KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Blik Op Fysica (FABER 2026)

Natuurkunde Introductieweek Basiswetenschappen

(versie 25 augustus 2026 H)

Inhoudsopgave

1 Inleiding 1.1
- 1.1 Intro . . . 1.1

2 Vectorrekenen 2.1
- 2.1 Intro vectorrekenen . . . 2.1
- 2.2 Scalaire versus vectoriële grootheden . . . 2.2
- 2.3 Vectorcomponenten . . . 2.3
- 2.4 Bewerkingen met vectoren . . . 2.6
- 2.5 Voorbeeldoefeningen . . . 2.10
- 2.6 Oefeningen Vectorrekenen . . . 2.11

3 Kinematica 3.1
- 3.1 Intro kinematica . . . 3.1
- 3.2 Grootheden kinematica . . . 3.2
- 3.3 Eén-dimensionale kinematica . . . 3.6
- 3.4 Voorbeeldoefening . . . 3.10
- 3.5 Twee-dimensionale kinematica . . . 3.11
- 3.6 De cirkelvormige beweging . . . 3.14
- 3.7 Oefeningen Kinematica . . . 3.17

4 Dynamica 4.1
- 4.1 Intro dynamica . . . 4.1
- 4.2 Kracht . . . 4.2
- 4.3 Soorten krachten . . . 4.3
- 4.4 Krachtendiagramma's . . . 4.8
- 4.5 De wetten van Newton . . . 4.12
- 4.6 Centripetaalkracht . . . 4.15
- 4.7 Oefeningen Dynamica . . . 4.17

5 Arbeid en energie 5.1
- 5.1 Intro arbeid en energie . . . 5.1
- 5.2 Arbeid en vermogen . . . 5.2
- 5.3 Arbeid en kinetische energie . . . 5.5
- 5.4 Potentiële energie . . . 5.6
- 5.5 Behoudswetten . . . 5.7
- 5.6 Oefeningen Arbeid en Energie . . . 5.8

6 Herhalingsoefeningen 6.1
6.1 Herhalingsoefeningen: vectoren 6.1
6.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging 6.4
6.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging 6.6
6.4 Herhalingsoefeningen: dynamica 6.8
6.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie 6.12

7 Bibliografie 7.1
7.1 Bibliografie 7.1

1.1 Intro



Deze online cursus behandelt leerstof fysica waarmee je best vertrouwd bent bij het begin van je studies

- lichamelijke opvoeding en bewegingswetenschappen
- revalidatiewetenschappen en kinesitherapie
- sommige schakelprogramma's

Voor de meeste toekomstige studenten is dit een opfrissing van leerstof die ze al hebben gezien. Toch is geprobeerd om bij de invoering van begrippen en concepten ook voldoende rekening te houden met studenten waarvoor de leerstof volledig nieuw is.

Deze cursusnota's zijn beschikbaar in meerdere vormen:

(a) als PDF, die je ofwel op je computer kan lezen, ofwel kan printen.

Als je de PDF op de computer leest, werken allerlei interne links naar oefeningen, definities en eigenschappen. In een geprinte versie verdwijnt een deel van die functionaliteit.

Via de KU Leuven website https://set.kuleuven.be/voorkennis/blik-op-fysica/faber/voorwoord_faber vind je de online versie die extra functionaliteiten biedt.

(b) als online applicatie, met volgende extra functionaliteiten:

- interactieve antwoordmogelijkheden, met feedback en/of hints
- directe links naar extra oefeningen

Je kan zowel elk afzonderlijk onderdeel als de volledige cursus als PDF bestand downloaden. Er zijn telkens twee versies, een 'handout' versie met de opgaven van de oefeningen, maar zonder de antwoorden, en een 'standaard' versie die van de meeste oefeningen ook antwoorden en zelfs uitgewerkte oplossingen bevat.

De inhoud van deze recent aangemaakte online cursus is gebaseerd op leerstof fysica van het secundair onderwijs (2de en 3de graad 2u fysica) en wordt gebruikt als cursusmateriaal tijdens verschillende zomercursussen basiswetenschappen die jaarlijks georganiseerd worden. Het online leerplatform is bovendien ook uitermate geschikt voor zelfstudie.

Aangezien deze online cursus nog voortdurend wordt aangevuld en bijgewerkt, is alle feedback steeds welkom op zomercursus@set.kuleuven.be !

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Intro vectorrekenen

Rekenen met vectoren is een basisvaardigheid voor het vak fysica. In dit hoofdstuk bespreken we het verschil tussen een scalaire en een vectoriële grootheid. We vatten de belangrijkste eigenschappen en rekenregels voor vectoren samen: vectoren optellen, vectoren vermenigvuldigen met een reëel getal, en de componenten van een vector bepalen ten opzichte van een assenstelsel.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Scalaire versus vectoriële grootheden

Heel wat grootheden in de fysica kunnen voorgesteld worden door een getalwaarde met een eenheid. Denk bijvoorbeeld aan het volume van een ton, de luchttemperatuur, het tijdstip van een gebeurtenis. Deze grootheden hebben een scalair karakter.

Maar vaak zijn enkel een getal en een eenheid niet voldoende om een grootheid precies te bepalen. Stel je wandelt in een dorp en je bent op zoek naar de supermarkt. Een voorbijganger laat je weten dat het in vogelvlucht nog 500 m wandelen is. Met deze info kan de supermarkt eender waar liggen op een cirkel met straal 500 m. Om de exacte positie van de supermarkt te weten moet ook de richting en de zin, bijvoorbeeld noordoosten, gegeven zijn. Pas als zowel de afstand als de richting gekend zijn, ligt de positie vast. Deze grootheid heeft een vectorieel karakter.

Eigenschap 2.2.1. Fysische grootheden zijn ofwel 'scalair' ofwel 'vectorieel':

(a) **Scalaire grootheden** zijn volledig bepaald door een rëeel getal en een eenheid.
Voorbeelden: een massa m, lengte ℓ, temperatuur T, ...

(b) **Vectoriële grootheden** zijn volledig bepaald door een aangrijpingspunt, grootte (maatgetal met eenheid), richting en zin.
Voorbeelden: positie $\vec{r}$, snelheid $\vec{v}$, versnelling $\vec{a}$, kracht $\vec{F}$, elektrisch veld $\vec{E}$, ...

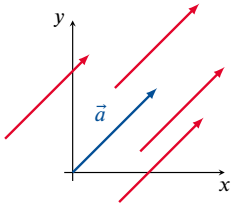
Een vectoriële grootheid wordt genoteerd door een pijltje boven de letter: $\vec{a}$.
De grootte van deze vector is een reëel getal (scalar) en noteren we als a (dus als het vectorsymbool zonder pijltje) of $\|\vec{a}\|$.

Een vector wordt grafisch voorgesteld door een pijl, waarvan de lengte evenredig is met zijn grootte. De rechte verbonden met de vector wordt de **drager** genoemd. De richting van deze drager komt overeen met de richting van de vectoriële grootheid (vb. horizontaal, verticaal, ...). De zin van de vectorpijl is de zin waarin de vectoriële grootheid wijst (vb. links, rechts, ...)



Figuur 1 – De drager van een vector $\vec{a}$.

In de fysica maakt men een onderscheid tussen vrije en gebonden vectoren. Als je een vrije vector verschuift in het vlak of in de 3-dimensionele ruimte, blijft dit dezelfde vector:



Figuur 2 – Vrije vectoren $\vec{a}$.

Op een afbeelding stellen verschillende pijlen met dezelfde lengte, richting en zin *dezelfde vrije vector* voor maar *verschillende gebonden vectoren*:

(a) **Vrije vectoren** zijn gelijk als ze dezelfde lengte, richting en zin hebben.

(b) **Gebonden vectoren** zijn gelijk als ze bovendien hetzelfde aangrijpingspunt hebben.

Afhankelijk van het probleem kunnen aangrijpingspunten soms wel belangrijk zijn, en soms niet.

