Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

Oefening 1. De positie van een deeltje varieert van $\vec{r}_1 = -2,0\cdot\vec{e}_x + 4,0\cdot\vec{e}_y$ naar $\vec{r}_2 = 5,0\cdot\vec{e}_x + 7,0\cdot\vec{e}_y$. Wat is de verplaatsing van dit deeltje ten opzichte van de x-as en de y-as? De eenheid wordt uitgedrukt in m.

$$\Delta x = 7.0 \text{ m}$$

$$\Delta y = 3.0 \text{ m}$$

Uitwerking: De verplaatsingsvector is gelijk aan

$$\begin{aligned}
&\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\
&\Leftrightarrow \Delta\vec{r} = \left(5,0\cdot\vec{e}_x + 7,0\cdot\vec{e}_y\right) - \left(-2,0\cdot\vec{e}_x + 4,0\cdot\vec{e}_y\right) \\
&\Leftrightarrow \Delta\vec{r} = (5,0-(-2,0))\cdot\vec{e}_x + (7,0-4,0)\cdot\vec{e}_y \\
&\Leftrightarrow \Delta\vec{r} = 7,0\cdot\vec{e}_x + 3,0\cdot\vec{e}_y = (7,0;3,0)
\end{aligned}$$

Omdat we ook kunnen schrijven dat $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y)$ volgt dat $\Delta x = 7,0$ m en $\Delta y = 3,0$ m.

Oefening 2. Een golfer klopt een balletje in een eerste shot zodat de verplaatsing van het balletje kan beschreven worden door een verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}_1 = 250\cdot\vec{e}_x$. Zijn tweede shot wordt beschreven door $\Delta\vec{r}_2 = 175\cdot\vec{e}_x + 66\cdot\vec{e}_y$. Wat is de afstand dat het balletje aflegt in elk shot en wat is de lengte van de totale verplaatsingsvector? De positie wordt uitgedrukt in meter.

$$\left\|\Delta\vec{r}_1\right\| = 250 \text{ m}$$

$$\left\|\Delta\vec{r}_1\right\| = 187 \text{ m}$$

$$\left\|\Delta\vec{r}\right\| = 430 \text{ m}$$

Uitwerking: De afstand die het balletje aflegt komt overeen met de lengte van de verplaatsingsvector. Voor het eerste shot geldt dat

$$\left\|\Delta\vec{r}_1\right\| = \sqrt{\left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\Delta y_1\right)^2} = \sqrt{(250 \text{ m})^2 + (0 \text{ m})^2} = 250 \text{ m}$$

Voor het tweede shot geldt dat

$$\left\|\Delta\vec{r}_2\right\| = \sqrt{\left(\Delta x_2\right)^2 + \left(\Delta y_2\right)^2} = \sqrt{(175 \text{ m})^2 + (66 \text{ m})^2} = 187 \text{ m}$$

De som van de twee verplaatsingsvectoren is gelijk aan

$$\begin{aligned}
&\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 \\
&\Leftrightarrow \Delta\vec{r} = 250\cdot\vec{e}_x + 175\cdot\vec{e}_x + 66\cdot\vec{e}_y \\
&\Leftrightarrow \Delta\vec{r} = 425\cdot\vec{e}_x + 66\cdot\vec{e}_y
\end{aligned}$$

Bijgevolg is de lengte van de totale verpaatsing gelijk aan

$$\left\|\Delta\vec{r}\right\| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(425 \text{ m})^2 + (66 \text{ m})^2} = 430 \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

Oefening 3. Een boot vertrekt vanuit rust uit de haven op $t = 0$ en vaart een meer op met een versnelling $\vec{a} = 2,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \vec{e}_x$. Een sterke wind blaast de boot vooruit waardoor de boot een extra snelheid krijgt $\vec{v} = 2,0\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x + 3,5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_y$. Hoe groot is de snelheid van de boot na 5 seconden?

$$v = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Uitwerking: De boot vertrekt vanuit rust en versnelt in de richting van de x-as. De snelheidsvergelijkingen van de boot in afwezigheid van wind ten opzichte van de x-as en de y-as zijn dan $v_x(t) = 2,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t$ en $v_y(t) = 0$. Tellen we hier de extra snelheid vanwege de wind bij, dan bekomen we na 5 seconden:

$$v_x = 2,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5\ s + 2,0\frac{\text{m}}{\text{s}} = 14,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

en

$$v_y = 3,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De grootte van de totale snelheid is bijgevolg

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(14,5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(3,5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Oefening 4. Een dartspijltje wordt met een snelheid van $12\frac{\text{m}}{\text{s}}$ horizontaal weggegooid in de richting van de roos van het dartsbord, dat $2,6$ m verder staat opgesteld. Hoever onder de roos raakt het dartspijltje het bord?

$$\Delta y = 24\ \text{cm}$$

Uitwerking: We passen de algemene formule voor de eenparig veranderlijke beweging toe $x = x_0 + v_{x,0} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2$ op deze opgave.

