KU LEUVEN

Faculteit Bewegings- en Revalidatiewetenschappen

Voorkennis Wiskunde

FABER Introductieweek Basiswetenschappen

(Versie 2026/08/25H.42)

Inhoudsopgave

1.1 Intro

Welkom bij het wiskundedeel van de Introductieweek Basiswetenschappen.

De verschillende modules in deze cursus zijn het resultaat van een samenwerking tussen het Departement Wiskunde van de Faculteit Wetenschappen, de dienst Studiebegeleiding Wetenschappen en de dienst Studentenbegeleiding Ingenieurswetenschappen.

De tekst en vormgeving is aangepast om het geheel geschikt te maken voor zelfstudie.

Deze cursus is gericht op toekomstige studenten Bewegings- en sportwetenschappen en Revalidatiewetenschappen & kinesitherapie.

Voor hulp kan je een email sturen via de "help" knop linksboven.

Veel succes!

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren

Optellen $(2+3)$ en vermenigvuldigen $(2\cdot 3)$ zijn de twee basisoperaties met getallen. Bij combinaties zoals $2+3\cdot 5$ wordt om historische redenen eerst vermenigvuldigd en dan opgeteld, dus $2+3\cdot 5 = 2+(3\cdot 5) = 2+15 = 17$. Als je de andere volgorde wil *moet* je haakjes zetten: $(2+3)\cdot 5 = 5\cdot 5 = 25$.

Zeker zodra er ook met letters wordt gerekend, wordt het snel belangrijk om naargelang het geval van sommen producten te kunnen maken, of omgekeerd van producten sommen te maken:

$2\cdot(a+3) = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2a+6$	product wordt som	(weliswaar met een term $2a$ die zelf een product is)
$2\cdot a+6 = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2\cdot(a+3)$	som wordt product	(weliswaar met een factor $a+3$ die zelf een som is)

Uitwerken van haakjes betekent *producten* herschrijven als *sommen*: $2(a+b) = 2a+2b$.
Ontbinden in factoren betekent een *som* (of getal) herschrijven als een *product*: $2a^2+6a = 2a(a+3)$.

Voor 'haakjes uitwerken' en 'ontbinden' gelden dezelfde regels, maar ze moeten telkens in de andere richting worden gelezen. Van links naar rechts zeggen ze hoe je een product (of een macht, dat is ook een product) schrijft als een som, maar van rechts naar links gelezen zeggen ze hoe je een som schrijft als een product.

Eigenschap 2.1.1. Voor rekenen met letters of met reële getallen geldt:

$(a+b)c$	$=$	$ac+bc$	(distributiviteit van $\cdot$ t.o.v. $+$)
$a(c+d)$	$=$	$ac+ad$	(idem, maar met som rechts)
$(a+b)(c+d)$	$=$	$ac+ad+bc+bd$	(want gelijk aan $(a+b)c+(a+b)d$)
$-(a+b)$	$=$	$-a-b$	(want $(-1)(a+b) = (-1)a+(-1)b$)
$(a+b)^2$	$=$	$a^2+2ab+b^2$	(kwadraat van een tweeterm)
$(a-b)^2$	$=$	$a^2-2ab+b^2$	(kwadraat van tweeterm via $(a+(-b))^2$)
a^2-b^2	$=$	$(a+b)(a-b)$	(verschil van twee kwadraten)

Als referentie vermelden we ook volgende formules voor hogere machten:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad \text{(derdemacht van een tweeterm)}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \text{(Binomium van Newton)}$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad \text{(som van derdemachten)}$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad \text{(verschil van derdemachten)}$$

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1}) \qquad \text{(verschil van } n^{\text{de}} \text{ machten)}$$

$$a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1}) \qquad \text{(som } n^{\text{de}} \text{ machten, } n \textbf{ oneven})$$

Oefening 2.1.1. Werk de haakjes uit en vereenvoudig:

1. $a(x+3)-3a = \ldots\ldots$

2. $ax+3+(-ax) = \ldots\ldots$

3. $2ax+3-(-ax) = \ldots\ldots$

4. $1-(x-y+1)+x = \ldots\ldots$

5. $1-(x-y-1) = \ldots\ldots$

6. $1-(p-q)+p = \ldots\ldots$

Oefening 2.1.2. Werk de haakjes uit:

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Haakjes en ontbinden in factoren

1. $2(a+3)^2 = \ldots\ldots$

2. $2(a-3)^2 = \ldots\ldots$

3. $2(-a-3)^2 = \ldots\ldots$

4. $(x+y)(x+3y)^2 = \ldots\ldots$

Voorbeeld 2.1.1. Breng de voorgestelde factor buiten de haakjes, en vereenvoudig zo ver mogelijk.

1. $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot \left(4p+5\right)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4(p+1)) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4p + 4) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (4p+5)\,.
\end{aligned}$$

2. $(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) = \frac{4r}{3} \cdot (5)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) &= \frac{4r}{3} \cdot (3p+2) - \frac{4r}{3} \cdot 3 \cdot (p-1) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3 \cdot (p-1)) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3p + 3) \\
&= \frac{4r}{3} \cdot 5.
\end{aligned}$$

3. $\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 = \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 &= \frac{xs}{8} \cdot 1 + \frac{xs}{8} \cdot 2s + \frac{xs}{8} \cdot 24x^2s^2 \\
&= \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2).
\end{aligned}$$

Oefening 2.1.3. Ontbind in factoren.

1. $81x^2y^2 - 25 = \ldots\ldots$

2. $9r^2 - 24r + 16 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1.A Basisoefeningen haakjes

Oefening 2.1.4. Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan en vereenvoudig:

1. $23 \cdot (1000 - 1) = \ldots\ldots$
2. $(923 + 77)/4 = \ldots\ldots$
3. $-\dfrac{2x + 4xy}{-2x} = \ldots\ldots$
4. $p - (p + q) + 2q = \ldots\ldots$

Oefening 2.1.5. Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan en vereenvoudig:

1. $18x + 24y + 30z = \ldots\ldots$
2. $20ab^3 + 30bc + 25b^2c^3\sqrt{d} = \ldots\ldots$
3. $-9x^2y - 3xy = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{p^2q^3}{8} - \dfrac{p^2q}{2} + pq = \ldots\ldots$

Oefening 2.1.6. Ontbind in factoren (of vul aan), met $u, s, t \in \mathbb{R}$.

1. $24st + 12t - 60ut = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{st^2}{8} + \dfrac{s^2t^2}{12} + s^2t = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{2s + 3}{2} + (2s + 3)^2 = \dfrac{2s + 3}{2} \cdot (\ldots\ldots)$
4. $\left(\dfrac{5s}{8}\right)(u - 1) - 5s(3u + 1) = \left(\dfrac{5s}{8}\right) \cdot (\ldots\ldots)$

Oefening 2.1.7. Ontbind in factoren, met $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $25x^2y^4 - 64 = \ldots\ldots$
2. $4x^2 + 24xy + 36y^2 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Een *breuk* is per definitie een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$. Met de breuk $\frac{a}{b}$ associëren we het resultaat van de deling van a door b, dat is een getal dat we ook noteren als $\frac{a}{b}$. Bijvoorbeeld:

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{1}{2} = 0,5 \qquad \frac{1}{3} = 0,333\ldots \qquad \text{en} \qquad \frac{\pi}{2} = 1,57\ldots.$$

Voor breuken definiëren we volgende regels voor gelijkheid, optelling en vermenigvuldiging:

Definitie 2.2.1 (Definitie gelijkheid en basisbewerkingen breuken)**.**

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $b \neq 0$.

We noemen a de **teller** en b de **noemer**. Zodra de noemers verschillend zijn van 0, geldt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \qquad \text{(gelijkheid van (getalwaarde van) breuken (kruisproduct))}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{ad + cb}{bd} \qquad \text{(optelling (op gelijke noemer brengen))}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \text{(vermenigvuldiging (teller} \times \text{teller, noemer} \times \text{noemer))}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \text{(deling (maal omgekeerde))}$$

Twee breuken zijn **gelijknamig** als ze dezelfde noemer hebben.
Als zowel a als b verschillend zijn van nul, is $\frac{b}{a}$ de **omgekeerde breuk van** $\frac{a}{b}$.

Opmerking 2.2.1.

- Gelijke breuken hebben dezelfde getalwaarde:
$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ want } 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \text{ en beide hebben getalwaarde } 0,5.$$
- Eenzelfde getal kan weergegeven worden door meerdere breuken: $2 = \frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{50}{25}$.
- Uitdrukkingen van de vorm $\frac{a}{0}$ zijn niet gedefinieerd.
- We noteren breuken ook als a/b (dus met een *schuine* streep: $a/b \overset{\text{notatie}}{=} \frac{a}{b}$).
- Deze definitie is alleen geformuleerd voor breuken van reële getallen. We zullen de definitie verder ook stilzwijgend gebruiken voor bijvoorbeeld breuken van letters zoals $\frac{a}{x}$, van veeltermen zoals $\frac{x^2+1}{x-1}$, van functies zoals $\frac{\sin(x)}{2x}$ en zelfs voor breuken van breuken:
$$\frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ maar } \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{0,5}{4} = 0,125.$$
Voor breuken van breuken spreken we dus af dat de *grootte* en de precieze *plaats* van de symbolen belangrijk is. In bovenstaand voorbeeld mogen beide breukstrepen niet even groot

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

zijn want dan is de uitdrukking niet ondubbelzinnig. We schrijven voor de leesbaarheid de grootste breukstreep altijd in het midden van de relevante formule. Dus

$$x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}} \text{ maar nooit } x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}}.$$

- Met behulp van het kleinste gemene veelvoud kan de optelling soms sneller:

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{29}{36} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}+\frac{7\cdot 12}{18\cdot 12}=\frac{174}{216}=\ldots$$

Oefening 2.2.1. Voer de bewerking uit en geef een zo eenvoudig mogelijke breuk als resultaat.

1. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\ldots\ldots$
2. $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=\ldots\ldots$
3. $\frac{1+1}{1}=\ldots\ldots$
4. $\frac{1}{1+1}=\ldots\ldots$

Eigenschap 2.2.1 (Eenvoudige maar belangrijke gevolgen)**.**

Zodra de noemers verschillend zijn van 0, geldt voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a\cdot c}{a\cdot d}=\frac{\cancel{a}\cdot c}{\cancel{a}\cdot d}=\frac{c}{d} \qquad \text{(gemeenschappelijke factor } a \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{a\cdot d} \qquad \text{(met factor } a \text{ vermenigvuldigen)}$$

$$a\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{d} \qquad \text{(getal maal breuk)}$$

$$\frac{a\cdot c}{d}=a\cdot\frac{c}{d} \qquad \text{(factor uit teller halen)}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \text{(breuken optellen, gelijke noemers)}$$

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b} \qquad \text{(som in teller splitsen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{c} \qquad \text{(gelijke noemer } \frac{1}{b} \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{b\cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door getal is maal in noemer)}$$

$$\frac{a}{\frac{c}{d}}=a\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{c} \qquad \text{(getal gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

Opmerking 2.2.2.

- Deze eigenschappen zijn eenvoudige gevolgen van de vorige definities. Het is erg belangrijk de evidentie van deze eigenschappen in te zien, en ze vlot te kunnen toepassen op zowel numerieke als symbolische uitdrukkingen.
- Het heeft geen zin deze eigenschappen *van buiten* te leren, je moet ze *van binnen* kennen, dus door en door kennen. Dat is hopelijk al het geval, maar indien niet moet je hierover (erg veel) oefeningen maken.
- De eerste zes formules zijn twee per twee elkaars omgekeerde. We zullen dat verder niet meer zo uitvoerig weergeven, maar denk er aan dat elke gelijkheid in twee richtingen kan worden gelezen. $A = B$ betekent dat A gelijk is aan B, maar dus ook dat B gelijk is aan A. De formule $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ kan je dus van links naar rechts lezen om twee breuken op te tellen, maar ook van rechts naar links om een optelling *in* een breuk te vervangen door een optelling *van* breuken.

Eigenschap 2.2.2 (Eenvoudige maar enigszins gekke gevolgen)**.**

$$
\begin{aligned}
a + c &= d \cdot \left(\frac{a}{d} + \frac{c}{d}\right) && \text{(niet bestaande factor buiten haakjes brengen)}\\
a &= \frac{a}{1} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken)}\\
a &= \frac{1}{1/a} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken (variant))}\\
a \cdot b &= \frac{a}{1/b} && \text{(van een product een breuk maken)}\\
\frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} && \text{(van een breuk een product maken)}\\
a \cdot b = 1 &\iff a = \frac{1}{b} && \text{(van een product een breuk maken (variant))}
\end{aligned}
$$

Opmerking 2.2.3 (Vaak gemaakte fouten)**.**

Zelfs als de noemers verschillend zijn van 0, geldt *in het algemeen niet*:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} && \text{(som in de noemer)}\\
&\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} && \text{(schrap al wat stoort)}\\
&\frac{a}{a+1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} = \frac{0}{0+1} = 0 && \text{(schrap al wat stoort (variant 1))}\\
&\frac{2x}{2x+1} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}x+1} = \frac{x}{x+1} && \text{(schrap al wat stoort (variant 2))}
\end{aligned}
$$

Pas op: sommige van de formules gelden *soms* toch wel. De laatste formule bijvoorbeeld:

$$\frac{2x}{2x+1} = \frac{x}{x+1}$$

is een erg zinvolle en mogelijk interessante formule, als je ze beschouwt als een vergelijking in x. Voor x verschillend van $-1/2$ en verschillend van -1 (want daar is de noemer 0, en bestaat de breuk al niet), onderzoeken we wanneer de formule waar is:

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Breuken

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2x+1} &= \frac{x}{x+1} \\ &\iff && \text{(kruisproduct, of op gelijke noemer brengen)} \\ 2x\cdot(x+1) &= (2x+1)\cdot x \\ &\iff && \text{(uitwerken en alles naar linkerlid brengen)} \\ 2x^2+2x-2x^2-x &= 0 \\ &\iff && \text{(uitrekenen)} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Dus: de formule is waar als x gelijk is aan 0 maar fout in alle andere gevallen.

Voorbeeld 2.2.1 (Numeriek rekenen met breuken)**.**

1. $\frac{120+74}{2} \underset{\text{(breuk splitsen)}}{=} \frac{120}{2}+\frac{74}{2} = 60+37 = 97.$ Of natuurlijk ook $\frac{120+74}{2} = \frac{194}{2} = 97.$
2. $\frac{1}{8}+\frac{5}{6} \underset{\text{(gelijke noemer)}}{=} \frac{1\cdot 6+5\cdot 8}{48} = \frac{46}{48} = \frac{23}{24}$
3. $\frac{125}{50} \underset{\text{(gemeenschappelijke factor)}}{=} \frac{25\cdot 5}{25\cdot 2} \underset{\text{(vereenvoudigen)}}{=} \frac{5}{2}$
4. $\frac{\frac{80}{2}}{10} \underset{\text{(dubbele breukstreep)}}{=} \frac{80}{2\cdot 10} = \frac{80}{20} = 4.$ Er geldt natuurlijk ook $\frac{\frac{80}{2}}{10} = \frac{40}{10} = 4.$

Oefening 2.2.2. Vereenvoudig.

1. $\frac{x+y}{\frac{x}{y}} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\frac{x+y}{x}}{y} = \ldots\ldots$
3. $\frac{p^2-q^2}{p-q} = \ldots\ldots$
4. $\frac{\frac{p+qp}{pq^2}}{\frac{p^2}{q}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.2.A Basisoefeningen breuken

Oefening 2.2.3. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\ldots\ldots$
2. $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=\ldots\ldots$
3. $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\ldots\ldots$
4. $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\ldots\ldots$
5. $\frac{15}{6}\cdot\frac{3}{2}=\ldots\ldots$
6. $\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{22}\cdot\frac{4}{18}=\ldots\ldots$
7. $\frac{6}{5}:\frac{2}{15}=\ldots\ldots$
8. $\frac{12}{25}:\frac{18}{35}=\ldots\ldots$
9. $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}=\ldots\ldots$
10. $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=\ldots\ldots$

Oefening 2.2.4. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $20\cdot(\frac{5}{4}-\frac{4}{5})=\ldots\ldots$
2. $-\frac{6}{27}+\frac{27}{1}+\frac{16+14}{9}-\frac{3}{14+13}-3\cdot 9=\ldots\ldots$
3. $-\frac{(1-a)-2}{a+1}=\ldots\ldots$ $(a\neq -1)$

Oefening 2.2.5. Schrijf als een zo eenvoudig mogelijke breuk. Onderstel dat alle uitdrukkingen bestaan.

1. $\frac{a-b}{c}-\frac{a-2b}{2c}=\ldots\ldots$
2. $\frac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}}=\ldots\ldots$
3. $\frac{1-\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2}{b}}=\ldots\ldots$
4. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}=\ldots\ldots$
5. $a+\frac{a}{1+a}=\ldots\ldots$
6. $1+\frac{a}{1+a}=\ldots\ldots$
7. $1+\frac{1}{1+a}=\ldots\ldots$
8. $a+\frac{1}{1+a}=\ldots\ldots$
9. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}=\ldots\ldots$
10. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}}=\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

2.3.1 Machten met een reëel grondtal en een gehele exponent

Vermenigvuldigen is hetzelfde als 'herhaald optellen': $3 \times 2 \overset{\text{def}}{=} 2+2+2$, en $n \times a = a + a + \cdots + a$ (n keer).
Op dezelfde manier is *machtsverheffen* hetzelfde als 'herhaald vermenigvuldigen': $2^3 \overset{\text{def}}{=} 2 \times 2 \times 2$.

Definitie 2.3.1. Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent.

Voor $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de **n-de macht** van een reëel getal a, genoteerd a^n, als

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1 \quad \text{als } a \neq 0$$
$$a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}} \quad \text{als } n \in \mathbb{N}_0.$$

Vb: $5^0 = 1$
$5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ factoren}} = 125$

Als a niet nul is, definiëren we ook machten met negatieve exponenten:

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

Vb: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

.

We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Oefening 2.3.1. Bereken:

1. $5^2 = \ldots\ldots$
2. $-5^2 = \ldots\ldots$
3. $(-5)^2 = \ldots\ldots$
4. $(2+3)^2 = \ldots\ldots$
5. $2^2 + 3^2 = \ldots\ldots$
6. $(2+3)^2 - (2^2+3^2) = \ldots\ldots$
7. $2^{-1} = \ldots\ldots$
8. $10^3 = \ldots\ldots$
9. $10^{-3} = \ldots\ldots$

Opmerking 2.3.1. Onmiddellijke gevolgen van de definities:

- $a^1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.
- $a^0 = 1$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
- $0^n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
- 0^z is niet gedefinieerd voor $z \in \mathbb{Z}^-$.

Omdat $a^2 = a \cdot a$ en $a^3 = a \cdot a \cdot a$ volgt ook direct dat

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= (a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5 \\ (a^2)^3 &= (a \cdot a)^3 = (a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a) = a^{2 \cdot 3} = a^6 \\ a^3 \cdot b^3 &= (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = (a \cdot b)^3 \end{aligned}$$

maar een uitdrukking als $a^2 \cdot b^3$ kan je niet schrijven als één macht, wel als $(a \cdot b)^2 \cdot b$.
In het algemeen gelden volgende rekenregels:

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

Eigenschap 2.3.1 (Rekenregels machten)**.** Voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)} \\ (ab)^n &= a^n b^n && \text{(macht van product)} \\ (a^m)^n &= a^{mn} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{als } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{als } b \neq 0$$

Dezelfde regels gelden voor *gehele* $m, n \in \mathbb{Z}$ zolang het grondtal niet nul is bij negatieve exponenten.

Dezelfde regels gelden ook voor *reële* $m, n \in \mathbb{R}$ voor zover ze betekenis hebben (zie verder).

Oefening 2.3.2. Bereken volgende machten.

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^{\cdots\cdots}$
2. $(2^2)^3 = 2^{\cdots\cdots}$
3. $2^{(2^3)} = 2^{\cdots\cdots}$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^{\cdots\cdots}$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = \ldots\ldots^5$

Voorbeeld 2.3.1. Bereken volgende machten.

(a) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$

(b) $\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{1}{4} \cdot 9 = \dfrac{9}{4}$

2.3.2 Machten met een strikt positief reëel grondtal en een rationale exponent

Als we ons beperken tot positieve grondtallen, kunnen we de machtsverheffing tamelijk eenvoudig nog verder veralgemenen: we definiëren eerst $a^{\frac{1}{n}}$, dan $a^{\frac{m}{n}} = a^q$, met $q \in \mathbb{Q}$, en tenslotte zelfs a^r, met $r \in \mathbb{R}$.

Definitie 2.3.2. Machtsverheffing met grondtal in $\mathbb{R}^+$ en exponent in $\mathbb{Q}$.

Voor $a, b \in \mathbb{R}^+$ en $n \in \mathbb{N}_0$ is de macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\dfrac{1}{n}$ gedefinieerd als het uniek positief reëel getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$a^{\frac{1}{n}} \overset{\text{def}}{=} b \iff b^n = a$ Vb: $2 = 8^{\frac{1}{3}} \iff 2^3 = 8$

We noemen $a^{\frac{1}{n}}$ de *n-de machtswortel* uit a, of de n-de wortel uit a en noteren

$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}}$ Vb: $\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}} = 5$

We definiëren voor $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $m \in \mathbb{Z}$ ook

$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ Vb: $125^{\frac{2}{3}} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 5^2 = 25$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

Opmerking 2.3.2.

(a) Voor $n = 2$ schrijven we gewoon $\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt[2]{a}$.

(b) Vaak gemaakte fout: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(c) Onmiddellijke gevolgen van de definities:

- $a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0^+$ en alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0^+$, alle $m \in \mathbb{Z}$ en alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $1^q = 1$ voor alle $q \in \mathbb{Q}$.

De bovenstaande definitie is enkel zinvol als er inderdaad een dergelijk uniek positief reëel getal b bestaat. Precies om dat te garanderen, hebben we ons beperkt tot POSITIEVE a en b.

Voorbeeld 2.3.2. Vereenvoudig volgende machten met rationale exponent.(met $x \in \mathbb{R}_0^+$)

(a) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{64} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{8^2} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8 = 8^{\frac{1}{3}+1} = 8^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$

(b) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x} = x^{\frac{3}{4}-1} = x^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

(c) $\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x^6 \cdot x^{\frac{2}{4}} = x^{6+\frac{1}{2}} = x^{\frac{13}{2}} = \sqrt{x^{13}}$

Oefening 2.3.3. Vereenvoudig (met $x, y \in \mathbb{R}_0^+$):

1. $\dfrac{4}{\sqrt{8}} = \ldots\ldots$
2. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2 y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$
3. $\sqrt{48x^9y^4} = \ldots\ldots$

2.3.3 Machten met een strikt positief reëel grondtal en een reële exponent

Men kan ook a^r definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$ (dus uitdrukkingen zoals $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$ en $\sqrt{7}^{\sqrt{\pi}}$). Dit is technisch enigszins subtiel en we zullen de definitie hier ook niet in detail geven. Ook voor machten met rationale en reële exponenten blijven de gebruikelijke rekenregels gelden.

2.3.4 Samenvatting

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Machten

Eigenschap 2.3.2 (Samenvatting machten). Zij $x, y > 0$ en $m, n \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$
\begin{aligned}
x^m x^n &= x^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)}\\
(xy)^n &= x^n y^n && \text{(macht van product)}\\
(x^m)^n &= x^{mn} && \text{(macht van een macht)}\\
x^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{x} && \text{(notatie/definitie)}\\
x^{-n} &= \frac{1}{x^n} && \text{(notatie/definitie)}\\
\frac{x^m}{x^n} &= x^{m-n} && \text{(quotient van machten)}\\
x^0 &= 1, \quad x^1 = x, \quad x^{-1} = \frac{1}{x}\\
\sqrt[m]{x^n} &= x^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{x})^n
\end{aligned}
$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3.A Basisoefeningen machten

Oefening 2.3.4. Bereken

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^{\cdots\cdots}$
2. $(2^2)^3 = 2^{\cdots\cdots}$
3. $2^{(2^3)} = 2^{\cdots\cdots}$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^{\cdots\cdots}$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = \ldots\ldots^5$

Oefening 2.3.5. Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel $x, y, a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

1. $\dfrac{\sqrt{a}}{a^5} = \ldots\ldots$
2. $\left(x^6 y^8\right)^{-1/2} = \ldots\ldots$
3. $a^4 b \left(\dfrac{\sqrt{a^2 b^4}}{ab}\right)^3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3.B Oefeningen rekenvaardigheden

Oefening 2.3.6. Maak nummers 2, 3, 4, 7, 8, 10, 14, 15, 18 en 24. Vul aan op de plaats van het vraagteken. Je mag veronderstellen dat een uitdrukking die in de noemer staat steeds verschilt van 0.

1. $\frac{4x^2}{5} - 3x = 4x \cdot [\dots\dots]$

2. $(p+1)^2 + \frac{(p+1)^3}{2} + \frac{(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)^2}{2} \cdot [\dots\dots]$

3. $\frac{(m+n)}{2} \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2} - \frac{m}{2} = \frac{\dots\dots}{2(m+n)}$

4. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = \dots\dots \cdot \sqrt{2}$

5. $\frac{4}{q} - \frac{8+q}{2q^2} = \frac{\dots\dots}{2q^2}$

6. $\frac{-8}{2x} + \frac{4}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{\dots\dots}{2x(x-1)^2}$

7. $\left(a^{-1} \cdot b^{-3} \cdot c^2\right)^3 \cdot \left(a^{-2} \cdot b^{-4} \cdot c^3\right)^{-2} = a^{\dots\dots} \cdot b^{\dots\dots} \cdot c^{\dots\dots}$

8. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right)^{-1} = \frac{\dots\dots}{x+y^2}$

9. $(a+b)^3 - \left(a^3 + b^3\right) = (a+b) \cdot \dots\dots$

10. $\frac{a+b}{a^2+b^2} - \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{\dots\dots}{a^4-b^4}$

11. $(t-1) \cdot (1+t+t^2) = \dots\dots$

12. $\frac{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}}{2p-2} = \dots\dots \cdot \frac{1}{p}$

13. $\frac{1}{2 + \frac{1}{2+1}} = \dots\dots$

14. $n^{-1} + n^{-2} + n^{-3} = n^{-3} \cdot (\dots\dots) = \frac{\dots\dots}{n^3}$

15. $x + 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{\dots\dots}{x-1}$

16. $xy^2z^3 + \frac{x^2yz}{2} + \frac{xyz^2w}{3} = xyz \cdot [\dots\dots]$

17. $\frac{3}{q} + \frac{1}{2q} - \frac{2}{4q} = \frac{\dots\dots}{4q} = \frac{\dots\dots}{q}$

18. $\left(\frac{n^4}{m^3} \cdot \frac{m^{-5}}{n^3}\right)^2 = \frac{n^{\dots\dots}}{m^{\dots\dots}}$

19. $\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c} = \frac{\dots\dots}{c(b+c)}$

20. $\frac{x^2z}{2} + zyx + \frac{zy^2}{2} = \frac{x+y}{2} \cdot [\dots\dots]$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3.B Oefeningen rekenvaardigheden

21. $\left(\frac{-4}{a}\right)^2 + \frac{3}{2a} = \frac{3}{a^2} \cdot [\dots\dots]$

22. $a^x \cdot a^{-\frac{2x}{3}} = a^{\dots\dots x}$

23. $(k+l+m)^2 = ((k+l)+m)^2 = k^2 + 2kl + l^2 + \dots\dots$

24. $\left(-(-x+y)\cdot(-1)^{-3}\right)^2 =$ $\boxed{+(y-x)^2}$ $\boxed{-(y-x)^2}$

25. $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot 3a - \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\dots\dots}{a(a+1)}$

GA NU TERUG NAAR DE TOLEDO-PAGINA VAN DE INTRODUCTIEWEEK BASISWETENSCHAPPEN.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Eerstegraadsveeltermen

De meest eenvoudige veeltermen zijn die van de *eerste graad*. We bespreken hier enkele eigenschappen, en leggen het verband tussen de verwante begrippen *veelterm*, *functie* en *vergelijking*.

Definitie 3.1.1. Voor reële getallen a en b met $a \neq 0$ geldt:

- Een **eerstegraads*veelterm* in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
  $ax + b$ Vb: $2x - 3$
- Aan dergelijke veelterm is volgende **eerstegraads*functie*** geassocieerd:
  $x \mapsto ax + b$ Vb: $x \mapsto 2x - 3$
- Een **eerstegraads*vergelijking*** (of ook ***lineaire* vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
  $ax + b = 0$ Vb: $2x - 3 = 0$

Opmerking 3.1.1.

- Het woord *lineair* betekent in eerste instantie 'zoals een *lijn*', dus 'zoals een rechte'. Omdat een rechte een vergelijking heeft van de eerste graad, is het gebruik van het woord *lineair* uitgebreid naar 'van de eerste graad'. Voor vergelijkingen zijn 'lineair' en 'van de eerste graad' dus synoniemen. Maar voor functies heeft het begrip lineair in de wiskunde een beperktere en meer technische betekenis. Een functie is *lineair* als voor alle getallen a en b geldt dat $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$. In die betekenis is de functie $x \mapsto 2x$ wel degelijk lineair, maar de functie $x \mapsto 2x + 1$ is *niet* lineair. Daarom vermijden we het gebruik van het woord *lineair* voor functies en spreken we steeds over *eerstegraadsfuncties*. In sommige handboeken worden echter andere afspraken gemaakt.
- In de uitdrukking $ax + b$ heeft de letter x de rol van *variabele* of *onbekende*, terwijl de letters a en b *parameters* of *constanten* zijn en dus *willekeurige getallen* voorstellen. In plaats van x worden soms ook y, z of t gebruikt, en voor a en b komen ook $k, l, p, q, m, \alpha, \beta, \ldots$ dikwijls voor.

  Bij functies moet je dus steeds duidelijk aangeven *welke letter* de rol van variabele of onbekende heeft, en welke letters als parameters worden gebruikt. De notatie $x \mapsto ax + b$ zegt precies dat x de variabele is, terwijl z de variabele is in $z \mapsto pz + q$, en a de variabele is in $a \mapsto 2a + 3$.