CC BY-NC-SA 4.0

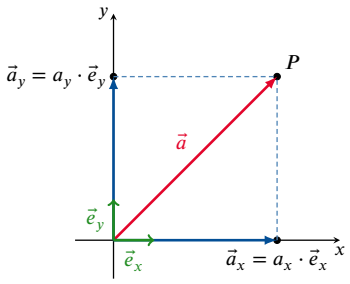
2.3 Vectorcomponenten

Wanneer we vectoren in een vlak of in de ruimte willen beschrijven, hebben we een assenstelsel nodig. Deze assen kiezen we orthogonaal (loodrecht) met eenzelfde eenheid op iedere as: ze vormen een zogenaamd **cartesiaans assenstelsel**. Conventioneel worden de assen voor een vlak benoemd met x en y.

Op elke as definiëren we een vector met lengte 1, die we de **eenheidsvector** noemen. We stellen deze voor door $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. De indices x en y duiden de richting aan, namelijk volgens de horizonale x-as en de verticale en y-as. Andere notaties van eenheidsvectoren zijn $\hat{x}$, $\hat{y}$ of $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$.

De eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ vormen een basis voor de vectoren in het x, y-vlak. Dit betekent dat je elke vector $\vec{a}$ in het x, y-vlak op éénduidige wijze kan ontbinden in **vectorcomponenten** volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$



Figuur 3 – Vector $\vec{a}$ in een x, y-assenstelsel.

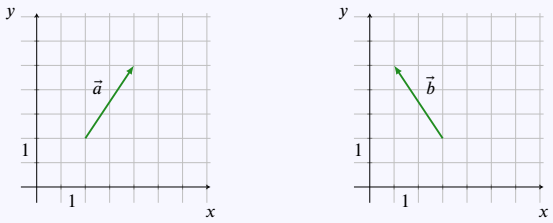
(a) $\vec{a}_x = a_x \cdot \vec{e}_x$ is dan de vectoriële component van $\vec{a}$ volgens $\vec{e}_x$.

(b) a_x noemen we de **(scalaire of algebraïsche) component** volgens de x-as.

(c) Analoog is $\vec{a}_y = a_y \cdot \vec{e}_y$ de vectoriële component van $\vec{a}$ volgens $\vec{e}_y$.

(d) a_y noemen we de scalaire of algebraïsche component volgens de y-as.

Voorbeeld 2.3.1.



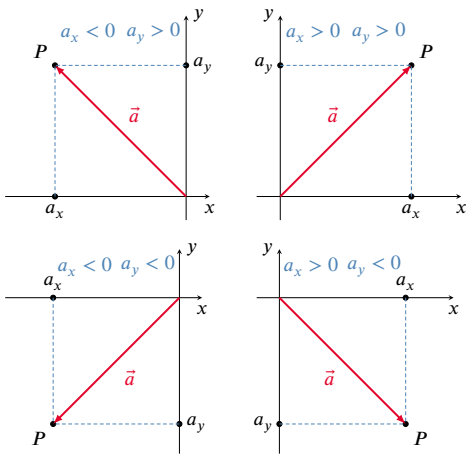
Links is $a_x = 2$ en $a_y = 3$. Je kan dus schrijven dat $\vec{a} = 2 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$ of ook $\vec{a} = (2, 3)$.

Rechts is $b_x = -2$ en $b_y = 3$. Je kan dus schrijven dat $\vec{b} = -2 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$ of ook $\vec{b} = (-2, 3)$.

De scalaire componenten zijn reële getallen die zowel positief als negatief kunnen zijn, afhankelijk van de richting en zin van de vector.

CC BY-NC-SA 4.0

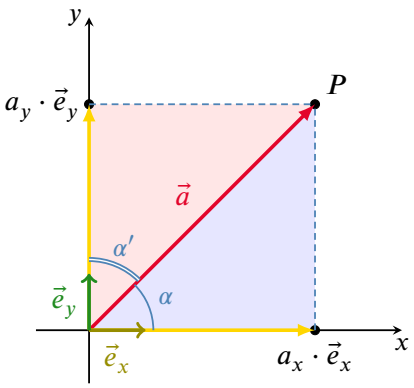
2.3 Vectorcomponenten



Figuur 4 – Voorbeelden van vector $\vec{a}$ in verschillende kwadranten.

In vele situaties is zowel de lengte van de vector als de hoek tussen de vector en één van de assen gekend. In figuur 5 bijvoorbeeld is de hoek α aangeduid tussen de vector $\vec{a}$ en de x-as. In dit geval kunnen we schrijven dat

$$a_x = a \cdot \cos\alpha \qquad \text{en} \qquad a_y = a \cdot \sin\alpha.$$



$$\begin{cases} a_x = a\cos\alpha = a\sin\alpha' \\ a_y = a\sin\alpha = a\cos\alpha' \end{cases}$$

Figuur 5 – Vector $\vec{a}$ in een x, y-assenstelsel.

Bewijs : Door de vector $\vec{a}$ te splitsen in zijn componenten, kan er op de tekening in figuur 5 een (blauwe) rechthoekige driehoek gevonden worden waarin de hoek alfa voorkomt. De schuine zijde van deze driehoek heeft lengte a, de rechthoekszijden hebben respectievelijke lengte a_x en a_y. Door de goniometrische formules voor sinus en cosinus te gebruiken, bekomt men:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_x = a\cos\alpha$$
$$\sin\alpha = \frac{a_y}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_y = a\sin\alpha$$

Indien je de hoek α' tussen de vector $\vec{a}$ en de y-as zou gebruiken bekom je uiteraard dezelfde waarden voor de scalaire componenten, maar de gebruikte formules zijn verschillend:

$$a_x = a \cdot \sin\alpha' \qquad \text{en} \qquad a_y = a \cdot \cos\alpha'.$$

Op analoge wijze kan er nu gekeken worden naar de rode rechthoekige driehoek in bovenstaande figuur.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Vectorcomponenten

Hierin geldt:

$$\cos\alpha' = \frac{a_y}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_y = a\cos\alpha'$$
$$\sin\alpha' = \frac{a_x}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_x = a\sin\alpha'$$

Merk op dat de hoek die de vector maakt met de x- of de y-as bepaalt of de scalaire componenten a_x en a_y positief of negatief zijn. Vertrekt de vector in de oorsprong van het assenstelsel dan zullen afhankelijk van het kwadrant waarin de vector $\vec{a}$ ligt de scalaire componenten positief of negatief zijn (zie figuur 4).

Omgekeerd : indien de scalaire componenten van vector $\vec{a}$ gekend zijn, kan men als volgt de hoek α die de vector met de horizontale richting maakt, berekenen:

$$\alpha = \text{Bgtan}\frac{|a_y|}{|a_x|}.$$

2.3.1 Lengte of norm

De lengte of norm van de vector $\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$ (zie figuur 5) kan berekend worden via

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Dit is een rechtstreeks gevolg van de stelling van Pythagoras die geldt in een rechthoekige driehoek.

Eigenschap 2.3.1. De vector $\vec{a}$ is volledig bepaald als zijn scalaire componenten volgens de assen gekend zijn. We noteren: $\vec{a} = (a_x, a_y)$.

Hieruit volgt dat $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$.

De vector $\vec{a}$ is dus de som van zijn vectoriële componenten.

