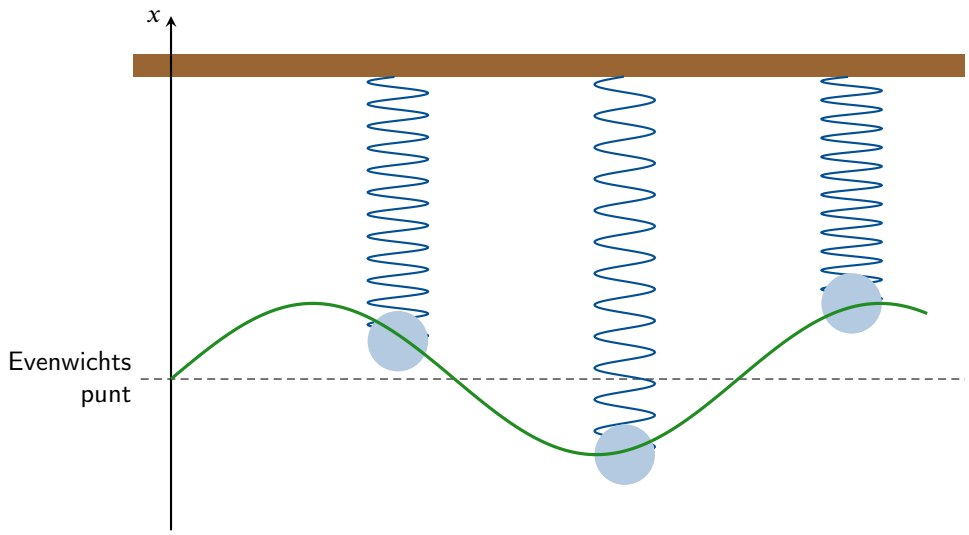
De harmonische trilling

0.1 Definitie

We bekijken een massa aan een veer. Hangt de massa in rust aan de veer, dan bevindt zij zich in het evenwichtspunt van het massa-veer systeem. Als je de massa uit haar evenwichtspunt brengt en loslaat, voert ze een trilling uit rond het evenwichtspunt.

Voer je een x-as in zoals op de figuur, dan geeft de positie x de uitwijking van de massa aan, uitgedrukt in meter. De $x(t)$-functie noemt men de **trillingsvergelijking**.



Figuur 1 – Verticale trilling van een massa aan een veer.

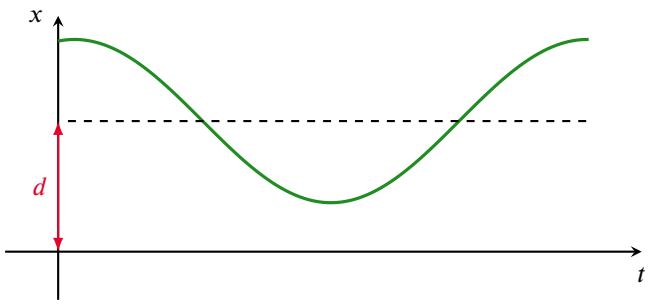
Een systeem voert een **harmonische trilling** uit als de trillingsvergelijking te schrijven is als een algemene sinusfunctie:

$$x(t) = a \cdot \sin(bt + c) + d.$$

Opmerking : in plaats van een sinus, kan er ook gekozen worden voor een cosinus in dit functievoorschrift. Wij werken hieronder verder met de keuze voor de sinus.

We bespreken nu de betekenis van a, b, c en d in dit functievoorschrift.

(a) d is de positie van het evenwichtspunt.

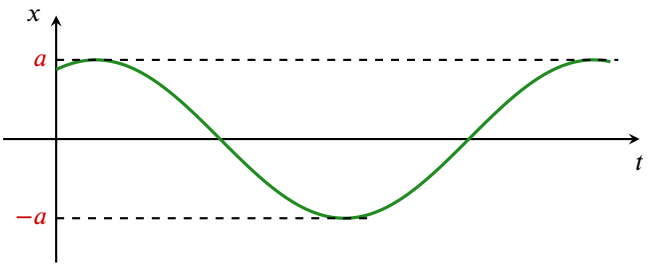


Tip : het is nuttig om bij de keuze van de x-as de oorsprong in het evenwichtspunt te kiezen, want dan wordt d gelijk aan nul. Er geldt dan dat:

$$x(t) = a \cdot \sin(bt + c).$$

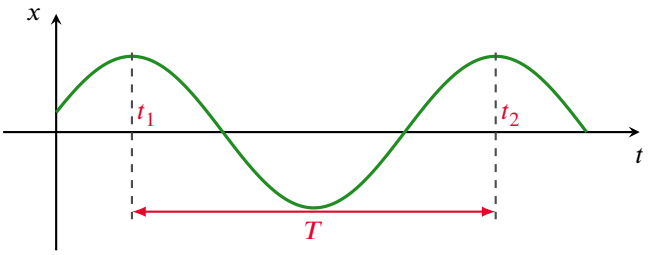
CC BY-NC-SA 4.0

(b) a is de maximale uitwijking t.o.v. het evenwichtspunt. Als $\sin(bt+c)=1$, is de uitwijking x positief, maximaal en gelijk aan $+a$. Als $\sin(bt+c)=-1$, is de uitwijking x negatief, maximaal en gelijk aan $-a$. We noemen a de **amplitude** van de trilling en noteren meestal A.



(c) b is niet rechtstreeks af te lezen uit de grafiek, maar bepaalt de periode. **De periode T is de tijdsduur van één volledige trillingsbeweging.** De uitwijking x bereikt haar positief maximum als $\sin(bt+c)=1$. Als dit de eerste maal het geval is op tijdstip t_1, dan is

$$b\cdot t_1 + c = \frac{\pi}{2}(rad) \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{\frac{\pi}{2}-c}{b}.$$



Stel dat de uitwijking x de tweede maal haar positief maximum bereikt op het tijdstip t_2. Dan geldt

$$b\cdot t_2 + c = \frac{\pi}{2}+2\pi \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi-c}{b}.$$

Na het tijdsverloop $t_2 - t_1$ herhaalt de trilling zich. Dat tijdsverloop is de periode T:

$$T = t_2 - t_1 = \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi-c}{b} - \frac{\frac{\pi}{2}-c}{b} = \frac{2\pi}{b}.$$

Bijgevolg is

$$b = \frac{2\pi}{T}$$

We zien nu dat b inderdaad de periode T bepaalt, maar dit op omgekeerd evenredige wijze. Als we deze uitdrukking herformuleren als

$$b = 2\pi\cdot f$$

dan definiëren we zo de frequentie f van de trilling. **De frequentie f is het aantal trillingen per seconde (uitgedrukt in s^{-1} of Hz).** 1 Hertz komt overeen met één volledige trillingsbeweging per seconde. We noemen b de **pulsatie** van de trilling en noteren dit als ω (uitgedrukt in rad/s). Onthoud dus dat:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

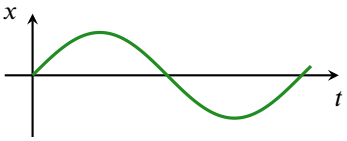
of dus ook dat

$$f = \frac{1}{T}$$

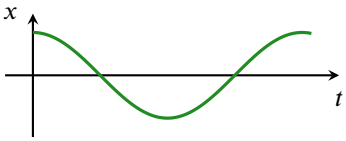
CC BY-NC-SA 4.0

(d) Ook c is niet rechtstreeks af te lezen uit de grafiek, maar bepaalt de positie en snelheid op tijdstip $t = 0$ s en wordt de **beginfase** φ_0 genoemd.

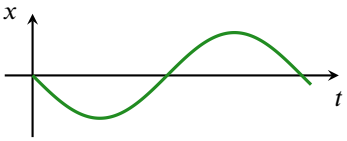
Indien $c = 0$ (rad) op $t = 0$ s, dan bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in de oorsprong en beweegt het in de positieve zin van de x-as. Als $c = \frac{\pi}{2}$ bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in het positief maximum. Indien $c = \pi$ (rad) op $t = 0$ s, dan bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in de oorsprong en beweegt het in de negatieve zin van de x-as. Als $c = -\frac{\pi}{2}$ bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in het negatief maximum.