Eigenschap 3.1.1. Voor een eerstegraadsfunctie $x \mapsto ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, geldt:

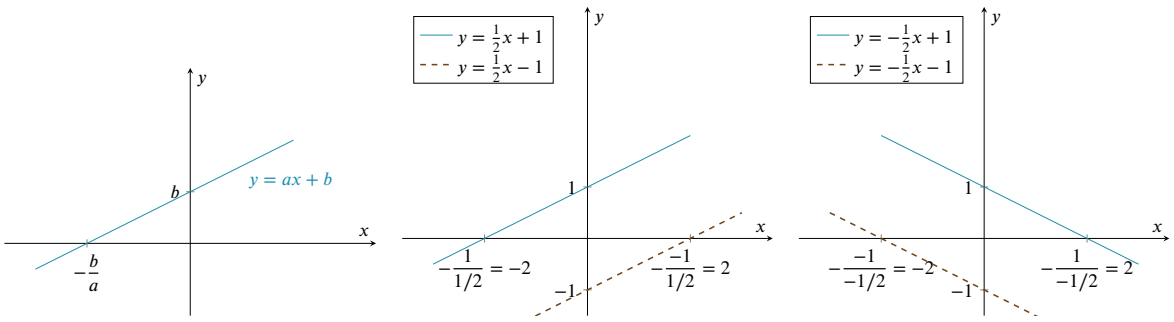
- de grafiek van de functie is een *rechte* met vergelijking $y = ax + b$ en **richtingscoëfficiënt** a.
- als a positief is, is de functie strikt *stijgend* en als a negatief is de functie strikt *dalend*.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de y-as is het punt $(0, b)$.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de x-as is het punt $(-\frac{b}{a}, 0)$. Het getal $-\frac{b}{a}$ is ook het (enige) *nulpunt* van de functie, en de (enige) oplossing van de vergelijking $ax + b = 0$.

Dit leidt tot volgend **tekenverloop** (ook *tekentabel*) voor de functie $x \mapsto ax + b$:

x		$-b/a$	
$ax + b$ met $a > 0$	$-$	0	$+$
$ax + b$ met $a < 0$	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Eerstegraadsveeltermen



Opmerking 3.1.2.

- We spreken meestal van *nulpunten* van een functie, *oplossingen* van een vergelijking en *wortels* van veeltermen, maar deze begrippen betekenen hetzelfde.
- als $a = 0$ reduceert de functie zich tot $x \mapsto 0x + b = b$, en dat is geen eerstegraadsfunctie maar een *constante* functie. De grafiek is dan de *horizontale* rechte met vergelijking $y = b$. Deze functie heeft *geen nulpunten* (en de grafiek dus geen snijpunten met de x-as), tenzij ook $b = 0$. In dat laatste geval zijn er *oneindig veel nulpunten* (en dus snijpunten), want dan is de functie de nulfunctie $x \mapsto 0$.

Voorbeeld 3.1.1.

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $8 - 4x < 0$.

Uitwerking: Je kan het tekenverloop maken van de functie $x \mapsto ax + b = -4x + 8$.
Het nulpunt is $-b/a = 8/4 = 2$, en de coëfficiënt $a = -4$ is negatief, dus is de tekentabel

x		2	
$8 - 4x$	$+$	0	$-$

De oplossingsverzameling is dus $V =]2, +\infty[$.

In dit geval kan je natuurlijk veel beter de ongelijkheid oplossen via

$$\begin{aligned} 8 - 4x < 0 &\iff 8 < 4x \\ &\iff 2 < x \end{aligned}$$

De tekentabel wordt pas nuttig in meer ingewikkelde gevallen om eenvoudig een boekhouding bij te houden van de verschillende nulpunten en tekens.

Definitie 3.1.2. Een **eerstegraadsvergelijking** (of **lineaire vergelijking**) **in twee onbekenden** x, y is een uitdrukking van de vorm

$ax + by + c = 0$ Vb: $2x + 3y - 4 = 0$

met $a, b, c \in \mathbb{R}$ waarbij a en b niet beide nul zijn.

Eigenschap 3.1.2.

De verzameling van alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan de vergelijking $ax + by + c = 0$ vormen een rechte:

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Eerstegraadsveeltermen

- Als $b \neq 0$ is kan je beide leden delen door b :

$$y = -\frac{1}{b}(ax + c) \quad \text{of} \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

dit is de grafiek van de reële functie $x \mapsto mx + q$ met $m = -\frac{a}{b}$ en $q = -\frac{c}{b}$.

Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan de vergelijking $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ vormen dus een rechte met richtingscoëfficiënt $-\frac{a}{b}$ en snijpunt met de y-as $-\frac{c}{b}$.

- Als $b = 0$ is de vergelijking $ax + c = 0$, of dus $x = -\frac{c}{a}$. Merk op dat er geen voorwaarde is op y, en y kan dus alle mogelijke waarden aannemen. Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan $x = -\frac{c}{a}$ vormen bijgevolg de verticale rechte $x = -\frac{c}{a}$.

Opmerking 3.1.3. We bespreken hier telkens *één* lineaire vergelijking. Meerdere vergelijkingen *tegelijk* oplossen (met mogelijk ook meer dan twee onbekenden) noemen we *stelsels van lineaire vergelijkingen* oplossen en behoort tot de zogenaamde *lineaire algebra*.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Tweedegraadsveeltermen

Vergelijkingen van de eerste graad in één onbekende hebben steeds één oplossing. Voor vergelijkingen van de tweede graad is de situatie iets ingewikkelder.

Definitie 3.2.1. Voor reële getallen a, b, c met $a \neq 0$ geldt:

- Een **tweedegraadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

  $ax^2 + bx + c$ Vb: $2x^2 - 3x + 4$

- Aan dergelijke veelterm is volgende **(kwadratische) functie** geassocieerd:

  $x \mapsto ax^2 + bx + c$ Vb: $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$

- Een **tweedegraadsvergelijking** (ook **vierkantsvergelijking** of **kwadratische vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

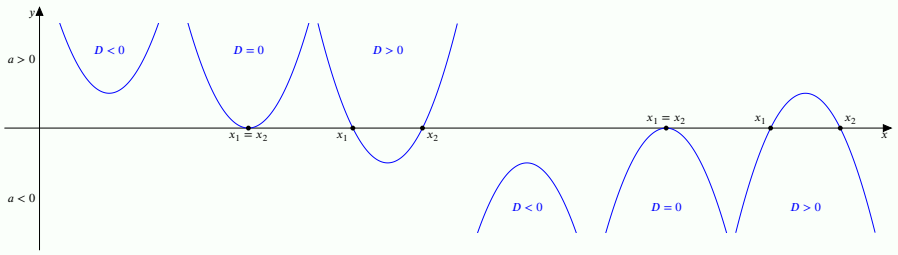
  $ax^2 + bx + c = 0$ Vb: $2x^2 - 3x + 4 = 0$

Eigenschap 3.2.1. Voor de functie $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ geldt:

- de grafiek van f is een **parabool** met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$.
- als a negatief is, is dat een **bergparabool**, als a positief is, is dat een **dalparabool**.
- de nulpunten van f zijn de oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, en die vinden we met behulp van de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ waarbij geldt dat
  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende reële** nulpunten.
  - Als $D = 0$ zijn er **twee gelijke reële** nulpunten.
  - Als $D < 0$ zijn er **geen reële** nulpunten.
- als $D \geq 0$ worden de nulpunten (of wortels) gegeven door

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(wortelformule)}$$

  Deze nulpunten zijn de snijpunten van de grafiek van $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ met de x-as. Als $D = 0$ is $x_1 = x_2$ en hebben we slechts 1 snijpunt met de x-as.
- de functie f heeft volgend **tekenverloop** (of **tekentabel**):



  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende nulpunten** $x_1 < x_2$, en volgend tekenverloop:

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

3.2 Tweedegraadsveeltermen

– Als $D = 0$ zijn er **twee samenvallende nulpunten** $x_1 = x_2$, en volgend tekenverloop:

x		$x_1 = x_2$	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$-$

– Als $D < 0$ zijn er **geen nulpunten**, en volgend tekenverloop:

x	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$

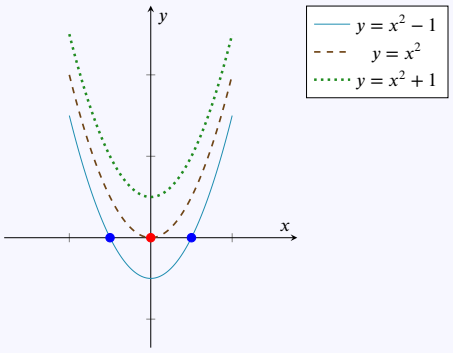
- de **top** van de parabool heeft als coördinaten $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- bij een bergparabool is $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ het **maximum** van f, bij een dalparabool het **minimum**.
- de **symmetrie-as** is de verticale rechte door de top, dus met vergelijking $x = -\frac{b}{2a}$.
- het bereik van een kwadratische functie gaat van min oneindig tot het maximum voor een bergparabool en van het minimum tot plus oneindig voor een dalparabool.
- de parabool snijdt de y-as in het punt $(0, c)$. (Vul $x = 0$ in in de vergelijking $ax^2 + bx + c$.)
- de parabool snijdt de x-as in de nulpunten van f. (Per definitie van het begrip nulpunt.)

Voorbeeld 3.2.1.

1. Bereken de nulpunten van de functies $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 - 1$ en $x \mapsto x^2 + 1$, en maak een tekening.

Uitwerking: De nulpunten van $x \mapsto x^2$ zijn 0 (twee keer, maar aan elkaar gelijk), die van $x \mapsto x^2 - 1$ zijn ± 1, en $x \mapsto x^2 + 1$ heeft geen reële nulpunten.

De grafieken van de overeenkomstige functies – waarop het aantal nulpunten direct afleesbaar is – zijn:



2. Geef de oplossingen van de vergelijking $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Uitwerking: De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -2$ en $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -3$.

3. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Tweedegraadsveeltermen

Uitwerking: We vinden dat $D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$. Dus $x_1 = x_2 = \frac{-6}{2 \cdot 9} = \frac{-1}{3}$.

4. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$.

Uitwerking: De nulpunten zijn -2 en -3. De coëfficiënt $a = 1$ is positief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = -3$		$x_2 = -2$	
$x^2 + 5x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$.

Eigenschap 3.2.2.

Als x_1 en x_2 de wortels zijn van $ax^2 + bx + c$, dan kunnen we deze veelterm **ontbinden in factoren**:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ Vb: $2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2)$

Voorbeeld 3.2.2. Ontbind $2x^2 + 5x + 3$ in factoren.

Uitwerking:

De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \frac{-5+1}{4} = -1$ en $x_2 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2}$, en dus

$$2x^2 + 5x + 3 = 2\,(x - (-1))\left(x - (-\tfrac{3}{2})\right) = 2\,(x+1)\left(x + \tfrac{3}{2}\right) = (x+1)\,(2x+3)$$

Opmerking 3.2.1. Een veelgemaakte fout bij het ontbinden van factoren is het vergeten van de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm. Herneem vorig voorbeeld: Zowel $(x+1)(x+\frac{3}{2})$ als $2(x+1)(x+\frac{3}{2})$ hebben nulpunten -1 en $-\frac{3}{2}$, maar enkel $2(x+1)(x+\frac{3}{2}) = 2x^2 + 5x + 3$.
Je kan narekenen dat $(x+1)(x+\frac{3}{2}) = x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \neq 2x^2 + 5x + 3$.

Opmerking 3.2.2. Omdat $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2$ vind je door gelijkstelling van de gelijknamige coëfficiënten van x ook dat

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{(product van de wortels)}$$

Het is dus niet nodig om de wortels zelf te berekenen als je enkel geïnteresseerd zou zijn in de som of het product van de wortels: die kan je immers beide direct afleiden uit de vergelijking.

Als $a = 1$ (en daar kan je altijd voor zorgen door te delen door a) is de vergelijking van de vorm $x^2 + bx + c = 0$ en worden de formules eenvoudiger:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad \text{(wortels)}$$

$$x_1 + x_2 = -b \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = c \qquad \text{(product van de wortels)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.2.A Oefeningen eerste- en tweedegraadsveeltermen

Oefening 3.2.1. Los de volgende veeltermvergelijkingen op naar x.

1. $3x - 5 = x + 9$ $x = \ldots\ldots$

2. $5x^2 + 2x - 5 = 3x^2 + 4x + 7$ $\ldots\ldots$

3. $x^2 - x + 1 = -5 + x$ $\ldots\ldots$

4. $x + 10 = -2x + \frac{1}{2}$ $x = \ldots\ldots$

5. $2x + 1 = 2x^2 - 3$ $\ldots\ldots$

Oefening 3.2.2. Geef het tekenverloop van de functie f met het gegeven functievoorschrift. (Bepaal het nulpunt/ de nulpunten van de functie en vul de correcte tekens aan in de tabel.)

1. $f(x) = -x + 8$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

2. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$

x	
$f(x)$	$\ldots\ldots$

3. $f(x) = x^2 + 5x - 6$

x		$\ldots\ldots$		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

4. $f(x) = x^2 - 6x + 9$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

5. $f(x) = -(x-2)(x+2)$

x		$\ldots\ldots$		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

6. $f(x) = 3x + 2$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

Oefening 3.2.3. Ontbind in factoren

1. $x^2 + x - 6 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.2.A Oefeningen eerste- en tweedegraadsveeltermen

2. $3x^2 + 12x - 15 = \ldots\ldots$

Oefening 3.2.4. Geef de oplossingen van volgende kwadratische vergelijkingen in onbekende x.

1. $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3}(1-p) = 0$. Hierin is $p > 0$ een zekere constante.

2. $yx^2 + x - y = 0$. Hierin is $y \neq 0$ een zekere constante.

Oefening 3.2.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $e^{2x} + e^x - 6 = 0 \qquad x = \ldots\ldots$

2. $e^x - 4e^{-x} = 3 \qquad x = \ldots\ldots$

Oefening 3.2.6. Los volgende ongelijkheden op:

1. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $x^2 > 1$. Maak ook een tekening. Antwoord: $\ldots\ldots$

2. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $x^2 - 3 > 2x$. Maak een tekening. Antwoord: $\ldots\ldots$

3. Bereken welke reële getallen x voldoen aan $x^2 > 2x$. Maak een tekening. Antwoord: $\ldots\ldots$

4. Bereken welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $-2x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$. Antwoord: $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Veeltermen

Een veelterm in x is een som van veelvouden van machten van x zoals $x^{1302} + 11x^7 + 1830$:

Definitie 3.3.1 (Veelterm)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \dots a_n \in \mathbb{R}$ met $a_n \neq 0$.

- Een n**-de graadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  De $a_i x^i$ zijn **termen** van de veelterm, de a_i zijn **coëfficiënten**, en n is de **graad**.
  Men noteert de graad van $p(x)$ soms met $\text{gr}(p(x)) \stackrel{\text{def}}{=} n$.

- Met deze veelterm $p(x)$ kunnen we een **veeltermfunctie** p associëren:

$$p : x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Een n**-de graadsvergelijking in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

- De **getalwaarde** van $p(x)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ is het getal $p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0$.

Voorbeeld 3.3.1.

De veelterm $p(x) = x^{1302} + 11x^7 + 1830$ heeft drie termen, met coëfficiënten $1, 11$ en 1830. Hij heeft graad 1302, en zijn getalwaarde in 1 is $p(1) = 1^{1302} + 11x^7 + 1830 = 1 + 11 + 1830 = 1842$. Zijn functiewaarde $p(2) = 2^{1302} + 11 \cdot 2^7 + 1830$ is een tamelijk groot natuurlijk getal, maar de getalwaarde in 0 daarentegen is eenvoudig $p(0) = 0 + 0 + 1830 = 1830$.

Voorbeeld 3.3.2.

- $2x + 3$ is een eerstegraadsveelterm.
- $5x^2 + 7x + 1$ is een tweedegraadsveelterm.
- $x^{2022} - 1$ is een veelterm van graad 2022.
- 7 is een veelterm van graad 0.
- $ax + b$ is een veelterm met 'parameters' of 'constanten' a en b in plaats van concrete getallen. Als $a \neq 0$ is het een eerstegraadsveelterm.
- $\sqrt{\pi}x^5 - e^y + \alpha^2$ is een veelterm in x van de vijfde graad, met parameters y en α.
- $x^2 - e^x$ is *geen* veelterm in x wegens de exponentiële functie.

Je kan ook veeltermen in andere letters tegenkomen: $5t^2 + 3t$ en $t + \cos\alpha$ zijn veeltermen in t, en $e^{2x}u^2 - 1$ is een veelterm in u (maar niet in x).

Opmerking 3.3.1.

- De nulveelterm 0 is de enige veelterm waarvoor de graad *niet bepaald* is.

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Veeltermen

- Volgens deze definitie is een veelterm dus een formele *uitdrukking* (of een *formule*: een reeks letters, cijfers en enkele symbolen zoals + en −). We *rekenen* met dergelijke uitdrukkingen volgens voor de hand liggende rekenregels zoals:

$$2x + 3x = 5x$$

$$2 \cdot (5x) = 10x$$

$$(2x) \cdot (5x) = 10x^2$$

- Veeltermen zijn de functies die met enkel de elementaire bewerkingen optellen en vermenigvuldigen kunnen worden berekend. In meer gevorderde cursussen wiskunde wordt aangetoond dat erg veel functies goed kunnen worden *benaderd* door veeltermen.
- Een veelterm met één term noemen we een *term*, *éénterm* of *monoom*. Een veelterm met twee termen is een *tweeterm* of *binoom*. En één met *veel termen* is dus een *veel*term of *polynoom*.
- De getalwaarde van een veelterm in 0 is precies de constante term a_0 van de veelterm:

$$p(0) = a_n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + \ldots + a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0$$

- Met het sommatieteken kunnen we een veelterm ook schrijven als

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Zoals voor meer algemene functies definiëren we ook voor veeltermen *nulpunten* en *factoren*:

Definitie 3.3.2 (Nulpunten van veeltermen)**.**

Een **nulpunt** (ook **nulwaarde** of **wortel**) van een veelterm $p(x)$ is een reëel getal a waarvoor $p(a) = 0$.

Het zoeken van nulpunten is precies hetzelfde als het oplossen van vergelijkingen:

Eigenschap 3.3.1 (Verband tussen nulpunten en oplossingen van vergelijkingen)**.**

De *nulpunten* van een veelterm zijn de *oplossingen* van de *vergelijking* $p(x) = 0$.

Voorbeeld 3.3.3 (Nulpunten van eenvoudige veeltermen)**.**

1. Het getal 3 is een nulpunt van $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ omdat $p(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$
2. Veelterm $x - 5$ heeft 5 als nulpunt(en).
3. Veelterm $x^2 - 4$ heeft -2 en 2 als nulpunt(en).
4. Veelterm $x^2 + 4$ heeft geen enkel reëel getal als nulpunt(en).

Er zijn relatief eenvoudige procedures om nulpunten te vinden van eerstegraadsveeltermen en tweedegraadsveeltermen. Er bestaan ook (ingewikkeldere) algoritmes voor veeltermen van de derde en vierde graad. Evariste Galois heeft in het begin van de negentiende eeuw aangetoond dat er voor vijfdegraadsveeltermen *geen* algemene procedure *kan* bestaan die alleen gebruik maakt van zogenaamde algebraïsche bewerkingen: optellen/aftrekken, vermenigvuldigen/delen en machtsverheffen/worteltrekken.

Een veelterm $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is per definitie een *som* van termen (vandaar de naam *veel-term*). Het is dikwijls handig om dergelijke som van termen ook te kunnen schrijven als een *product* van factoren. De

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Veeltermen

uitdrukking 'ontbinden in factoren' betekent precies het schrijven van dergelijke som als een product:

Definitie 3.3.3 (Factoren van veeltermen)**.**

Een veelterm $d(x)$ is een **factor** van een veelterm $p(x)$ als we $p(x)$ kunnen schrijven als een product van $d(x)$ met een andere veelterm.

Dus: $d(x)$ is een *factor* van $p(x)$ als $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$.

Een factor van de nulde graad (dus een getal) is een **triviale factor**. We beschouwen die meestal niet als 'echte' factor.

Een veelterm $p(x)$ **ontbinden in factoren** betekent hem schrijven als een product van zo veel mogelijk niet-triviale factoren.

Voorbeeld 3.3.4 (Factoren van veeltermen)**.**

1. $x+1$ is een factor van x^2-1 want $x^2-1 = (x+1)(x-1)$.
2. $x+2$ is geen factor van x^2-1 want voor elke getal $a \in \mathbb{R}$ is $x^2-1 \neq (x+2)(x+a)$.
3. De veelterm $x^2-1 = (x+1)(x-1)$ is ontbonden in factoren.

Men kan volgende eigenschap bewijzen:

Eigenschap 3.3.2 (Verband tussen factoren en nulpunten voor veeltermen)**.**

Een getal a is nulpunt van een veelterm $p(x)$ als en slechts als $x-a$ een factor is van $p(x)$.

In formules: $p(a) = 0 \iff p(x) = (x-a)q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$

Deze eigenschap leert dus dat het zoeken van *nulpunten* hetzelfde is als het zoeken van *lineaire factoren*. En het zoeken van lineaire factoren heeft natuurlijk te maken met ontbinden in factoren.

Opmerking 3.3.2.

Men kan bewijzen dat over de complexe getallen elke veelterm kan ontbonden worden in lineaire factoren. Dat is de zogenaamde Hoofdstelling van de Algebra.

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Stelsels: inleiding

We bespreken hier het oplossen van *stelsels van lineaire vergelijkingen*. Lineair betekent daarbij dat de onbekenden voorkomen *zonder machten* of meer ingewikkelde uitdrukkingen als wortels of sinussen. En stel of stelsel betekent dat de onbekenden aan *meerdere vergelijkingen tegelijk* moeten voldoen.

Dergelijke lineaire stelsels komen erg vaak voor bij allerlei problemen in de wiskunde, fysica, scheikunde, economie, en noem maar op. Telkens een aantal onbekende grootheden (afstanden, prijzen, gewichten, tijden, ...) moeten bepaald worden waarbij *lineaire* combinaties van die grootheden gekend zijn, leidt dat tot het oplossen van een lineair stelsel van vergelijkingen. En zelfs als de afhankelijkheden tussen de onbekende grootheden niet lineair zijn, blijven de technieken van de lineaire stelsels dikwijls toch erg nuttig.

3.4.1 Voorbeelden van lineaire stelsels

Voorbeeld 3.4.1.

1. Zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan in dit geval de gezochte getallen snel vinden door te *proberen*: de som moet 5 zijn, dus als we ons beperken tot natuurlijke getallen zijn de mogelijkheden $0+5$, $1+4$ of $2+3$. Enkel voor $2+3$ is het verschil 1, dus de oplossing is 2 en 3.
  In dit eenvoudige geval is het niet echt nuttig om onbekenden en stelsels op te schrijven. Maar zodra de voorwaarden wat ingewikkelder zijn, wordt *proberen* snel moeilijk en is *uitrekenen* meestal sneller.
- Als je toch een stelsel opschrijft, kan je in dit eenvoudige geval dat stelsel ook makkelijk oplossen. Als $x+y=5$ en $x-y=1$ dan is ook hun som gelijk: $(x+y)+(x-y)=5+1$. Deze laatste vergelijking reduceert zich echter tot $2x=6$ en dus $x=3$. Invullen dat $x=3$ in de eerste vergelijking $x+y=5$ levert $3+y=5$ of $y=2$.
  De methode voor het oplossen van stelsels is eigenlijk een veralgemening van dit eenvoudig trucje.

2. Zoek twee getallen waarvan de som 3.1415 is en het verschil 1.2345.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=3.1415$ en het verschil $x-y=1.2345$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan de getallen x en y nu veel minder makkelijk vinden door *proberen*.
- Je kan in dit eenvoudige geval het stelsel toch makkelijk oplossen met dezelfde methode als hiervoor: als $x+y=3.1415$ en $x-y=1.2345$ dan moet natuurlijk ook $(x+y)+(x-y)=3.1415+1.2345=4.3760$. Deze vergelijking reduceert zich tot $2x=4.376$ en dus $x=2.188$. Invullen van $x=2.188$ in de eerste vergelijking geeft $2.188+y=3.1415$ of $y=3.1415-2.188=1.9535$.
  Het oplossen van stelsels is eigenlijk een veralgemening van dit eenvoudig trucje.

3. Zoek drie getallen waarvan het grootste dubbel zo groot is als het kleinste, het middelste de helft is van de som van de twee anderen, en het gemiddelde 42 is.

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Stelsels: inleiding

Uitwerking: Noem de gezochte getallen, geordend van groot naar klein, x, y en z. Dan weten we dat $x = 2z$, $y = \frac{x+z}{2}$ en $\frac{x+y+z}{3} = 42$, en zoeken dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases}$$

Definitie 3.4.1 (Lineair stelsel)**.**

Een **lineair stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden** is een stel van m lineaire vergelijkingen met in totaal n onbekenden. Dergelijk lineair stelsel noteren we als

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

met S de naam van het stelsel, a_{ij} de **coëfficiënten**, $x_1, \ldots, x_n$ de **onbekenden** en b_i de **rechterleden** of **constante termen**.

Een lineair stelsel is **homogeen** als alle constante termen nul zijn, dus alle $b_i = 0$.
Het aan S **geassocieerde homogene stelsel** is het stelsel waarbij de b_i vervangen zijn door 0.

Merk op: de term *rechterlid* is gebruikelijk in de wiskunde, en komt in veel cursussen voor, maar is eigenlijk verwarrend of zelfs misleidend: een vergelijking $x + y = 2$ kan natuurlijk ook geschreven worden als $x + y - 2 = 0$, maar $x + y - 2 = 0$ is *geen* homogene vergelijking, en volgens bovenstaande definitie is het 'rechterlid' gelijk aan 2. Het begrip 'rechterlid' slaat dus op vergelijkingen in standaardvorm: alle onbekenden in het linkerlid en de constante term rechts.

Voorbeeld 3.4.2. Het stelsel

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{cases}$$

is lineair met twee vergelijkingen in drie onbekenden x_1, x_2, x_3. Het aan S geassocieerde homogene stelsel is

$$S_o : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

De belangrijkste uitdaging bij dergelijke stelsels is om de letters x_i te vervangen door geschikte reële getallen zodat alle gelijkheden opgaan. We noemen dat het *oplossen van het stelsel* en de gevonden reële getallen zijn dan *oplossingen van het stelsel*.

We bespreken een wat uitgebreider voorbeeld van een lineair stelsel:

Voorbeeld 3.4.3. Bepaal alle reële getallen s, t, u, v, w waarvoor

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$$

Dit is een *lineair stelsel van drie vergelijkingen in vijf onbekenden*.

- Dit is de wiskundige weergave van een probleem waarbij we weten dat er tussen de vijf onbekende grootheden s, t, u, v, w drie lineaire verbanden bestaan. De uitdaging is *alle waarden* te vinden voor de onbekende grootheden die aan *alle* (lineaire) verbanden voldoen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Stelsels: inleiding

- Een eerste technische herformulering bestaat erin om één *vector* te zoeken in plaats van vijf *getallen*: in plaats van 'zoek alle reële getallen s, t, u, v, w', zeggen we 'zoek alle vectoren $(s, t, u, v, w) \in \mathbb{R}^5$.

Oefening 3.4.1. Welke van de volgende stelsels zijn lineair in de onbekenden u en v?

1. Lineair | Niet lineair $\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 4u + 2v = 1 \end{cases}$

2. Lineair | Niet lineair $\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 4u + 2v = u \end{cases}$

3. Lineair | Niet lineair $\begin{cases} 2u = 5 \\ 2v = 1 \end{cases}$

4. Lineair | Niet lineair $\begin{cases} (u+2)u - u^2 = 5 \\ 4u + 2v = 1 \end{cases}$

Merk op dat de termen met u^2 wegvallen.

5. Lineair | Niet lineair $\begin{cases} \sin(u) + \cos(v) = 1 \\ \sin(u) - 2\cos(v) = 1/2 \end{cases}$

6. Lineair | Niet lineair $\begin{cases} u^2 + v = 1 \\ -u^2 - 2v = 2 \end{cases}$

7. Lineair | Niet lineair $\begin{cases} au + 2v = 5 \\ 4u + bv = 1 \end{cases}$ (met $a, b \in \mathbb{R}$)

8. Lineair | Niet lineair $\begin{cases} x^3 u + \cos(y)v = 5 \\ 4u + x^3 v = 1 \end{cases}$ (met $x, y \in \mathbb{R}$)

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Stelsels: oplossingen

Een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden *oplossen* betekent *alle* n-tallen reële getallen $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ vinden die we voor de letters $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ kunnen invullen. Formeel wordt dit:

Definitie 3.5.1 (Oplossingen van stelsels en gelijkwaardige stelsels)**.**

Een **oplossing** van een lineair stelsel

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

is een vector $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ die voldoet aan alle vergelijkingen.

De **oplossingsverzameling** $\mathrm{Opl}(S)$ van een lineair stelsel S is de verzameling van *alle oplossingen* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Twee stelsels S_1 en S_2 zijn **gelijkwaardig** als ze *dezelfde* oplossingsverzameling hebben, dus als

$$\mathrm{Opl}(S_1) = \mathrm{Opl}(S_2)$$

Een stelsel dat *geen* oplossingen heeft, dus met $\mathrm{Opl}(S) = \emptyset$, noemen we **strijdig** of **ontaard**. Ook een *vergelijking* die geen oplossingen heeft noemen we **strijdig** of **ontaard**. Een typische *ontaarde vergelijking* is $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$ of dus $0 = 1$.

Een algemene strategie om lineaire stelsels op te lossen is:

Bereken een *gelijkwaardig* stelsel waarvoor de oplossingsverzameling direct af te lezen is.

Het is belangrijk om stelsels te leren oplossen, maar het is ook belangrijk te beseffen dat we in een aantal gevallen niet zozeer geïnteresseerd zullen zijn in de concrete oplossingen, maar wel in allerlei *eigenschappen* van die oplossingen (zijn er oplossingen, hoeveel zijn er, . . .)

We geven enkele eenvoudige voorbeelden van stelsels die direct oplosbaar zijn:

Voorbeeld 3.5.1. Los volgende stelsels op:

1. $S_1 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Door enkele getallen te proberen, vinden sommigen al snel dat het koppel $(3, 2)$ een oplossing is. Door de twee vergelijkingen bij elkaar op te tellen, vinden anderen dan weer dat $(x + y) + (x - y) = 5 + 1$ moet zijn, en dus $2x = 6$, of $x = 3$. Door $x = 3$ in te vullen in één van de twee oorspronkelijke vergelijkingen vinden ze dan dat $3 + y = 5$, en dus $y = 2$.

Uit de eerste oplossingsmethode volgt dat $(3, 2)$ *een* oplossing is, en uit de tweede volgt dat $(3, 2)$ *de enige* oplossing is.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_1) = \{(3, 2)\}$, of $x = 3$ en $y = 2$ is de enige oplossing van het stelsel S_1

2. $S_2 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x + y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Het is onmiddellijk duidelijk dat het onmogelijk is dat $x + y$ zowel gelijk is aan 1 als aan 5. Er zijn dus *geen oplossingen*.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_2) = \emptyset$

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Stelsels: oplossingen

3. $S_3 = \begin{cases} x+y & = 5 \\ x-y & = 1 \\ 2x+3y & = 12 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x,y) = (3,2)$. En $(3,2)$ voldoet ook aan de derde vergelijking (want $2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 12$), en is dus een oplossing van het hele stelsel.

Resultaat: $\text{Opl}(S_3) = \{(3,2)\}$

4. $S_4 = \begin{cases} x+y & = 5 \\ x-y & = 1 \\ 2x+3y & = 13 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x,y) = (3,2)$. En $(3,2)$ voldoet niet aan de derde vergelijking (want $2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 12 \neq 13$), en er kan dus geen oplossing bestaan voor het hele stelsel.