De lengte of norm van de vector is gelijk aan $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Opmerking 2.3.1. Wil je een vector in de driedimensionale ruimte beschrijven, dan heb je drie assen nodig. Orthogonaal op de x- en y-as wordt de z-as ingevoerd. Een vector $\vec{a}$ kan dan ontbonden worden in drie vectorcomponenten:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z.$$

Dan is

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

en

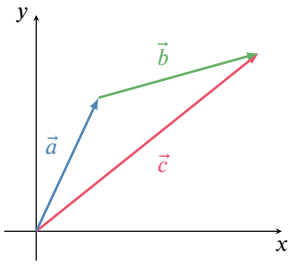
$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met vectoren

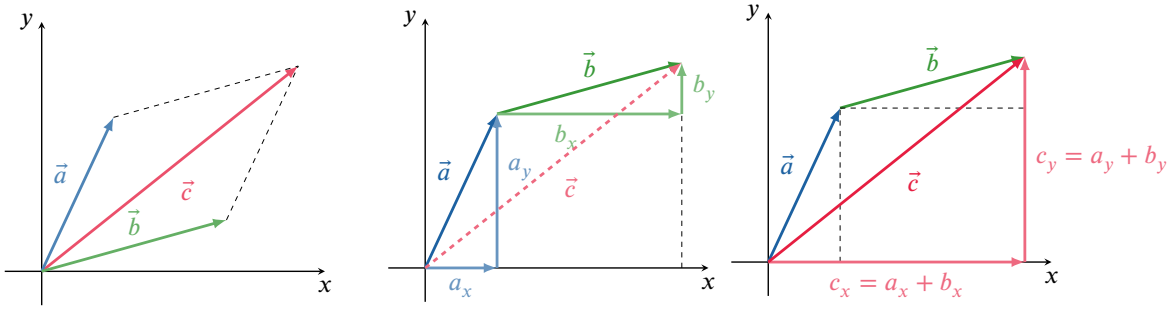
2.4.1 Som van twee vectoren

De som van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bekomt men door $\vec{b}$ te verschuiven zodat het beginpunt samenvalt met het eindpunt van $\vec{a}$. De vector die men bekomt door dan het beginpunt van $\vec{a}$ te verbinden met het eindpunt van $\vec{b}$ is de gezochte somvector $\vec{a}+\vec{b}$. Deze grafische constructie noemt men de **kop-staart-methode.**



Figuur 6 – De vector $\vec{c}$ is de som van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, bekomen met de kop-staart-methode

Een andere grafische methode om de somvector te bekomen is de zogenaamde **parallellogrammethode**. In dit geval verschuiven we geen van beide vectoren, en laten we dus de beginpunten van beide vectoren in de oorsprong liggen. Vervolgens maken we een parallellogram door de twee vectoren als zijden te gebruiken: Aangezien overstaande zijden in een parallellogram even lang en evenwijdig zijn, is er maar 1 mogelijkheid. We vinden de somvector dan als de vector met beginpunt in de oorsprong en eindpunt in de overstaande hoek van het parallellogram.



Figuur 7 – De vector $\vec{c}$ is de som van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, bekomen met de parallellogrammethode

Indien de scalaire componenten van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gegeven zijn, kunnen we de vectorsom $\vec{c}$ berekenen:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a}+\vec{b}\\ &= \left(a_x\cdot\vec{e}_x+a_y\cdot\vec{e}_y\right)+\left(b_x\cdot\vec{e}_x+b_y\cdot\vec{e}_y\right)\\ &= \left(a_x+b_x\right)\cdot\vec{e}_x+\left(a_y+b_y\right)\cdot\vec{e}_y\end{aligned}$$

Anderzijds geldt natuurlijk dat $\vec{c}=c_x\vec{e}_x+c_y\vec{e}_y$. Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} c_x = a_x+b_x \\ c_y = a_y+b_y \end{cases}.$$

2.4.2 Verschil van twee vectoren

We kunnen het verschil van 2 vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, genoteerd als $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, zien als de som van de vector $\vec{a}$ en de vector $-\vec{b}$. We noemen $-\vec{b}$ hier de **tegengestelde vector** van $\vec{b}$. De tegengestelde vector heeft dan

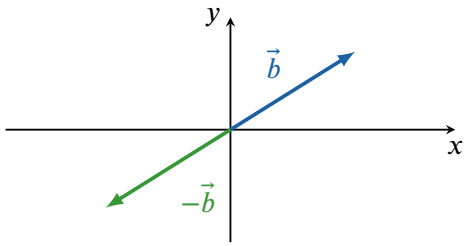
CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met vectoren

ook de tegengestelde componenten van de originele vector:

$$-\vec{b} = -\left(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y\right) = -b_x\vec{e}_x + (-b_y)\vec{e}_y\,.$$

Deze tegengestelde vector vinden we ook eenvoudig grafisch door de originele vector te spiegelen rond de oorsprong (let wel dat we hier veronderstellen dat de vector een beginpunt in de oorsprong heeft, anders moet de vector eerst nog verschoven worden tot dit wel het geval is).



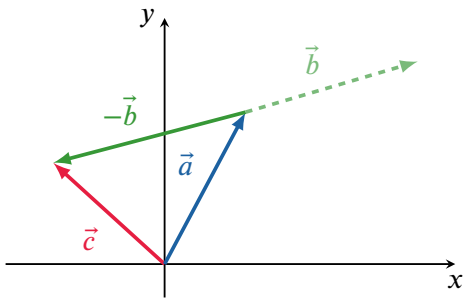
Figuur 8 – Een vector en zijn tegengestelde vector.

We kunnen bijgevolg de grafische methoden van de vorige sectie overnemen, en ook met componenten vinden we eenvoudig het resultaat:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} - \vec{b}\\ &= \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)\\ &= \left(a_x\cdot\vec{e}_x + a_y\cdot\vec{e}_y\right) + \left(-b_x\cdot\vec{e}_x + \left(-b_y\right)\cdot\vec{e}_y\right)\\ &= \left(a_x - b_x\right)\cdot\vec{e}_x + \left(a_y - b_y\right)\cdot\vec{e}_y\end{aligned}$$

Anderzijds geldt natuurlijk dat $\vec{c} = c_x\vec{e}_x + c_y\vec{e}_y$. Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \end{cases}.$$



Figuur 9 – De vector $\vec{c}$ is het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Men noteert: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

2.4.2.1 Toepassing: Verplaatsingsvector

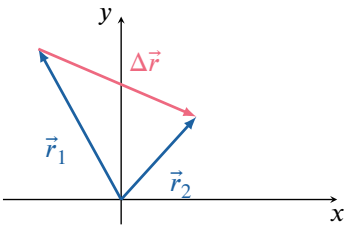
In de fysica wordt het verschil van twee vectoren bijvoorbeeld gebruikt in de zogenaamde **verplaatsingsvector**. We bekijken twee punten in de ruimte, die we noteren met de vectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ (bijvoorbeeld het vertrekpunt van een auto, en het punt van aankomst). Dan is de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ gedefinieerd als

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met vectoren

Deze vector wijst van $\vec{r}_1$ naar $\vec{r}_2$, en geeft dus de verplaatsing weer.



Figuur 10 – De verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$.

De verplaatsingsvector komt bijvoorbeeld voor in de formule voor de gemiddelde snelheid $\vec{v}_{\text{gem}}$, waar $\Delta t = t_2 - t_1$ het tijdsinterval is:

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

2.4.3 Vermenigvuldiging van een vector met een scalar

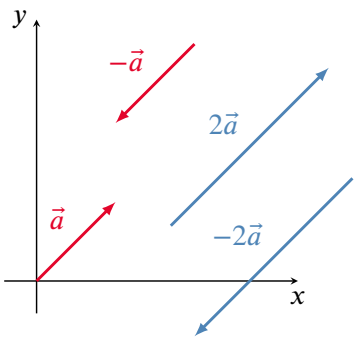
Wanneer we de vector $\vec{a}$ vermenigvuldigen met een scalar m verkrijgen we de vector $m \cdot \vec{a}$:

(a) $m \cdot \vec{a}$ heeft dezelfde richting als de vector $\vec{a}$.

(b) De lengte van de vector $m \cdot \vec{a}$ is $|m|$ keer de lengte van de vector $\vec{a}$.

(c) Indien $m > 0$ heeft $m \cdot \vec{a}$ dezelfde zin als de vector $\vec{a}$

(d) Indien $m < 0$ heeft die vector de tegengestelde zin van de vector $\vec{a}$.



Figuur 11 – Vermenigvuldiging van een vector met een scalar.