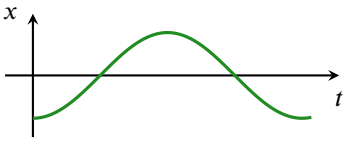
$c = 0$



$c = \frac{\pi}{2}$



$c = \pi$



$c = \frac{3\pi}{2}$

Opmerking : voor de bepaling van c is het wel degelijk van belang dat we hier voor een sinus gekozen hebben in het voorschrift van de trilling. Kiezen we een cosinus, dan zal c in elk van deze vier gevallen anders zijn ! Probeer zelf eens c te vinden in deze vier gevallen, bij de keuze van een cosinus in het trillingsvoorschrift.

Eigenschap 1. Een harmonische trilling wordt gekenmerkt door de amplitude A, de pulsatie ω, de beginfase φ_0 en de waarde d van het evenwichtspunt. Als we de oorsprong van de x-as in het evenwichtspunt leggen, wordt d nul, en wordt de trillingsvergelijking gegeven door:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

x is de uitwijking t.o.v. het evenwichtspunt; A is de maximale uitwijking t.o.v. het evenwichtspunt; ω is 2π maal het aantal trillingsbewegingen per tijdseenheid;

$\omega \cdot t + \varphi_0$ is de **fase** φ van de harmonische trilling;

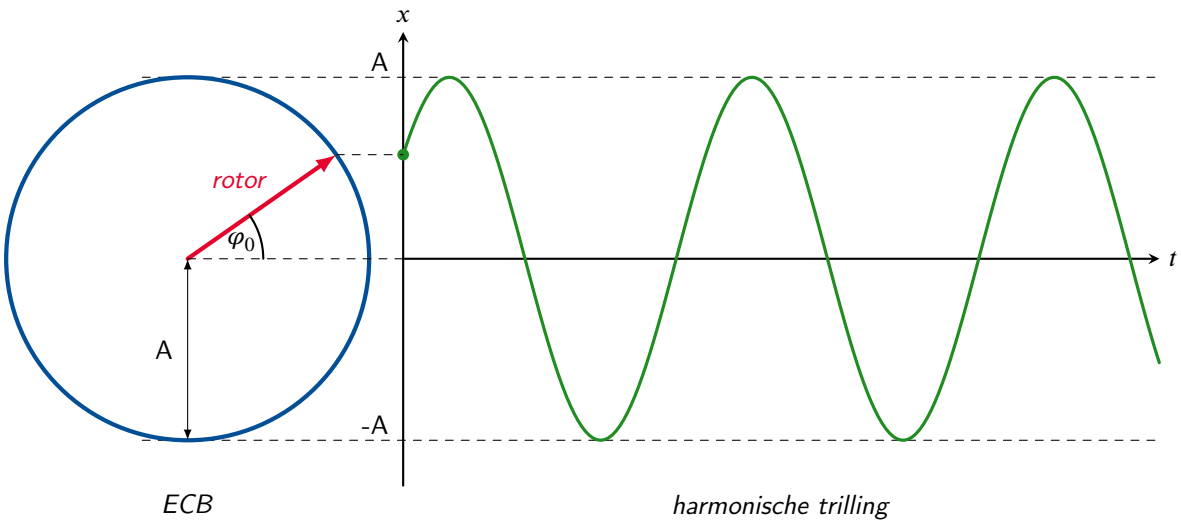
φ_0 is de fase op tijd nul.

Opmerking 1. De beginfase φ_0 wordt vaak verward met de beginuitwijking x_0. De beginfase is een hoek in radialen, terwijl de beginuitwijking de x-waarde is, in meter, op tijdstip $t = 0$. Het verband tussen de twee wordt duidelijk in de paragraaf hieronder over de link tussen een harmonische trilling en een eenparige cirkelbeweging.

CC BY-NC-SA 4.0

0.2 Link met de eenparige cirkelbeweging

De harmonische trilling kan in verband gebracht worden met de eenparige cirkelvormige beweging (ECB). Indien je de projectie van een ECB op een verticale as bekijkt, dan volgt het geprojecteerde punt een harmonische trilling.



Figuur 2 – Verband tussen de harmonische trilling en een eenparige cirkelvormige beweging.