Resultaat: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$

5. $S_5 = \begin{cases} x+y & = 5 \\ 2x+2y & = 10 \end{cases}$

Uitwerking: De tweede vergelijking is eigenlijk dezelfde als de eerste, want als $x+y=5$, dan is automatisch ook $2x+2y = 2(x+y) = 2\cdot 5 = 10$. Dus zodra $y = 5-x$ (of ook: zodra $x = 5-y$), hebben we een oplossing. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 5-x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(5-y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn natuurlijk twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels. Voorbeelden van oplossingen zijn dus de koppels $(0,5), (1,4), (2,3), (5,0), (\pi, 5-\pi), (\pi+5, -\pi), (5-\pi, \pi), \ldots$

Resultaat: $\text{Opl}(S_5) = \{(t, 5-t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(5-s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -x+5$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel S_5 is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -x+5$.

6. $S_6 = \{\ 2x+y \ = 6$ (een 'stelsel' met één vergelijking)

Uitwerking: Er is maar één vergelijking, en die zegt dat $x = 3 - \frac{1}{2}y$, of ook dat $y = 6-2x$. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 6-2x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(3-\frac{1}{2}y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels.

Resultaat: $\text{Opl}(S_6) = \{(t, 6-2t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(3-\frac{1}{2}s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -2x+6$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel $\{2x+y=6$ is (als deelverzameling van $\mathbb{R}^2$) dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -2x+6$.

7. $S_{71} = \begin{cases} 2x+y & = 6 \\ 0x & = 0 \end{cases}$ of $S_{72} = \begin{cases} x+y & = -x+6 \\ 0 & = 0 \end{cases}$ of $S_{73} = \begin{cases} x+y+3 & = -x+9 \\ 1 & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Dit zijn dezelfde stelsels als S_6 hierboven.

8. $S_{81} = \begin{cases} 2x+y & = 6 \\ 0x & = 1 \end{cases}$ of $S_{82} = \begin{cases} x+y & = -x+6 \\ 0 & = 1 \end{cases}$ of $S_{83} = \begin{cases} x+y+3 & = -x+9 \\ 7 & = 8 \end{cases}$

Uitwerking: Deze stelsels hebben een strijdige vergelijking, en hun oplossingsverzameling is dus leeg.

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Stelsels: direct oplosbaar

Er bestaat een erg algemene maar soms verrassend efficiënte strategie om moeilijke problemen op te lossen: bedenk eerst een *eenvoudigere versie* van het probleem, en probeer dan alvast die eenvoudige versie op te lossen. Dat creëert enerzijds vertrouwdheid met het probleem, kan eventueel inspiratie opleveren voor een algemene oplossing en geeft mogelijk ook zelfvertrouwen om het moeilijke probleem steeds verder te doorgronden. In het ideale geval kan je het moeilijke probleem *reduceren* tot het eenvoudige geval. Voor het oplossen van lineaire stelsels blijkt deze strategie bijzonder geschikt te zijn.

Voorbeeld 3.6.1.

Los volgende stelsels op:

1. $S_1 = \begin{cases} 1x & & = & 2 \\ & 1y & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_1) = \{ (2,4,6) \}$ via gewoon aflezen.

2. $S_2 = \begin{cases} 1x & & = & 2 \\ & 2y & = & 4 \\ & & 1z & = & 1 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_2) = \{ (2,2,1) \}$ via aflezen met een kleine berekening: $4/2 = 2$.

3. $S_3 = \begin{cases} 1x & & = & 2 \\ & 2y & = & 4 \\ & & 1z & = & 0 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_3) = \{ (2,2,0) \}$ via gewoon aflezen, waarbij we $z = 0$ krijgen, maar dat is niets speciaal.

4. $S_4 = \begin{cases} 1x & & = & 2 \\ & 2y & = & 4 \\ & & 0z & = & 1 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$ via gewoon aflezen, want de laatste vergelijking is duidelijk strijdig: voor geen enkel getal z kan $0z = 1$.

5. $S_5 = \begin{cases} 1x & & = & 2 \\ & 1y & = & 4 \\ & & 0z & = & 0 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_5) = \{ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R} \}$, waarbij de laatste vergelijking $0z = 0$ voor alle getallen z voldaan is . Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die we naar keuze kunnen schrijven als $\{ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ (2,4,z) \mid z \in \mathbb{R} \} = \{ (2,4,x) \mid x \in \mathbb{R} \}$. De laatste schrijfwijze is wiskundig correct, maar verwarrend omdat de letter x hier niets te maken heeft met de eerste coördinaat die meestal ook x noemt. Dikwijls worden als zogenaamde *parameters* letters gekozen uit het rijtje $t, s, k, l, \alpha, \beta, \ldots$.

6. $S_6 = \begin{cases} 1x & & = & 2 \\ & 0y & = & 0 \\ & & 0z & = & 0 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Stelsels: direct oplosbaar

Uitwerking: $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\ \}$. Enkel de eerste vergelijking is een echte vergelijking. Als $x = 2$, mogen y en z willekeurig zijn. Er zijn dus 'twee keer oneindig' veel oplossingen omdat er twee parameters nodig zijn om *alle* oplossingen te bekomen.

7. $S_7 = \left\{ \begin{array}{rcl} 1x & = & 2 \\ 0y & = & 0 \\ 2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,t,3) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$. Weer oneindig veel oplossingen, nu met één parameter.

Voorbeeld 3.6.2 (Achterwaartse substitutie)**.** Los volgende stelsels op:

1. $S_{21} = \left\{ \begin{array}{rcl} 1x & = & 2 \\ 1y + 1z & = & 4 \\ 1z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{21}) = \{\ (2,-2,6)\ \}$

We beginnen met de laatste vergelijking: $z = 6$. We vullen die waarde voor z in in de tweede vergelijking, en bekomen $y+6 = 4$, dus $y = -2$. De eerste vergelijking zegt dat $x = 2$. Dus, de oplossing is $(x,y,z) = (2,-2,6)$.

2. $S_{22} = \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 2 \\ +y + z & = & 4 \\ +z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{22}) = \{\ (-2,-2,6)\ \}$

Opnieuw van beneden naar boven invullen (achterwaarts, vandaar *achterwaartse substitutie*). $z = 6$, dus $y + 6 = 4$ en dus $y = -2$. Tenslotte is $x + (-2) + 6 = 2$, of $x = -2$.

3. $S_{23} = \left\{ \begin{array}{rcl} 6x + 2y + z & = & 2 \\ +5y + 3z & = & 4 \\ +2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{23}) = \{\ (1/6,-1,3)\ \}$

Opnieuw aan de hand van achterwaartse substitutie eerst z, vervolgens y en dan x berekenen.

4. $S_{24} = \left\{ \begin{array}{rcl} 6x + z & = & 2 \\ +2z & = & 4 \\ +3z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: Merk op dat de tweede en derde vergelijking in feite dezelfde zijn. Een gelijkwaardig stelsel is dus

$$S_{24} = \left\{ \begin{array}{rcl} 6x + z & = & 2 \\ +2z & = & 4 \end{array} \right.$$

Hieruit vinden we aan de hand van achterwaartse substitutie dat $(0,2)$ de enige oplossing is van het stelsel.

Merk op dat er geen onbekende y in het stelsel voorkomt, en we dus kunnen aannemen dat er twee onbekenden zijn, die toevallig x en z noemen in plaats van x en y. Je hebt dus een vector met twee componenten nodig om het stelsel op te lossen. De oplossingsverzameling is dan $\text{Opl}(S_{24}) = \{(0,2)\}$.

Stel dat in een vraagstuk toch sprake zou zijn van een onbekende y, maar waarbij die toch niet voorkomt in je stelsel. Dat betekent dan dat je stelsel geen voorwaarden oplegt aan y, en dat dus y willekeurige waarden mag aannemen. Dan beschrijf je best je oplossingen als $\text{Opl}(S_{24}) = \{(0,t,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Stelsels: direct oplosbaar

5. $S_{25} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & & +2z & = & 4 \\ & & +0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{25}) = \{\ (t, -3t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$

De tweede vergelijking heeft als oplossing $z = 2$. De eerste vergelijking wordt dan $6x + 2y = 0$. De oplossingsverzameling heeft één parameter: stel bijvoorbeeld dat $x = t$ voor een $t \in \mathbb{R}$. Dan is aan deze vergelijking voldaan als $2y = -6t$ of dus $y = -3t$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.6.A Oefeningen veeltermvergelijkingen, veeltermfuncties en stelsels

Oefening 3.6.1. Maak oefeningen 2, 4 en 5. Los de volgende veeltermvergelijkingen op naar x.

1. $3x-5=x+9$ $x=\ldots\ldots$

2. $5x^2+2x-5=3x^2+4x+7$

$x=1$	$x=-2$ of $x=3$	Er zijn geen reële oplossingen voor x. $(D<0)$

3. $x^2-x+1=-5+x$

$x=-4$	$x=1/2$ of $x=3/2$	Er zijn geen reële oplossingen voor x. $(D<0)$

4. $x+10=-2x+\frac{1}{2}$ $x=\ldots\ldots$

5. $2x+1=2x^2-3$

$x=-1$	$x=-1$ of $x=2$	$x=-2$ of $x=4$	Er zijn geen reële oplossingen voor x. $(D<0)$

Oefening 3.6.2. Maak oefeningen 1, 2, 4 en 5. Geef het tekenverloop van de functie f met het gegeven functievoorschrift. (Bepaal het nulpunt/ de nulpunten van de functie en vul de correcte tekens aan in de tabel.)

1. $f(x)=-x+8$

x		$\ldots\ldots$		
$f(x)$	$-$ $+$	0	$-$	$+$

2. $f(x)=-x^2+4x-7$

x	
$f(x)$	$-$ $+$

3. $f(x)=x^2+5x-6$

x		$\ldots\ldots$		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$-$ $+$	0	$-$ $+$	0	$-$ $+$

4. $f(x)=x^2-6x+9$

x		$\ldots\ldots$		
$f(x)$	$-$ $+$	0	$-$	$+$

5. $f(x)=-(x-2)(x+2)$

x		$\ldots\ldots$		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$-$ $+$	0	$-$ $+$	0	$-$ $+$

6. $f(x)=3x+2$

CC BY-NC-SA 4.0

3.6.A Oefeningen veeltermvergelijkingen, veeltermfuncties en stelsels

x		$\dots\dots$		
$f(x)$	$-$ $+$	0	$-$	$+$

Oefening 3.6.3. Maak oefeningen 2 en 3. Los volgende stelsels op:

1. $\begin{cases} 3x+4y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dots\dots \\ y=\dots\dots \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dots\dots \\ y=\dots\dots \end{cases}$
3. $\begin{cases} \frac{x}{y}=3 \\ 2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dots\dots \\ y=\dots\dots \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x+1=5 \\ x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dots\dots \\ y=\dots\dots \end{cases}$

Oefening 3.6.4. Aan de hand van de wetten van Kirchoff, kunnen voor een elektrisch netwerk de volgende vergelijkingen worden opgesteld:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ U - I_3 R - I_1 R = 0 \\ I_3 R - I_2 R = 0. \end{cases}$$

Bereken nu de stromen I_1, I_2 en I_3 doorheen het circuit wanneer de spanning $U = 15$ V en de weerstand $R = 100$ Ohm.

De oplossing van het stelsel is

$$\begin{cases} I_1 = \dots\dots \text{ A} \\ I_2 = \dots\dots \text{ A} \\ I_3 = \dots\dots \text{ A} \end{cases}$$

GA NU TERUG NAAR DE TOLEDO-PAGINA VAN DE INTRODUCTIEWEEK BASISWETENSCHAPPEN.

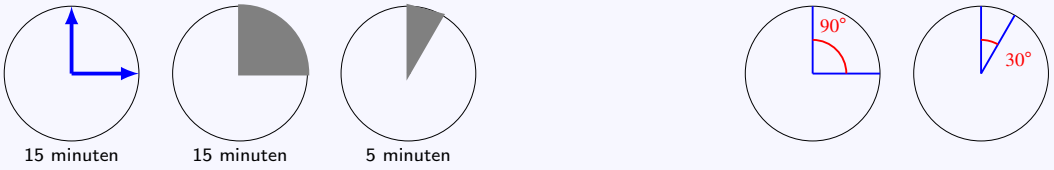
CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.42)

4.1 Definitie van een hoek

Iedereen weet wat een *hoek* is. Het begrip is echter wat ingewikkelder dan je misschien zou verwachten, omdat we in het dagelijkse leven met het woord *hoek* soms lichtjes verschillende dingen bedoelen. We zullen verder vooral zogenaamde **georiënteerde hoeken** bestuderen.

Voorbeeld 4.1.1 (Verschillende soorten hoeken)**.**

(a) Op een tekening van een analoge klok kan je een tijdspanne van vijftien minuten aangeven met een *hoek*.

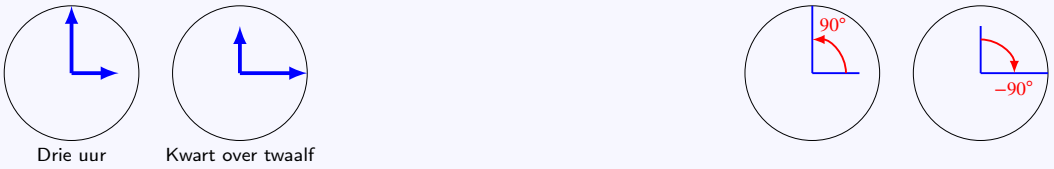


Bij dit soort hoeken spelen beide benen van de hoek precies dezelfde rol.

Een kwartier wordt aangegeven met een hoek van $90°$. Negatieve hoeken komen niet ter sprake.

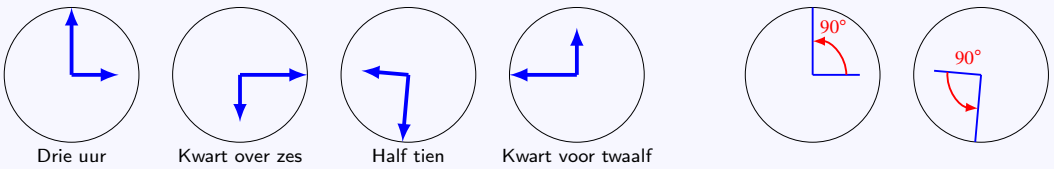
Ook bij driehoeken is het dikwijls niet belangrijk in welke zin de hoeken worden doorlopen.

(b) Op een tekening van een analoge klok kan je zowel drie uur als kwart over twaalf aangegeven door (ongeveer) dezelfde hoek van 90 graden maar de kleine en de grote wijzer duiden de verschillende betekenis aan.

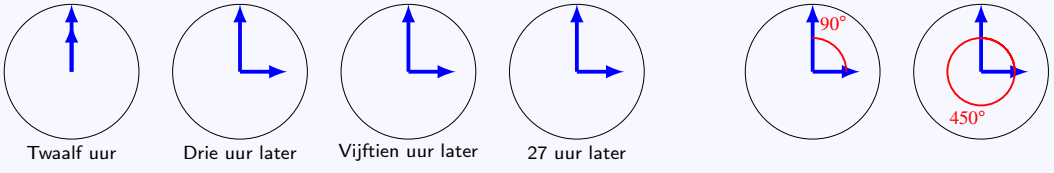


Bij deze hoeken zijn er dus twee verschillende benen, elk met een verschillende betekenis. Per afspraak geeft het korte been de uren aan, en het lange been de minuten.
Om beide situaties te onderscheiden zouden we kunnen afspreken de positie van drie uur aan te duiden met '$+90°$', en die van kwart over twaalf met '$-90°$'. Maar er is geen algemeen geldende afspraak daarover, en je zou het ook precies omgekeerd kunnen doen.

In deze situatie is natuurlijk ook de oriëntatie belangrijk, want de relatieve positie van kleine en grote wijzer zijn (ongeveer) hetzelfde bij bijvoorbeeld negen uur, kwart over twaalf, half vier en kwart voor zes.



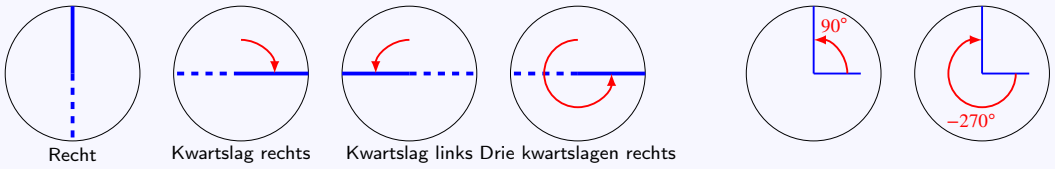
(c) Op een analoge klok kan je geen tijdsverlopen van meer dan 12 uur aflezen. Als die belangrijk zijn, moet je ze onthouden of uit de context afleiden.



(d) Om een klok manueel van twaalf uur op drie uur te zetten is het niet belangrijk of je de kleine wijzer $90°$ verder draait, of $270°$ terug draait: het effect is precies hetzelfde.
Als je echter een schroef van een positie 'rechtop' naar '$90°$ rechts' zou moeten draaien, is het wel erg belangrijk in welke richting je ze draait. Je draait ze immers ofwel een kwartslag vaster, ofwel drie kwartslagen losser.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Definitie van een hoek

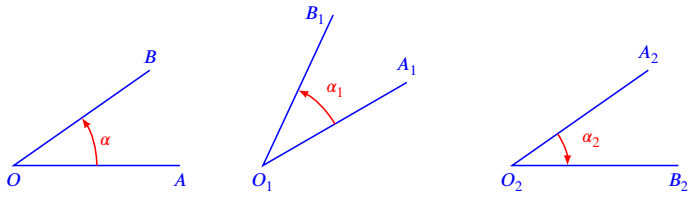


Recht | Kwartslag rechts | Kwartslag links | Drie kwartslagen rechts

Samengevat: soms maakt het een verschil of een hoek in wijzerzin of in tegenwijzerzin wordt doorlopen, en soms niet. Soms is ook het aantal omwentelingen belangrijk, en soms niet. Soms is enkel het eindresultaat belangrijk, soms ook de manier waarop je dat eindresultaat hebt bereikt.
In de goniometrie bestuderen we meestal zogenaamde **georiënteerde hoeken**, waarbij de hoek gaat van een *begin*been naar een *eind*been, maar het *aantal* omwentelingen niet belangrijk is, en ook niet of we die hoek langs de kortste weg hebben gemaakt of niet. Dus hoeken van $30°$, $-330°$, $390°$ en $750°$ beschouwen we als *gelijk*.
Dat komt best overeen met de kleine-en-grote-wijzer op de klok, zoals in voorbeeld b). Maar, bij de georiënteerde hoek wordt vastgelegd welk been 'eerst' is, en welk 'tweede' in plaats van welk 'klein' is en welk 'groot'.

Definitie 4.1.1. Een **georiënteerde hoek** is een meetkundige figuur bestaande uit een **hoekpunt** O en een halfrechte OA als **eerste been** of **beginbeen** en een halfrechte OB als **tweede been** of **eindbeen**. Twee dergelijke figuren bepalen dezelfde hoek als ze door verschuiven en draaien op elkaar kunnen worden gelegd.
Een georiënteerde hoek wordt genoteerd als $\measuredangle AOB$, waarbij het hoekpunt dus in het midden staat.

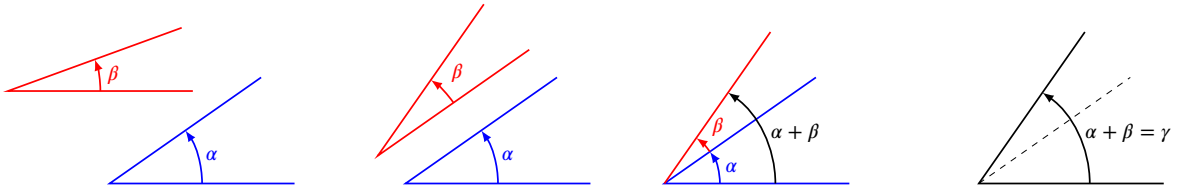
Op een tekening duiden we $\measuredangle AOB$ dikwijls aan met een boogje-met-een-pijltje-van-het-beginbeen-naar-het-eindbeen. Als *namen* zijn Griekse letters α (alfa), β (beta) en γ (gamma) erg populair.



Hoek $\alpha = \measuredangle AOB$ | Hoek $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ | Hoek $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$

De *georiënteerde hoeken* $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ zijn dus *aan elkaar gelijk* omdat ze via *verschuiven* en *draaien* op elkaar kunnen gelegd worden. De hoeken $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$ zijn echter niet aan elkaar gelijk, want om $\alpha = \measuredangle AOB$ op $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$ te leggen moeten we ook *spiegelen* en dat is voor georiënteerde hoeken niet toegelaten. Ook $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle BOA$ zijn dus onderling verschillende hoeken.

Je kan met georiënteerde hoeken *rekenen*: je telt twee hoeken α en β bij elkaar op door ze 'achter elkaar' te leggen, dus je legt het beginbeen van β op het eindbeen van α. Dat levert een nieuwe georiënteerde hoek γ op die we de *som* van α en β noemen. We noteren $\alpha + \beta = \gamma$.



Als het eindbeen samenvalt met het beginbeen is er geen echte hoek maar enkel een halfrechte en spreken we van de **nulhoek** $\measuredangle AOA$. Het is onmiddellijk duidelijk dat de nulhoek optellen bij een hoek de hoek niet verandert – net zoals nul optellen bij een getal dat getal niet verandert.

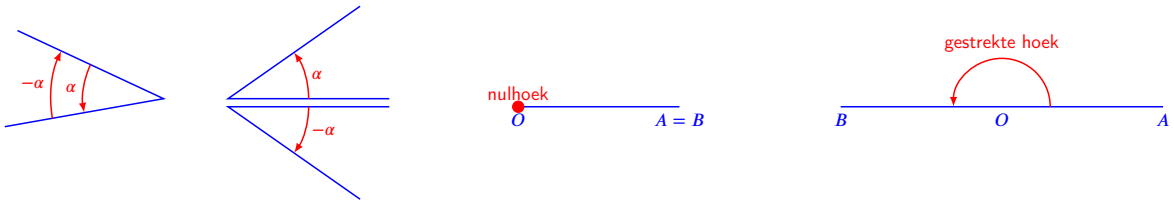
We noemen de georiënteerde hoek $\measuredangle BOA$ de **tegengestelde hoek** van $\measuredangle AOB$ en noteren die met een minteken: als $\alpha = \measuredangle AOB$, dan is $-\alpha = \measuredangle BOA$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Definitie van een hoek

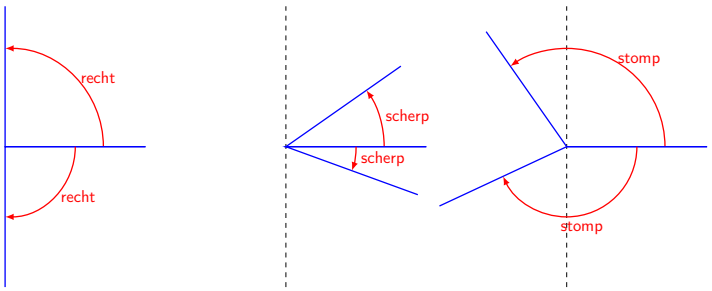
We stellen vast dat de som van twee tegengestelde hoeken de nulhoek is en dat de tegengestelde hoek $-\alpha$ bekomen wordt door α over zijn eerste been te spiegelen.

De **gestrekte hoek** is de hoek waarbij het eindbeen in het verlengde van het beginbeen ligt: dergelijke hoek is onzichtbaar, want het hoekpunt is gewoon een punt O op een rechte AB.



Een **rechte hoek** is de helft van een gestrekte hoek, dus een hoek α zodat $\alpha + \alpha$ een gestrekte hoek vormt.

Een hoek is **scherp** als hij kleiner is dan een rechte hoek en **stomp** als hij groter is.



Samengevat:

Definitie 4.1.2.

Een **gestrekte hoek** is een hoek waarbij beginbeen en eindbeen in elkaars verlengde liggen.
Een **nulhoek** is een hoek waarbij beginbeen en eindbeen aan elkaar gelijk zijn.
Een **rechte hoek** is de helft van een gestrekte hoek.
Een **scherpe hoek** is een hoek die kleiner is dan een rechte hoek.
Een **stompe hoek** is een hoek die groter is dan een rechte hoek.

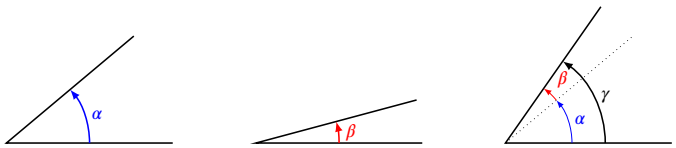
De **tegengestelde hoek** van de hoek $\alpha = \measuredangle AOB$ is de hoek $-\alpha = \measuredangle BOA$.

Opmerking 4.1.1. Merk op dat we voorlopig niet gesproken hebben over het *meten* van hoeken. Alle regels over rekenen en vergelijken van hoeken zijn voorlopig zuiver meetkundig, er komen geen getallen voor. In de praktijk is het natuurlijk handig hoeken te kunnen *meten*, en vervolgens eerder te rekenen met de maatgetallen van de hoeken dan met de hoeken zelf. Dat wordt verder uitgelegd.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1.A Oefeningen hoeken

Oefening 4.1.1. Basisrekenen met hoeken (op basis van een tekening, nog zonder maatgetallen)



Bepaal door verschuiven en draaien welke hoek hier telkens getekend is:

1.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

2.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

3.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

4.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

5.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

6.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

7.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

8.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

9.  = | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

Bepaal door te redeneren op een tekening telkens volgende uitdrukking:

10. $\alpha + \beta =$ | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

11. $\beta + \alpha =$ | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

12. $\gamma - \beta =$ | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

13. $\alpha - \gamma =$ | α | β | γ | $-\alpha$ | $-\beta$ | $-\gamma$ |

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Goniometrische cirkel

Hoeken worden traditioneel *gemeten in (boog)graden*, waarbij een rechte hoek $90°$ is, een gestrekte hoek $180°$ en de nulhoek $0°$ of $360°$. Het maatgetal van een georiënteerde hoek is daarbij slechts bepaald 'op $360°$ na': per afspraak zijn $20°$, $20° + 360° = 380°$, $20° + 720° = 740°$ en $20° - 360° = -340°$ allemaal maatgetallen van *dezelfde georiënteerde hoek*.

De keuze voor (boog)graden, die onderverdeeld zijn in (boog)minuten en (boog)seconden is historisch gemotiveerd, en gebaseerd op een zestigtallig talstelsel. Je kan het vergelijken met het meten van lengtes in mijl, el of voet. Er is een meer natuurlijke manier om hoeken te meten, die eigenlijk zelfs geen willekeurige keuze van een nieuwe eenheid vraagt. We zullen hiervoor een hoek bekijken op de goniometrische cirkel.

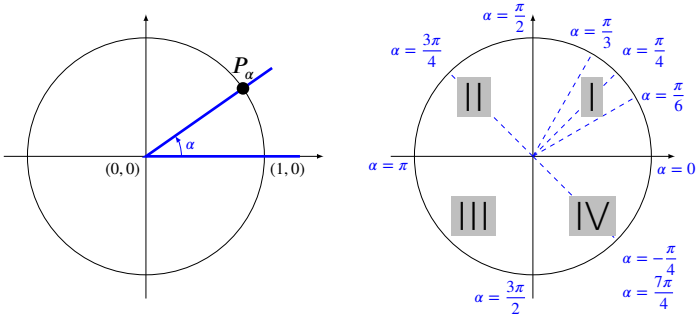
Door verschuiven en draaien (maar niet spiegelen) kan je het hoekpunt van een georiënteerde hoek in de oorsprong van het vlak leggen, en het eerste been op de positieve x-as. Dat leidt tot volgende definities:

Definitie 4.2.1.

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong.

Met elke georiënteerde hoek α komt een uniek **beeldpunt** P_α van de goniometrische cirkel overeen door het hoekpunt van α te verschuiven naar de oorsprong, het eerste been op de positieve x-as te leggen en het unieke snijpunt van het tweede been met de goniometrische cirkel P_α te noemen. Omgekeerd bepaalt elk punt P_α van de goniometrische cirkel een georiënteerde hoek α.

De goniometrische cirkel wordt verdeeld in vier **kwadranten**, die vanaf rechtsboven tegen de klok in genummerd worden met Romeinse cijfers I, II, III, IV zoals op de figuur hieronder.



Hoeken komen dus overeen met *punten van de goniometrische cirkel* en in de praktijk wordt meestal geen onderscheid gemaakt tussen het punt P_α en de hoek α.

Omdat de omtrek van een cirkel met straal één gelijk is aan 2π, ligt het voor de hand om een hoek die éénmaal ronddraait maatgetal 2π te geven; een 'halve draai', dus een gestrekte hoek heeft dan maat π, en de helft daarvan, dus een rechte hoek, heeft maatgetal $\pi/2$. Deze manier van hoeken meten noemt men 'meten in radialen'. Op bovenstaande figuur zijn enkele hoeken gemeten in radialen aangeduid.

Het blijkt wiskundig veel handiger hoeken te meten in *radialen* dan in *graden*. De formules voor afgeleiden van sinus en cosinus werken bijvoorbeeld enkel als de hoeken worden gemeten in radialen.

Het maatgetal van een georiënteerde hoek is slechts bepaald 'op 2π na', dus per afspraak zijn $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{-11\pi}{6}$ allemaal maatgetallen van dezelfde hoek.

We schrijven dikwijls $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

Als symbool voor radialen wordt **rad** gebruikt, maar het wordt meestal niet geschreven. Men schrijft dus meestal *een hoek met grootte* π in plaats van *een hoek met grootte* π *rad*.

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Goniometrische cirkel

Opmerking 4.2.1.

- De **lengte van de cirkelboog** tussen de twee benen van een hoek is gelijk aan het maatgetal van die hoek uitgedrukt in radialen, wanneer we dit maatgetal kiezen tussen 0 en 2π. Dit verklaart waarom men soms het begrip *booglengte* gebruikt voor de grootte van een hoek.
- Het verband tussen een hoek gemeten in graden en radialen wordt gegeven door $360° = 2\pi$, en dus geldt ook $90° = \frac{\pi}{2}$ en $180° = \pi$. Voor enkele gekende hoeken geldt dus $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{3\pi}{2} = 270°$, ... Merk op dat de grootte in radialen erg dikwijls wordt uitgedrukt als een veelvoud van π.
- Een gestrekte hoek van $180°$ meet π radialen, en dus komt één graad overeen met $\frac{\pi}{180} \approx 0.017\ldots$ rad. Omgekeerd komt 1 rad overeen met ongeveer $\frac{180°}{\pi} \approx 57,\ldots°$.
- Zowel het maatgetal van een hoek als de hoek zelf worden meestal genoteerd met Griekse letters. We spreken dus zowel van 'de hoek α' (waarbij α een letter is, namelijk de naam van de hoek) als 'de hoek met grootte α' (waar α dan staat voor een getal, namelijk het maatgetal van de hoek). Het maatgetal is altijd in radialen uitgedrukt, tenzij er expliciet staat $\alpha°$. De dubbelzinnigheid tussen een 'hoek' en 'de grootte van een hoek' is gelukkig compatibel met de optelling van hoeken: de grootte van de som van twee hoeken is de som van de groottes.
- Het symbool ° kan begrepen worden als een afkorting voor 'maal $\frac{2\pi}{360}$', waardoor dus graden automatisch worden omgezet naar radialen: $7° = 7 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{14\pi}{360} = \frac{7\pi}{180}$. De breuk $\frac{2\pi}{360}$ moet je daarbij niet echt onthouden, want een hoek van $360°$ moet worden omgezet naar 2π, en daarvoor moet je natuurlijk vermenigvuldigen met $\frac{2\pi}{360}$.