Als de scalaire componenten van de vector $\vec{a}$ gekend zijn, dan kunnen die van de vector $m \cdot \vec{a}$ eenvoudig berekend worden:

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a} &= m \cdot \left(a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y\right) \\ &= m \cdot a_x \cdot \vec{e}_x + m \cdot a_y \cdot \vec{e}_y \\ &= \left(m \cdot a_x, m \cdot a_y\right) \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

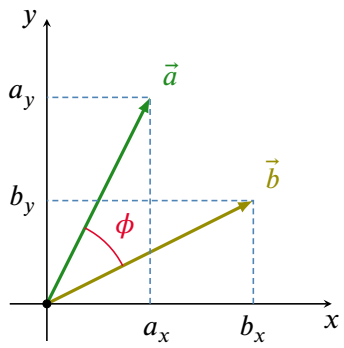
2.4 Bewerkingen met vectoren

2.4.4 Scalair product van twee vectoren

Het scalair product (dotproduct, inwendig product) van twee vectoren wordt gedefinieerd als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\phi.$$

Hierin is ϕ de kleinste hoek tussen de twee vectoren, wanneer men ze in eenzelfde punt laat aangrijpen..



Het resultaat van een scalair product van twee vectoren is een reëel getal (scalar). We noteren het scalair product met een puntje tussen de twee vectoren (belangrijk !).

Aangezien de groottes a en b van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ positief gedefinieerd zijn, bepaalt $\cos\phi$ het teken van het resultaat. Maken de twee vectoren een scherpe hoek, dan is hun scalair product positief. Maken ze een stompe hoek, dan is hun scalair product negatief. Staan ze loodrecht op elkaar, dan wordt $\cos\phi$ nul, en is het resultaat dus nul.

Indien je in plaats van de groottes van de twee vectoren en hun onderlinge hoek, de **componenten** van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ ten opzichte van een gekozen assenstel kent, dan kan je gebruik maken van volgende eigenschap:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

met $\vec{a} = (a_x, a_y)$ en $\vec{b} = (b_x, b_y)$.

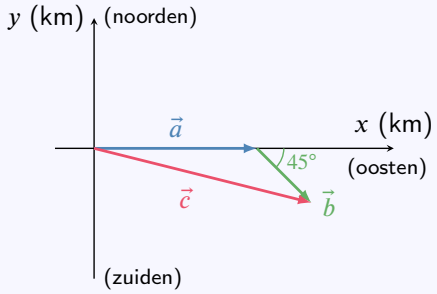
Merk tenslotte op dat het **delen van twee vectoren** niet gedefinieerd is. Ook het **delen van een scalar door een vector** is niet gedefinieerd.

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Voorbeeldoefeningen

Voorbeeld 2.5.1. Iemand loopt $5,0$ km naar het oosten en daarna $3,0$ km naar het zuidoosten. Bepaal de componenten van de vector die de eindpositie van de persoon aangeeft ten opzichte van zijn vertrekpunt.

Uitwerking: We maken eerst een grafische voorstelling van dit probleem. De eerste verplaatsing noteren we met vector $\vec{a}$, de tweede verplaatsing met vector $\vec{b}$. De eindpositie geven we aan met vector $\vec{c}$. We kiezen een assenstelsel en duiden de vectoren hierop aan.



We zoeken nu de componenten van vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$:

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}.$$

Uit de gegevens leiden we voor het gekozen assenstelsel af dat

$$\begin{cases} a_x = 5,0 \\ a_y = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} b_x = 3,0\cos(45°) = 2,1 \\ b_y = -3,0 \cdot \sin(45°) = -2,1 \end{cases}.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} c_x = 5,0 + 2,1 = 7,1 \\ c_y = 0 - 2,1 = -2,1 \end{cases}.$$

Om de notatie te vereenvoudigen hebben we geen eenheden geschreven in bovenstaande berekening, maar dat betekent niet dat deze scalaire componenten geen eenheid hebben. Strikt genomen is $c_x = 7,1$ km en $c_y = -2,1$ km.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Oefeningen Vectorrekenen

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

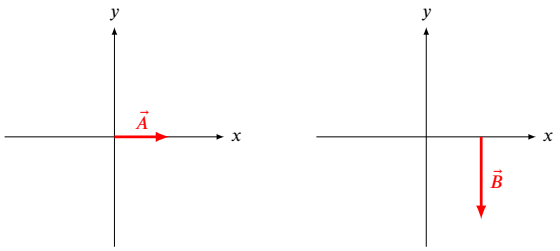
2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

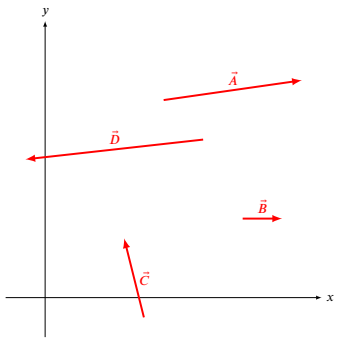
CC BY-NC-SA 4.0

2.6.1 Instapoefeningen

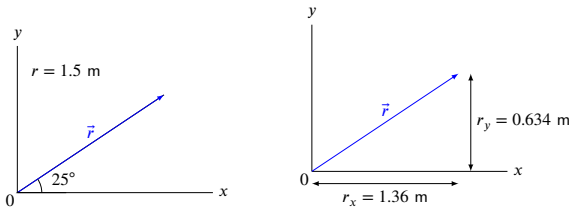
1. Stel dat A en B de lengtes zijn van de respectieve vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$. Wat zijn dan de (scalaire) x- en y-componenten van onderstaande vectoren?



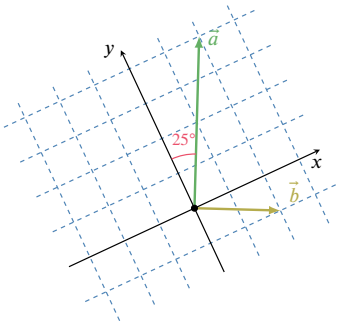
2. Rangschik onderstaande vectoren volgens grootte, x-component en y-component:



3. Verifieer of je de gegevens uit de rechtse tekening kan afleiden uit de linkse en omgekeerd.



4. Bepaal de componenten van de vector $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ten opzichte van het assenstelsel op de figuur.



$\vec{c} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.1 Instapoefeningen

5. Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ en $\vec{b} = 4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$. Bereken de grootte van beide vectoren. $a = \sqrt{\ldots\ldots}$, $b = \ldots\ldots$

6. Duid op een tekening de vectoren $\vec{a} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ en $\vec{b} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$ aan. Duid ook de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ aan.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.2 Standaardoefeningen

1. Als alle vectorcomponenten van een vector verdubbelen, wat gebeurt er dan met de richting (hoek die de vector maakt met de x-as) en de lengte van deze vector?

1. Meerkeuze:

(a) de hoek verdubbelt

(b) de hoek wordt groter, maar niet zo groot als het dubbele

(c) de hoek verandert niet

(d) de hoek wordt gereduceerd tot de helft

(e) de hoek wordt kleiner, maar niet zo veel als de helft

2. Meerkeuze:

(a) de lengte verdubbelt

(b) de lengte wordt groter, maar niet zo groot als het dubbele

(c) de lengte verandert niet

(d) de lengte wordt gereduceerd tot de helft

(e) de lengte wordt kleiner, maar niet zo veel als de helft

2. Een vector heeft x- en y-componenten die even groot zijn in absolute waarde. Welke van de onderstaande hoeken die de vector met de x-as maakt zijn dan mogelijk?

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $30°$

(b) $45°$

(c) $60°$

(d) $120°$

(e) $135°$

3. Een vector $\vec{A}$ heeft componenten $A_x > 0$ en $A_y > 0$, met $A_x = 2A_y$. Welke hoek maakt de vector met de x-as? $\theta = \ldots\ldots°$

4. Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$, $\vec{b} = -2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$, en $\vec{c} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$. Teken deze vectoren. Bereken en construeer de vectoren $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ en $\vec{t} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right)$.