Met behulp van de cirkel die je naast de verticale as tekent, kan je de fase φ en de beginfase φ_0 visueel voorstellen. De hoek tussen de horizontale en de rotor (roterende vector) die overeenkomt met de uitwijking op een willekeurig tijdstip t, is φ, en die hoek op tijdstip $t = 0$ is dan uiteraard gelijk aan de beginfase φ_0.

0.3 Trillingen in fase en in tegenfase

We beschouwen twee harmonische trillingen met dezelfde pulsatie ω:

$$x_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{01}) = A_1 \cdot \sin \varphi_1,$$

$$x_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{02}) = A_2 \cdot \sin \varphi_2.$$

Het **faseverschil** $\Delta\varphi$ tussen de twee trillingen is:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \cdot t + \varphi_{02} - \left(\omega \cdot t + \varphi_{01}\right) = \varphi_{02} - \varphi_{01}.$$

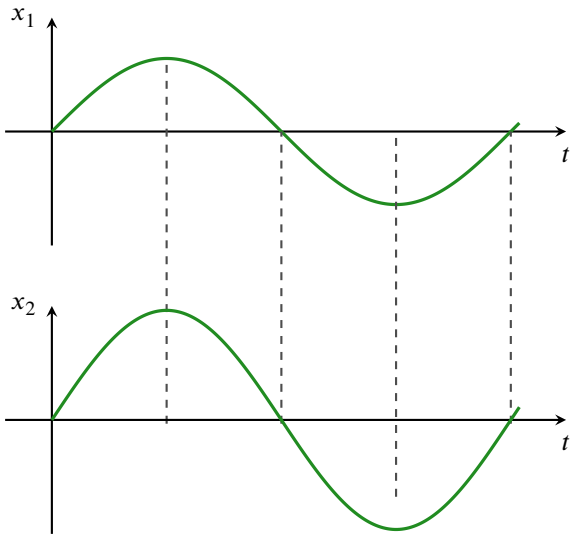
We bekijken twee speciale gevallen (met $n \in \mathbb{Z}$):

(a)

$$\Delta\varphi = n \cdot 2\pi.$$

De twee trillingen zijn **in fase**: de twee systemen passeren op hetzelfde ogenblik het evenwichtspunt en bewegen dan ook in dezelfde zin. Ze bereiken op hetzelfde ogenblik hun positief maximum.

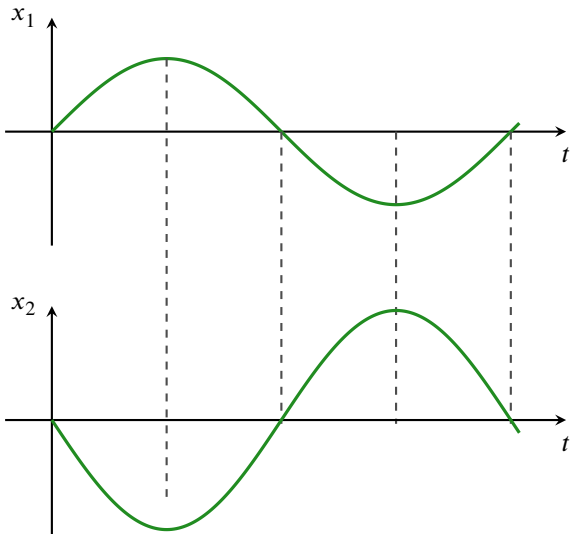
CC BY-NC-SA 4.0



(b)

$$\Delta\varphi = (2n+1)\cdot\pi.$$

De twee trillingen zijn dan **in tegenfase**: de twee systemen passeren op hetzelfde ogenblik het evenwichtspunt maar bewegen dan in tegengestelde zin. Als het ene systeem zijn positief maximum bereikt, is het andere systeem in zijn negatief maximum.



Definitie 1. Twee harmonische trillingen met dezelfde pulsatie zijn

- **in fase** als het faseverschil gelijk is aan $n\cdot 2\pi$;
- **in tegenfase** als het faseverschil gelijk is aan $(2n+1)\cdot\pi$. $(n\in\mathbb{Z})$

CC BY-NC-SA 4.0