Voorbeeld 4.2.1 (Omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd)**.**

Van graden omzetten naar radialen gaat met behulp van *de regel van drie*. Vertrek van het feit dat $360°$ gelijk is aan 2π radialen en bereken dan hoeveel radialen één graad is, en daarna hoeveel radialen bijvoorbeeld 7 graden zijn. Met dezelfde redenering zet je radialen om naar graden.

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 2$	$: 2$
$180°$	π

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 360$	$: 360$
$1°$	$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$
$\times 7$	$\times 7$
$7°$	$\frac{7\pi}{180}$

Graden	Radialen
$360°$	2π
$: 2\pi$	$: 2\pi$
$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$	1
$\times 7$	$\times 7$
$\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$	7

Een hoek van $180°$ meet π radialen, $7°$ is gelijk aan $\frac{7\pi}{180}$ radialen en 7 radialen is gelijk aan $\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Goniometrische getallen

Door een georiënteerde hoek op de goniometrische cirkel te plaatsen bekomen we een punt op die cirkel, en dergelijk punt heeft x en y coördinaten. Deze coördinaten zijn per definitie de cosinus en de sinus van die hoek. We zullen verder zien dat wegens de stelling van Pythagoras deze definitie overeenkomt met de mogelijk meer vertrouwde definities met aanliggende en overstaande zijden in een driehoek.

Definitie 4.3.1.

Als P_α het punt is op de goniometrische cirkel dat hoort bij een hoek α, dan is

de **cosinus** van de hoek α per definitie de x-coördinaat van het punt P_α, en

de **sinus** van de hoek α per definitie de y-coördinaat van het punt P_α:

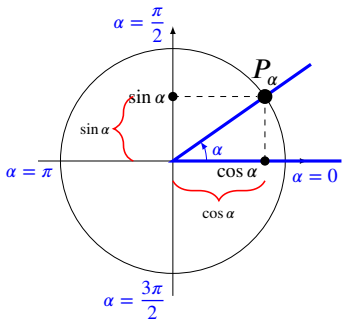
$$P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Per definitie is ook

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{(tangens)} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{(secans)}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{(cotangens)} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{(cosecans)}$$

We noemen de $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$ de **goniometrische getallen** van een hoek.



Oefening 4.3.1. Lees volgende waarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 2\pi = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$
2. $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$
3. $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$
4. $\cos(-\pi) = \ldots\ldots$ $\sin(-\pi) = \ldots\ldots$

De vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ (of de Stelling van Pythagoras) geeft onmiddellijk de hoofdformule van de goniometrie omdat het punt P_α op de goniometrische cirkel coördinaten $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ heeft:

Eigenschap 4.3.1 (Hoofdformule van de goniometrie)**.** Voor elke hoek α geldt:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \text{(hoofdformule goniometrie)}$$

Hieruit volgt onmiddellijk ook dat

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \cos^2\alpha\text{)}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \sin^2\alpha\text{)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Goniometrische getallen

Opmerking 4.3.1.

Let op de notatie voor machten: $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2 = \cos^2(\alpha) \neq \cos(\alpha^2) = \cos\alpha^2$.

Merk ook op dat in het algemeen $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$ en $\cos 2\alpha \neq 2\cos\alpha$.

Inderdaad, $\cos(\alpha+\beta) \stackrel{?}{=} \cos\alpha + \cos\beta$ werkt al niet voor bijvoorbeeld $\beta = 0$:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha+0) \neq \cos\alpha + \cos 0 = \cos\alpha + 1$$

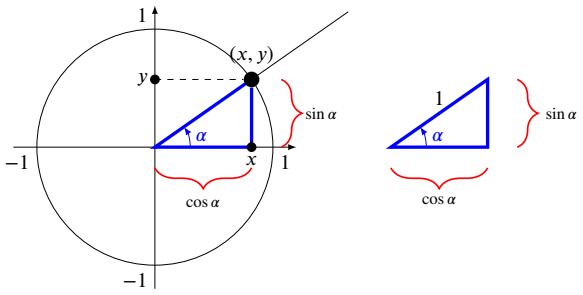
en $\cos 2\alpha \stackrel{?}{=} 2\cos\alpha$ werkt niet voor bijvoorbeeld $\alpha = 0$

$$\cos(2\cdot 0) = \cos 0 = 1 \text{ maar } 2\cdot\cos 0 = 2\cdot 1 = 2$$

Gelijkaardige problemen doen zich voor bij sinus, tangens, secans en cosecans. Er bestaat een hele collectie formules om toch de goniometrische getallen van sommen te berekenen.

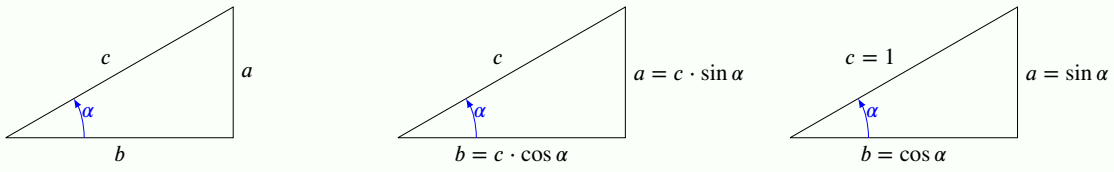
4.3.1 Rechthoekige driehoeken

Voor *scherpe hoeken* kunnen we de sinus en cosinus ook bekijken in een **rechthoekige driehoek**. Omdat het punt $P_\alpha = (x, y)$ op de goniometrische cirkel ligt, heeft de schuine zijde van de rechthoekige driehoek op onderstaande figuur lengte 1. De lengte van de *aanliggende zijde* van hoek α is gelijk aan $\cos\alpha$, de lengte van de *overstaande zijde* is $\sin\alpha$.



De volgende eigenschap veralgemeent dit voor rechthoekige driehoeken waarvan de schuine zijde niet noodzakelijk lengte 1 heeft. Het volstaat dan te *herschalen* met de lengte van de schuine zijde:

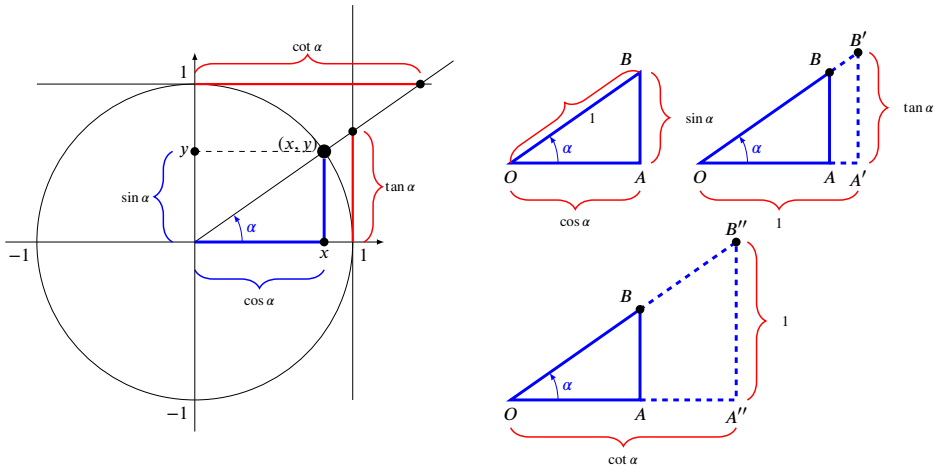
Eigenschap 4.3.2 (Sinus en cosinus in een rechthoekige driehoek)**.**



4.3 Goniometrische getallen

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$a = \sin\alpha \cdot c$	SOS
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$= \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$b = \cos\alpha \cdot c$	CAS
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$a = \tan\alpha \cdot b$	TOA
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	$= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$b = \cot\alpha \cdot a$	cotangens

De cosinus en de sinus van een hoek α kan je op de goniometrische cirkel aflezen op de *assen*. Ook de tangens en de cotangens kan je aflezen, en wel op de *raaklijnen* aan de goniometrische cirkel in punten $(1,0)$ en $(0,1)$:



Opmerking 4.3.2.

- We lezen de cosinus af op de x-as, en de sinus op de y-as.
  We zien dat $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ en $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$
- We lezen de *tangens* af op de verticale *raak*lijn $x = 1$. Dat volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle A'OB'$
  want in driehoek $\measuredangle AOB$ geldt $\tan\alpha = \frac{|AB|}{|AO|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
  terwijl in driehoek $\measuredangle A'OB'$ geldt dat $\tan\alpha = \frac{|A'B'|}{|A'O|} = \frac{|A'B'|}{1} = |A'B'|$.
  Dus is $|A'B'| = \tan\alpha$.
  Op analoge wijze lezen we de cotangens af op de horizontale rechte $y = 1$.
  We zien dat $\tan\alpha$ en $\cot\alpha$ alle mogelijk reële waarden kunnen aannemen.
- De formule $a = c \cdot \sin\alpha$ betekent dat de sinus precies het getal is waarmee we de lengte van de *schuine* zijde van een driehoek moeten vermenigvuldigen om de lengte van de *overstaande* zijde te bekomen. Idem voor cosinus en aanliggende zijde.

4.3.2 Standaardhoeken

Voor enkele hoeken zijn er eenvoudige formules voor de goniometrische getallen. Deze hoeken komen in de praktijk regelmatig voor, en het is handig en belangrijk de *exacte uitdrukkingen* te kennen.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Goniometrische getallen

De waarden in volgende eigenschap zijn eenvoudig te onthouden: schrijf de hoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ van klein naar groot. De bijhorende sinussen zijn dan een rijtje halve vierkantswortels van klein naar groot. De cosinus is hetzelfde rijtje omgekeerd, en de tangens is natuurlijk het quotiënt van de sinus en de cosinus. Merk op dat $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

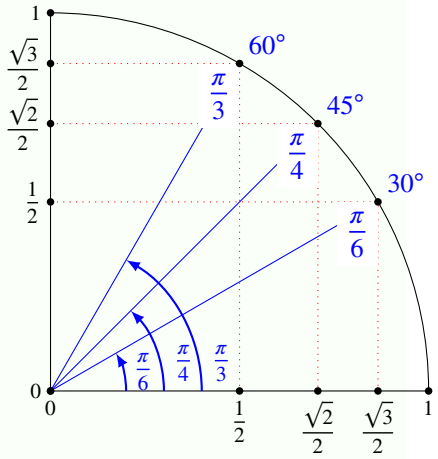
Opmerking 4.3.3.

Een rekenmachine geeft enkel numerieke oplossingen, en het is soms veel handiger om met uitdrukkingen als $\sqrt{2}$ te rekenen dan met $1,41421\ldots$. Dat is bijvoorbeeld het geval als je de waarde even verder moet kwadrateren, wat met goniometrische formules wel eens voorkomt.

Met de goniometrische cirkel bepaal je ook de goniometrische getallen van verwante hoeken in de andere kwadranten: de sinus lees je af op de rechte $x = 0$ (dus de y-as), de tangens op de rechte $x = 1$, de cosinus op de rechte $y = 0$ (dus de x-as), en de cotangens op de rechte $y = 1$. Je kan ook het *teken* van de sinus, cosinus en tangens dadelijk aflezen.

BELANGRIJK: leer dit niet van buiten, maar bestudeer het tot je er de evidentie van inziet.

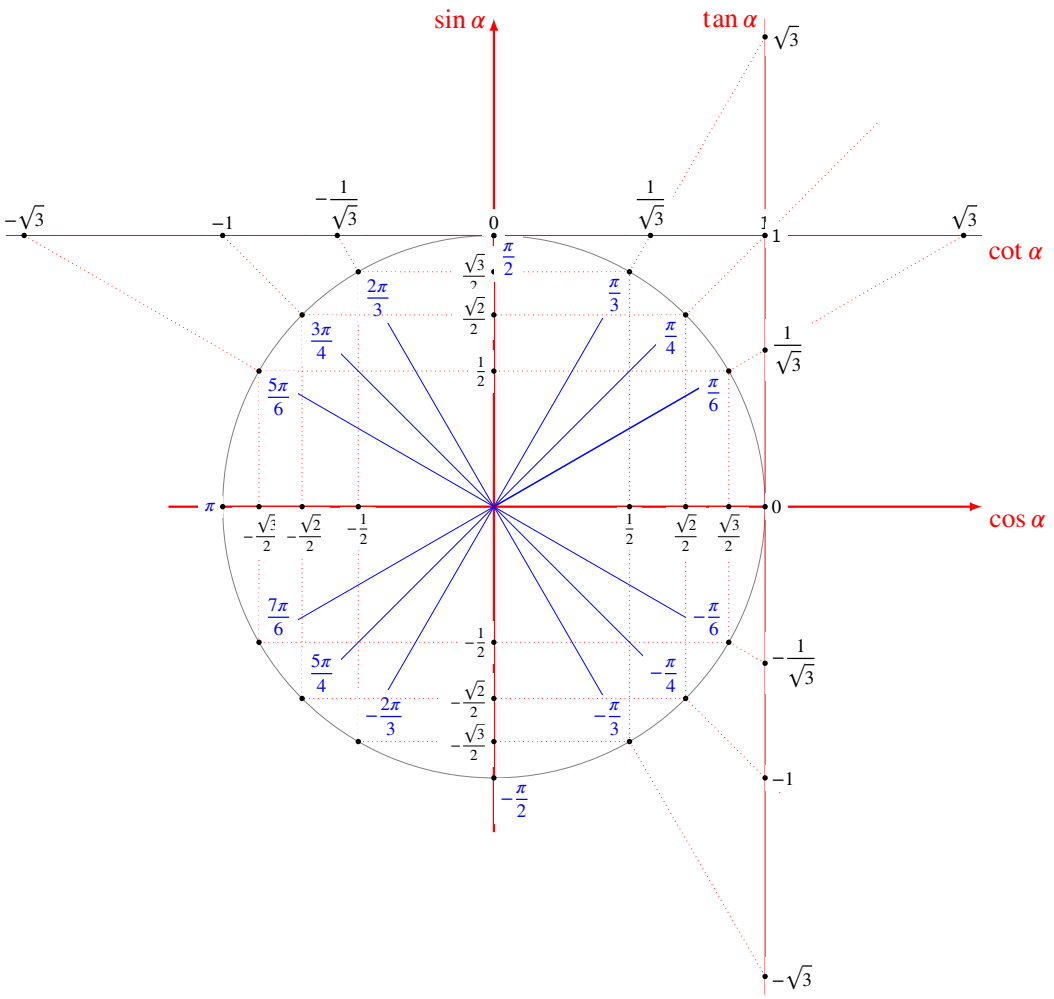
Eigenschap 4.3.3 (Goniometrische getallen van standaardhoeken)**.**



α	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Goniometrische getallen



CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Verwante hoeken

Op de goniometrische cirkel zien we dat er eenvoudige verbanden zijn tussen de goniometrische getallen van zogenaamde *verwante* hoeken. Uit de gekende waarden voor sinus, cosinus, tangens en cotangens van enkele *standaardhoeken*, volgen dus ook de waarden van veel meer hoeken. Bovendien kunnen we het berekenen van goniometrische getallen van een willekeurige hoek steeds herleiden tot het berekenen van een goniometrisch getal van een hoek uit het eerste kwadrant.

Definitie 4.4.1 (Verwante hoeken)**.** Elke hoek α heeft volgende zogenaamde **verwante** hoeken:

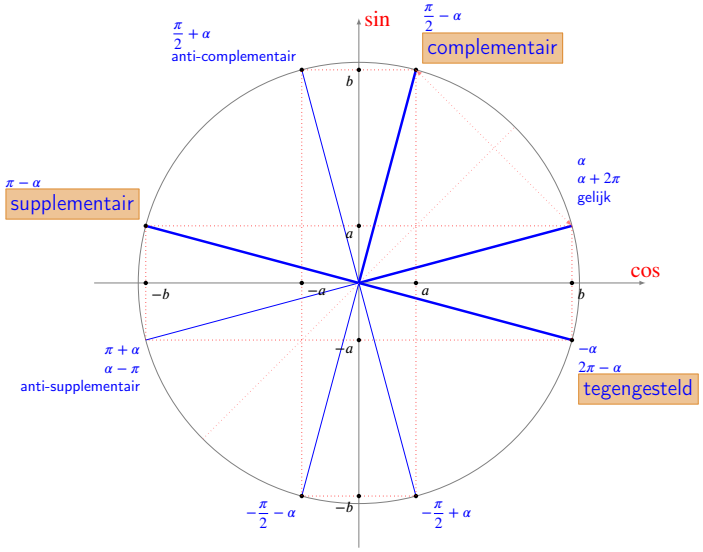
$-\alpha$	is de **tegengestelde** hoek	(de som van α en $-\alpha$ is gelijk aan 0)
$\pi - \alpha$	is de **supplementaire** hoek	(de som van α en $\pi - \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	is de **complementaire** hoek	(de som van α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)
$\pi + \alpha$	is de **anti-supplementaire** hoek	(het verschil van α en $\pi + \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	is de **anti-complementaire** hoek	(het verschil van α en $\frac{\pi}{2} + \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)

Uit deze definitie volgt direct volgende eigenschap:

Eigenschap 4.4.1.

- Twee hoeken zijn *tegengesteld* als hun som gelijk is aan de *nulhoek*, *supplementair* als hun som gelijk is aan een *gestrekte* hoek, en *complementair* als hun som gelijk is aan een *rechte* hoek.
- Tegengestelde hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzichte van de x-as, supplementaire hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzichte van de y-as en complementaire hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzicht van de *eerste* bissectrice.

Op een tekening ziet dat er uit als volgt:



Het is *niet* zinvol deze figuur of volgende tabellen van buiten te leren. Het is *wel* zinvol de goniometrische getallen van verwante hoeken direct te leren aflezen. Hierbij is $\sin\alpha = a$ en $\cos\alpha = b$, en de goniometrische getallen van de verwante hoeken zijn dan a, b, $-a$ of $-b$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Verwante hoeken

Eigenschap 4.4.2.

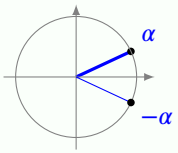
Cosinus:	(op de x-as)		Sinus:	(op de y-as)	
$\cos\alpha$	$= \cos(-\alpha)$	$= b$	$\sin\alpha$	$= \sin(\pi-\alpha)$	$= a$
$\cos(\pi-\alpha)$	$= \cos(\pi+\alpha)$	$= -b$	$\sin(-\alpha)$	$= \sin(\pi+\alpha)$	$= -a$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \cos(\alpha-\frac{\pi}{2})$	$= a$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$	$= b$
$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$	$= \cos(-\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= -a$	$\sin(-\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \sin(\alpha-\frac{\pi}{2})$	$= -b$

Per type van verwante hoek geeft dat volgende lijst verbanden tussen de *goniometrische getallen*:

Eigenschap 4.4.3 (Verwante hoeken)**.**

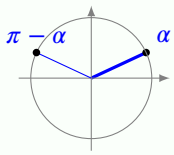
Tegengestelde hoeken

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos\alpha\\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



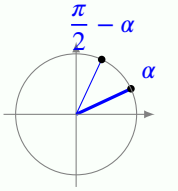
Supplementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(\pi-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



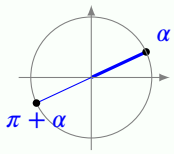
Complementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \tan\alpha\end{aligned}$$



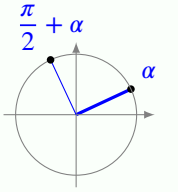
Anti-supplementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\pi) &= -\sin\alpha\\ \cos(\alpha\pm\pi) &= -\cos\alpha\\ \tan(\alpha\pm\pi) &= \tan\alpha\\ \cot(\alpha\pm\pi) &= \cot\alpha\end{aligned}$$



Anti-complementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\alpha\\ \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\cot\alpha\\ \cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\tan\alpha\end{aligned}$$



CC BY-NC-SA 4.0

4.5 Goniometrische formules

Ter referentie staan hier een aantal goniometrische formules om allerlei uitdrukkigen om te vormen en soms te berekenen. Alle formules zijn zowel van links naar rechts te lezen, als van rechts naar links.

Eigenschap 4.5.1 (Goniometrische formules)**.**

Hoofdformule en varianten:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \qquad \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1 \qquad \cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1$$

Som- en verschilformules:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Formules voor dubbele hoek:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Formules van Simpson:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \qquad \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \qquad \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

Verwante hoeken:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= -\sin(-\alpha) &&= \sin(\pi-\alpha) &&= -\sin(\pi+\alpha)\\
&&&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\\
&&&= -\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\\
\cos\alpha &= \cos(-\alpha) &&= -\cos(\pi-\alpha) &&= -\cos(\pi+\alpha)\\
&&&= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\\
&&&= -\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= -\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.5.A Oefeningen goniometrie

Oefening 4.5.1. Zet om van graden naar radialen of omgekeerd.

Graden	*Radialen*
$120°$	$\ldots\ldots$
$8°$	$\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\,°$	$7\pi/4$
$\ldots\ldots\,°$	$\pi/10$
$90°$	$\ldots\ldots$
$1°$	$\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\,°$	$7\pi/5$

Oefening 4.5.2. Lees de waarden van volgende goniometrische getallen af op de cirkel:

1. $\cos 0° = \ldots\ldots$

2. $\cos \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$

3. $\cos 90° = \ldots\ldots$

4. $\cos \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$

5. $\sin 0° = \ldots\ldots$

6. $\sin \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$

7. $\sin 90° = \ldots\ldots$

8. $\sin \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$

9. $\tan \frac{\pi}{3} = \ldots\ldots$

10. $\cos \frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$

11. $\tan \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$

12. $\cot \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$

Oefening 4.5.3. Duid het juiste antwoord aan (er is telkens precies één antwoord correct).

1. De hoeken $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{5\pi}{6}$ zijn

tegengesteld	complementair	supplementair

2. $\cos \frac{5\pi}{4}$ is gelijk aan

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\cos \frac{\pi}{4}$	$\cos \frac{3\pi}{4}$

3. $\sin(\pi - 23)$ is gelijk aan

$-\sin(23)$	$\sin(23)$	$\cos(23)$

4. $\sin(2\pi + 1)$ is gelijk aan

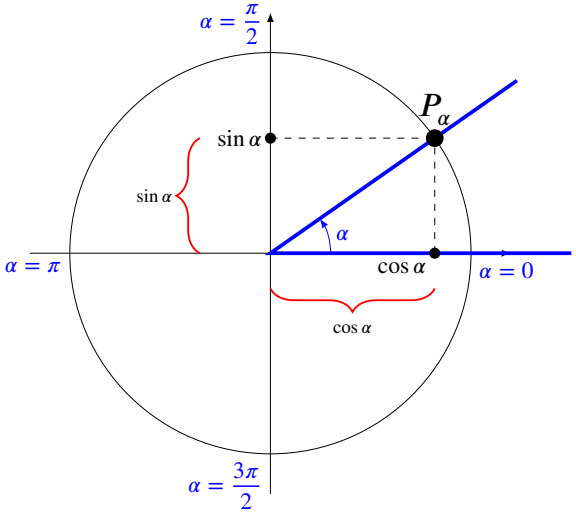
$-\sin 1$	$\sin 1$	$\cos 1$

CC BY-NC-SA 4.0

4.5.A Oefeningen goniometrie

Oefening 4.5.4. Zoek aan de hand van de goniometrische cirkel (zie onder) waaraan volgende uitdrukkingen gelijk zijn.

1. $\cos(\pi-\alpha)=$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
2. $\sin(\alpha-\pi)=$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
3. $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
4. $\sin(\pi+\alpha)=$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
5. $\tan(\alpha-\frac{\pi}{2})=$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$



Oefening 4.5.5. Bereken zonder rekentoestel. Gebruik de gekende goniometrische getallen en de formules voor tegengestelde, (anti)supplementaire en (anti)complementaire hoeken.

1. $\sin(135°)=\ldots\ldots$

2. $\tan(3\pi/4)=\ldots\ldots$

3. $\cos(-30°)=\ldots\ldots$

4. $\sin(-120°)=\ldots\ldots$

5. $\tan(-\frac{5\pi}{6})=\ldots\ldots$

6. $\cot(390°)=\ldots\ldots$

Oefening 4.5.6. Bereken volgende goniometrische getallen door gebruik te maken van de gekende waarden van de standaardhoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ en de symmetrieën voor de verwante hoeken.

1. $\cos\frac{\pi}{3}=$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos\frac{2\pi}{3}=$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

4.5.A Oefeningen goniometrie

3. $\cos\frac{5\pi}{6} =$

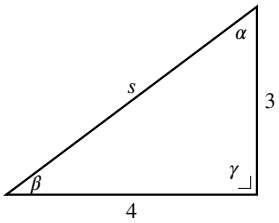
4. $\sin\frac{7\pi}{4} =$

5. $\cos\frac{-\pi}{2} =$

6. $\cos\frac{-2\pi}{3} =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Oefening 4.5.7. We bekijken een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden met lengte 3 en 4 (zie tekening). Bereken de lengte van de schuine zijde s. Bereken ook de sinus en cosinus van elk van de hoeken α, β en γ.



1. $s =$ … …

2. $\sin\alpha =$ … …

3. $\cos\alpha =$ … …

4. $\sin\beta =$ … …

5. $\cos\beta =$ … …

6. $\sin\gamma =$ … …

7. $\cos\gamma =$ … …

Oefening 4.5.8. Bepaal $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ en $\cot\alpha$ en het kwadrant waarin α ligt in het volgende geval (zonder gebruik te maken van een rekenmachine):

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \text{en} \qquad \sin\alpha < 0.$$

1. α ligt in het | I^{e} | IIe | IIIe | IVe | kwadrant.

2. $\sin\alpha =$ … …

3. $\tan\alpha =$ … …

4. $\cot\alpha =$ … …

Oefening 4.5.9. Bepaal $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\cot\alpha$ en het kwadrant waarin α ligt in het volgende geval

CC BY-NC-SA 4.0

4.5.A Oefeningen goniometrie

(zonder gebruik te maken van een rekenmachine):

$$\tan\alpha = -\frac{3}{4} \qquad \text{en} \qquad \sin\alpha > 0.$$

1. α ligt in het | I^{e} | IIe | IIIe | IVe | kwadrant.

2. $\cot\alpha = \ldots\ldots$

3. $\sin\alpha = \ldots\ldots$

4. $\cos\alpha = \ldots\ldots$

Oefening 4.5.10. Verzeker je ervan dat de volgende gelijkheden correct zijn door het linker- of rechterlid van de gelijkheid, of beide, te herschrijven met behulp van goniometrische formules.

1. $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

2. $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

Oefening 4.5.11. Vereenvoudig (dit wil zeggen, schrijf met behulp van één goniometrisch getal).

1. $\cos^2 3 - \sin^2 3$

2. $2\sin 3\cos 3$

3. $\sin(5\alpha)\cos(3\alpha) + \cos(5\alpha)\sin(3\alpha)$

4. $\cos(5\alpha)\cos(3\alpha) + \sin(5\alpha)\sin(3\alpha)$

Oefening 4.5.12. Schrijf als een product van goniometrische getallen.

1. $\sin 3 - \sin 5$

2. $\cos 2 + \cos 7$

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Driehoeken oplossen

Het 'oplossen van driehoeken' betekent het bepalen van *alle* zijden en hoeken als er enkele gegeven zijn. Volgende eigenschappen worden daarbij gebruikt:

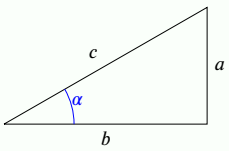
Eigenschap 4.6.1 (Herhaling eigenschappen driehoeken)**.**

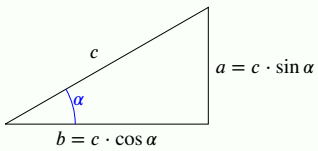
In elke driehoek geldt: de som van de drie hoeken is $180°$ of π rad.

In een rechthoekige driehoek geldt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{Stelling van Pythagoras}$$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$a = \sin\alpha \cdot c$	SOS
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$= \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$b = \cos\alpha \cdot c$	CAS
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$a = \tan\alpha \cdot b$	TOA
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	$= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$b = \cot\alpha \cdot a$	cotangens





Eigenschap 4.6.2 (Sinusregel en cosinusregel in een willekeurige driehoek)**.**

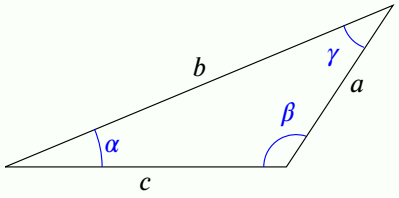
Sinusregel (de verhouding tussen lengtes van zijden en de sinus van hun overstaande hoeken is constant)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Cosinusregel (geeft een verband tussen kwadraten van de zijden en één hoek)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\cos\gamma$$

Alternatieve formuleringen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha$ en $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\cos\beta$



Opmerking 4.6.1. Enkele tips om deze regels toe te passen in oefeningen:

- De **sinusregel** legt een verband tussen verhoudingen van lengtes en hun overstaande hoeken. Stel dat je de lengte van een zijde kent, alsook de grootte van haar overstaande hoek. Indien

4.6 Driehoeken oplossen

je dan de lengte kent van een andere zijde, dan kan je met de sinusregel de grootte van haar overstaande hoek berekenen. Omgekeerd, stel dat je de grootte van een andere hoek kent, dan kan je de lengte van haar overstaande zijde berekenen.

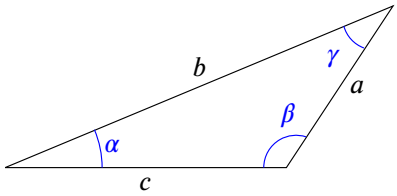
Je kan de sinusregel ook lezen als $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot b$ of $\sin\alpha = \frac{a}{b} \cdot \sin\beta$.