5. Wat is de grootte van de vector $\vec{c} = \vec{e}_x - 3\vec{e}_y$ en welke hoek maakt deze vector met de x-as?

6. Een vector $\vec{v}$ maakt een hoek van $40°$ met de positieve x-as en heeft een y-component van -10 m/s. Wat is de waarde van de x-component?

$$v_x = \ldots\ldots \; m/s$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.2 Standaardoefeningen

7. Jan en Piet vertrekken uit eenzelfde plaats. Jan wandelt eerst 2 km in een richting 45° ten noorden van het westen, daarna gaat hij nog 5 km in een richting 30° oostelijk van het noorden. Piet loopt 7 km in noordoostelijke richting (45° ten noorden van het oosten). Wat is de plaats van Jan ten opzichte van Piet?

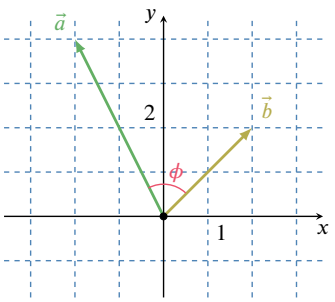
CC BY-NC-SA 4.0

2.6.3 Gevorderde oefeningen

2.6.3 Gevorderde oefeningen

1. De top van een berg bevindt zich op het punt $(-1, 5)$ t.o.v. een bepaald stelsel. De positievector van een vogel t.o.v. deze top is 500 m in een richting 30° naar links t.o.v. de verticale. Wat is de afstand van de vogel tot de oorsprong van het stelsel? $r \approx \ldots\ldots$ m

2. Bepaal de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals weergegeven op de figuur.



$\varphi = \ldots\ldots$ °

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.4 Herhalingsoefeningen: vectoren

2.6.4 Herhalingsoefeningen: vectoren

1. De grootte van een vector is 1 m. Wat zijn de x- en y-componenten indien de hoek die de vector maakt met de x-as (in tegenuurwerkzin gemeten) gelijk is aan:

1. Als de hoek $0°$ is, dan zijn $x = \ldots\ldots$ m en $y = \ldots\ldots$ m

2. Als de hoek $45°$ is, dan zijn $x \approx \ldots\ldots$ m en $y \approx \ldots\ldots$ m

3. Als de hoek $90°$ is, dan zijn $x = \ldots\ldots$ m en $y = \ldots\ldots$ m

2. Bereken de grootte van de vector $\vec{a} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y$. $\|\vec{a}\| = \ldots\ldots$

3. Een vector $\vec{a}$ met lengte 10 maakt een hoek van $225°$ met de x-as. Bereken de scalaire componenten volgens de x- en y-as. $a_x = \ldots\ldots, a_y = \ldots\ldots$

4. Een vogel vliegt vanuit een boom 100 meter naar het oosten. Daarna vliegt hij 50 m naar het noordwesten. Bepaal de lengte van de vector tussen de begin- en eindpositie.

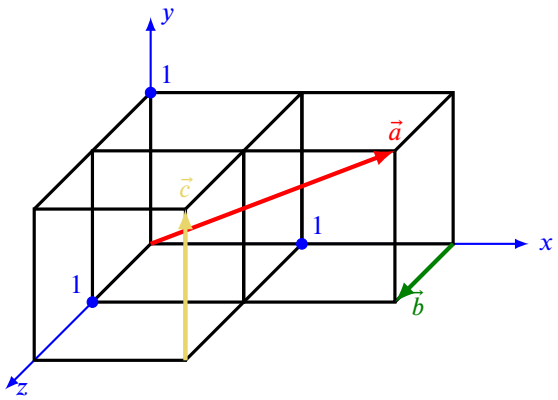
$$\|\vec{a}\| = \ldots\ldots \; m$$

5. Teken de vector $\vec{a} = -4 \cdot \vec{e}_x + 5 \cdot \vec{e}_y$. Bepaal de hoek die deze vector maakt met de positieve x-as.

$$\theta = \ldots\ldots \; °$$

6. Erica verplaatst zich vanuit een plaats P en gaat 3 km oostwaarts en daarna 5 km zuidwaarts. Welke verplaatsing heeft Erica gemaakt?

7. Lees op de figuur de componenten af van de drie vectoren in een driedimensionaal assenstelsel.



$$\vec{a} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$$

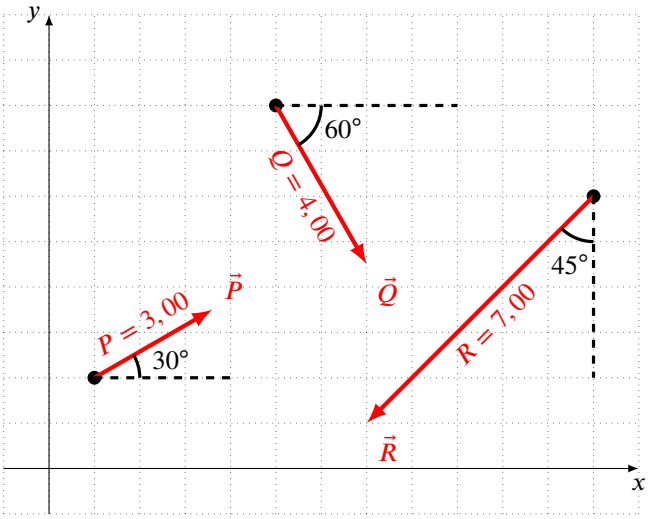
$$\vec{b} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$$

$$\vec{c} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.4 Herhalingsoefeningen: vectoren

8. Bepaal de componenten van de drie vectoren ten opzichte van de weergegeven x-as en y-as.



$\vec{P} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

$\vec{Q} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

$\vec{R} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

9. Een boot vaart een meer op met een snelheid $\vec{v} = 2{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x + 3{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_y$. Veronderstel dat de gekozen x-as samenvalt met de oever. Onder welk hoek vaart de boot ten opzichte van de oever?

$\theta = \ldots\ldots\ ^\circ$

10. Bepaal de hoek tussen de twee vectoren $\vec{a} = 4\ \vec{e}_x + 2\ \vec{e}_y$ en $\vec{b} = 1\ \vec{e}_x + 4\ \vec{e}_y$.

$\theta = \ldots\ldots\ ^\circ$

11. Gegeven twee vectoren $\vec{a} = 3\ \vec{e}_x + 2\ \vec{e}_y$ en $\vec{b} = m\ \cdot \vec{e}_x + 3\ \vec{e}_y$. Bepaal m zodat de twee vectoren loodrecht op elkaar staan

$m = \ldots\ldots$

12. Een vector $\vec{a}$ met lengte 5 maakt een hoek van -135° met de x-as. Bereken de vectorcomponenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. $a_x = \ldots\ldots, a_y = \ldots\ldots$

13. Wat is de grootte van de vector $\vec{c} = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$ en welke hoek maakt deze vector met de x-as?

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.4 Herhalingsoefeningen: vectoren

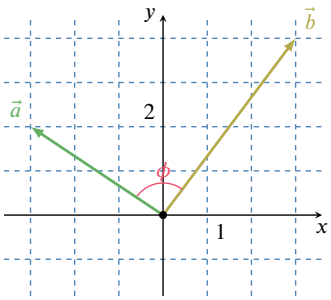
14. Een vector $\vec{v}$ maakt een hoek van 150° met de positieve x-as en heeft een y-component van 10 m/s. Wat is de waarde van v?

$$v = \ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

15. Teken de vector $\vec{a} = -3 \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot \vec{e}_y$. Bepaal de hoek die deze vector maakt met de positieve y-as.

$$\theta = \ldots\ldots \ ^\circ$$

16. Bepaal de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals weergegeven op de figuur.



$$\varphi = \ldots\ldots \ ^\circ$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Intro kinematica