We kiezen de x-as horizontaal naar rechts en de y-as verticaal omhoog. Het pijltje vertrekt in de oorsprong van het assenstelsel.

We bekomen dan voor de x-richting

$$x(t) = 12\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

.

Voor de y-richting wordt dit

$$y(t) = \frac{-9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot t^2$$

Op het ogenblik dat het dartspijltje de roos raakt, geldt voor de x-richting dat $2,6\ \text{m} = 12\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$. Hieruit volgt dat $t = \frac{2,6}{12}\text{s} = 0,22\ \text{s}$.

We vullen deze waarde in in de $y = -4,9\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0,22\ \text{s})^2 = -0,24\ \text{m}$

Het pijltje zakt dus tijdens de beweging naar de roos over een afstand van 24 cm.

Oefening 5. Een vliegtuig vliegt met een snelheid van 360 km/h op een hoogte van 750 m. Een pallet met voedsel wordt uit het vliegtuig geduwd. Veronderstel dat de parachute niet open gaat, hoe ver van het punt waar de pallet het vliegtuig verlaat komt dit neer op de grond?

CC BY-NC-SA 4.0

$$\Delta x = 124 \ \cdot 10 \text{ m}$$

Uitwerking: Op het ogenblik dat de palet gelost wordt is $t_0 = 0$, en de positie $x_0 = 0, y_0 = 750$ m. We kiezen de x-as horizontaal naar rechts en de y-as verticaal omhoog. We zoeken eerst hoe lang het duurt voor de palet om 750 meter naar beneden te vallen. De bewegingsvergelijking is

$$y(t) = 750 \text{ m} + \frac{1}{2}\left(-9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) t^2$$

en dus vinden we $y(t) = 0$ voor $t = \sqrt{\frac{1500}{9,81}}$ s $= 12,4$ s.

Voor de beweging in de x-richting vinden we, aangezien het vliegtuig een snelheid heeft van 100 m/s, dat

$$x(t) = 100 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t \, .$$

Zo vinden we dat $x(t) = 1240 \text{ m} = 124 \cdot 10 \text{ m}$.

De pallet komt $124 \cdot 10$ m verder dan het punt waar het het vliegtuig verlaat, neer op de grond.

Oefening 6. Op een bepaald ogenblik zakt een warmeluchtballon op 75 m hoogte verticaal naar beneden met een snelheid van $1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Op dit ogenblik gooit een meisje een bal horizontaal weg met een snelheid van $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wanneer het meisje op de grond landt, hoe ver van de landingsplaats zal ze haar bal terugvinden?

$$\Delta x = 57 \text{ m}$$

Uitwerking: We passen de algemene formule voor de eenparig veranderlijke beweging toe $x = x_0 + v_{x,0} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2$ op deze opgave.

We kiezen de x-as horizontaal naar rechts en de y-as verticaal omhoog. We kiezen de oorsprong op de grond onder de luchtballon. Het balletje vertrekt horizontaal op 75 m hoogte.

We bekomen voor de x-richting

$$x(t) = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

.

Voor de y-richting wordt dit

$$y = 75 \text{ m} - 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + \frac{-9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot t^2$$

Op het ogenblik dat het balletje de grond raakt, geldt voor de y-richting dat

$$0 = 75 \text{ m} - 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 4,91 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

De oplossing van deze vergelijking levert het tijdstip waarop de bal de grond raakt. We bekomen hiervoor $t = 3,8$ s.

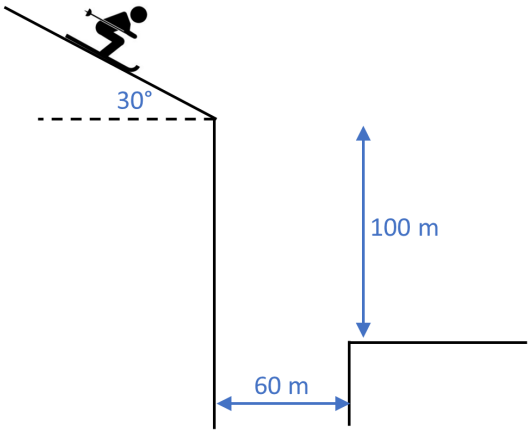
We vullen deze waarde in in de x(t)-vergelijking en bekomen $x(3,8 \text{ s}) = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3,8 \text{ s} = 57 \text{ m}$.

Het meisje vindt de bal op 57 m van de landingsplaats.