- De **cosinusregel** legt een verband tussen één hoek en de lengtes van alle zijden van de driehoek. Om de cosinusregel gemakkelijk te memoriseren, onthoud je dat de lengte van de zijde die aan de linkerkant van de vergelijking voorkomt (c hierboven) de overstaande zijde is van de hoek die voorkomt in het rechterlid van formule (γ hierboven). In oefeningen kan je met de cosinusregel de lengte van een zijde berekenen als je zowel de grootte van haar overstaande hoek kent als de lengtes van de twee andere zijden, of je kan eender welke hoek berekenen als je de lengtes van alle zijden kent.
- De cosinusregel is eigenlijk een uitbreiding van de stelling van Pythagoras. Als γ een rechte hoek is, dan is $\cos\gamma = 0$. De cosinusregel, toegepast op de hoek γ, geeft dan $c^2 = a^2 + b^2$. En inderdaad, in deze rechthoekige driehoek is c de schuine zijde en de cosinusregel is precies de stelling van Pythagoras. De cosinusregel geeft dus precies de correctieterm voor de stelling van Pythagoras bij niet-rechthoekige driehoeken.

CC BY-NC-SA 4.0

4.6.A Oefeningen cosinus- en sinus regel

Oefening 4.6.1. Bereken alle zijden en hoeken van een driehoek met gegeven zijden $a = 2$, $b = 4$ en hoek $\beta = \pi/2$. De notatie is als volgt:



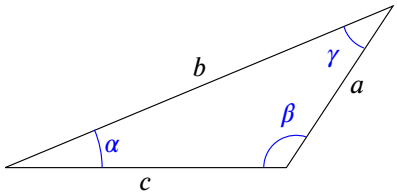
1. Bereken de hoek $\alpha = \ldots\ldots$ rad.

2. Bereken de hoek $\gamma = \ldots\ldots$ rad.

3. Bereken met de cosinusregel en de waarde van γ uit vorige deelvraag de lengte van de zijde $c = \ldots\ldots$

4. Bereken de lengte van de zijde c *zonder* de antwoorden van de eerste deelvraag te gebruiken.

Oefening 4.6.2. Bereken alle zijden en hoeken van een driehoek met gegeven zijde $a = 3$ en hoeken $\alpha = \frac{\pi}{4}$ en $\beta = \frac{\pi}{3}$. De notatie is als volgt:



Je mag een rekenmachine gebruiken.

1. Bereken de hoek $\gamma \approx \ldots\ldots$ rad.

2. Bereken de lengte van $b \approx \ldots\ldots$

3. Bereken de lengte van $c \approx \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.42)

5.1 Definitie van afgeleide

De *afgeleide* van een functie f in een punt a geeft de *gevoeligheid* weer van de functiewaarde $f(x)$ voor kleine veranderingen van x in de buurt van a. Als de afgeleide gelijk is aan 1 verandert $f(x)$ ongeveer even snel als x, als de afgeleide 2 is dubbel zo snel, en als de afgeleide $1/2$ is half zo snel. De afgeleide is dus de *verhouding* tussen de verandering van $f(x)$ en die van x. Er is jammer genoeg een technische complicatie: die verhouding hangt in het algemeen af van de *grootte* van de verandering van x. En als de verandering in x nul is, dan verandert $f(x)$ natuurlijk ook niet, en is er geen verhouding te bepalen. De oplossing ligt in het begrip limiet en lijkt bij een eerste kennismaking misschien wat duister en zelfs afschrikwekkend. Gelukkig is het algemeen idee wel relatief eenvoudig, en in de praktijk wordt de definitie altijd vervangen door handige rekenregels.

Voorbeeld 5.1.1 (Gevoeligheid voor verandering bij rechten)**.**

De 'gevoeligheid voor verandering' is het duidelijkst zichtbaar bij rechten, dus bij *eerstegraadsfuncties*. De theorie van afgeleiden breidt dit uit tot veel algemenere functies.

Als x een klein beetje verandert bij een erg steile rechte, bijvoorbeeld $y = 100x + 42$, dan is de verandering in y veel groter dan die van x:

Als $y = 100x + 42$ en $x \rightsquigarrow x + 1$
dan $y \rightsquigarrow y + 100$ want $100(x+1) + 42 = \underbrace{100x + 42}_{y} + 100 = y + 100$

Voor de erg vlakke rechte $y = \frac{1}{100}x + 42$ is de verandering in y dan weer veel kleiner dan die in x:

Als $y = \frac{1}{100}x + 42$ en $x \rightsquigarrow x + 100$
dan $y \rightsquigarrow y + 1$ want $\frac{1}{100}(x+100) + 42 = \underbrace{\frac{1}{100}x + 42}_{y} + 1 = y + 1$

Conclusie: de richtingscoëfficiënt is een maat voor de gevoeligheid van y voor veranderingen in x. Het extreme geval is richtingscoëfficiënt gelijk aan nul: dan verandert y helemaal niet als x verandert.

Om later deze eenvoudige situatie voor rechten beter te kunnen vergelijken met het meer algemene geval, beschrijven we ze ook in detail in de taal van functies.

De functiewaarde van $f : x \mapsto f(x) = 2x - 1$ verandert in elk getal a dubbel zo snel als a zelf: als bij a één bijkomt dan komt er bij $f(a)$ twee bij, want

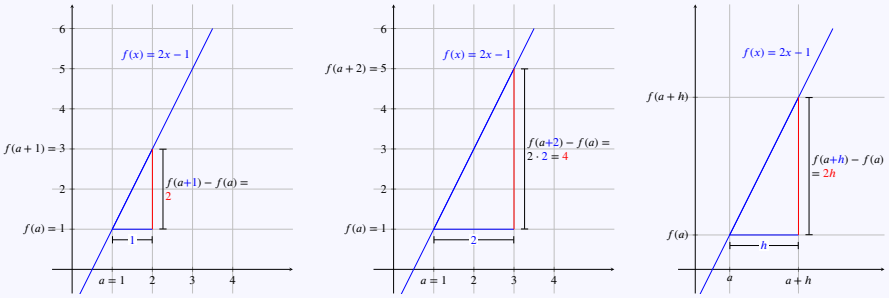
$$f(a{+}1) = 2(a{+}1) - 1 = 2a + 1 = (2a - 1) + 2 = f(a){+}2$$

Als bij a twee bijkomt, stijgt $f(a)$ met $2 \cdot 2 = 4$:

$$f(a{+}2) = 2(a{+}2) - 1 = 2a + 3 = (2a - 1) + 4 = f(a){+}4$$

en als bij a drie bijkomt, stijgt $f(a)$ met $2 \cdot 3 = 6$:

$$f(a{+}3) = 2(a{+}3) - 1 = 2a + 5 = (2a - 1) + 6 = f(a){+}6$$



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/08/25H.42)

5.1 Definitie van afgeleide

Als h de verandering is rond a, dan is de *verandering* van $f(a)$ naar $f(a+h)$ wiskundig het *verschil* tussen $f(a+h)$ en $f(a)$, dus $f(a+h)-f(a)$.

We stellen vast dat voor deze functie $f : x \mapsto 2x-1$ de verandering van de functiewaarden afhangt van de verandering h van x maar dat de *verhouding* tussen beide veranderingen constant is:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2(a+h)-1-(2a-1)}{h} = \frac{2a+2h-1-2a+1}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

Uit dezelfde berekening volgt dat dit voor elke functie $f : x \mapsto mx+q$ met $m, q \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{m(a+h)+q-(ma+q)}{h} = \frac{ma+mh+q-ma-q}{h} = \frac{mh}{h} = m.$$

We vinden dus het weinig verwonderlijke feit dat de richtingscoëfficiënt m van de rechte met vergelijking $y = mx+q$ aangeeft hoe snel y verandert als x verandert. Het is ook duidelijk dat deze verhouding niet afhangt van a: een rechte stijgt in elk punt even snel.

De hele theorie van afgeleiden is een succesvolle poging om deze eenvoudige inzichten over de richtingscoëfficiënt om het stijgen of dalen van rechten weer te geven te veralgemenen naar meer algemene functies (of krommen).
Er duiken daarbij twee enigszins vervelende aspecten op: enerzijds hangt de verhouding nu af van h, en anderzijds hangt de verhouding ook af van a. De afhankelijkheid van h wordt opgelost door de *limiet* te nemen voor $h \to 0$, en de afhankelijkheid van a door van de afgeleide een *functie van a* te maken.

Oefening 5.1.1. Onderzoek voor de functie $g : x \mapsto g(x) = \frac{x}{2}-1$ de verhouding van de veranderingen van $g(a)$ en a, zoals in het vorige voorbeeld.

Voorbeeld 5.1.2 (Gevoeligheid voor verandering bij kwadratische functies)**.**

Veeltermfuncties van de tweede graad, dus parabolen, zijn subtieler dan eerstegraadsveeltermen.
We onderzoeken de veranderingen van de functiewaarden van de functie $f : x \mapsto f(x) = x^2+1$ in de buurt van het punt $a = 1$, en zijn dus geïnteresseerd in het verschil $f(a+h)-f(a)$.

Als bij a één bijkomt, veranderen de functiewaarden als

$$f(a+1)-f(a) = (a+1)^2+1-(a^2+1) = a^2+2a+1+1-a^2-1 = 2a+1$$

en als bij a twee bijkomt

$$f(a+2)-f(a) = (a+2)^2+1-(a^2+1) = a^2+4a+4+1-a^2-1 = 4a+4$$

en als bij a drie bijkomt

$$f(a+3)-f(a) = (a+3)^2+1-(a^2+1) = a^2+6a+9+1-a^2-1 = 6a+9$$

Voor algemene h geldt

$$f(a+h)-f(a) = (a+h)^2+1-(a^2+1) = a^2+2ha+h^2+1-a^2-1 = 2ah+h^2$$

en verschil $f(a+h)-f(a)$ hangt dus zowel af van a als van h, en nog wel op een wat moeilijke manier, namelijk met een kwadraat van h.

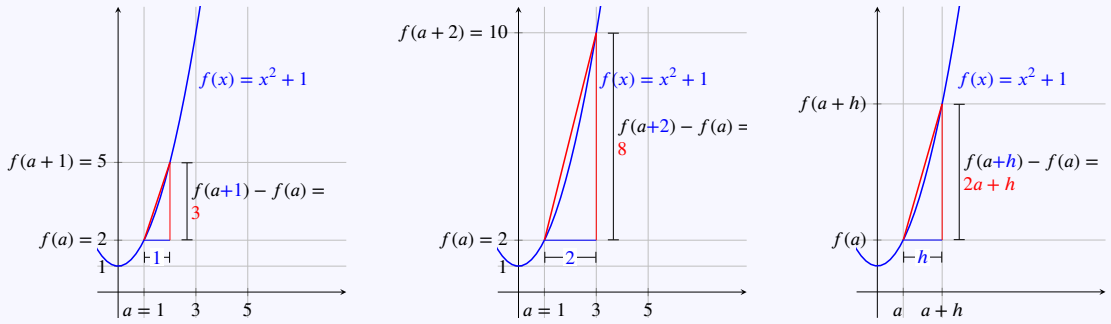
De *verhouding* van $f(a+h)-f(a)$ ten opzichte van h wordt

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$$

en ook die verhouding hangt af van zowel a als h.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Definitie van afgeleide



Als we de verhouding echter berekenen voor $a = 1$ en steeds kleinere waarden van h, dus steeds dichter in de buurt van $a = 1$, geeft dat

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
1	1	2	2	5	3	3
1	0.5	1.5	2	3.25	1.25	2.5
1	0.1	1.1	2	2.21	0.21	2.1
1	0.01	1.01	2	2.0201	0.00201	2.01
1	0.001	1.001	2	2.0020	0.00020	2.001

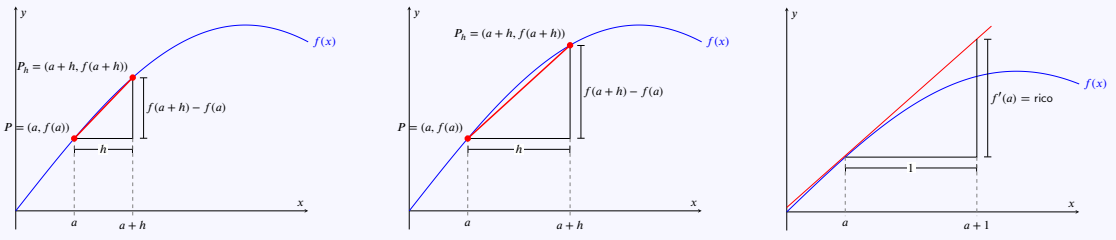
en we stellen vast dat die verhouding steeds dichter in de buurt van 2 ligt.

Een gelijkaardig onderzoek in de buurt van $a = 3$ levert een verhouding 6 op:

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3	1	4	10	17	7	7
3	0.5	3.5	10	13.25	3.25	6.5
3	0.1	3.1	10	10.61	0.61	6.1
3	0.01	3.01	10	10.0601	0.0601	6.01
3	0.001	3.001	10	10.006	0.006001	6.001

Voorbeeld 5.1.3.

De raaklijn aan de grafiek van een functie f in een punt $(a, f(a))$ kan je bekomen vanaf de rechte door $(a, f(a))$ en een naburig punt $(a+h, f(a+h))$, en dan h steeds kleiner te maken:



Opfrissing: formules voor rechten in het vlak.

Herinner u de vergelijking van de rechte L door twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) (met $x_1 \neq x_2$):

$$L \leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Definitie van afgeleide

De vergelijking van de rechte door de twee punten $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ is

$$y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}(x - a)$$

Door de term $f(a)$ naar het rechterlid te brengen krijgt de vergelijking de vorm $y = mx + q$ met rico $m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Die rico hangt af van h (en van a, maar a is vast gekozen). Als h kleiner wordt, dan beweegt het punt $(a+h, f(a+h))$ op de grafiek van f naar het punt $(a, f(a))$. De rechte door $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ draait en heeft als limietstand de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$.
De rico van die raaklijn is dus gelijk aan

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en deze limietwaarde noemen we *de afgeleide van f in a*.
In het algemeen is die limiet niet eenvoudig berekenbaar, want hij leidt tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$. Maar verder zal blijken dat er gelukkig relatief eenvoudige technieken zijn om afgeleiden toch te berekenen.

Definitie 5.1.1 (Afgeleide in een punt)**.**

Een reële functie f is **afleidbaar** of **differentieerbaar** in een punt a van haar domein als de limiet $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *bestaat* en *eindig* is.
In dat geval noemen we die limiet **de afgeleide van f in a** en we noteren

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Uit voorbeeld **??** blijkt dat er een verband is tussen deze limiet en de raaklijn aan de grafiek:

Eigenschap 5.1.1 (Vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f)**.**

De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ is

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

en de *afgeleide in een punt* is dus de *richtingscoëfficiënt* van de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

Door de afgeleide van f in *elk punt* a te berekenen verkrijgen we een nieuwe *functie*:

Definitie 5.1.2 (Afgeleide functie)**.**

De **afgeleide functie** van een reële functie f, genoteerd f', is de functie

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

die enkel gedefinieerd is in de punten waar de afgeleide van f bestaat.

Het domein van de afgeleide functie kan strikt *kleiner* zijn dan het domein van de functie zelf als in een aantal punten de afgeleide niet bestaat.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Definitie van afgeleide

Voorbeeld 5.1.4.

1. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto 2x + 1$ is de functie $f' : x \mapsto 2$.

Uitwerking: Voor willekeurige a is de afgeleide gelijk aan 2, de afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2$.

2. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto x^2 + 1$ is de functie $f' : x \mapsto 2x$.

Uitwerking: Voor willekeurige a is de afgeleide gelijk aan $2a$, de afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2x$.

3. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto |x|$ is de functie $f' : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$

Uitwerking: In het punt $x = 0$ bestaat de afgeleide niet, en f' is dus niet gedefinieerd in $x = 0$:

$$f' : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Opmerking 5.1.1.

(a) Door $a + h = b$ te stellen, en dus $h = b - a$, kan je de limiet van de afgeleide ook schrijven als

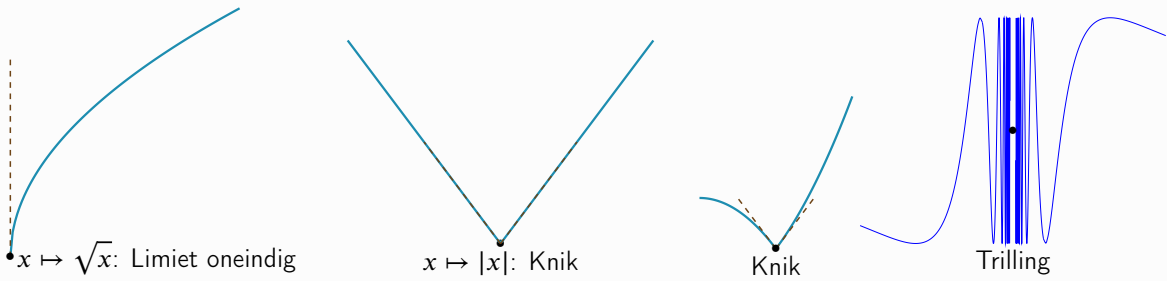
$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sommige handboeken gebruiken deze equivalente formulering.

(b) De breuk $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ beschouw je best niet als een *quotiënt* (dus het resultaat van een deling), maar eerder als een *verhouding*: de breuk meet hoe de verandering van y-waarden, dus $f(a+h) - f(a)$ zich verhoudt tot de verandering in x-waarden, dus $(a+h) - a = h$.
De afgeleide is *de limiet van die verhouding* voor steeds kleinere h, en meet dus hoeveel de y-waarden sneller of trager veranderen dan de x-waarden. Dat is op elke plaats anders, dus we hebben een functie nodig om al die verhoudingen netjes bij te houden.

Extra: voorbeelden van niet-afleidbare functies.

Niet alle functies zijn overal afleidbaar:



(a) Het is mogelijk dat de limiet $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *oneindig* wordt. In dat geval noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. We hebben dan een verticale raaklijn aan de grafiek van f in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de functie $x \mapsto \sqrt{x}$ in het punt $a = 0$. (figuur linksboven)

(b) De limiet bestaat in sommige gevallen niet omdat de linkerlimiet verschilt van de rechterlimiet in

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Definitie van afgeleide

een punt a. Er bestaat dan geen raaklijn aan de grafiek van f in a omdat de grafiek een knik maakt in a. Ook dan noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de absolute waarde $x \mapsto |x|$ in het punt $a = 0$. (figuur midden boven) Hier is

$$\lim_{\substack{h\to 0\\<}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\<}} \frac{-h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\<}} (-1) = -1 \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\>}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\>}} \frac{h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\>}} 1 = 1.$$

(c) In andere gevallen bestaat de limiet mogelijk niet omdat de functie f te erg trilt in de buurt van a. Er bestaan zelfs functies die *nergens* afleidbaar zijn. Hier gaan we niet verder op in.

Om historische en praktische redenen zijn in sommige contexten andere notaties gebruikelijk.

Definitie 5.1.3 (Notaties afgeleide)**.**

De afgeleide van een functie f wordt ook genoteerd als $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \overset{\text{def}}{=} f'$ (Leibniz notatie)

of ook als $Df \overset{\text{def}}{=} f'$ (Euler notatie)

De afgeleide van f in een punt a wordt dan $f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = Df(a)$.

De schrijfwijzen f', $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ en $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ worden in de praktijk door elkaar gebruikt.

Voorbeeld 5.1.5. We kunnen dus afgeleiden van functies op meerdere manieren schrijven:

$$(\sin x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin}{\mathrm{d}x}(x) \quad \text{en} \quad (5x^4+1)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^4+1) = \frac{\mathrm{d}(5x^4+1)}{\mathrm{d}x}$$

Extra: over notaties voor afgeleiden.

Geen echte leerstof, maar voor sommigen misschien toch verhelderend:

- Hoewel wiskundige begrippen bijna altijd erg nauwkeurig worden gedefinieerd, hangt er toch een mysterieuze *flou artistique* rond de precieze betekenis van het symbool x: soms is dat een onbekende, soms een willekeurig getal, soms een variabele, soms gewoon een letter en soms de naam van één of ander ding. In het bijzonder bij het afleiden van functies is het echter erg belangrijk x te beschouwen als een variabele, en zeker niet als een willekeurig getal. Inderdaad, als x een willekeurig getal zou zijn, zeg bijvoorbeeld 42, dan zou $x' = 42' = 0$ als afgeleide van een constante.

  Mede daarom gebruiken we in deze cursus liefst de notatie $f : x \mapsto f(x)$ of $f : t \mapsto f(t)$ om zo duidelijk mogelijk aan te geven dat x dan wel t de variabele is in een functiedefinitie. De identieke functie $x \mapsto x$ krijgt jammer genoeg meestal geen vaste naam, soms gebruikt men $\mathrm{Id} : x \mapsto \mathrm{Id}(x) = x$ of $\mathbb{1} : x \mapsto \mathbb{1}(x) = x$. De meest voor de hand liggende naam echter is – enigszins verrassend misschien – gewoon x, dus $x : x \mapsto x(x) = x$. En het is van die identieke functie x dat de afgeleide 1 is: $x' = 1$. En met x als naam voor de functie geldt zelfs de gelijkheid van functies $f(x) = f \circ x = f \ldots$

- Hoewel wiskundige notatie bijna altijd erg nauwkeurig wordt gedefinieerd, is de notatie voor afgeleiden een warboel. We definieerden de afgeleide van de functie f in a als $f'(a)$, en dus niet als $f(a)'$. En de afgeleide functie noteerden we $f' : x \mapsto f'(x)$, en ook hier komt dus $f(x)'$ niet voor. En dat is zeer terecht, want technisch staat in $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ het symbool $f(x)$ voor de functiewaarde van f in x, en dus $f(x) \in \mathbb{R}$. En als $f(x) \in \mathbb{R}$, dan is $f(x)' = 0$ als afgeleide van een constante.

  Dus, men zou willen afspreken dat je steeds $f'(x)$ moet gebruiken, en nooit $f(x)'$. Maar, dat werkt erg slecht voor concrete functies: hoe moet je de afgeleide noteren van $x \mapsto x^2$? Zeer zeker is x'^2

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Definitie van afgeleide

of $(x')^2$ onzin, en dus gebruikt men $(x^2)'$ of soms zonder haakjes $x^{2\prime}$. Eigenlijk feitelijk is dat fout ... Toch wordt het algemeen gebruikt, ook in deze cursus.

- Hoewel wiskundige notatie bijna altijd correct en consistent is opgebouwd, lijkt de notatie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ voor afgeleiden verdacht veel op een breuk, maar is het toch geen breuk, want het is volgens de definitie een *limiet* van een breuk. Toch zet men bij integralen het symbool dx ook in de teller, en men geeft betekenis aan de uitdrukking
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) \iff df = f'(x)dx$$
De symbolen df en dx zijn dan differentialen, maar die behandelen we hier niet.

- De notatie met f' is handig als de variabele waarnaar wordt afgeleid duidelijk is uit de context. In de wiskunde is die variabele dikwijls x, maar letters als t, u of y komen ook erg dikwijls voor. Als verwarring mogelijk is, zoals bij $2x^2t + 5u$, dan gebruik je beter de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$).

- Als een functie geschreven wordt als $y = f(x)$, en men dus eigenlijk via $f : x \mapsto y = f(x)$ in plaats van $f : x \mapsto f(x)$ een generieke naam y geeft aan het beeld, dan wordt ook y' gebruikt voor de afgeleide. Dat is bijvoorbeeld bij differentiaalvergelijkingen erg gebruikelijk.

  En zoals hierboven x gebruikt werd als naam voor de identieke functie $x : x \mapsto x(x) = x$, kan je dan eigenlijk beter ook de letter y gebruiken in plaats van f voor de naam van de functie:
$$y : x \mapsto y = y(x) \text{ en } \frac{dy}{dx} = y' = y'(x)$$
  Jammer genoeg gebruiken verschillende handboeken en cursussen hier dikwijls ook verschillende notaties en conventies.

- In cursussen fysica schrijft men ook $\dot{y}$ voor de afgeleide van een functie $y = f(t)$ naar de tijd t.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Definitie differentiaal

Om technische redenen voeren we hier ook al het begrip *differentiaal* in. Een differentiaal is 'een wiskundig object' waarvan we hier *niet* uitleggen *wat* het precies is. Je kan het dus voorlopig beschouwen als een extra notatie. Later zal het erg handig blijken bij het bestuderen en berekenen van integralen. Ook in de fysica en vele andere toepassingen is het handig om vlot met differentialen te kunnen rekenen.

Definitie 5.2.1 (Pseudo-definitie differentiaal)**.**

De **differentiaal van** x is een nieuw symbool dx.

De **differentiaal van** f, genoteerd df, is het (formeel) product:

$$df \overset{\text{def}}{=} f'(x) \cdot dx$$

Voorbeeld 5.2.1.

$d(x^2+1) = 2x\,dx$ want $(x^2+1)' = 2x$.

Opmerking 5.2.1.

- De *afgeleide functie* van f, genoteerd als f' of $\frac{df}{dx}$, is in elk punt gedefinieerd als een limiet.

  De *differentiaal* van f, genoteerd df, is een nieuw soort object, waarbij het verband met afgeleiden wordt gegeven in de definitie: $df = f'(x)\,dx$.

  Je kan deze formule lezen als 'de differentiaal van f is gelijk aan de afgeleide van f vermenigvuldigd met het *symbool* dx'.

- Dikwijls beschouwt men $\frac{df}{dx}$ gewoon als een andere notatie voor f'. Via het begrip differentiaal kunnen we $\frac{df}{dx}$ echter ook *beschouwen als een breuk of een verhouding*, namelijk een breuk of verhouding van *differentialen*: in de definitie $df \overset{\text{def}}{=} f'(x) \cdot dx$ beide leden formeel delen door dx levert de gekende gelijkheid $\dfrac{df}{dx} = f'(x)$.

  De afgeleide is dus de *verhouding* van de twee *differentialen* df en dx. En deze verhouding is blijkbaar een functie in x, en wel precies de *afgeleide functie* van f. Als je differentialen zou interpreteren als 'verandering', dan geeft de afgeleide het verband tussen de verandering df van de functie f ten gevolge van een verandering dx in de onafhankelijke variabele x.

- Merk op dat sommige handboeken en cursussen *andere afspraken* maken, en dat volgens die afspraken $\frac{df}{dx}$ mogelijk *geen breuk is*. Dit is meestal het geval omdat die handboeken niet spreken over *differentialen*.

- De gekende rekenregels werken voor differentialen: $dx + dx = 2\,dx$, $dx - dx = 0$ en $0\,dx = 0$. Voorlopig *vermenigvuldigen* we wel geen differentialen met elkaar: $dx \cdot dx$ heeft *geen betekenis*.

- Merk op dat dx dus een totaal ander symbool is dan ax: bij dx denk je direct aan differentiaal, bij ax, kx en rx denk je direct aan een product van a, k of r met x. Uitzonderlijk kan d toch een getal voorstellen en dan is dx dus toch d keer x.

Voorbeeld 5.2.2. In de fysica worden functies dikwijls genoteerd als $y = y(x)$. Als de snelheid v een functie is van de tijd t schrijft men dat als $v = v(t)$. De differentiaal dt wordt in de fysica beschouwd als een oneindig kleine verandering van de tijd t, en dv als de (ook oneindig kleine) verandering van de snelheid. De *verhouding* tussen die oneindig kleine veranderingen is precies de afgeleide (en dus

5.2 Definitie differentiaal

versnelling):

$$v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Basisregels

De basisregels voor afgeleiden behandelen het afleiden van machten, sommen en scalaire veelvouden. Deze basisregels worden later aangevuld met de regels voor producten en quotiënten en voor samenstellingen.

We geven telkens drie versies van de basisregels: eerst met de notatie f', en vervolgens met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ en met differentialen. Het is belangrijk om na verloop van tijd met elke notatie vertrouwd te worden. Bij het begin van je studie kan je *zelf kiezen* welke notatie voor jou het meest duidelijk is. We vermelden hier niet de notatie Df die in vele handboeken van het secundair onderwijs voorkomt, maar als je er vertrouwd mee bent kan je die natuurlijk ook nog toevoegen.

Eigenschap 5.3.1 (Basisregels voor machten)**.**

De afgeleiden van de constante functie $x \mapsto c$ en de machtsfunctie $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn

	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(c)' = 0$
Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$
en met differentialen:	$\mathrm{d}x^r = rx^{r-1}\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}c = 0$

Merk op dat de machtregel voor *alle* reële exponenten geldt, en niet alleen voor natuurlijke getallen.

Voorbeeld 5.3.1.

1. $(1)' = 0$
2. $(\pi^2)' = 0$
3. $(x)' = 1$
4. $(x^2)' = 2x$
5. $(x^3)' = 3x^2$
6. $(x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
7. $(x^{-1/2})' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$
8. $(x^{n+42})' = (n+42)x^{n+41}$
9. $(x^\pi)' = \pi x^{\pi-1}$

Opmerking 5.3.1.

De afgeleide van een **constante functie** $x \mapsto c$ is de nulfunctie $x \mapsto 0$: $\left(\sqrt{2}\right)' = 0$

De afgeleide van de **identieke functie** $x \mapsto x$ is de constante functie $x \mapsto 1$: $x' = 1$.
Inderdaad, dit volgt uit de formule $(x^r)' = rx^{r-1}$ voor $r = 1$: $x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$.

De afgeleide van een macht brengt een **kopie van de exponent naar voor** en **vermindert de exponent met** 1: $(x^5)' = 5x^4$ en $(x^{-2})' = -2x^{-3}$.

Oefening 5.3.1. Bereken volgende afgeleiden:

1. $(x^{3/2})' = \ldots\ldots$
2. $(x^{2/3})' = \ldots\ldots$
3. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \ldots\ldots$

Er zijn ook eenvoudige regels voor de som en scalaire veelvouden:

Eigenschap 5.3.2 (Basisregels voor som en scalair veelvoud)**.**

De afgeleiden van som $f + g$ en scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g en $c \in \mathbb{R}$ zijn

5.3 Basisregels

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$

en met differentialen: $\mathrm{d}(cf) = c\mathrm{d}f \qquad \mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$

Oefening 5.3.2.

1. $(7x)' = \ldots\ldots$
2. $(7x^2)' = \ldots\ldots$
3. $(7x+1)' = \ldots\ldots$
4. $(7x^2+7x)' = \ldots\ldots$
5. $(2(x+1))' = \ldots\ldots$
6. $(x(x+1))' = \ldots\ldots$

Opmerking 5.3.2.

De afgeleide van een scalair veelvoud is het scalair veelvoud van de afgeleide: $(5x)' = 5x' = 5$.
of ook: **bij afleiden mag je constanten buiten brengen**: $(cf)' = cf'$.

De afgeleide van een som is de som van de afgeleiden: $(7+5x)' = 7' + (5x)' = 0 + 5 = 5$.
of ook: **afgeleiden mag je term per term berekenen**: $(f+g)' = f' + g'$.

Deze twee regels zijn samen equivalent met volgende regel:

$$(af+bg)' = af' + bg' \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af+bg) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g \qquad \mathrm{d}(af+bg) = a\mathrm{d}f + b\mathrm{d}g$$

of: **de afgeleide van een lineaire combinatie is de lineaire combinatie van de afgeleiden**.

Met deze beperkte set van regels kunnen de afgeleiden van *alle* veeltermen berekend worden.