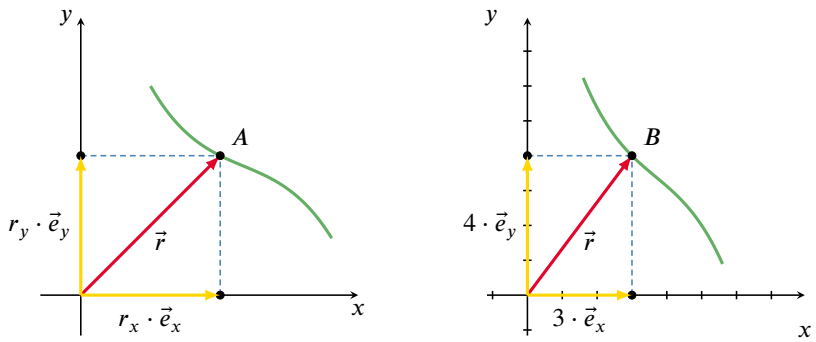
In de kinematica bestuderen we de wiskundige beschrijving van de beweging zonder de oorzaak van de beweging in rekening te brengen. De positie, snelheid en versnelling van het bewegende voorwerp, en meer bepaald hun tijdsverloop, staan hierbij centraal. Aangezien dit vectoriële grootheden zijn, zullen we vectoren invoeren om deze te beschrijven.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica

3.2.1 Positie- en verplaatsingsvector

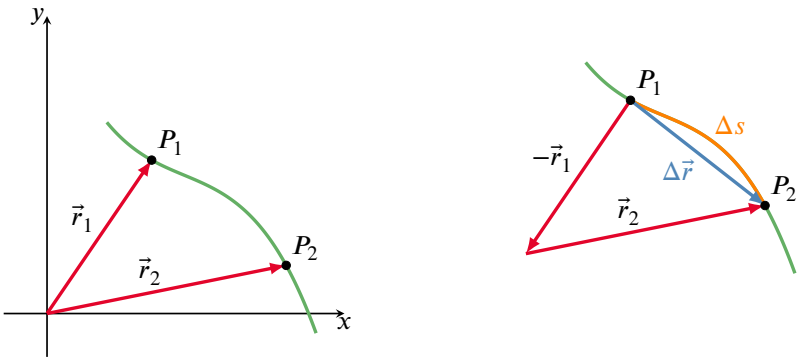
Definitie 3.2.1. De positie van het systeem op een tijdstip t ten opzichte van een gekozen oorsprong O, geven we weer met de positievector (of plaatsvector) $\vec{r}$.



Figuur 12 – Positievector.

De vector $\vec{r}$ heeft componenten r_x en r_y. De componenten r_x en r_y op een ogenblik t zijn gelijk aan de coördinaten x en y van het punt A waar het systeem zich op dat tijdstip bevindt en kunnen dus eventueel ook daarmee genoteerd worden. In het voorbeeld heeft B als coördinaten $x = 3$ en $y = 4$. Bijgevolg heeft de bijhorende plaatsvector $\vec{r}$ als componenten $r_x = +3$ en $r_y = +4$.

Als het systeem een baan beschrijft in het (x, y)-vlak, verandert de richting en/of de grootte van de vector $\vec{r}$. We bekijken de beweging van het systeem van het tijdstip t_1 tot t_2. Op het tijdstip t_1 is de positievector $\vec{r}_1$, op tijdstip t_2 is die vector $\vec{r}_2$.



Figuur 13 – Verplaatsingsvector.

Definitie 3.2.2. De afgelegde weg Δs is de afstand die het systeem in die tijd langs de baan aflegt. Δs is een getal en is altijd positief.

De verplaatsing $\Delta\vec{r}$ is $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Dat is een vector die wijst van punt 1 naar punt 2.

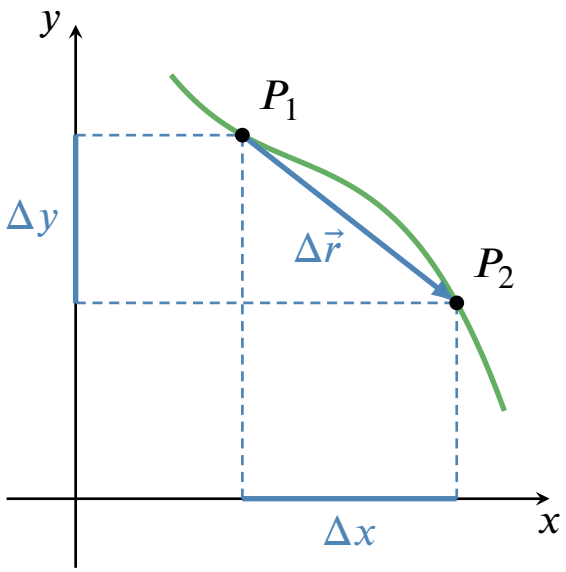
CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica

Voor de componenten van de vector $\Delta\vec{r}$ geldt

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(r_{2x} - r_{1x}, r_{2y} - r_{1y}\right)\\ &= \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1\right)\\ &= (\Delta x, \Delta y).\end{aligned}$$

De componenten van $\Delta\vec{r}$ komen dus overeen met de verplaatsing Δx en Δy t.o.v. respectievelijk de x-en de y-as. In onderstaande figuur is Δx positief en Δy negatief.



Figuur 14 – Componenten van de verplaatsingsvector.

3.2.2 De snelheidsvector

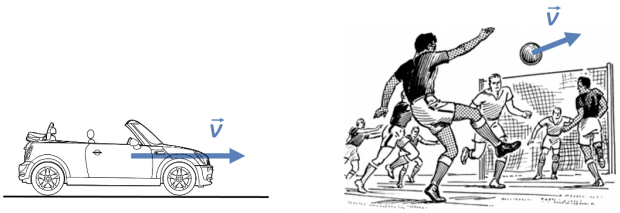
Wanneer een voorwerp in beweging is, kan je met de snelheidsvector aangeven hoe de beweging verloopt:

(a) Welke richting gaat de beweging uit (horizontaal, schuin, verticaal, ...)?

(b) In deze richting, naar welke kant (zin) beweegt het voorwerp (omhoog, omlaag, links, rechts, ...)?

(c) Hoeveel meter legt het voorwerp per seconde af (als het zijn snelheid zou aanhouden)?

Op een figuur geven we dit weer met een vector (pijl) : $\vec{v}$.



Figuur 15 – De snelheidsvector.

De grootte van de snelheid noteren we met de letter v. De eenheid is m/s. De snelheidsvector raakt altijd aan de baan van het voorwerp.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica

3.2.3 De versnellingsvector

Wanneer de snelheidsvector van een voorwerp verandert, zeggen we dat het voorwerp "versnelt". Dit woord kan soms wat verwarrend zijn omdat een snelheidsverandering ook een vertraging en/of (in twee dimensies) ook een afbuiging kan zijn. Toch spreken we steeds van een versnelling. We gaan nu verder in één dimensie (of dus zonder afbuiging, met andere woorden op een rechte baan).

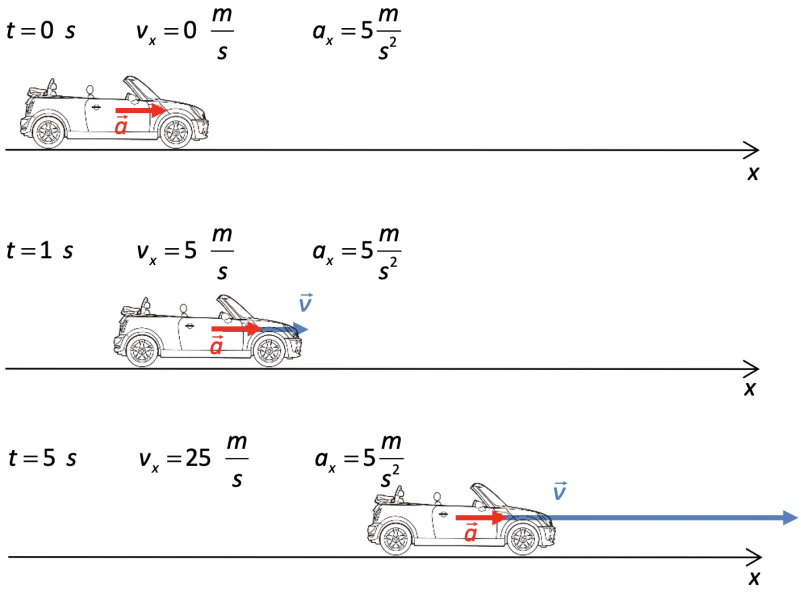
We duiden de versnelling aan met een vector $\vec{a}$.

