechterlimiet** van $f$ als $x$ gaat naar $c$ is gelijk aan $L$
en betekent als $x$ nadert naar $c$ **langs rechts** (dus met $c < x$), dan nadert $f(x)$ tot $L$

In de uitdrukking $\lim_{x\to c} f(x) = L$ zijn zowel $c$ als $L$ een reëel getal of het symbool $+\infty$ of $-\infty$.

Limieten bestaan *niet* voor alle functies $f$ en getallen $c$, bijvoorbeeld $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ en $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ bestaan niet.

Op de grafiek lees je $x$ en $c$ op de $x$-as (dus links-rechts) en $f(x)$ en $L$ op de $y$-as (dus hoog-laag).

## Eigenschappen van limieten

**Eigenschap**: Als $f$ continu is, en $f(c)$ bestaat, dan is $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

**Eigenschap**: $\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\overset{<}{\to}c} f(x) = L$ en $\lim_{x\overset{>}{\to}c} f(x) = L$

De meeste voorschriften geven functies die continu zijn op hun domein, en dan geldt de regel: als je $c$ kan invullen in $f(x)$ zonder problemen zoals $\frac{a}{0}, \frac{0}{0}$ of $\pm\infty$, dan is $f(c)$ de limiet van $f$ in $c$.

## Rekenregels voor limieten (Niet voor HW)

Voor continue functies $f, g$ waarvoor $\lim_{x\to c} f(x)$ en $\lim_{x\to c} g(x)$ bestaan,
gelden volgende (reken-)regels **tenzij ze een onbepaaldheid geven**:

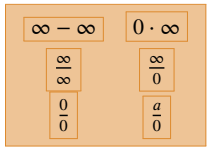
$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{som}) = \text{som}(\lim s)$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) \qquad \lim(\text{product}) = \text{product}(\lim s)$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \qquad \lim(\text{quotient}) = \text{quotient}(\lim s)$$

## Onbepaaldheden

(Niet voor HW)
Volgende uitdrukkingen zijn
ONBEPAALD




## Asymptoten

Een **asymptoot** is een rechte waartoe de grafiek van een functie willekeurig dicht nadert.
Men spreekt van **horizontale asymptoot (HA), verticale asymptoot (VA) of schuine asymptoot (SA)** als de rechte respectievelijk horizontaal, verticaal of schuin is.

Rechte $y = a$ is een **horizontale asymptoot** van $f$ asa $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ of $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$.

Rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** van $f$ asa $\lim_{x\overset{<}{\to}a} f(x) = \pm\infty$ of $\lim_{x\overset{>}{\to}a} f(x) = \pm\infty$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

Remediëring Wiskunde
Biomedische Wetenschappen en Farmacie

# Afgeleiden

## Definitie van de afgeleide

Een reële functie $f$ is **afleidbaar** of **differentieerbaar in een punt** $a$ van haar domein als de limiet $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *bestaat* en *eindig* is.

De **afgeleide van** $f$ **in** $a$, genoteerd $f'(a)$ is de waarde van die limiet:

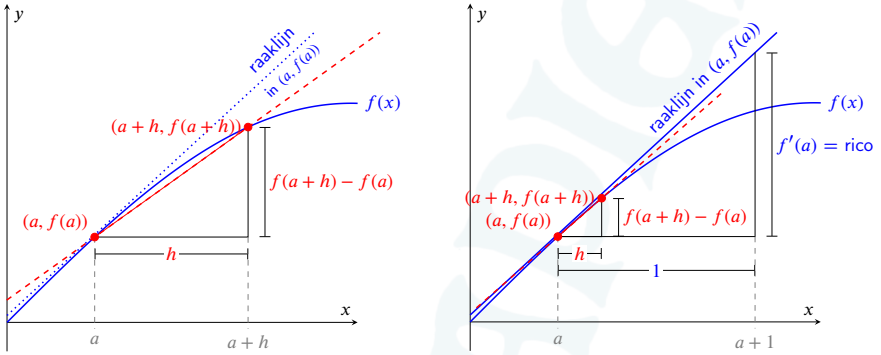
$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