Oefening 5.3.3. Bereken volgende afgeleiden van veeltermen:

1. $\left(1+x+x^2\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(1+x+x^2+x^3\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(x+2x^2+3x^3+4x^4\right)' = \ldots\ldots$
5. $\left(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)' = \ldots\ldots$
6. $\left(\sqrt{\pi}+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 5.3.4. Bereken volgende afgeleiden

1. $\left(4x^2+8x+9\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(4x^2+8x+3^2\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left((2x)^2+8x+3^2\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(4x(x+2)+3^2\right)' = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen (met $a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$).

Eigenschap 5.4.1 (Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies)**.**

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\ln x)' = 1/x \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \ln a$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}e^x = e^x \,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}a^x = a^x \ln a \,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x} = x^{-1}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\log_a x) = \frac{\mathrm{d}x}{x \ln a}$$

Opmerking 5.4.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van e^x is terug e^x. Dit is een erg handige en belangrijke eigenschap van de functie e^x en ze kan beschouwd worden als de *definitie* van het getal e. Er is een unieke exponentiële functie $x \mapsto a^x$ waarvoor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x$. Het grondtal van deze functie is per definitie e.
- de afgeleide van $\ln x$ is $1/x$. Het lijkt wat merkwaardig dat in de mooie reeks van afgeleiden-van-een-macht-is-terug-een-macht (namelijk $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^r = r x^{r-1}$) ineens een vreemde eend opduikt: ook de afgeleide van $\ln x$ blijkt een macht te zijn (namelijk x^{-1}).
- de afgeleide van *willekeurige* exponentiële of logaritmische functies is een *herschaling* (met een factor $\ln a$) van de afgeleide van e^x en $\ln x$.

Voorbeeld 5.4.1.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = 7^x \ln 7$. Verwar dit niet met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) = 7x^6$

Oefening 5.4.1. Bereken de afgeleiden van volgende exponentiële en logaritmische functies.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^x) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25 \cdot 7^x) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((a+7)^x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^2) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^r) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen.

Eigenschap 5.5.1 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies)**.**

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(\text{bgsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgcos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgtan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

Eigenschap 5.5.2 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies)**.**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\text{bgsin } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\text{bgcos } x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\text{bgtan } x = \frac{1}{1+x^2}$$

of met differentialen:

Eigenschap 5.5.3 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies)**.**

$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\tan x) = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \qquad \mathrm{d}(\cot x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$$

$$\mathrm{d}(\text{bgsin } x) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\text{bgcos } x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\text{bgtan } x) = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Opmerking 5.5.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van de sinus is de cosinus en de afgeleide van de cosinus is *min* de sinus.
- omdat $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ kan men ook schrijven dat

  $$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

  en dat is soms handig omdat het de afgeleide van de tangens terug schrijft in functie van een tangens.
- we zullen verder zien hoe de formules voor tangens en cotangens kunnen worden berekend

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Product- en quotiëntregel

We tonen hoe je *producten en quotiënten* van functies kan afleiden. Later volgt nog een regel over de *samenstelling* van functies. Met deze technieken kunnen dan de afgeleiden van ongeveer alle afleidbare functies die in de praktijk voorkomen worden berekend. We geven de regels in de drie notaties.

Eigenschap 5.6.1 (Productregel en quotiëntregel)**.**

De afgeleide van het product $f \cdot g$ en het quotiënt $\frac{f}{g}$ van twee afleidbare functies f en g wordt gegeven door:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \textbf{(productregel)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \quad \textbf{(productregel)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}(f \cdot g) = (\mathrm{d}f) \cdot g + f \cdot (\mathrm{d}g) \quad \textbf{(productregel)} \qquad \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\mathrm{d}f) \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Voorbeeld 5.6.1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x^4 \ln x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x^4 en $\ln x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4 \cdot \ln x\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4\right) \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) \\ &= 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = x^3(4 \ln x + 1)\,.\end{aligned}$$

Voorbeeld 5.6.2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{2x+3}{4x+5}$.

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $2x+3$ en $4x+5$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x+3}{4x+5} &= \frac{2(4x+5) - 4(2x+3)}{(4x+5)^2} \\ &= \frac{8x + 10 - 8x - 12}{(4x+5)^2} = \frac{-2}{(4x+5)^2}\end{aligned}$$

Voorbeeld 5.6.3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{\ln x}{\sin x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Product- en quotiëntregel

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln x}{\sin x}\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)\cdot \sin x - \ln x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\frac{\sin x}{x} - \ln x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{x\,\sin x} - \frac{\ln x\,\cos x}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Oefening 5.6.1.

1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (x^3+27)(x^4-1)$
2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$
3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (x^{42}+x^{13}+1)(x^{2020}-1)$

Opmerking 5.6.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- om de afgeleide van een *product* te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de eerste factor, en je vermenigvuldigt die afgeleide met de tweede factor. Daarbij tel je de afgeleide van de tweede factor vermenigvuldigd met de eerste factor op.

  Dus: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\cdot \sin x) = (2x)\cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x = x(2\sin x + x\cos x)$

- om de afgeleide van een *quotiënt* te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de teller, en vermenigvuldigt die afgeleide met de noemer. Daarvan trek je de afgeleide van noemer vermenigvuldigd met de teller af. Vervolgens deel je het verschil door het kwadraat van de noemer.

  Dus: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{x^2}{\sin x} = \dfrac{(2x)\cdot \sin x - x^2\cdot(\cos x)}{\sin^2 x} = \dfrac{x(2\sin x - x\cos x)}{\sin^2 x}$

- de formule voor product kan je naar keuze schrijven en begrijpen als:

  $$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad \text{of} \quad (f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f$$

  Dus:

  (*afgeleide* eerste factor) maal (tweede factor) plus (eerste factor) maal (*afgeleide* tweede factor)
  dan wel
  (*afgeleide* eerste factor) maal (tweede factor) plus (*afgeleide* tweede factor) maal (eerste factor)

Eigenschap 5.6.2. De formule voor product kan je veralgemenen naar een product van meerdere factoren:

$$\begin{aligned}(f\cdot g\cdot h)' &= (f\cdot(g\cdot h))' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g\cdot h)' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g'\cdot h + g\cdot h') \\ &= f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Product- en quotiëntregel

Dus: leid *elke* factor af, vermenigvuldig die afgeleide met de andere factoren en tel al de producten op.

Voorbeeld 5.6.4. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x \cdot \ln x \cdot \sin x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x,$\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x \cdot \sin x) &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x)(\ln x \cdot \sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x)(x \cdot \sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x)(x \cdot \ln x) \\ &= \ln x \sin x + \sin x + x \ln x \cos x.\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.7 Kettingregel

De zogenaamde *kettingregel* laat toe om de afgeleide te berekenen van *samengestelde* functies.

Eigenschap 5.7.1 (Kettingregel)**.**

De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is gelijk aan:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

Dezelfde kettingregel kan ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

of met differentialen:

$$d(f(g(x))) = f'(g(x))\, dg(x) = f'(g(x))\, g'(x)\, dx \quad \textbf{(kettingregel)}.$$

Opmerking 5.7.1. We hebben in de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie de afgeleide van f toch genoteerd als f' om de notatie eenvoudig te houden. De kettingregel kan ook geformuleerd worden als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}(f(g)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$$

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 5.7.1.

(a) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (5x+2)^2$:

Merk allereerst op dat je in dit voorbeeld de kettingregel niet *moet* gebruiken. Je kan ook het kwadraat eerst uitrekenen:

$$((5x+2)^2)' = (25x^2 + 20x + 4)' = 50x + 20$$

Je *mag* de kettingregel wel gebruiken en je vindt uiteraard hetzelfde resultaat.

We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (5x+2)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto 5x+2$$

dan is $f(g(x)) = f(5x+2) = (5x+2)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto 5$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{5x+2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{5}^{g'(x)} = 10(5x+2) = 50x+20$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.7 Kettingregel

waarbij $f'(g(x)) = f'(5x+2) = 2(5x+2)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((5x+2)^2)' = 2(5x+2)\cdot 5 = 10(5x+2)$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 2(5x+2)\cdot 5.$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(5x+2)^2 = 2(5x+2)\,d(5x+2) = 2(5x+2)5\,dx = 10(5x+2)\,dx$$

(b) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin^2 x$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder het kwadraat met haakjes: $x \mapsto (\sin x)^2$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (\sin x)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sin x$$

dan is $f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto \cos x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{\sin x}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{\sin x}^{g(x)})}_{f'(g(x))}\cdot \overbrace{\cos x}^{g'(x)} = 2\sin x\cos x$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(\sin x) = 2(\sin x)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((\sin x)^2)' = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^2 = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x)^2 = 2(\sin x)\,d(\sin x) = 2(\sin x)\cos x\,dx = 2\sin x\cos x\,dx$$

(c) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin x^2$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder haakjes rond het kwadraat: $x \mapsto \sin(x^2)$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

CC BY-NC-SA 4.0

5.7 Kettingregel

- De functie $x \mapsto \sin(x^2)$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto \sin x$$
$$g : x \mapsto x^2$$

dan is $f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$. Omdat

$$f' : x \mapsto \cos x$$
$$g' : x \mapsto 2x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{\sin\big(\overbrace{x^2}^{g(x)}\big)}_{f(g(x))} \Big)' = \underbrace{\cos\big(\overbrace{x^2}^{g(x)}\big)}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{2x}^{g'(x)} = 2x\cos x^2$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(x^2) = \cos(x^2)$

Je *moet* de samenstellende functies geen namen geven. Je kan ook sneller rekenen als volgt:

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Je kan ook de notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken, dat geeft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x^2) = \cos x^2 d(x^2) = \cos x^2\, 2x dx$$

Oefening 5.7.1.

1. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5^{x^2} = \ldots\ldots$

2. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie

$$f(x) = \ln g(x)$$

in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

Opmerking 5.7.2. We begrijpen deze kettingregel als volgt:

- Om de afgeleide van een samenstelling $f(g(x))$ te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de *buitenste* functie f en die evalueer je in de enige waarde waar dat betekenis heeft: de functiewaarde van de binnenste functie g. Vervolgens vermenigvuldig je dat resultaat met de afgeleide van de binnenste functie. Dus: afleiden doe je *van buiten naar binnen*, stap per stap, en je vermenigvuldigt de tussenresultaten met elkaar.
- Indien je nog niet zo vertrouwd bent met de kettingregel kan je de samenstellende functies f en g expliciet opschrijven, of je kan werken met extra variabelen (*substitutie*). We geven een

CC BY-NC-SA 4.0

5.7 Kettingregel

voorbeeld met extra variabelen in de notatie met differentialen:

$$\mathrm{d}\sin(x^2) \overset{x^2=u}{=} \mathrm{d}\sin(u) = \cos(u)\mathrm{d}u \overset{u=x^2}{=} \cos(x^2)\mathrm{d}x^2 = \cos(x^2)\cdot 2x\mathrm{d}x = 2x\cos x^2\mathrm{d}x$$

en

$$\mathrm{d}(\sin^2 x) = \mathrm{d}(\sin x)^2 \overset{\sin x=v}{=} \mathrm{d}v^2 = 2v\,\mathrm{d}v \overset{v=\sin x}{=} 2\sin x\cdot \mathrm{d}\sin x = 2\sin x\cos x\mathrm{d}x$$

Zodra je vertrouwd bent met de kettingregel is het niet meer nodig om de extra variabele expliciet op te schrijven.

Eigenschap 5.7.2. De *ketting*regel berekent de afgeleide van een ketting of *keten* van samenstellingen:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

Dus je leidt de samenstellende functies af *van buiten naar binnen* en vermenigvuldigt de afgeleiden.

Voorbeeld 5.7.2. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2-7)$.

We gebruiken weer de kettingregel, maar nu hebben we een samenstelling van drie functies: $f(x)=x^3$, $g(x)=\cos x$ en $h(x)=4x^2-7$.

$$f(g(h(x))) = f(g(4x^2-7)) = f(\cos(4x^2-7)) = \cos^3(4x^2-7)$$

In de eerste stap van de berekening gebruiken we:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x)))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(g(h(x)))]$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^3\left(4x^2-7\right)\right] &= 3\left(\cos\left(4x^2-7\right)\right)^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos\left(4x^2-7\right)\right]\\ &= 3\cos^2\left(4x^2-7\right)\left(-\sin\left(4x^2-7\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x^2-7\right]\right)\\ &= -3\cos^2\left(4x^2-7\right)\sin\left(4x^2-7\right)\cdot 8x\\ &= -24x\sin\left(4x^2-7\right)\cos^2\left(4x^2-7\right).\end{aligned}$$

Oefening 5.7.2.

1. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\sin^3(e^{x^2})} = \ldots\ldots$

Opmerking 5.7.3.

De Leibniz notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ is bijzonder handig als x op zijn beurt afhankelijk wordt van een andere variabele (bijvoorbeeld van de tijd, of bij een substitutie) en wordt dan ook vaak gebruikt in de fysica.

Stel dat bij een functie $x\mapsto f(x)$ blijkt dat x eigenlijk afhangt van t. Dan is x dus zelf een functie van t, dus $x : t\mapsto x(t)$. Dan wordt natuurlijk ook f een functie van t, namelijk $t\mapsto f(x(t))$. We

CC BY-NC-SA 4.0

5.7 Kettingregel

krijgen dan volgende functies:

$$f : x \mapsto f(x)$$
$$x : t \mapsto x(t)$$
$$f \circ x : t \mapsto f(x(t))$$

en die functies hebben respectievelijk als afgeleide

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f : x \mapsto f'(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x : t \mapsto x'(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ x) : t \mapsto (f \circ x)'(t) \overset{\text{kettingregel}}{=} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

Een concreet voorbeeld: je rijdt met de auto van $A_{ntwerpen}$ naar B_{russel}. Je schrijft de afgelegde afstand in kilometer als x en je noemt $f(x)$ het aantal liter benzine in je tank na x km. Veronderstel dat je vertrekt met een volle tank van 50 liter en je auto 5 liter verbruikt per honderd kilometer, dan is

$$f(x) = 50 - \frac{5}{100}x.$$

Veronderstel dat je aan een constante snelheid van 75 km/u rijdt, dan is de afgelegde weg x na t uur dus $x(t) = 75 \cdot t$ km. De samengestelde functie $f(x(t))$ is dan

$$f(x(t)) = 50 - \frac{5}{100}x(t) = 50 - \frac{5}{100} \cdot 75 \cdot t = 50 - \frac{75 \cdot 5}{100}t$$

en die formule drukt uit hoeveel benzine je nog hebt na t uur, in plaats van na x kilometer.

De kettingregel zegt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = f'(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$

of anders geschreven:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)}$$

Als we schrijven dat $x = x(t)$ en $y = f(x)$, dus ook $y = f(x(t))$ wordt dat soms korter genoteerd als:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

We kunnen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$$

ook met gebruik van andere letters formuleren. Bijvoorbeeld met functie $u(x)$ in plaats van $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(u(x))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(u(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)$$

of met de functies u en v in plaats van f en x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(v(x))) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}(v(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x)$$

maar het betekent natuurlijk allemaal hetzelfde.

CC BY-NC-SA 4.0

5.7 Kettingregel

Opmerking 5.7.4.

Je kan de regels voor het afleiden van producten, quotiënten en samenstellingen als volgt samenvatten:

- je *begint* altijd direct de eerste of buitenste functie af te leiden
- daarna werk je als volgt verder:
  - bij de *vermenigvuldiging* $(f \cdot g)'$
    - je maakt het product $f' \cdot g$ van de afgeleide van de eerste factor met de andere factor(en),
    - je doet vervolgens hetzelfde voor de andere factor(en), dus $g' \cdot f$,
    - en je maakt de *som* van al die resultaten: $f' \cdot g + g' \cdot f$
  - bij de *deling* $\left(\frac{f}{g}\right)'$
    - je maakt het product $f' \cdot g$ van de afgeleide van de teller met de noemer,
    - je doet vervolgens hetzelfde voor noemer (dus afgeleide noemer maal teller, of $g' \cdot f$),
    - maar je maakt het *verschil* van die twee resultaten: $f' \cdot g - g' \cdot f$
    - en je deelt alles door het *kwadraat van de noemer*: $\frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
  - bij de *samenstelling* $(f \circ g)'$
    - je evalueert de afgeleide van de buitenste functie in het correcte punt: $f'(g(x))$,
    - je doet vervolgens hetzelfde voor binnenste functie(s): $g'(x)$,
    - en je maakt het *product* van al die resultaten: $f'(g(x)) \cdot g'(x)$

De productregel en kettingregel kunnen op die manier ook erg eenvoudig worden begrepen voor meerdere functies:

- $(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + g' \cdot f \cdot h + h' \cdot f \cdot g$
- $(f \circ g \circ h)' = f'(g(h)) \cdot g'(h) \cdot h'$
- $(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$
- $(f(g(h(k(x)))))' = f'(g(h(k(x)))) \cdot g'(h(k(x))) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x)$

CC BY-NC-SA 4.0

5.8 Hogere orde afgeleiden

Omdat de afgeleide van een functie $f : x \mapsto f(x)$ opnieuw een functie $f' : x \mapsto f'(x)$ is, houdt niets ons tegen om te proberen ook f' af te leiden.

Definitie 5.8.1 (Hogere orde afgeleiden)**.**

Als voor een afleidbare reële functie f ook de afgeleide functie f' opnieuw afleidbaar is, dan is de **tweede afgeleide** van f, genoteerd $f'' = \dfrac{d^2 f}{dx^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)$ de afgeleide van de afgeleide functie f'.

Opmerking 5.8.1.

Analoog kan je ook de n-de afgeleide ($n \in \mathbb{N}_0$) van een functie f definiëren. Die noteren we als $f^{(n)}$ of $\dfrac{d^n f}{dx^n}$. Merk op dat de haakjes *niet* mogen worden weggelaten in $f^{(2)}$, want anders zou voor bijvoorbeeld de sinus verwarring mogelijk zijn tussen het kwadraat $\sin^2(x)$ en de tweede afgeleide $\sin^{(2)}(x)$.

Voorbeeld 5.8.1.

Bereken de tweede afgeleide $\dfrac{d^2}{dx^2}(\mathrm{bgsin}\, x + x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathrm{bgsin}\, x + x\right] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\mathrm{bgsin}\, x + x\right]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right] + \frac{d}{dx}[1] \\
&= -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-3/2} \cdot \frac{d}{dx}\left[1-x^2\right] + 0 \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,(-2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.
\end{aligned}$$

Oefening 5.8.1.

1. Bereken de derde afgeleide van $f(x) = 2\,e^{x^2-1} - \sin 3x + \dfrac{x^3}{2} + 4x^2 - 6x - \dfrac{12}{5}$.

Oplossing: … …

CC BY-NC-SA 4.0

5.8.A Basisoefeningen afgeleiden

Oefening 5.8.2. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\left(x^{1/3}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(x^{-1/3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(x^4\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(9x^9\right)' = \ldots\ldots$
5. $(x^4 - 4x)' = \ldots\ldots$
6. $(x + \sin x)' = \ldots\ldots$
7. $(x - \cos x)' = \ldots\ldots$
8. $(7e^x)' = \ldots\ldots$
9. $(e^{7x})' = \ldots\ldots$
10. $(\sin x + e^x)' = \ldots\ldots$

Oefening 5.8.3. Bereken de afgeleide van volgende functies op twee manieren:

1. $(x^2 \cdot x^2)' = \ldots\ldots$
2. $(3x + 5)^{2\prime} = \ldots\ldots$

Oefening 5.8.4. Bereken de afgeleide van volgende rationale functies.

1. $\left(\dfrac{x-4}{x}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(\dfrac{x}{x+3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(\dfrac{1}{x+5}\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(\dfrac{4-x}{3-x}\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 5.8.5. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 \cos t) = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{-1}{t^2}\right) = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{3t-1}{2t+2}\right) = \ldots\ldots$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(4x+5) = \ldots\ldots$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \ldots\ldots$
7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{4x^3+1}{3x} = \ldots\ldots$
8. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$
9. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(-8x^2-1) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.8.A Basisoefeningen afgeleiden

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3(3x) = \ldots\ldots$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-7x+8} = \ldots\ldots$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t\,\sin(t^2)) = \ldots\ldots$

13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t^2) = \ldots\ldots$

14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2+3)^4} = \ldots\ldots$

Oefening 5.8.6. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $(2e^x)' = \ldots\ldots$

2. $(2e^{-x})' = \ldots\ldots$

3. $(e^{2x})' = \ldots\ldots$

4. $(e^{x+2})' = \ldots\ldots$

5. $(e^{2x+2})' = \ldots\ldots$

6. $(e^{x^2})' = \ldots\ldots$

7. $(e^{2x^2+3})' = \ldots\ldots$

8. $(e^{x^2+2x+3})' = \ldots\ldots e^{x^2+2x+3}$

9. $(e^{1-x^2})' = \ldots\ldots$

10. $(2e^{\sqrt{x}})' = \ldots\ldots$

Oefening 5.8.7. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{-2} = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3-2\sqrt{x}+5x-2) = \ldots\ldots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5-x^4) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2x^{-n} = \ldots\ldots$

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1+x)(x+2)\big) = \ldots\ldots$

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((x+2)^3e^x\big) = \ldots\ldots$

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t^{-3}(t+5)^7\big) = \ldots\ldots$

8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sin t^2} = \ldots\ldots$

9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{4}{1+2\cos\theta}\right) = \ldots\ldots$

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^{\sin x+2x} = \ldots\ldots$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sqrt{1-2\theta} = \ldots\ldots$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+\tan x} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.8.A Basisoefeningen afgeleiden

13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \ldots\ldots$

14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(2\theta^{1/2} + \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}\right) = \ldots\ldots$

15. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin(3x)\cdot\cos(2x)\big) = \ldots\ldots$

16. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{2x-1} = \ldots\ldots$

Oefening 5.8.8. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie f in termen van g en van de afgeleide van de functie g voor volgende functies f:

1. Als $f(x) = 2g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

2. Als $f(x) = (g(x))^2$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

3. Als $f(x) = g(x^2)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

4. Als $f(x) = \mathrm{bgtan}\, g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

5. Als $f(x) = g(3x) + 3g(x) + (g(x))^3 + g(x) + g(3) + xg(3) + g(3^x) + 3^{g(x)}$,
dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 5.8.9. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ constanten. Bepaal dan de afgeleide van onderstaande functies.

1. Als $s(t) = a + b\sin(bt - c)$, dan is $s'(t) = \ldots\ldots$

2. Als $s(\theta) = ab\theta + c\theta^2$, dan is $s'(\theta) = \ldots\ldots$

3. Als $s(x) = b[1 - \cos(a^2x)]$, dan is $s'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 5.8.10. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het gegeven punt.

1. $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1. $\ldots\ldots$

2. $f(x) = 1 - \cos x$ in het punt met als x-coördinaat $\frac{\pi}{2}$. $\ldots\ldots$

3. $f(x) = 1 - x^2$ in het punt met als x-coördinaat 2. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.8.B Oefeningen hogere orde afgeleiden

Oefening 5.8.11. Bereken de tweede afgeleide van volgende functies:

(a) $f(x) = \ln(x^2)$. $f''(x) = \ldots\ldots$

(b) $f(\theta) = \theta\cos\theta$ $f''(\theta) = \ldots\ldots$

(c) $f(t) = \sin(t^4)$ $f''(t) = \ldots\ldots$

Oefening 5.8.12. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{d^2}{dx^2}x^3 = \ldots\ldots$
2. $\frac{d^3}{dx^3}6x^3 = \ldots\ldots$
3. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}(314x^9 + x^5 + \frac{\pi}{2}) = \ldots\ldots$
4. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}314^{15} = \ldots\ldots$
5. $\frac{d}{dx}\sin x = \ldots\ldots$
6. $\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \ldots\ldots$
7. $\frac{d^3}{dx^3}\sin x = \ldots\ldots$
8. $\frac{d^4}{dx^4}\sin x = \ldots\ldots$
9. $\frac{d^{12}}{dx^{12}}\sin x = \ldots\ldots$
10. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}\sin x = \ldots\ldots$
11. $\frac{d^{120}}{dx^{120}}\sin x = \ldots\ldots$
12. $\frac{d^n}{dx^n}x^n = \ldots\ldots$
13. $\frac{d}{dx}x^{n+1} = \ldots\ldots$
14. $\frac{d^n}{dx^n}x^{n+1} = \ldots\ldots$
15. $\frac{d}{dx}x^{n!} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Groeimodellen

Wetenschappers bestuderen grootheden die veranderen in de tijd zoals temperatuur, snelheid, winst, consumptieprijzen en bevolkingsaantallen. We gebruiken hier de term **groeimodel** voor twee types erg *regelmatig* groeiende grootheden. Het woord 'groeien' moet niet te letterlijk worden genomen: het kan ook 'krimpen' of 'afnemen' betekenen: dan spreken we van *negatieve groei* of *verval*. In de praktijk groeien grootheden ook veel onregelmatiger en dat kan met behulp van de wiskundige techniek van afgeleiden van functies worden bestudeerd.

In het **lineaire groeimodel** wordt per tijdseenheid een constante term *opgeteld* bij de grootheid, in het **exponentieel groeimodel** wordt de grootheid per tijdseenheid telkens met een constante factor *vermenigvuldigd* (de zogenaamde *groeifactor*).

Definitie 6.1.1 (Pseudo-definitie van lineaire en exponentiële groei)**.**

Een grootheid groeit **lineair** als er na elke tijdseenheid een vaste waarde wordt *bijgeteld*. Deze waarde noemen we de **groeisnelheid**.

Een grootheid groeit **exponentieel** als ze na elke tijdseenheid met een vaste waarde wordt *vermenigvuldigd*. Deze waarde noemen we de **groeifactor**.

Merk alvast op dat de waarde die telkens wordt opgeteld ook negatief kan zijn, en de waarde waarmee wordt vermenigvuldigd kleiner kan zijn dan 1. In beide gevallen spreken we over **negatieve groei**.

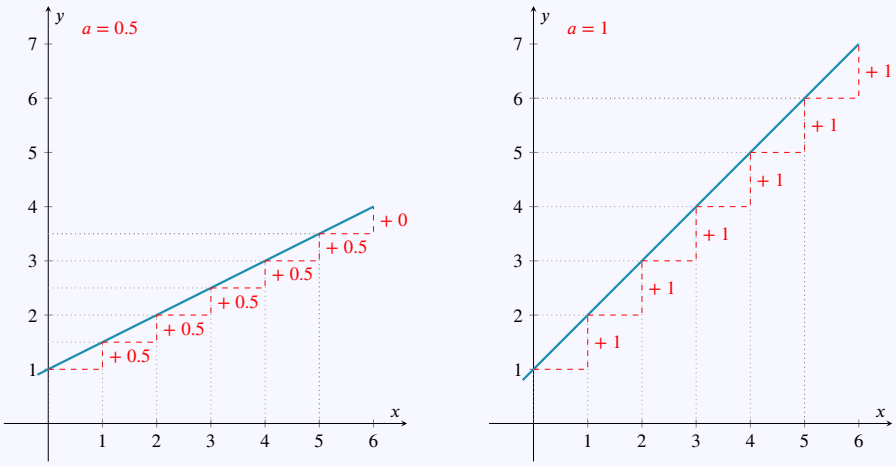
We onderzoeken eerst wat lineaire en exponentiële groei betekenen voor *reële functies*.

Voorbeeld 6.1.1 (Lineaire groei)**.**

Voor een reële functie $f : x \mapsto f(x)$ betekent lineaire groei volgens de definitie dat telkens wanneer x met 1 toeneemt, de functiewaarde $f(x)$ ook met een vaste waarde moet toenemen. Als we die waarde a noemen, betekent dat dus dat $f(x+1) = f(x) + a$. Als we de functiewaarde voor $x = 0$ bijvoorbeeld b noemen, dan weten we dat $f(0) = b$, en dus

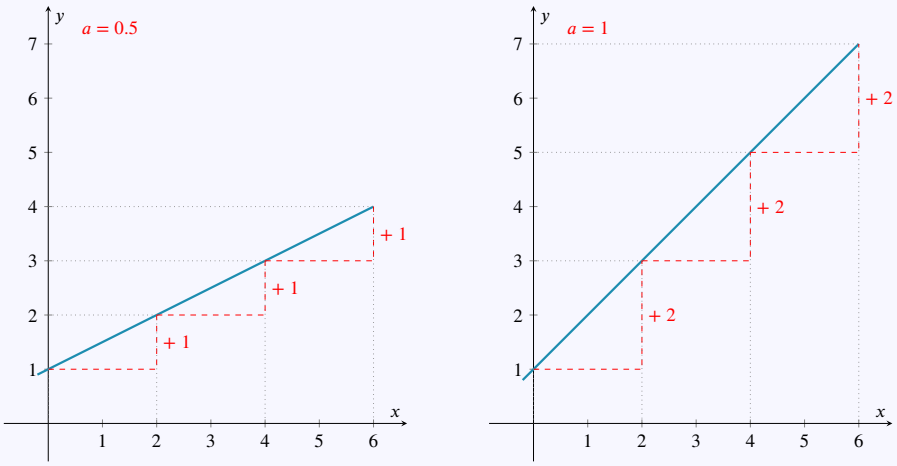
$$\begin{aligned} f(1) &= f(0+1) = f(0) + a = b + a \\ f(2) &= f(1+1) = f(1) + a = (b+a) + a = b + 2a \\ f(3) &= f(2+1) = f(2) + a = (b+2a) + a = b + 3a \\ f(4) &= f(3+1) = f(3) + a = (b+3a) + a = b + 4a. \end{aligned}$$

Op de grafiek van f ziet dit er als volgt uit:



Merk op dat ook steeds $f(x+2) = f((x+1)+1) = f(x+1) + a = f(x) + a + a = f(x) + 2a$:

6.1 Groeimodellen

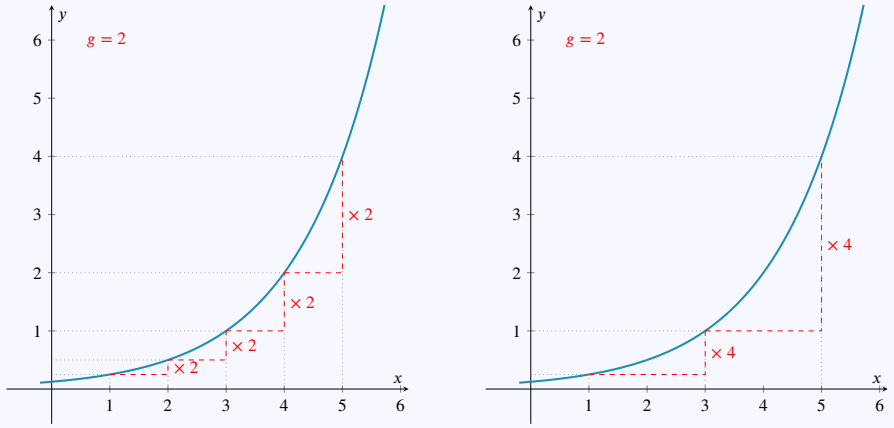


Voorbeeld 6.1.2 (Exponentiële groei)**.**

Voor een reële functie $f : x \mapsto f(x)$ betekent exponentiële groei volgens de definitie dat telkens wanneer x met 1 toeneemt, de functiewaarde $f(x)$ met een vaste waarde moet vermenigvuldigd worden. Als we die waarde g noemen, betekent dat dus dat $f(x+1) = gf(x)$. Als we de functiewaarde voor $x = 0$ bijvoorbeeld b noemen, dan weten we dat $f(0) = b$, en dus

$$f(1) = f(0+1) = f(0) \cdot g = b \cdot g$$
$$f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot g = (b \cdot g) \cdot g = b \cdot g^2$$
$$f(3) = f(2+1) = f(2) \cdot g = (b \cdot g^2) \cdot g = b \cdot g^3$$
$$f(4) = f(3+1) = f(3) \cdot g = (b \cdot g^3) \cdot g = b \cdot g^4.$$

Op de grafiek van f ziet dit er als volgt uit:



Merk op dat dus ook geldt dat $f(x+2) = f((x+1)+1) = gf(x+1) = g^2 f(x)$.

