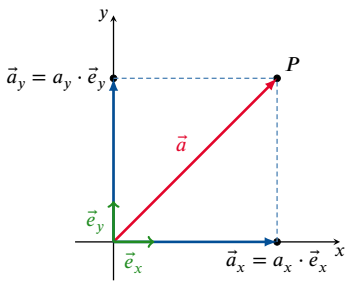
Vectorcomponenten

Wanneer we vectoren in een vlak of in de ruimte willen beschrijven, hebben we een assenstelsel nodig. Deze assen kiezen we orthogonaal (loodrecht) met eenzelfde eenheid op iedere as: ze vormen een zogenaamd **cartesiaans assenstelsel**. Conventioneel worden de assen voor een vlak benoemd met x en y.

Op elke as definiëren we een vector met lengte 1, die we de **eenheidsvector** noemen. We stellen deze voor door $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. De indices x en y duiden de richting aan, namelijk volgens de horizonale x-as en de verticale en y-as. Andere notaties van eenheidsvectoren zijn $\hat{x}$, $\hat{y}$ of $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$.

De eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ vormen een basis voor de vectoren in het x, y-vlak. Dit betekent dat je elke vector $\vec{a}$ in het x, y-vlak op éénduidige wijze kan ontbinden in **vectorcomponenten** volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$



Figuur 1 – Vector $\vec{a}$ in een x, y-assenstelsel.

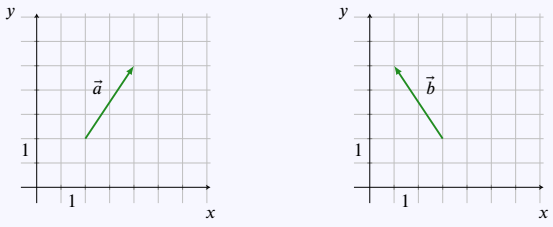
(a) $\vec{a}_x = a_x \cdot \vec{e}_x$ is dan de vectoriële component van $\vec{a}$ volgens $\vec{e}_x$.

(b) a_x noemen we de **(scalaire of algebraïsche) component** volgens de x-as.

(c) Analoog is $\vec{a}_y = a_y \cdot \vec{e}_y$ de vectoriële component van $\vec{a}$ volgens $\vec{e}_y$.

(d) a_y noemen we de scalaire of algebraïsche component volgens de y-as.

Voorbeeld 1.

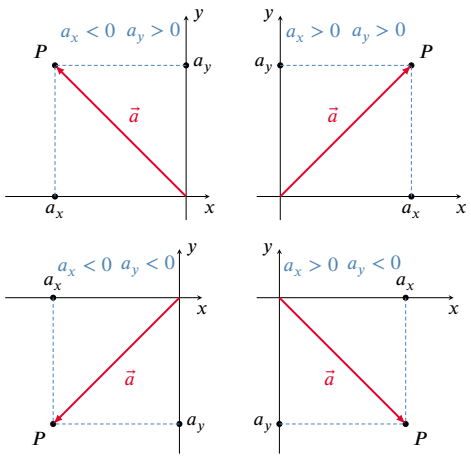


Links is $a_x = 2$ en $a_y = 3$. Je kan dus schrijven dat $\vec{a} = 2 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$ of ook $\vec{a} = (2, 3)$.

Rechts is $b_x = -2$ en $b_y = 3$. Je kan dus schrijven dat $\vec{b} = -2 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$ of ook $\vec{b} = (-2, 3)$.

De scalaire componenten zijn reële getallen die zowel positief als negatief kunnen zijn, afhankelijk van de richting en zin van de vector.

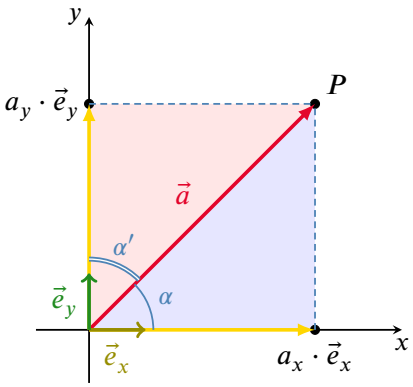
CC BY-NC-SA 4.0



Figuur 2 – Voorbeelden van vector $\vec{a}$ in verschillende kwadranten.

In vele situaties is zowel de lengte van de vector als de hoek tussen de vector en één van de assen gekend. In figuur **??** bijvoorbeeld is de hoek α aangeduid tussen de vector $\vec{a}$ en de x-as. In dit geval kunnen we schrijven dat

$$a_x = a \cdot \cos\alpha \qquad \text{en} \qquad a_y = a \cdot \sin\alpha.$$



$$\begin{cases} a_x = a\cos\alpha = a\sin\alpha' \\ a_y = a\sin\alpha = a\cos\alpha' \end{cases}$$

Figuur 3 – Vector $\vec{a}$ in een x, y-assenstelsel.

Bewijs : Door de vector $\vec{a}$ te splitsen in zijn componenten, kan er op de tekening in figuur **??** een (blauwe) rechthoekige driehoek gevonden worden waarin de hoek alfa voorkomt. De schuine zijde van deze driehoek heeft lengte a, de rechthoekszijden hebben respectievelijke lengte a_x en a_y. Door de goniometrische formules voor sinus en cosinus te gebruiken, bekomt men:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_x = a\cos\alpha$$
$$\sin\alpha = \frac{a_y}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_y = a\sin\alpha$$

Indien je de hoek α' tussen de vector $\vec{a}$ en de y-as zou gebruiken bekom je uiteraard dezelfde waarden voor de scalaire componenten, maar de gebruikte formules zijn verschillend:

$$a_x = a \cdot \sin\alpha' \qquad \text{en} \qquad a_y = a \cdot \cos\alpha'.$$

Op analoge wijze kan er nu gekeken worden naar de rode rechthoekige driehoek in bovenstaande figuur.

CC BY-NC-SA 4.0

Hierin geldt:

$$\cos\alpha' = \frac{a_y}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_y = a\cos\alpha'$$
$$\sin\alpha' = \frac{a_x}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_x = a\sin\alpha'$$

Merk op dat de hoek die de vector maakt met de x- of de y-as bepaalt of de scalaire componenten a_x en a_y positief of negatief zijn. Vertrekt de vector in de oorsprong van het assenstelsel dan zullen afhankelijk van het kwadrant waarin de vector $\vec{a}$ ligt de scalaire componenten positief of negatief zijn (zie figuur **??**).

Omgekeerd : indien de scalaire componenten van vector $\vec{a}$ gekend zijn, kan men als volgt de hoek α die de vector met de horizontale richting maakt, berekenen:

$$\alpha = \text{Bgtan}\frac{|a_y|}{|a_x|}.$$

0.1 Lengte of norm

De lengte of norm van de vector $\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$ (zie figuur **??**) kan berekend worden via

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Dit is een rechtstreeks gevolg van de stelling van Pythagoras die geldt in een rechthoekige driehoek.

Eigenschap 1. De vector $\vec{a}$ is volledig bepaald als zijn scalaire componenten volgens de assen gekend zijn. We noteren: $\vec{a} = (a_x, a_y)$.

Hieruit volgt dat $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$.

De vector $\vec{a}$ is dus de som van zijn vectoriële componenten.

De lengte of norm van de vector is gelijk aan $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Opmerking 1. Wil je een vector in de driedimensionale ruimte beschrijven, dan heb je drie assen nodig. Orthogonaal op de x- en y-as wordt de z-as ingevoerd. Een vector $\vec{a}$ kan dan ontbonden worden in drie vectorcomponenten:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z.$$

Dan is

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

en

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0