De **afgeleide functie van** $f$, genoteerd $f'$, is gedefinieerd waar $f$ afleidbaar is en heeft als functiewaarde in $a$ de afgeleide van $f$ in het punt $a$:

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

## Betekenis van de afgeleide als helling van de raaklijn

De **raaklijn** aan de grafiek van een differentieerbare functie $f$ in een punt $(a, f(a))$ is de limiet van de rechten door $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ wanneer $h$ willekeurig klein wordt:




De rechte door die twee punten heeft vergelijking $y - f(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}(x-a)$ en de raaklijn aan de grafiek van $f$ in het punt $(a, f(a))$ heeft dus als vergelijking

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

De **afgeleide** in $a$ is de **richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek** in $(a, f(a))$.

## Basisafgeleiden

| | | |
|---|---|---|
| $(c)' = 0$ | $(x)' = 1$ | **(constante)** |
| $(x^r)' = rx^{r-1}$ | | **(machtregel)** |
| $(e^x)' = e^x$ | $(a^x)' = a^x \ln a$ | kettingregel en $a = e^{\ln a}$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | kettingregel en $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ |
| $(\sin x)' = \cos x$ | | |
| $(\cos x)' = -\sin x$ | | |
| $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | kettingregel en $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ |

Extra: omdat $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ en $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ is ook $(\tan x)' = \sec^2 x$ en $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

Extra: enkel voor wie vertrouwd is met de cyclometrische functies:

$$(\text{bgsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgcos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgtan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

## Rekenregels

Voor afleidbare functies $f$ en $g$, en constanten $c \in \mathbb{R}$ geldt:

| | | |
|---|---|---|
| $(cf)' = cf'$ | **(scalair veelvoud)** | $(5x)' = 5(x)' = 5$ |
| $(f+g)' = f' + g'$ | **(somregel)** | $(x + x^2)' = 1 + 2x$ |
| $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ | **(productregel)** | $\big((5x+2)\cdot x^2\big)' = 5\cdot x^2 + 2x\cdot(5x+2)$ |
| $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$ | **(quotiëntregel)** | $\left(\frac{x^7+1}{x^2}\right)' = \frac{7x^6\cdot x^2 - 2x\cdot(x^7+1)}{x^4}$ |
| $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ | **(kettingregel)** | $\big((x^7+1)^{42}\big)' = 42(x^7+1)^{41}\cdot 7x^6$ |

Extra voorbeelden:

$$\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x} \qquad \left(e^{x^4}\right)' = 4x^3 e^{x^4}$$
$$\left(e^{\sin 3x}\right)' = 3e^{\sin 3x}\cos 3x \qquad \left(e^{5x}\sin 3x\right)' = 5e^{5x}\sin 3x + 3e^{5x}\cos 3x$$
$$\left(\sin x^2\right)' = 2x\cos x^2 \qquad \left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

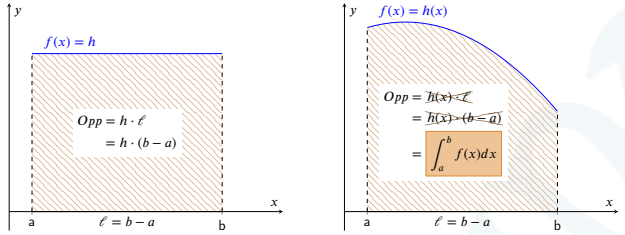
# Integralen

## Definities

De **onbepaalde integraal** van een functie $f$ is de verzameling van functies $F$ zodat $F' = f$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{met} \quad F'(x) = f(x).$$

De **bepaalde integraal** $\int_a^b f(x)\,dx$ is de oppervlakte onder de grafiek van $f$ tussen $a$ en $b$:




## Eigenschappen van de bepaalde integraal

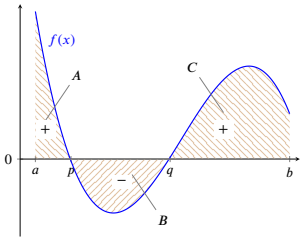
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{(Hoofdstelling van de integraalrekenenig)}$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c \qquad \text{(Gevolg van de Hoofdstelling, } c = -F(a)\text{)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \text{(Omwisselen integratiegrenzen)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{(Opsplitsen integratieinterval)}$$

## Oppervlakte onder een kromme




Oppervlaktes *onder* de $x$-as worden *negatief geteld* door de bepaalde integraal:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx$$
$$= \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

## Basisintegralen, som en scalair veelvoud

$$\int 0\,dx = c \quad \text{met } c \in \mathbb{R} \qquad \int dx = x + c$$

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \int r \cdot f(x)\,dx = r \cdot \int f(x)\,dx$$

## Substitutiemethode

Voor reële, afleidbare functies $f$ en $g$ waarvoor der samenstelling $f(g(x))$ bestaat geldt:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \overset{g(x)=u}{=} \int f(u)\,du \qquad \textbf{(substitutie } u = g(x)\textbf{)}$$

Of ook: $\int f(u)du = \int f(u(x))d(u(x)) = \int f(u(x))u'(x)dx \quad (du = u'(x)dx \text{ want } \frac{du}{dx} = u'(x))$

Voorbeeld:

$$\int e^{x^2}\,2x\,dx \overset{u(x)=x^2}{=} \int e^{u(x)}u'(x)dx = \int e^u du = e^u + c = e^{u(x)} + c = e^{x^2} + c$$

## Partiële integratie

Voor reële, afleidbare functies $f$ en $g$ geldt:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx \overset{P.I.}{=} f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad \textbf{(partiële integratie)}$$

Of ook: $\int u\,dv \overset{P.I.}{=} uv - \int v\,du \qquad \text{(want } du = u'(x)dx\text{)}$

Voorbeeld:

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x \overset{P.I.}{=} x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

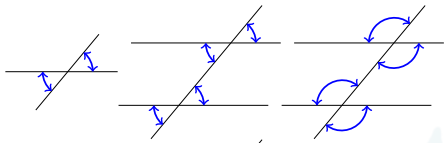
KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

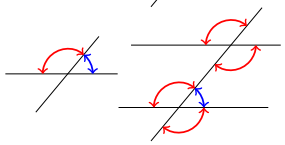
# Basiseigenschappen van hoeken, driehoeken, cirkels en vlakke figuren

## Hoeken bij snijdende rechten

*overstaande* hoeken zijn *gelijk*:
net zoals overeenkomende binnenhoeken,
en overeenkomende buitenhoeken



*aanliggende* hoeken zijn *supplementair*:

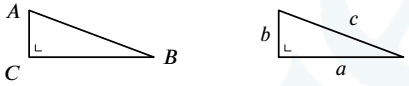


## De stelling van Pythagoras

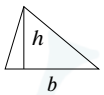
Een driehoek $ABC$ is rechthoekig in hoek $C$ $\iff$ $|AC|^2 + |CB|^2 = |AB|^2$.

Een driehoek met zijden $a, b, c$ is rechthoekig in de hoek tegenover $c$ $\iff$ $a^2 + b^2 = c^2$

Een driehoek met zijden $a, b, c$ is rechthoekig in de hoek tegenover $c$ $\iff$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$