We gebruiken de letter a voor de groeisnelheid bij lineaire groei en de letter g voor de groeifactor bij exponentiële groei.

Eigenschap 6.1.1.

Het functievoorschrift van een reële functie met *lineaire groei* met **beginwaarde** b en **groeisnelheid**

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Groeimodellen

a is

$$f(t) = at + b.$$

Het functievoorschrift van een reële functie met *exponentiële groei* met **beginwaarde** b en **groeifactor** g is

$$f(t) = b \cdot g^t.$$

Hierbij veronderstellen we $a \neq 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Opmerking 6.1.1.

- De groeifactor wordt soms ook met de letter a genoteerd, of de variabele van de functie met de letter x. Dan krijg je als functievoorschrift

$$f(t) = b \cdot a^t \text{ of } f(x) = b \cdot a^x.$$

- Zowel voor lineaire als voor exponentiële groei is b de *begin*waarde: voor $t = 0$ is telkens $f(0) = b$.

Oefening 6.1.1.

1. Teken de grafiek van een functie met lineaire groei met beginwaarde 4 waarbij de groeisnelheid 0 zou zijn. Teken ook de grafiek van een functie met exponentiële groei met beginwaarde 4 waarbij de groeifactor 1 zou zijn.

Besluit: De groeisnelheid a bij lineaire groei moet verschillend zijn van 0, en de groeifactor g bij exponentiële groei moet verschillend zijn van 1, want anders krijgen we *constante* functies. Een constante functie noemen we *geen* lineaire of exponentiële groei.

Eigenschap 6.1.2.

- Als bij lineaire groei een functie over één tijdseenheid groeit met a, dan groeit ze met $n \cdot a$ over n tijdseenheden, want

$$f(t+n) = a(t+n) + b = at + an + b = f(t) + an$$

- Als bij exponentiële groei een functie over één tijdseenheid groeit met een groeifactor g, dan groeit ze met een factor g^n over n tijdseenheden, want

$$f(t+n) = b \cdot g^{t+n} = b \cdot g^t \cdot g^n = g^n \cdot f(t).$$

- Een lineaire groeifunctie stijgt als $a > 0$ en daalt als $a < 0$.
- Een exponentiële groeifunctie stijgt als $g > 1$ en daalt als $g < 1$.

Oefening 6.1.2 (Lineaire groei: constante toevoer van zand)**.**

In een zandgroeve voert een lopende band aan een constant debiet van 3/5 ton per kwartier nieuw zand toe. Stel dat de band om 8 uur 's morgens begint een bestaande zandhoop van 2 ton zand aan te vullen volgens dit proces. Om hoe laat zal de zandhoop dan 10 ton zand bevatten?

We vertalen deze gegevens wiskundig als volgt: we meten de tijd t in eenheden van één kwartier en laten $t = 0$ overeenkomen met 8 uur 's morgens. De hoeveelheid zand op de hoop (in ton) op het

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Groeimodellen

ogenblik t geven we aan met $f(t)$.

Zo komen we tot volgend schema:

t kwartier	0	1	2	3	4	⋯	n
$f(t)$ ton	2	$2+\frac{3}{5}$	$2+2\cdot\frac{3}{5}$	$2+3\cdot\frac{3}{5}$	$2+4\cdot\frac{3}{5}$	⋯	$2+n\cdot\frac{3}{5}$
		$+\frac{3}{5}$		$+\frac{3}{5}$			

We stellen vast dat voor elk natuurlijk getal n geldt

$$f(n) = \frac{3}{5}\,n + 2.$$

De tijd verloopt niet in sprongen van een kwartier, en we kunnen aannemen dat ook voor elk reëel getal t geldt

$$f(t) = \frac{3}{5}\,t + 2.$$

1. Teken de grafiek van deze functie f en geef de betekenis van de grootheden 2 en $\frac{3}{5}$ in de grafiek aan.

2. Verklaar de uitdrukking "lineaire groei".

3. Bereken hoe laat de zandhoop 10 ton zal bevatten.

Oefening 6.1.3 (Exponentiële groei: bacteriën)**.**

Een populatie bacteriën ontwikkelt zich in een kweekschaal. Stel dat het aantal bacteriën in het schaaltje elke 25 minuten verdubbelt en stel dat er in de beginsituatie vierduizend bacteriën aanwezig zijn. Hoe verloopt de groei van deze populatie bacteriën?

Om deze gegevens wiskundig te vertalen maken we volgende afspraken:

- We meten de tijd t in eenheden van 25 minuten.
- $t = 0$ komt overeen met het begin van onze observaties.
- De hoeveelheid bacteriën op het ogenblik t drukken we uit in duizendtallen en geven we aan met $f(t)$.

Zo komen we tot volgend schema:

t (per 25 min.)	0	1	2	3	4	⋯	n
$f(t)$ bacteriën (per 10^3)	4	$4\cdot 2$	$4\cdot 2^2$	$4\cdot 2^3$	$4\cdot 2^4$	⋯	$4\cdot 2^n$
		$\times 2$		$\times 2$			

We stellen vast dat voor elk natuurlijk getal n geldt

$$f(n) = 4 \cdot 2^n.$$

Hierin is $4 = f(0)$ de beginwaarde en de groeifactor (over 25 minuten) is in dit geval $g = 2$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Groeimodellen

Omdat niet alle bacteriën gelijktijdig splitsen, is het aan te nemen dat de groei niet enkel gebeurt op de tijdstippen $0, 1, 2, 3 \ldots$ maar ook op elk moment tussen die tijdstippen. We kunnen bijvoorbeeld op zoek gaan naar het aantal bacteriën na 5 minuten ($\frac{1}{5}$ van de splitsingstijd) of na 50 minuten (het dubbele van de splitsingstijd).

1. Vul volgend schema aan:

$$\overbrace{\overbrace{\overbrace{\overbrace{\overbrace{0 \quad 1/5}^{+1/5} \quad 2/5}^{+1/5} \quad 3/5}^{+1/5} \quad 4/5}^{+1/5} \quad 1}^{+1}$$

t	0	$1/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$	1
$f(t)$	4	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$4 \cdot 2$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{4 \quad \ldots}_{\times \ldots} \quad \ldots}_{\times \ldots} \quad \ldots}_{\times \ldots} \quad \ldots}_{\times \ldots} \quad \ldots}_{\times 2}$$

2. Met welke factor groeit de functie over $\frac{1}{5}$ van een tijdseenheid? $\boxed{\frac{2}{5}}\boxed{\sqrt[5]{2}}\boxed{\sqrt{2}}\boxed{\log_5 2}$.

3. Vul volgend schema aan:

$$\overbrace{\overbrace{\overbrace{\overbrace{0 \quad 1}^{+1} \quad 2}^{+1}}^{+2}}$$

t	0	1	2
$f(t)$	4	$4 \cdot 2$	$4 \cdot 2^2$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{4 \quad 4 \cdot 2}_{\times 2} \quad 4 \cdot 2^2}_{\times 2}}_{\times \ldots}}$$

4. Met welke factor groeit de functie over 2 tijdseenheden? ……

5. Met welke factor groeit de functie over een uur, dus over $\frac{12}{5}$ tijdseenheden? ……

6. Schets de grafiek van deze functie.

Voorbeeld 6.1.3 (Groei met procentuele toename of afname)**.**

Als in een vijver het aantal vissen elk jaar met 30% toeneemt, is dat dan een voorbeeld van lineaire groei of van exponentiële groei?

Het lijkt alsof er een vaste toename is per tijdsinterval (namelijk telkens +30%), en dus zouden we kunnen denken dat dit proces beschreven kan worden met een lineaire groei. Maar klopt dit wel?

Neen, de vaste toename is een **procentuele toename**, dit betekent dat als we de tijd t in jaren uitdrukken en $f(t)$ de hoeveelheid vissen op het ogenblik t voorstelt, we voor elk tijdstip t hebben dat:

$$f(t+1) = f(t) + (30\,\% \text{ van } f(t)) = f(t) + \frac{30}{100} f(t) = (1 + \frac{30}{100}) f(t).$$

We vinden dat dit proces een exponentieel proces is en dat de groeifactor per jaar $(1 + \frac{30}{100}) = 1.3$ bedraagt.

Eigenschap 6.1.3 (Groei met procentuele toename of afname)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Groeimodellen

De **procentuele toename** p en de **groeifactor** g zijn verbonden via de formule

$$g = \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Hieruit volgt dat :

positieve groei:	procentuele toename p positief	$\Leftrightarrow$	groeifactor g groter dan 1
negatieve groei:	procentuele toename p negatief	$\Leftrightarrow$	groeifactor g kleiner dan 1

Een groei met procentuele toename $p = 0\%$ sluiten we uit, want dat zou een groeifactor gelijk aan 1 geven.

CC BY-NC-SA 4.0

6.1.A Oefeningen groeimodellen

Oefening 6.1.4. Elk schooljaar daalt de prijswaarde van een handboek wiskunde. Concreet verkoopt een leerling zijn handboek aan een leerling van een lager jaar voor $\frac{2}{3}$ van de prijs die hijzelf een jaar voordien voor het boek heeft betaald. Met andere woorden, de prijs daalt per jaar met $\frac{1}{3}$. Stel dat het handboek wiskunde oorspronkelijk voor 16 euro aangekocht werd in de boekhandel.

1. De groeifactor per tijdseenheid van een jaar = ...

2. Het functievoorschrift voor de prijs p van het handboek in functie van de tijd t in jaren is

$$p(t) = \ldots \ldots .$$

3. Het handboek wordt na 5 jaar verkocht aan ... ... euro.

4. Maak een grafiek van deze functie voor de 5 eerst jaren.

Oefening 6.1.5. Men maakt een studie over de bevolking van de stad Oostende. Het stadsbestuur neemt aan dat de bevolking exponentieel groeit. De tellingen zijn begonnen in 1995, maar deze resultaten zijn verloren gegaan. In 1997 waren er ongeveer 68000 inwoners; in 2001 is dit gegroeid tot 73000. Hoeveel mensen waren er, op basis van de gegevens, vermoedelijk in 1995? ... ...

Oefening 6.1.6. Op een spaarrekening met samengestelde intrest - waarbij de intrest dus maandelijks wordt toegevoegd aan het kapitaal - hebben je ouders bij je geboorte een startkapitaal van 20000 euro gezet. De rente bedroeg $0,12\%$ per maand.

1. Hoeveel geld stond er na 6 maanden op die rekening? ... ...

2. Hoeveel bedroeg de rentevoet (procentueel) per jaar? ... ...

3. Hoeveel stond er op de spaarrekening na 10 jaar? ... ...

Oefening 6.1.7. Enkele jaren geleden werd, n.a.v. een economische missie in China, in het VRT-journaal beweerd dat de economie van China jaarlijks met $14\,\%$ groeit, en dat dit betekent dat de Chinese economie dus binnen 7 jaar verdubbeld zal zijn.

1. Welke berekening werd wellicht gemaakt om van de $14\,\%$ jaarlijkse groei tot een verdubbeling na 7 jaar te komen?

2. Wat is het functievoorschrift van de groeifunctie $f(t)$ die de grootte van de Chinese economie voorstelt? Noteer hierbij de waarde van f voor $t = 0$ als $f(0)$.

$f(t) = \ldots \ldots$

3. Wat zal - in de veronderstelling dat de groei aan hetzelfde tempo blijft toenemen - de procentuele groei werkelijk zijn na 7 jaar? Ongeveer ... ... %.

4. Met welke factor groeit de economie na 4, 5, 6 en 7 jaar. Tussen welke van deze waarden treedt de verdubbeling werkelijk op?

Oefening 6.1.8.

1. De formule voor de procentuele groei p per tijdseenheid in functie van een gegeven groeifactor g is $p = \ldots \ldots$

2. De formule voor de procentuele groei q per n tijdseenheden in functie van een gegeven groeifactor

CC BY-NC-SA 4.0

6.1.A Oefeningen groeimodellen

g (met $n \in \mathbb{N}$) is $q = \ldots\ldots$

3. Een formule voor het verband tussen een procentuele groei p per maand en q per jaar is $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Exponentiële functies

Aan twee positieve getallen a en r kunnen we de **macht** a^r associëren, met **grondtal** a en **exponent** r. Door nu in a^r ofwel a, ofwel r constant te houden en het andere getal in waarde te laten variëren krijgen we twee soorten *functies*, waarbij we de *variërende* grootheid met de letter x aanduiden:

- een *vaste* waarde r voor de exponent en een *variërend grondtal* x (met x in de plaats van a).
  Voor $r = 2$ krijgen we dan de *kwadraatfunctie* $x \mapsto x^2$.
  Voor $r = -1$ krijgen we $x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$, en voor $r = 1/2$ wordt dat $x \mapsto x^{1/2} = \sqrt{x}$.
  In het algemeen bekomen we een **machtsfunctie** met *exponent* r: $x \mapsto x^r$.
- een *vaste* waarde a voor het grondtal en een *variërende exponent* x (met x in de plaats van r).
  Voor $a = 2$ krijgen we dan de functie $x \mapsto 2^x$.
  Deze functie noemen we een **exponentiële functie**, en we noteren ze ook als $\exp_2$:
  $$\exp_2 : x \mapsto 2^x$$
  Voor $a = 10$ krijgen we bijvoorbeeld $\exp_{10} : x \mapsto 10^x$.
  In het algemeen bekomen we een **exponentiële functie** $\exp_a$ met *grondtal* a: $\exp_a : x \mapsto a^x$.

Definitie 6.2.1 (Exponentiële functie)**.**
De **exponentiële functie met grondtal** a (met $a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd $\exp_a$, is de reële functie
$$\exp_a : x \mapsto a^x$$
waarbij x alle reële waarden mag aannemen.

Opmerking 6.2.1.

- In de praktijk worden zowel de notaties a^x als $\exp_a(x)$ gebruikt voor exponentiële functies.
- De haakjes rond het argument van $\exp_a$ worden dikwijls weggelaten: $\exp_a x = \exp_a(x) = a^x$.
- Het grondtal a van een exponentiële functie moet worden beperkt:
  - a mag niet negatief zijn, want dat geeft problemen voor *niet-gehele* waarden van de exponent x (bv. $(-3)^{\frac{1}{2}}$)
  - a mag niet gelijk zijn aan 0, want dat geeft problemen voor *negatieve* exponenten x (bv. $0^{-1} = 1/0$)
  - a mag niet gelijk zijn aan 1, want $1^x = 1$ voor alle x, en de functie $f : x \mapsto 1^x = 1$ is een *constante functie* met waarde 1. Om technische redenen is het beter die functie niet te beschouwen als een exponentiële functie.

We bestuderen nu de *grafiek* van een exponentiële functie $\exp_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

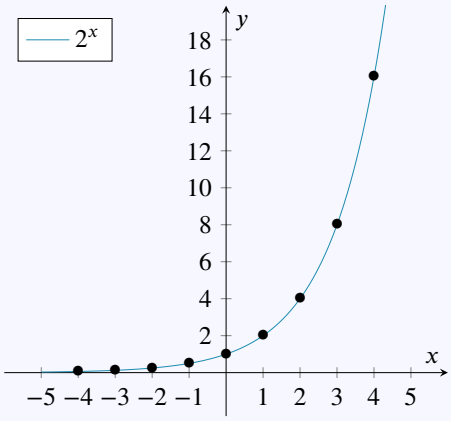
Voorbeeld 6.2.1 (Het geval $a > 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_2$)**.**
We nemen als voorbeeld $a = 2$, en schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\exp_2 : x \mapsto 2^x$ met grondtal 2 door een aantal punten van de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Exponentiële functies

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

Dit levert een aantal punten op op de gezochte grafiek, namelijk de bolletjes op de figuur. Met een rekentoestel kunnen we ook functiewaarden berekenen voor niet-gehele waarden van x, bv. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4142$. Op die manier krijgen we een vrij precies beeld van de grafiek:

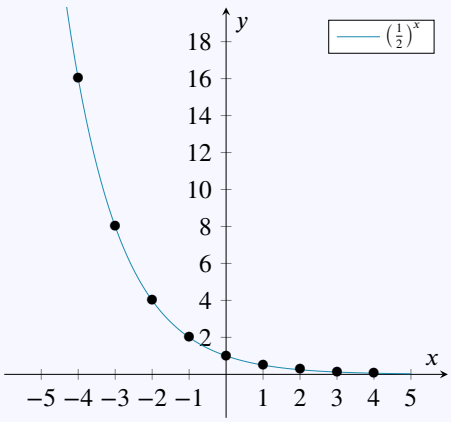


Voorbeeld 6.2.2 (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_{\frac{1}{2}}$).

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$, en schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten op de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625

Dit levert weer een aantal punten op op de grafiek. Met een rekentoestel kunnen we opnieuw functiewaarden voor niet-gehele waarden van x berekenen, bv. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$. Op die manier krijgen we weer een vrij precies beeld van de grafiek:



CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Exponentiële functies

Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = \frac{1}{2}$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* exponentiële functies:

Eigenschap 6.2.1 (Eigenschappen van exponentiële functies)**.**

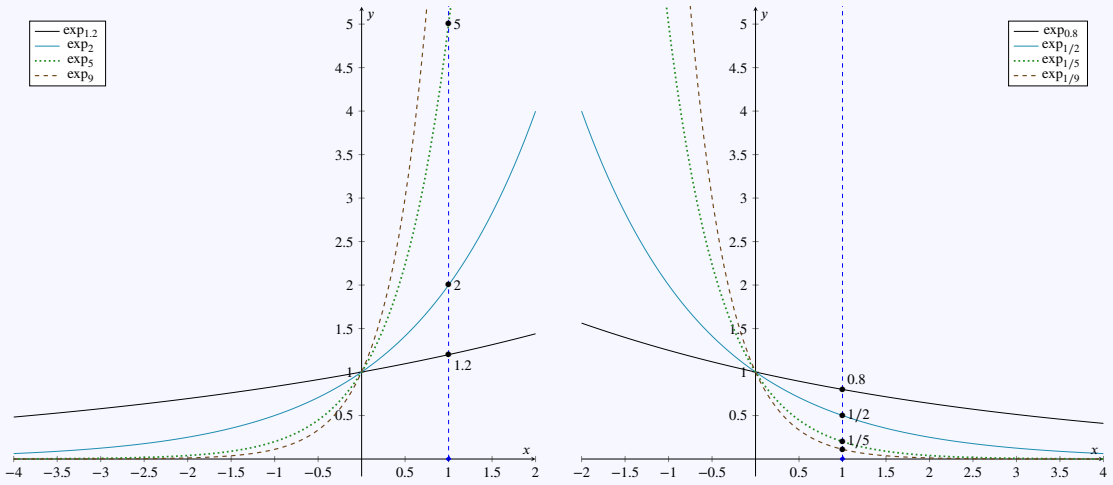
(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff a^x < a^y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff a^x > a^y$
(3) Het **domein** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$: a^x is gedefinieerd voor alle reële getallen x
(4) Het **beeld** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: a^x kan alleen strikt positieve waarden aannemen

De grafiek van $\exp_a$
(5) snijdt **de y-as** in het punt $(0,1)$: $a^0 = 1$
(6) snijdt **de x-as** niet: a^x is nooit gelijk aan 0
(7) snijdt **de rechte $x = 1$** in het punt $(1,a)$: $a^1 = a$

Omdat $\mathbb{R}$ het domein is van $\exp_a$ en $\mathbb{R}_0^+$ het beeld, is het volledige functievoorschrift

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto a^x.$$

Voorbeeld 6.2.3 (Voorbeelden van exponentiële functies met verschillende grondtallen)**.**



Omdat $\exp_a(0) = a^0 = 1$ gaan alle grafieken door het punt $(0,1)$, en omdat $\exp_a(1) = a^1 = a$ snijdt elke grafiek de verticale rechte $x = 1$ in het punt $(1,a)$.

In het geval $a > 1$ worden de functiewaarden willekeurig klein voor erg negatieve x. Als $0 < a < 1$ worden de functiewaarden willekeurig klein zodra x voldoende groot is. Het begrip *asymptoot* dat we later zullen definiëren beschrijft dit fenomeen meer exact.

We weten nu voor een *gegeven grondtal* a hoe de *grafiek* van $\exp_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal a, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$. Het geval $a = 1$ levert de constante functie $x \mapsto 1$ en is het grensgeval tussen dalende functies voor $a < 1$ en stijgende functies voor $a > 1$.

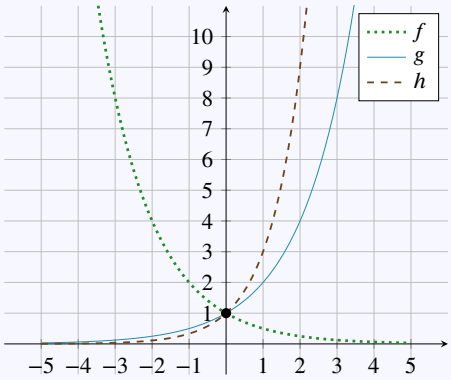
Stel dat we omgekeerd voor een *gegeven grafiek* van een exponentiële functie willen weten wat het *grondtal* is. Het stijgen of dalen van de grafiek bepaalt al onmiddellijk of het grondtal tussen 0 en 1 ligt dan wel groter is dan 1. Maar er is meer: omdat $\exp_a(1) = a^1 = a$, is het grondtal a gelijk aan de y-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de verticale rechte $x = 1$ (i.e. door $(1,0)$). Zelfs als we de *exacte* waarde niet kunnen aflezen op de grafiek, is minstens een goede schatting meestal wel mogelijk.

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Exponentiële functies

Voorbeeld 6.2.4 (Onderscheiden van exponentiële functies)**.**

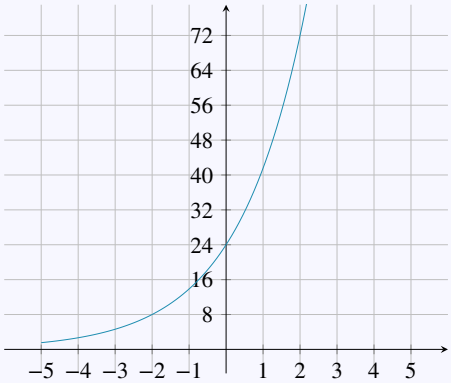
Hieronder worden de grafieken geschetst van drie functies $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \mapsto 2^x$ en $x \mapsto 3^x$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.



We kunnen eerst de grafieken onderscheiden op grond van hun vorm. De grafieken van g en h zijn stijgend, hun grondtal is dus groter dan 1. De grafiek van f is dalend, dus is dat grondtal kleiner dan 1. Daarmee is het functievoorschrift van f gevonden, want er is maar één keuzemogelijkheid met $a < 1$, namelijk $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
Om de grafieken van g en h te onderscheiden, kijken we naar de y-waarde voor $x = 1$: $g(1) = 2$ en $h(1) = 3$. h is dus de functie $x \mapsto 3^x$ en g is de functie $x \mapsto 2^x$.
Je kan ook redeneren dat 3 groter is dan 2 waardoor de functie $x \mapsto 3^x$ sneller stijgt dan de functie $x \mapsto 2^x$ en dat daarom h bij $x \mapsto 3^x$ moet horen.

Voorbeeld 6.2.5 (Bepalen functievoorschrift)**.**

Stel dat we weten dat onderstaande tekening de grafiek is van een functie $f(x) = ba^x$, met a, b reële getallen. De punten $(-2, 8)$ en $(0, 24)$ behoren tot de grafiek. We willen het functievoorschrift bepalen, dus a en b vinden.



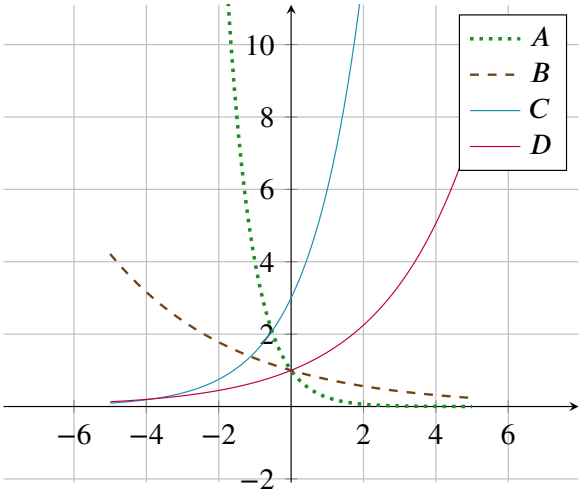
We weten dat $f(0) = 24$ en dat $f(-2) = 8$. Uit $24 = f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1$ volgt dat $b = 24$. Hiermee vinden we dan dat $f(-2) = 24 \cdot a^{-2} = 8$, dus dat $a^2 = 3$ of $a = \sqrt{3}$.

Merk op dat $a = -\sqrt{3}$ onmogelijk is, het grondtal a van een exponentiële functie moet positief zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Exponentiële functies

Oefening 6.2.1. Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?



1. $x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$: | A | B | C | D |

2. $x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x$: | A | B | C | D |

3. $x \mapsto 3 \cdot 2^x$: | A | B | C | D |

4. $x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)^x$: | A | B | C | D |

Oefening 6.2.2.

1. Als $a > 1$, dan is $\exp_a$ een | stijgende | dalende | niet (altijd) gedefinieerde | functie.

2. Als $0 < a < 1$, dan is $\exp_a$ een | stijgende | dalende | niet (altijd) gedefinieerde | functie.

3. Als $\exp_a$ een dalende functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.

4. Als $\exp_a$ een stijgende functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.

Voor grondtal a gelijk aan de specifieke waarde $e = 2.7182818\ldots$ verkrijgen we een veel voorkomende exponentiële functie $x \mapsto e^x$, die we meestal *de* exponentiële functie noemen, en korter noteren als exp:

Definitie 6.2.2. ***De* exponentiële functie** is de functie

$$\exp : x \mapsto e^x$$

met grondtal $e = 2.71\ldots$ (getal van Euler) (en ze wordt dus genoteerd *zonder subscript* e).

Door een positief getal a te schrijven als $e^{\ln a}$ wordt *elke* macht *een macht van* e:

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$$

en zo wordt een *willekeurige* exponentiële functie een *herschaling* van *de* exponentiële functie $x \mapsto e^x$:

Eigenschap 6.2.2. Elke exponentiële functie $x \mapsto a^x$ kan geschreven worden als $x \mapsto e^{kx}$ met $k = \ln a$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Exponentiële functies

Voorbeeld 6.2.6. De functie $x \mapsto 3^x$ is gelijk aan de functie $x \mapsto e^{\ln 3\, x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Logaritmische functies

Door in de uitdrukking voor de logaritme $\log_a b$ het grondtal a constant te houden en het getal b te laten variëren, bekomen we een *functie*, namelijk een *logaritmische functie*:

Definitie 6.3.1 (Logaritmische functie)**.**

De **logaritmische functie met grondtal** a ($a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd als $\log_a$, is de reële functie

$$\log_a : x \mapsto \log_a x$$

waarbij x enkel *strikt positieve waarden* mag aannemen.

Opmerking 6.3.1. Bij de invoering van de logaritme $\log_a b$ hebben we de noodzaak besproken om bovenstaande beperkingen op te leggen aan het grondtal a en het argument x.

De haakjes rond het argument van de functie $\log_a$ worden dikwijls weggelaten: $\log_a x = \log_a(x)$.

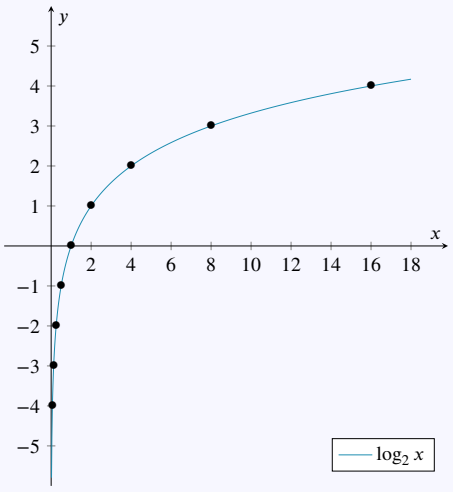
We bestuderen nu de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

Voorbeeld 6.3.1 (Het geval $a > 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_2$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_2 : x \mapsto \log_2(x)$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. Het ligt voor de hand om voor de x-waarden machten van 2 te kiezen, omdat daarvoor de 2-logaritme gemakkelijk te bepalen is.