De grootte van de versnelling duiden we aan met de letter a. De eenheid is $\mathrm{m/s^2}$.

Eigenschap 3.2.1. Wanneer de versnellingsvector dezelfde zin heeft als de snelheidsvector, dan neemt de snelheid in grootte toe (versnelling).

Wanneer de versnellingsvector een tegengestelde zin heeft t.o.v. de snelheidsvector, dan neemt de snelheid in grootte af (vertraging).

In het eerste voorbeeld zien we dat de wagen versnelt (zie onderstaande figuur): de snelheidsvector en de versnellingsvector wijzen dezelfde kant op.

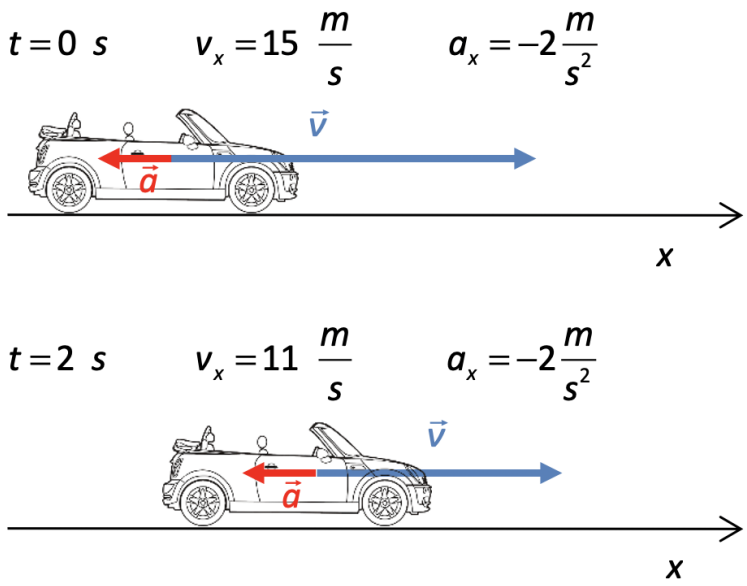


Figuur 16 – De versnellingsvector heeft dezelfde zin als de snelheidsvector : de grootte van de voorwaartse snelheid neemt toe.

In het tweede voorbeeld zien we dat de wagen vertraagt (zie onderstaande figuur). De snelheidsvector wijst tegengesteld aan de versnellingsvector.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica



Figuur 17 – De zin van de versnellingsvector is tegengesteld aan de zin van de snelheidsvector : de grootte van de voorwaartse snelheidsvector neemt af.

Verdere mogelijkheden zouden zijn : 1) snelheids- en versnellingsvector achteruit : de grootte van de achterwaartse snelheid neemt toe ; en 2) snelheidsvector achteruit en versnellingsvector vooruit : de grootte van de achterwaartse snelheid neemt af.

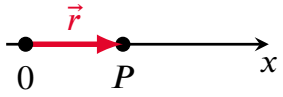
CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica

3.3.1 Positie

In een eerste stap beschrijven we de positie van een massapunt dat 1D beweegt, dus langs een rechte. Hiertoe kiezen we een x-as volgens deze rechte. De pijl op de x-as geeft aan in welke zin de x-waarde toeneemt. Als ook een oorsprong ($x = 0$) op deze rechte wordt vastgelegd, dan is de **positie** van het punt éénduidig bepaald door zijn x-coördinaat.

De positievector ligt op de x-as. De x-component van de positievector is gelijk aan de x-coördinaat van de positie: $r_x = x$



Figuur 18 – De positievector bij een beweging langs een x-as.

Wanneer het massapunt verandert van positie, ondergaat het een **verplaatsing ten opzichte van de x-as**. Als het punt van een beginpositie x_i naar een eindpositie x_f beweegt, dan is de verplaatsing

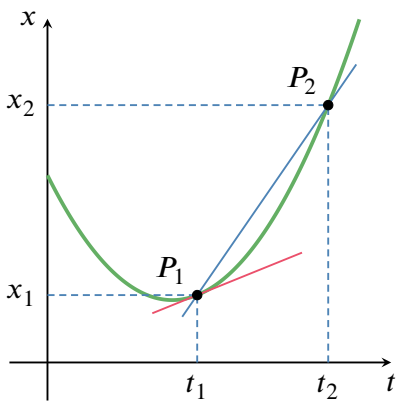
$$\Delta x = x_f - x_i.$$

De SI-eenheid van positie en verplaatsing is meter (m).

Opmerking 3.3.1. De verplaatsing ten opzichte van een gekozen as kan positief, negatief of nul zijn. Er is dus een belangrijk verschil tussen de verplaatsing en de werkelijk afgelegde weg, die steeds positief is. Stel je fietst heen en terug van je huis naar de supermarkt, 2 km verderop. De totaal afgelegde weg is 4 km terwijl de verplaatsing nul is omdat het begin- en eindpunt samenvallen.

3.3.2 Snelheid

In een volgende stap bekijken we hoeveel tijd er verloopt tijdens een verplaatsing van een object. Of anders, hoe snel kan dat object bewegen? Bijvoorbeeld, hoeveel seconden heeft een sprinter nodig om de 100 m sprint af te leggen op een atletiekpiste?
Zo komen we tot het begrip snelheid. De snelheid kan dus bepaald worden als we informatie hebben over de positie x als functie van de tijd t. Deze informatie kan grafisch weergegeven worden in een $x(t)$-grafiek (zie onderstaande figuur) of in een algebraïsche uitdrukking. Deze geven voor elk tijdstip t de positie x van het object weer.



Figuur 19 – De grafiek van x als functie van t geeft ons de nodige informatie om gemiddelde of ogenblikkelijke snelheden te bepalen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica

Definitie 3.3.1. De gemiddelde snelheid $v_{x,g}$ t.o.v. de x-as in het interval Δt is

$$v_{x,g} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Hierin wordt x uitgedrukt in meter en t in seconden. Snelheid wordt uitgedrukt in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

In de definitie wordt niet de afgelegde weg Δs, maar de verplaatsing Δx gebruikt! Hieruit volgt dat de gemiddelde snelheid t.o.v. de x-as zoals gedefinieerd in de fysica ook negatief kan zijn.
De helling van de verbindingslijn (dit is de blauwe lijn) tussen de twee punten P_1 en P_2 op de $x(t)$-grafiek (in figuur 19) is gelijk aan de gemiddelde snelheid ten opzichte van de x-as gedurende dat tijdsinterval. Deze kan positief, negatief of nul zijn.

Eigenschap 3.3.1. De gemiddelde snelheid $v_{x,g}$ is

(a) positief als het systeem beweegt in de positieve zin van de x-as;

(b) negatief als het systeem beweegt in de negatieve zin van de x-as.

Dit geeft ons slechts een globaal beeld van de snelheid. Als we een meer nauwkeurige beschrijving van de beweging willen kennen, moeten we de gemiddelde snelheid berekenen over kortere tijdsperiodes. Een nog betere realistische beschrijving kan bekomen worden door de snelheid te kennen op elk ogenblik, de zogenaamde ogenblikkelijke snelheid.

Definitie 3.3.2. De ogenblikkelijke snelheid v_x t.o.v. de x-as op het ogenblik t is:

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Dat is de afgeleide van x naar t

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}.$$

De $v_x(t)$-functie noemen we de snelheidsvergelijking.

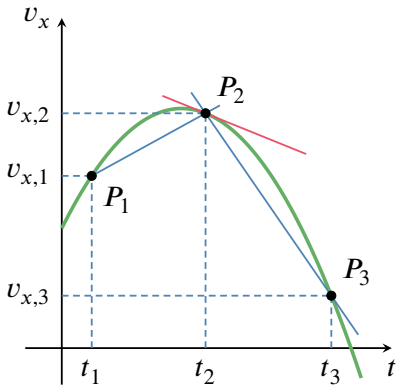
De snelheid op een bepaald tijdstip t_1 is de helling van de raaklijn (dit is de rode lijn) aan de $x(t)$-grafiek in het punt t_1 (zie figuur 19).