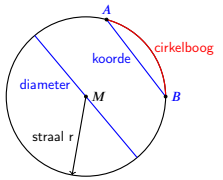

## Omtrek en oppervlakteformules

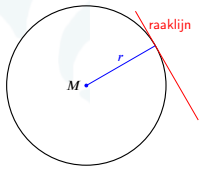
| | | Omtrek | Oppervlakte |
|---|---|---|---|
| **Vierkant** met zijde $z$ |  | $4z$ | $z^2$ |
| **Rechthoek** met breedte $b$ en hoogte $h$ |  | $2b + 2h$ | $bh$ |
| **Driehoek** met basis $b$ en hoogte $h$ |  | som van de zijden | $\frac{bh}{2}$ |
| **Cirkel** met straal $r$ |  | $2\pi r$ | $\pi r^2$ |

## Cirkels

De **cirkel** met **middelpunt** $M$ en **straal** $r$ is
de verzameling van alle punten die op een afstand $r$ van het punt $M$ liggen.

De **raaklijn** aan een cirkel staat **loodrecht op de straal** naar het raakpunt.

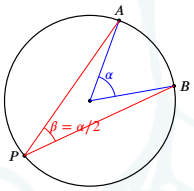


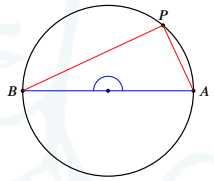



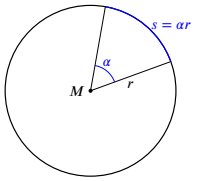

Elke **omtrekshoek** meet de helft van de **middelpuntshoek** die op dezelfde boog staat, en dus:

Elke **driehoek op een diameter met derde hoekpunt op de cirkel** is **rechthoekig**, en

De **lengte van een boog** $s$ die een middelpuntshoek $\alpha$ afsnijdt op een cirkel met straal $r$ is gegeven door $\alpha \cdot r$ als de hoek $\alpha$ wordt uitgedrukt in radialen.



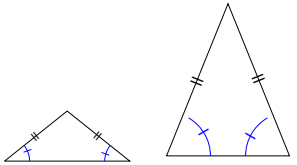




## Driehoeken

De **som van de hoeken** van een driehoek meet $180°$ (of dus $\pi$ radialen).

Een **gelijkbenige driehoek** heeft twee gelijke basishoeken.



Een **gelijkzijdige driehoek** heeft drie gelijke hoeken,
van elk $60°$ of dus $\frac{\pi}{6}$ radialen.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/08/04

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

# Vergelijkingen van rechten in het vlak (cartesiaans assenstelsel $Oxy$)

## Vormen

Een rechte door het punt $P(x_1, y_1)$ kunnen we beschrijven op verschillende manieren.
Een **cartesiaanse vergelijking** van een rechte is *een nodige en voldoende voorwaarde* opdat punten $(x, y)$ op de rechte zouden liggen.

(A) $y = y_1 + m(x - x_1)$

**expliciete** vergelijking: $y$ als functie van $x$
Het getal $m$ is de **richtingscoëfficiënt** (rico) van de rechte.
Door $P = (0, q)$ te kiezen wordt de vergelijking $y = q + mx$.

vb: $y = 1 + 2x$ heeft rico 2.

(B) $n_x(x - x_1) + n_y(y - y_1) = 0$

**impliciete** vergelijking: verband tussen $x$ en $y$
De vector $\vec{n}(n_x, n_y)$ is een **normaalvector** op de rechte.
De vergelijking kan ook geschreven worden als
$n_x\, x + n_y\, y + c = 0$ met $c$ een constante.

vb: $2x - y + 1 = 0 \perp \vec{n} = (2, -1)$

Een **parametervergelijking** *genereert* alle punten van de rechte met behulp van een parameter:

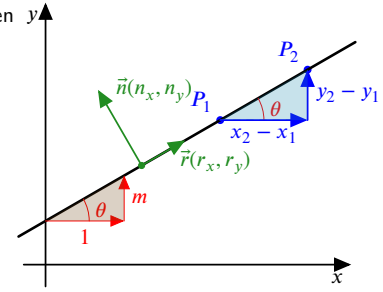
(C) $\begin{cases} x = x_1 + r_x\, t \\ y = y_1 + r_y\, t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

**parametervergelijking**: elke waarde voor de parameter $t$ genereert een punt van de rechte
$\vec{r}(r_x, r_y)$ is een **richtingsvector** van de rechte.