CC BY-NC-SA 4.0

Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

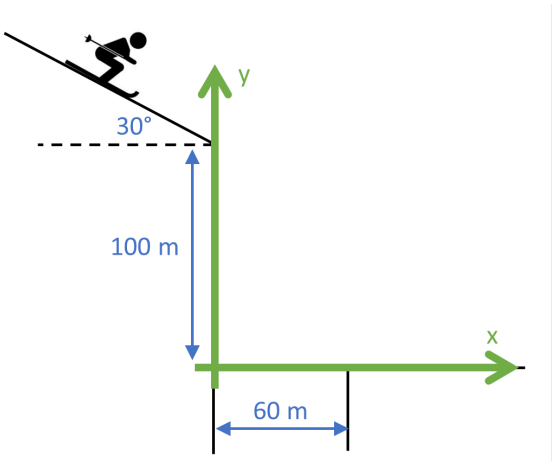
Oefening 7. Een skiër skiet langs een helling die 30° maakt met de horizontale richting aan een snelheid van 54 km/h naar beneden. Plots verschijnt er een kloof van 60 m breed. De overkant van de kloof ligt 100 m lager. Zal de skier over de kloof geraken? Hoeveel meter legt de skiër in horizontale richting af als hij 100 m zakt?



$$\Delta x = 49 \text{ m}$$

Uitwerking: We passen de algemene formule voor de eenparig veranderlijke beweging toe $x = x_0 + v_{x,0} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2$ op deze opgave.

We kiezen de x-as horizontaal naar rechts en de y-as verticaal omhoog, zoals weergegeven op de figuur.



We nemen als startpositie van skiër (0,100) en een beginsnelheid $v_{x,0} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos(30°) = 13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ en $v_{y,0} = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin(30°) = -7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

We bekomen voor de x-richting

$$x = 13 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

CC BY-NC-SA 4.0

.

Voor de y-richting wordt dit

$$y = 100\ \text{m} - 7,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + \frac{-9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot t^2$$

Op het ogenblik dat de skiër 100 m gezakt is, geldt voor de y-richting dat

$$0 = 100\ \text{m} - 7,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

De oplossing van deze vergelijking levert het tijdstip waarop de skiër 100 m lager is beland. We bekomen hiervoor $t = 3,8$ s.

We vullen deze waarde in in de x(t)-vergelijking en bekomen $x = 13\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3,8\ \text{s} = 49\ \text{m}$.

De skiër legt tijdens het zakken van 100 m in de horizontale richting slechts een afstand van 49 m af. Hij komt dus in de kloof terecht.

Oefening 8. Een vliegwiel draait 35 toeren per seconde aan een constante snelheid. Over welke hoek, uitgedrukt in radialen, draait een punt op het vliegwiel in 20 seconden?

$$\Delta\theta = 44\ \cdot 10^2\ \text{rad}$$

Uitwerking: De hoeksnelheid is gelijk aan $\omega = 2\pi \cdot f$. De frequentie is $f = 35$ Hz, bijgevolg is de hoeksnelheid gelijk aan $\omega = 2\pi \cdot 35\ \text{Hz} = 22 \cdot 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Een punt op het vliegwiel draait dus per seconde over een hoek van 220 radialen. Na 20 seconden is dus $\Delta\theta = 22 \cdot 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 20\ \text{s} = 44 \cdot 10^2\ \text{rad}$

Oefening 9. Een loopster die deelneemt aan de 200 m wedstrijd moet aan het einde van de piste omkeren. De bocht van de piste heeft een straal van 40,0 m. De loopster loopt de volledige wedstrijd aan eenzelfde snelheid. Ze loopt de wedstrijd uit in 25,0 s. Hoe groot is haar centripetale versnelling als ze bocht neemt?

$$a = 1.6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Uitwerking: De constante snelheid van de loopster is gelijk aan $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200\ \text{m}}{25,0\ \text{s}} = 8,00\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Voor de versnelling van een object dat een eenparige cirkelbeweging uitvoert, geldt dat

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(8,00\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{40,0\ \text{m}} = 1,60 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Oefening 10. Een ventilator draait met een constane snelheid 350 toeren per minuut. Hoe groot is de snelheid van een punt dat zich op 15 cm van de draaias bevindt?

$$v = 5.4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Uitwerking: Voor de hoeksnelheid van de cirkelbeweging geldt dat $\omega = 2\pi \cdot f$. In dit geval is $f = \frac{350}{60\ \text{s}} =$

CC BY-NC-SA 4.0

$5,8$ Hz. Bijgevolg is $\omega = 2\pi \cdot 5,8 \text{ Hz} = 36\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Omdat de snelheid gelijk is aan $v = \omega \cdot r$ vinden we dat een punt op 15 cm van draaias een snelheid heeft die gelijk is aan

$$v = 36\frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,15 \text{ m} = 5,4\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

CC BY-NC-SA 4.0