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_2(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Dit levert voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



Voorbeeld 6.3.2 (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2}(x)$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2} : x \mapsto \log_{1/2}(x)$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. We kunnen dezelfde

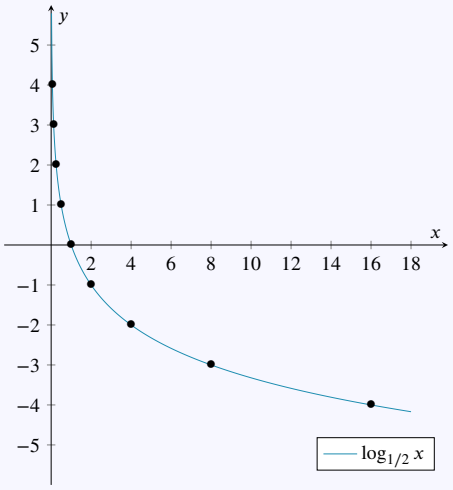
CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Logaritmische functies

tabel hergebruiken:

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_{1/2}(x)$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Dit levert opnieuw voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = 1/2$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* logaritmische functies:

Eigenschap 6.3.1 (Eigenschappen van logaritmische functies)**.**

(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff \log_a x < \log_a y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff \log_a x > \log_a y$
(3) Het **domein** van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: de functiewaarde $\log_a x$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$
(4) Het **beeld** van $\log_a$ is $\mathbb{R}$: de functiewaarde $\log_a x$ kan alle reële waarden aannemen

De grafiek van $\log_a$
(5) snijdt **de x-as** in het punt $(1, 0)$: $\log_a 1 = 0$
(6) snijdt **de y-as** niet: voor $x = 0$ is $\log_a x$ niet gedefinieerd
(7) snijdt **de rechte $y = 1$** in het punt $(a, 1)$: $\log_a(a) = 1$

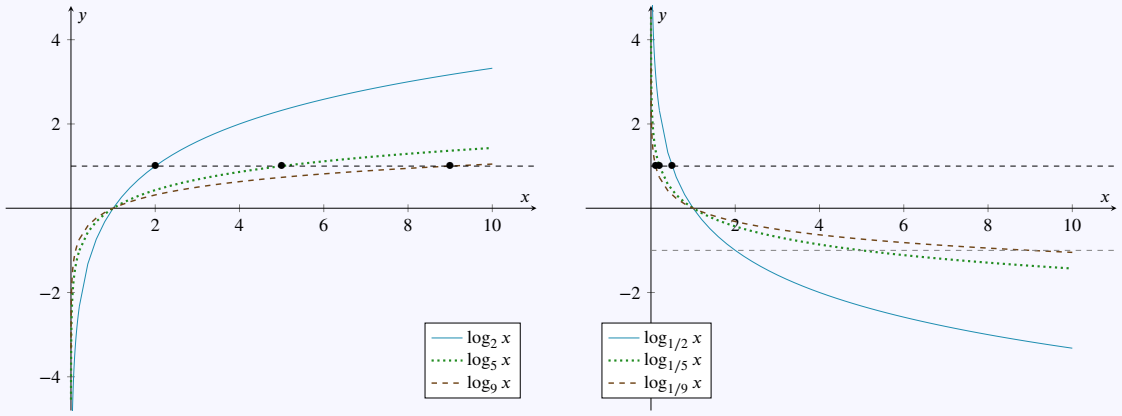
Omdat $\mathbb{R}_0^+$ het domein is van $\log_a$ en $\mathbb{R}$ het beeld, is het volledige functievoorschrift

$$\log_a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a x.$$

Voorbeeld 6.3.3 (Voorbeelden van logaritmische functies met verschillende grondtallen)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Logaritmische functies



De bovenstaande grafieken tonen aan dat voor grondtal $a > 1$ en x zeer klein de grafiek naar $-\infty$ gaat. Indien het grondtal $0 < a < 1$ is, dan zal voor x zeer klein de grafiek naar $+\infty$ gaan. In een latere module zal de terminologie van asymptoten ingevoerd worden, wat ons toelaat om dit meer exact te bespreken.

Definitie 6.3.2. De **natuurlijke logaritme** is de functie

$$\ln : x \mapsto \ln x$$

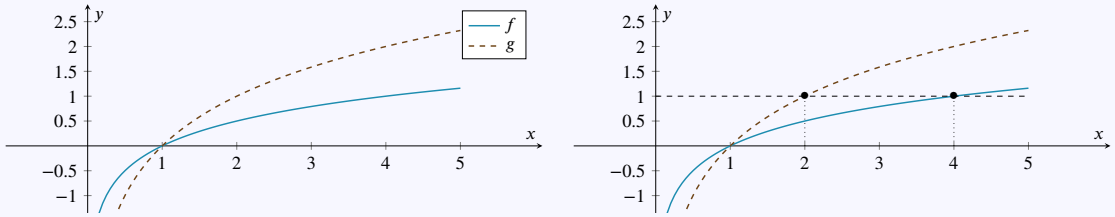
waarbij $\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$ met $e = 2.71\ldots$ (getal van Euler).

We weten nu voor een *gegeven grondtal* a hoe de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal a, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$.

Stel dat we omgekeerd voor een *gegeven grafiek* van een logaritmische functie willen weten wat het *grondtal* is. Het stijgen of dalen van de grafiek bepaalt al onmiddellijk of het grondtal tussen 0 en 1 ligt dan wel groter is dan 1. Om de precieze waarde van a te vinden volstaat het te zoeken naar **de waarde van x die een functiewaarde 1 geeft:** immers, als $\log_a x = 1$, dan $x = a^1 = a$. We zoeken dus de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de horizontale rechte $y = 1$. Ook als de grafiek niet gedetailleerd genoeg is om de exacte waarde van a terug te vinden, blijft een goede schatting wel mogelijk op deze manier.

Voorbeeld 6.3.4 (Aflezen grondtal van grafiek)**.**

Hieronder worden de grafieken geschetst van de twee functies $x \mapsto \log_4(x)$ en $x \mapsto \log_2(x)$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.

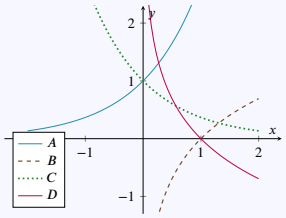


Omdat beide grondtallen groter zijn dan 1, kunnen we beide grafieken niet onderscheiden op grond van hun vorm. We weten echter dat het grondtal terug te vinden is als de x-waarde waarvoor de functiewaarde gelijk is aan 1. We tekenen daarom de horizontale rechte $y = 1$ en kijken waar deze de twee grafieken snijdt. De x-coördinaat van het snijpunt komt overeen met het grondtal. Het blijkt dat f de grafiek is van $x \mapsto \log_4(x)$ en g de grafiek van $x \mapsto \log_2(x)$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Logaritmische functies

Voorbeeld 6.3.5. Welke grafiek hoort bij de functie $x \mapsto \ln(x)$?



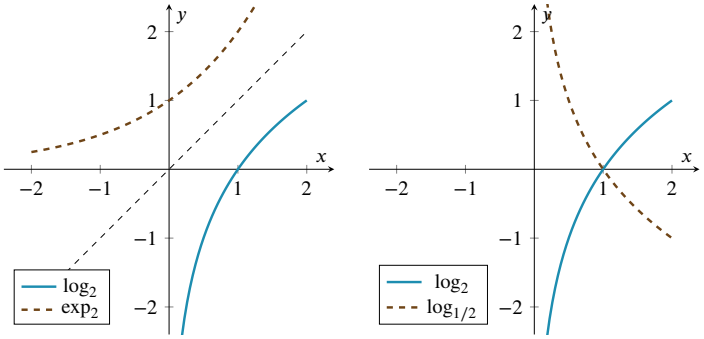
Deze vraag kunnen we beantwoorden louter op basis van de vorm van de grafieken. Omdat $x \mapsto \ln(x)$ een logaritmische functie is, is deze enkel gedefinieerd voor strikt positieve waarden van x. Omdat het grondtal $e > 1$, moet de grafiek stijgend zijn. Enkel grafiek $\boldsymbol{B}$ voldoet hieraan.

Als je in de formules $\log_a a^x = x$ en $a^{\log_a x}$ de machten schrijft met de $\exp_a$ krijg je volgende eigenschap:

Eigenschap 6.3.2. De functies $\log_a$ en $\exp_a$ zijn elkaars *inverse*:

$$\log_a(\exp_a x) = x \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\exp_a(\log_a x) = x \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

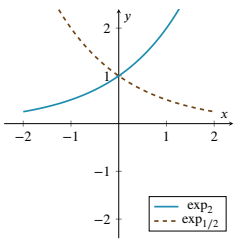
Als inverse functies zijn de grafieken elkaars *spiegelbeeld ten opzichte van de eerste bissectrice*.



Uit de formule voor verandering van grondtal $\log_{1/a} x = \dfrac{\log_a x}{\log_a 1/a} = \dfrac{\log_a x}{-1} = -\log_a x$ volgt:

Eigenschap 6.3.3. De functies $\log_a$ en $\log_{1/a}$ zijn elkaars *tegengestelde*, en hun grafieken zijn dus elkaars *spiegelbeeld ten opzichte van de x-as*.

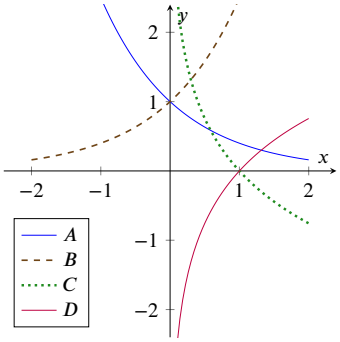
Merk op dat iets gelijkaardigs geldt voor de exponentiële functie: $\exp_{1/a}(x) = (1/a)^x = a^{-x} = \exp_a(-x)$, en dus heeft $\exp_{1/a}$ in x dezelfde waarde als $\exp_a$ in $-x$, en dus zijn de grafieken van $\exp_a$ en $\exp_{1/a}$ onderling *gespiegeld ten opzichte van de y-as*:



CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Logaritmische functies

Oefening 6.3.1. Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?



1. $x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x$: A B C D
2. $x \mapsto \log_{2/5}(x)$: A B C D
3. $x \mapsto \log_{5/2}(x)$: A B C D
4. $x \mapsto \left(\frac{5}{2}\right)^x$: A B C D

Opmerking 6.3.2 (Eigenschappen logaritmische functies)**.**

De rekenregels voor logaritmen leveren soms extra eigenschappen op van logaritmische functies. Zo kan je de op het eerste zicht tamelijk ingewikkelde functie $x \mapsto \log_4(2^x)$ herschrijven als

$$\log_4(2^x) = x \cdot \log_4(2) = x \cdot \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = x/2.$$

en vaststellen dat $\log_4(2^x)$ gewoon de lineaire functie $x \mapsto \frac{1}{2}x$ is.

Oefening 6.3.2. Herschrijf volgende uitdrukkingen zonder exponentiële of logaritmische functies:

1. $4^{\log_2(x)} = \ldots\ldots$
2. $27^{\log_3(x)} = \ldots\ldots$

Voorbeeld 6.3.6 (Domein logaritmische functie)**.**

Bepaal het domein van de functie $x \mapsto \log_3\left(\frac{3}{4-x}\right)$. Bepaal dus alle mogelijke reële waarden van x waarvoor het functievoorschrift geldig is.

- De noemer van de breuk binnen de logaritme mag niet nul mag zijn: $4 - x \neq 0$ en dus $x \neq 4$.
- Een logaritme kan enkel berekend worden voor een strikt positief getal, en dus moet $\frac{3}{4-x} > 0$. Omdat de teller positief is, moet ook de noemer dat dus zijn: $4 - x > 0$ of $x < 4$.

Alleen als aan deze twee voorwaarden voldaan is, kan de functiewaarde bepaald worden.

Het domein van deze functie is dus het (oneindige) interval $]-\infty, 4[$.

Oefening 6.3.3. Bepaal het domein van de functie $x \mapsto \ln(\sqrt{2x} - 4)$: $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 De logaritme

We kennen voor een gegeven grondtal a en een gegeven exponent r de *macht* a^r. Zo hoort bij grondtal 3 en exponent 2 de macht $3^2 = 9$ en bij grondtal 2 en exponent 3 de macht $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Bij *logaritmen* keren we de berekening om: we *vertrekken* van een gegeven grondtal a en een gegeven macht a^r en *zoeken* de *exponent* r die hoort bij dat grondtal a om die macht a^r te bekomen. Als de macht geschreven is als a^r kunnen we r natuurlijk gewoon aflezen, maar als de macht is uitgerekend werkt dat niet meer. Zo zoeken we voor het grondtal 3 en het getal 9 de exponent r zodat $3^r = 9$. Die is 2 want $3^{\mathbf{2}} = 9$. We noemen die exponent 2 de 3-logaritme van 9, en we noteren $\log_3 9 = 2$. We hebben dus:

$$\log_3 9 = \mathbf{2} \quad \text{want} \quad 3^{\mathbf{2}} = 9. \quad \text{Er geldt dus dat } 3^{\log_3 9} = 9 \text{ en } \log_3 3^2 = 2.$$

$$\log_2 8 = \mathbf{3} \quad \text{want} \quad 2^{\mathbf{3}} = 8. \quad \text{Er geldt dus dat } 2^{\log_2 8} = 8 \text{ en } \log_2 2^3 = 3.$$

Definitie 6.4.1 (Logaritme)**.** De **logaritme met grondtal a van x** of de **a-logaritme van x** is per definitie **de exponent r waartoe men grondtal a moet verheffen om x als uitkomst te krijgen.**

We noteren die exponent r als $\log_a x$. In symbolen wordt de definitie

$$\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$$

Vb: $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

of equivalent: $\log_a x$ is het unieke reële getal zodat $a^{\log_a x} = x$.

Deze definitie is enkel zinvol voor a en x positieve reële getallen met $a \neq 1$ (zie Opmerking **??**).

Voorbeeld 6.4.1. Je kan $\log_a x$ dus *direct aflezen* als je x als een macht van a kan schrijven:

1. $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
2. $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$
3. $\log 1000 = \log 10^3 = 3$
4. $\log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{-1} = -1$
5. $\log_4 4 = 1$
6. $\log_4 1 = 0$

Opmerking 6.4.1.

- In het secundair onderwijs gebruikt men dikwijls de notatie ${}^a\log x$, in de wetenschappen $\log_a x$.
- De definitie $\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$ lijkt erg op die van machtswortels $\sqrt[a]{x} = r \Longleftrightarrow r^a = x$, maar de rol van a en r is verwisseld: bij de wortel zoek je het *grondtal*, bij de logaritme de *exponent*.
- Net zoals wortels als $\sqrt{4}, \sqrt{25}$ en $\sqrt[3]{8}$ makkelijk te berekenen zijn terwijl je voor $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ of $\sqrt[3]{9}$ een rekentoestel nodig hebt, geldt voor logaritmen dat $\log_2 4, \log_5 25$ en $\log_2 8$ makkelijk te berekenen zijn, terwijl je voor $\log_3 8$ of $\log_5 30$ een rekentoestel nodig hebt.

Opmerking 6.4.2. Speciale grondtallen en argumenten waarvoor de logaritme niet bestaat:

$\log_1 5$	bestaat niet:	er bestaat immers geen r zodat $1^r = 5$, want 1^r is steeds 1.
$\log_0 5$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $0^r = 5$, want 0^r is nul of ongedefinieerd.
$\log_5 0$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $5^r = 0$, want 5^r is steeds strikt positief.
$\log_{-2} 5$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $(-2)^r = 5$. Er bestaat zeker geen *natuurlijk* getal r waarvoor $(-2)^r = 5$, en *rationale* getallen r zijn problematisch omdat bijvoorbeeld $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$ niet bestaat.
$\log_5(-2)$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $5^r = -2$, want 5^r is altijd positief.

In de definitie van de logaritme $\log_a x$ moeten dus a en x inderdaad beperkt worden:

- het grondtal a moet *strikt positief* zijn,

6.4 De logaritme

- het grondtal a mag niet 1 zijn (want machten van 1 zijn altijd gelijk aan 1),
- het argument x moet *strikt positief* zijn (want machten met een strikt positief grondtal a zijn altijd strikt positief).

Het getal $\log_a x$ kan zelf *wel alle reële waarden aannemen*, en dus zowel negatief, nul als positief zijn.

Merk op dat de logaritme $\log_2 10$ wel bestaat, maar niet *exact* kan bepaald worden omdat je het getal 10 niet *exact* kan schrijven als een macht met grondtal 2. Omdat $2^3 < 10 < 2^4$ kunnen we wel besluiten dat $\log_2 10$ een waarde moet zijn tussen 3 en 4. Met een rekentoestel kunnen betere benaderende waarde worden gevonden. Zo is bijvoorbeeld $\log_2 10 \approx 3.3219$, afgerond op 4 decimalen.

In de praktijk komen twee grondtallen erg veel voor, en daarvoor is er telkens een speciale notatie:

Definitie 6.4.2.

De **tiendelige logaritme**, ook wel *Briggse logaritme* genoemd, is de logaritme met grondtal 10, en wordt per afspraak genoteerd zonder grondtal: $\log x \overset{\text{def}}{=} \log_{10} x$.

De **natuurlijke logaritme**, ook wel *Neperse logaritme* genoemd, is de logaritme met grondtal het **getal van Euler** $e \approx 2.718281$ en wordt genoteerd als $\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$.

De logaritme $\log_a x$ geeft de *grootte-orde* aan van x in termen van a, namelijk hoeveel machten van a er gaan in x. Voor de tiendelige logaritme gaat het dus om machten van 10, en (het gehele deel van) $\log x$ bepaalt het *aantal cijfers* van x: $\log 1000 = 3, \log 10^n = n$ en $3 < \log 1234 < 4$ en $5 < \log 123456 < 6$. Op dezelfde manier bepaalt voor informatici $\log_2 x$ het *aantal bits* dat nodig is om x op te slaan.

De natuurlijke logaritme is ondermeer erg handig bij het berekenen van afgeleiden, en het gebruik van ln maakt dan allerlei formules veel eenvoudiger. De afkorting ln komt van het Latijnse 'logaritmus naturalis'.

Uit de definities volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

Eigenschap 6.4.1 (Basisformules van de logaritme)**.**

Voor $x > 0$ en $a > 0$ met $a \neq 1$ geldt: $\log_a a^x = x$ en $a^{\log_a x} = x$

Voor $x = 0$ wordt dit: $\log_a 1 = 0$

Voor $x = 1$ wordt dit: $\log_a a = 1$.

Voor $a = 10$ wordt dit: $\log 10^x = x$ en $10^{\log x} = x$.

Voor $a = e = 2.7182\ldots$ wordt dit: $\ln e^x = x$ en $e^{\ln x} = x$.

Oefening 6.4.1. Bereken volgende logaritmen (zonder rekenmachine).

1. $\log_3 81 = \ldots\ldots$

2. $\log 100 = \ldots\ldots$

3. $\log 0.01 = \ldots\ldots$

4. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

5. $\log_2 128 = \ldots\ldots$

6. $\log_2(4^7) = \ldots\ldots$

7. $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = \ldots\ldots$

8. $\log_9 3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Rekenregels voor logaritmen

Uit de rekenregels voor machten volgen enkele belangrijke rekenregels voor logaritmen.

Uit de formule $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ volgt door te stellen dat $a^r = x$ en $a^s = y$ de gelijkheid $x \cdot y = a^{r+s}$. Hiervan de a-logaritme nemen en opmerken dat $a^r = x$ hetzelfde betekent als $r = \log_a x$ levert

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a a^{r+s} = r + s = \log_a x + \log_a y$$

en dus:

Eigenschap 6.5.1. Logaritme van een product: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $(a, x, y \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1)$

In woorden: *de logaritme van een product is de som van de logaritmen.*
of: de logaritme zet een *product* om in een *som*.

Voorbeeld 6.5.1.

1. $\log 25 + \log 4 = \log(25 \cdot 4) = \log 100 = 2$
2. $\log_5 125 = \log_5(5 \cdot 25) = \log_5 5 + \log_5 25 = 1 + 2 = 3$
3. $\log_a x^2 = \log_a(x \cdot x) = \log_a x + \log_a x = 2 \log_a x$

Het laatste voorbeeld kan worden veralgemeend tot willekeurige machten: uit de formule $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ volgt door $a^r = x$ te stellen de gelijkheid $x^s = a^{r \cdot s}$. Van $x^s = a^{r \cdot s}$ de a-logaritmen nemen geeft

$$\log_a x^s = \log_a a^{r \cdot s} = s \cdot r = s \cdot \log_a x.$$

Eigenschap 6.5.2. Logaritme van een macht: $\log_a x^s = s \cdot \log_a x$ $(a, x \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1, s \in \mathbb{R})$

In woorden: *de logaritme zet een macht om in een product.*
of: de logaritme brengt *een exponent naar beneden* (of naar voor).

Speciaal geval $s = -1$: $\log_a x^{-1} = -\log_a x$

Voorbeeld 6.5.2. $\log_2 4^5 = 5 \log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10$ en $\log x^{1000} = 1000 \log x$

Het speciaal geval $\log_a x^{-1}$ geeft samen met de formule voor het product een formule voor het quotiënt:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x \cdot y^{-1}) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$$

Eigenschap 6.5.3. Logaritme van een quotiënt: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $(a, x, y \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1)$

In woorden: *de logaritme van een quotiënt is het verschil van de logaritmen.*
of: de logaritme zet een *quotiënt* om in een *verschil*.

Voorbeeld 6.5.3. $\log 500 - \log 5 = \log \frac{500}{5} = \log 100 = 2$

Stel dat je een getal x hebt geschreven als een macht van a, dus $x = a^r$ *en* als een macht van b, dus $x = b^s$. Dan kan je onderzoeken of er een verband is tussen de exponenten r en s. Welnu, de a-logaritme

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Rekenregels voor logaritmen

nemen van de gelijkheid $x = b^s$ geeft samen met de equivalentie $x = b^s \iff s = \log_b x$ dat

$$\log_a x = \log_a b^s = s \cdot \log_a b = \log_b x \cdot \log_a b$$

Eigenschap 6.5.4 (Verandering van grondtal).

Verandering van grondtal: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ of $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$

Speciaal geval $x = a$: $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b} = (\log_a b)^{-1}$

Je kan de formule $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ lezen als: de a-logaritme van x is een *herschaling* van de b-logaritme met een factor $\log_a b$. Of nog: de logaritmen met grondtal a resp. b zijn *evenredig*, met evenredigheidsfactor $\log_a b$

Ezelsbruggetje: je kan in $\log_a x$ formeel '$b \cdot \log_b$ inschuiven': $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ (met $b > 0$ willekeurig).

Voorbeeld 6.5.4.

1. $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{2}{3}$
2. $\dfrac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = 4$

Waarschuwing 6.5.1. Pas op voor volgende (te) veel gemaakte fouten:

~~$\log(x+y) = \log x + \log y$~~ want $\log(100+100) \neq \log 100 + \log 100$
omdat $\log 200 \neq 2 + 2 = 4 = \log 10000$

~~$\log(x+y) = \log x \cdot \log y$~~ want $\log(100+10) \neq \log 100 \cdot \log 10$
omdat $\log 110 \neq 2 \cdot 1 = 2 = \log 100$

~~$\log(x-y) = \dfrac{\log x}{\log y}$~~ want $\log(100-10) \neq \dfrac{\log 100}{\log 10}$
omdat $\log 90 \neq \dfrac{2}{1} = 2 = \log 100$

~~$(\log x)^n \neq n \cdot \log x$~~ want $(\log(10)^3 \neq 3 \cdot \log 10$
omdat $(\log 10)^3 = 1^3 = 1$ en $3 \cdot \log 10 = 3 \cdot 1 = 3$

In het algemeen kan je niet veel doen met de logaritme van een som of verschil. Er zijn enkel formules voor *logaritmen van* producten en quotiënten, en voor sommen of verschillen *van logaritmen*.

Opmerking 6.5.1. Eenvoudige rekentoestellen kennen soms enkel de functie 'log()' waarmee je wel $\log_{10}(25)$ kan berekenen, maar niet bijvoorbeeld $\log_2(25)$. Met behulp van de formule om van grondtal te veranderen bereken je $\log_2(25)$ dan toch als $\dfrac{\log 25}{\log 2}$.

Volgende voorbeeldoefeningen gebruiken telkens meerdere rekenregels om tot een oplossing te komen:

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Rekenregels voor logaritmen

Voorbeeld 6.5.5. Schrijf de uitdrukking $2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z &= \log_3(x^2) - \log_3(y^3) + \log_3(z^{0.5}) \\ &= \log_3(x^2 z^{0.5}) - \log_3(y^3) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2 z^{0.5}}{y^3}\right) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2\sqrt{z}}{y^3}\right). \end{aligned}$$

Hierbij hebben we eerst de rekenregel voor machten gebruikt, daarna de rekenregel voor product en tenslotte de rekenregel voor quotiënt.

Voorbeeld 6.5.6. Schrijf de uitdrukking $\log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z &= \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + \log_{\frac{1}{5}}(z^2) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}(xz^2) - \log_{\frac{1}{5}}(yz) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz^2}{yz}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz}{y}\right). \end{aligned}$$

Opnieuw hebben we gebruik gemaakt van de rekenregel voor machten, de rekenregel voor product en de rekenregel voor quotiënt, in deze volgorde, en tenslotte de breuk binnen de logaritme vereenvoudigd.

Voorbeeld 6.5.7. Bereken de waarde van $\log_2 3 - \log_2 12$ zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Dat kan met behulp van de quotiëntregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 = \log_2\left(\frac{3}{12}\right) &= \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \log_2(2^{-2}) = -2. \end{aligned}$$

Een alternatieve manier gebruikt de productregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 = \log_2 3 - \log_2(3 \cdot 4) &= \log_2 3 - \log_2 3 - \log_2 4 \\ &= -\log_2(2^2) = -2. \end{aligned}$$

Voorbeeld 6.5.8. Als gegeven is dat $\log x = 2.4$ en dat $\log y = -1.1$, bereken dan $\log\left(\sqrt{x} \cdot y^3\right)$.

Dit kan gebeuren op twee manieren.

Eerst gebruiken we de betekenis van de logaritme om x en y te bepalen: $x = 10^{2.4}$ en $y = 10^{-1.1}$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Rekenregels voor logaritmen

Dan geldt:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(\sqrt{10^{2.4}}\cdot(10^{-1.1})^3\right)\\ &= \log\left((10^{2.4/2})\cdot(10^{-1.1\cdot 3})\right)\\ &= \log\left(10^{1.2}\cdot 10^{-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{1.2-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{-2.1}\right) = -2.1.\end{aligned}$$

Anderzijds kunnen we gebruik maken van de rekenregels van logaritmen om de gegeven formule te herschrijven als een uitdrukking in $\log x$ and $\log y$:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(x^{0.5}\cdot y^3\right)\\ &= \log(x^{0.5}) + \log(y^3)\\ &= 0.5\cdot\log x + 3\cdot\log y\\ &= 0.5\cdot 2.4 + 3\cdot(-1.1) = 1.2 - 3.3 = -2.1.\end{aligned}$$

Voorbeeld 6.5.9. Herschrijf de uitdrukking $\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}}$ in functie van $\log_a x$, $\log_a y$ en $\log_a z$, weer door gebruik te maken van de rekenregels:

$$\begin{aligned}\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}} &= \log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)^{0.5}\\ &= 0.5\log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a(yz^2) - \log_a(ax)\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a y + \log_a(z^2) - \log_a a - \log_a x\right)\\ &= 0.5\cdot\left(-\log_a x + \log_a y + 2\log_a z - 1\right).\end{aligned}$$

We schrijven eerst de vierkantswortel als een macht, passen dan de rekenregel voor machten toe, vervolgens de regel voor quotiënt, de regel voor product en nogmaals de regel voor macht.

CC BY-NC-SA 4.0

6.5.A Basisoefeningen logaritmen

Oefening 6.5.1. Bereken indien mogelijk de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Indien de logaritme bestaat maar we deze niet exact kunnen berekenen, geef dan de grenzen aan (bv. $\log_3 10$ is een waarde tussen 2 en 3).

1. $\log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \ldots\ldots$

2. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \ldots\ldots$

3. $\log_1 1 : \ldots\ldots$

4. $\log \frac{1}{1000} = \ldots\ldots$

5. $\ln \sqrt[3]{e^2} = \ldots\ldots$

6. $\log_6 1 = \ldots\ldots$

7. $\log_4 8 = \ldots\ldots$

8. $\log_5 10 : \ldots\ldots$

9. $\log_3(-3)^6 = \ldots\ldots$

10. $\log_{-3}(-3)^6 : \ldots\ldots$

Oefening 6.5.2. Bereken zonder rekenmachine.

1. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

2. $\log_5 125 = \ldots\ldots$

3. $\log_2 \frac{1}{32} = \ldots\ldots$

4. $\log_6(36\sqrt{6}) = \ldots\ldots$

5. $\log 0,00001 = \ldots\ldots$

6. $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.5.B Oefeningen rekenregels logaritmen

Oefening 6.5.3. Schrijf volgende uitdrukkingen in functie van $\log a$, $\log b$ en $\log c$ (met $a, b, c > 0$).

1. $\log \dfrac{a}{b^4} = \ldots\ldots$

2. $\log\left(c^3\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right) = \ldots\ldots$

3. $\log \dfrac{a^4bc}{\sqrt{bc^2}} = \ldots\ldots$

Oefening 6.5.4. Schrijf elke uitdrukking in functie van $\log x$, $\log(x-5)$ en $\log(x+1)$.

1. $\log \dfrac{x(x+1)}{x-5} = \ldots\ldots$

2. $\log\left((x+1)^2\sqrt{x-5}\right) = \ldots\ldots$

3. $\log\sqrt{\dfrac{x-5}{x^3(x+1)}} = \ldots\ldots$

4. $\log \dfrac{1}{(x+1)^2} = \ldots\ldots$

Oefening 6.5.5. Schrijf als één logaritme. $(x > 0, y > 0, z > 0)$

1. $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log(xy^2) + 5 \cdot \log y = \log \ldots\ldots$

2. $\dfrac{1}{2} \cdot \log_3\left(\dfrac{y}{x}\right) - \log_3\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \log_3 \ldots\ldots$

3. $\log_5(xy) - \log_5(yz) + \log_5(zx) = \log_5 \ldots\ldots$

Oefening 6.5.6. Schrijf elke uitdrukking als één enkele logaritme.

1. $\log(x+1) - \log x^2 + \dfrac{1}{2}\log(x-3) = \ldots\ldots$

2. $3 - \log x = \ldots\ldots$

3. $5\log(x-1) - \dfrac{1}{2}\log(x+3) = \ldots\ldots$

Oefening 6.5.7. Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Neem zeker pen en papier bij de hand, want je kan ze niet allemaal uit je hoofd uitrekenen.

1. $\log 25 + \log 40 = \ldots\ldots$

2. $\log_3 36 - \log_3 4 = \ldots\ldots$

3. $\log_9 25 - \log_3 15 = \ldots\ldots$

4. $\ln 108 - 2 \cdot \ln 6 + \ln\left(\dfrac{e}{3}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.5.B Oefeningen rekenregels logaritmen

Oefening 6.5.8. Bereken zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

1. $e^{3\ln 2} = \ldots\ldots$

2. $4^{\log_2 3} = \ldots\ldots$

3. $27^{\log_3 2} = \ldots\ldots$

Oefening 6.5.9. Schrijf als één logaritme. Je mag het grondtal zelf kiezen. $(x > 0, y > 0)$

1. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{\frac{1}{3}} x = \ldots\ldots$

2. $\log_5(4xy) - \log_{\frac{1}{5}}(4xy) = \ldots\ldots$

Oefening 6.5.10.

1. Schrijf onderstaande uitdrukking in functie van $\log(k-1)$, $\log k$ en $\log(k+1)$.

$$\log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ldots\ldots$$

Oefening 6.5.11.

1. Stel dat y impliciet gegeven is als functie van t door volgende formule:

$$2t = \frac{1}{3}[\ln(y-2) - \ln(y-5)]$$

Toon aan dat $y = \dfrac{5 - 2e^{-6t}}{1 - e^{-6t}}$

Oefening 6.5.12.

1. Toon aan dat $\log\dfrac{a}{b} - \log\dfrac{c}{d} = \log\dfrac{a}{c} - \log\dfrac{b}{d}$ (met $a, b, c, d > 0$).

2. Toon aan dat $\log\dfrac{2}{a} - \log\dfrac{2}{b} = \log\dfrac{b}{a}$ (met $a, b > 0$).

CC BY-NC-SA 4.0