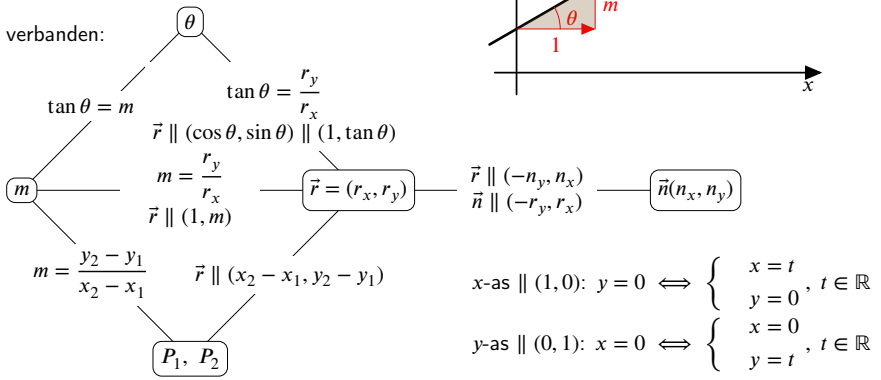
vb: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \| \ \vec{r} = (1, 2)$

## Richting

De **richting** van een rechte kan gespecifieerd worden op verschillende manieren:
- met de **hoek** $\theta$ die de rechte maakt met de $x$-as
- met de **rico** $m$ van de rechte
- met een **richtingsvector** $\vec{r}(r_x, r_y)$ van de rechte
- met een **normaalvector** $\vec{n}(n_x, n_y)$ op de rechte
- met **twee punten** $P_1(x_1, y_1)$ en $P_2(x_2, y_2)$




verbanden:




$x$-as $\| (1, 0)$: $y = 0 \iff \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

$y$-as $\| (0, 1)$: $x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

# Onderlinge ligging van rechten

De **snijpunten** van twee rechten zijn de oplossingen van een stelsel gevormd door de vergelijkingen van beide rechten. De vergelijkingen mogen gemengd worden wat betreft vorm.

| | | |
|---|---|---|
| **Snijdend** | één snijpunt | verschillende richting |
| **Evenwijdig en niet samenvallend** | geen snijpunten | gelijke richting |
| **Samenvallend** | elk punt is snijpunt | gelijke richting |

Rechten staan **loodrecht op elkaar** als

| | |
|---|---|
| hun richtingsvectoren loodrecht op elkaar staan. | $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$ |
| het product van hun rico's gelijk is aan $-1$. | $m_1 \cdot m_2 = -1$ (volgt uit $(1, m_1) \cdot (1, m_2) = 0$) |
| hun normaalvectoren loodrecht op elkaar staan. | $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ |
| een normaalvector van de ene rechte evenwijdig is met een richtingsvector van de andere rechte. | $\vec{n}_1 = k\vec{r}_2 = 0, \ k \in \mathbb{R}$ |

Rechten zijn **evenwijdig** als

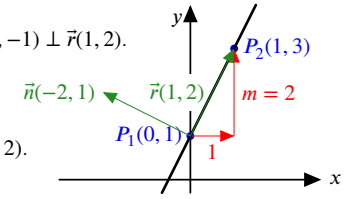
| | |
|---|---|
| hun richtingsvectoren evenwijdig zijn. | $\vec{r}_1 = k\vec{r}_2, \ k \in \mathbb{R}$ |
| hun rico's gelijk zijn. | $m_1 = m_2$ |
| hun normaalvectoren evenwijdig zijn. | $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \ , \ k \in \mathbb{R}$ |
| een normaalvector van de ene rechte loodrecht staat op een richtingsvector van de andere rechte. | $\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$ |

# Omzetten van parametervergelijkingen en cartesiaanse vergelijkingen

**Meetkundig**:
Maak gebruik van de verbanden tussen de rico $m$, de richtingsvector $\vec{r}$ en de normaalvector $\vec{n}$.

vb: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$ gaat door het punt $(1, 3)$ en heeft richtingsvector $\vec{r}(1, 2) \perp \vec{n}(-2, 1)$.
$\iff -2\,(x - 1) + 1\,(y - 3) = 0 \iff -2x + y - 1 = 0$

vb: $2x - y + 1 = 0$ gaat door het punt $(0, 1)$ en heeft normaalvector $\vec{n}(2, -1) \perp \vec{r}(1, 2)$.
$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$




vb: $y = 2x + 1$ gaat door het punt $(0, 1)$ en heeft richtingsvector $\vec{r}(1, 2)$.
$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

**Algebraïsch**:
- Een parameter $x = t$ invoeren (of $y = t$) schrijft een cartesiaanse vergelijking in parametervorm:

$$y = 3 + 2x \iff \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \overset{\text{of}}{\iff} \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

- De parameter $t$ elimineren maakt van een parametervergelijking een cartesiaanse vergelijking:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \overset{t = x - 1}{\iff} y = 3 + 2(x - 1) \iff 2x - y + 1 = 0$$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 4-8-2026

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.36)

KU LEUVEN

Biomedische Wetenschappen en Farmacie

Remediëring Wiskunde

# Module 12
# Klaar voor de eindtoets?

(Versie 2026/08/25H.36)

# 12.1 Afsluitende toets en attest

Start hieronder de afsluitende toets om je wiskundige competenties te verifiëren.

Aan het einde van de toets kan je een remediëringsattest (rapport) downloaden. Als je niet geslaagd was op de **verplichte ijkingstoets** voor farmaceutische wetenschappen of biomedische wetenschappen heb je dat attest nodig om nadat je ingeschreven bent aan de KU Leuven te bewijzen dat je de verplichte remediëring hebt gevolgd. Als je het attest niet nodig hebt, kan je de toets ook anoniem afleggen.

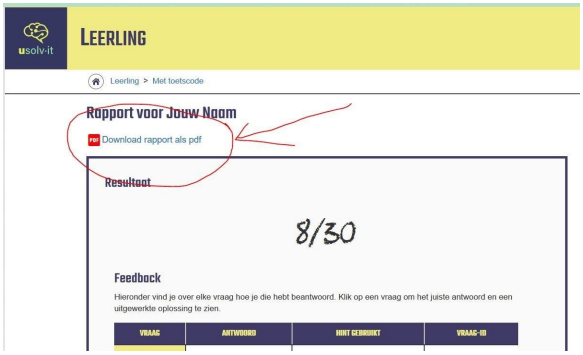
- **Gebruik je volledige officiële naam (zoals bij je inschrijving aan de KU Leuven)**
- Na het indienen van de test krijg je een rapport. **Download dit rapport als pdf**. Deze pdf kan je eens je ingeschreven bent aan KU Leuven indienen als **remediëringsattest**. Je krijgt op je **student.kuleuven.be**-e-mailadres instructies hoe je dit moet indienen.
- Je kan de afsluitende toets **meerdere malen** afleggen.

## Start de afsluitende toets

START HIER de afsluitende toets in USOLV-IT :

## Merk op:

- Download en bewaar het remediëringsattest. Download via de link zoals op volgende afbeelding:




- Je **score op deze afsluitende toets telt niet mee in je opleiding**. De score geeft je wel een indicatie van de groei van je competenties door het volgen van de remediëring.
- Je moet niet slagen voor de afsluitende toets om aan de remediëringsvoorwaarde te voldoen.
- Om te zorgen dat je sterk aan de start komt, is het uiteraard belangrijk dat je met het remediëringstraject je wiskundige competenties hebt kunnen versterken. Een goede score op de afsluitende toets is dan ook gewenst.

CC BY-NC-SA 4.0