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica

3.3.3 Versnelling

Net zoals de snelheid de verandering is van de positie met de tijd, is de versnelling de verandering van de snelheid met de tijd. Met andere woorden, een voorwerp versnelt als zijn snelheid verandert. Een auto die aan een rood licht stilstond en plots vertrekt als het licht op groen springt, voert een versnelde beweging uit (hij trekt bijvoorbeeld op van 0 naar 50 km/u). De gemiddelde versnelling is de verhouding van de snelheidsverandering tot de tijdsduur waarover deze verandering plaatsvindt. In onderstaande figuur is de helling van de verbindingslijn tussen P_1 en P_2 de gemiddelde (positieve) versnelling in het tijdsinterval $t_2 - t_1$. Analoog is de helling van de verbindingslijn tussen P_2 en P_3 de (negatieve) versnelling over het tijdsinterval $t_3 - t_2$. De helling van de rode raaklijn aan de $v(t)$-grafiek in P_2 geeft de ogenblikkelijke versnelling op tijdstip t_2.



Figuur 20 – De hellingen van de verbindingslijnen tussen de aangeduide punten geeft de gemiddelde versnellingen op de respectievelijke tijdsintervallen. De helling van de rode raaklijn geeft de ogenblikkelijke versnelling op tijdstip t_2.

Definitie 3.3.3. De gemiddelde versnelling $a_{x,g}$ t.o.v. de x-as in het interval Δt is

$$a_{x,g} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x,2} - v_{x,1}}{t_2 - t_1}.$$

Versnelling wordt uitgedrukt in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

De gemiddelde versnelling kan positief, negatief of nul zijn. Zie figuur **??**.

Eigenschap 3.3.2. De gemiddelde versnelling $a_{x,g}$ is

(a) positief als het systeem versnelt in positieve zin van de x-as of vertraagt in negatieve zin;

(b) negatief als het systeem versnelt in negatieve zin van de x-as of vertraagt in positieve zin.

Analoog als hierboven voor de snelheid, wordt in de limiet voor steeds kleinere tijdsintervallen deze gemiddelde versnelling een ogenblikkelijke versnelling.

Definitie 3.3.4. De ogenblikkelijke versnelling a_x t.o.v. de x-as op het ogenblik t is:

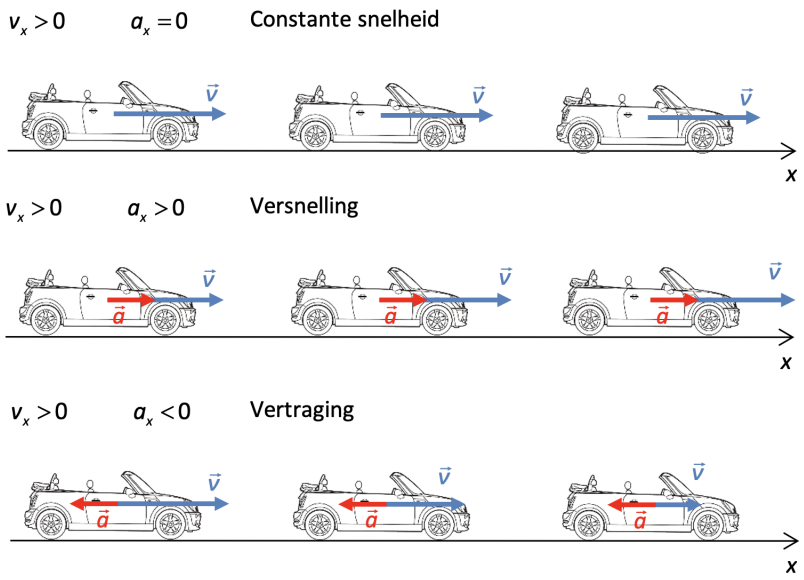
$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

Dat is de afgeleide van v_x naar t:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica



Figuur 21 – Versnelling en vertraging.

De $a_x(t)$-functie is de versnellingsvergelijking.

Een goed gekende versnelling is de valversnelling op aarde, deze is bij benadering $9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Dit betekent dat de snelheid van vallende objecten elke seconde verandert met $9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

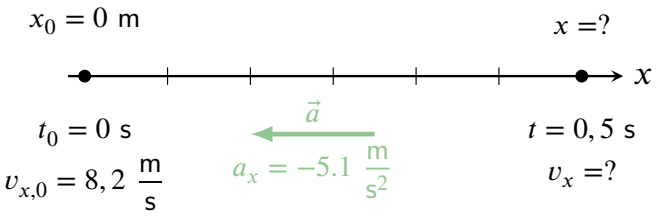
Opmerking 3.3.2. Om een voorwerp te doen versnellen moet op dat voorwerp een resulterende kracht werken. Later zullen we zien dat er een vast verband bestaat tussen deze resulterende kracht en de versnelling: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Omdat dit een vectorieel verband is, betekent dit dat de resulterende kracht en de versnelling dezelfde richting en zin hebben (immers, $m > 0$).

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Voorbeeldoefening

1. Een wagen komt aangereden aan een snelheid van $8,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ en moet plots remmen. De vertraging bedraagt $5,1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wat is de positie en de snelheid van de wagen na $0,5$ s ?

Uitwerking: We maken een grafische voorstelling van de opgave.



We veronderstellen dat de versnelling van de wagen constant is: we kunnen bijgevolg de formules voor de positie en de snelheid van de eenparig veranderlijke beweging gebruiken.

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t + a_x \cdot \frac{t^2}{2} \qquad \text{en} \qquad v_x(t) = v_{x,0} + a_x \cdot t.$$

We vullen de gegevens uit het schema in in de vergelijkingen en bekomen de positie en de snelheid van de wagen na $0,5$ s:

$$\begin{aligned} x(0,5\text{ s}) &= 0 + 8,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,5\text{ s} - 5,1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{0,5^2\ \text{s}^2}{2} &&= 3,5\text{ m} \\ v_x(0,5\text{ s}) &= 8,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5,1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5\text{ s} &&= 5,7\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

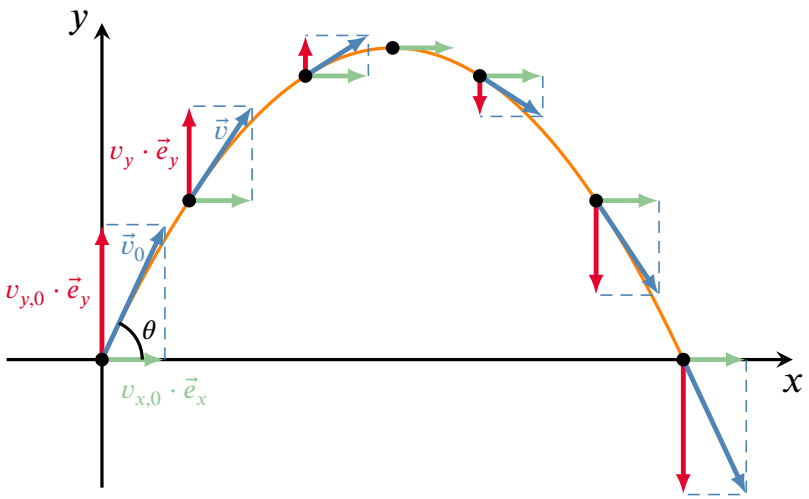
CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Twee-dimensionale kinematica

In tegenstelling tot de vorige paragraaf waar enkel rechtlijnige bewegingen (1 dimensie) werden beschouwd, bekijken we nu bewegingen in een vlak (2-dimensionaal). Daartoe splitsen we de beschrijving van de beweging op in twee 1-dimensionale bewegingen, nl. in de x- en de y-richting.

3.5.1 Projectielbeweging - Schuine worp

Een voorbeeld van een 2-dimensionale beweging is de **projectielbeweging**. Dit is de beweging van een projectiel (kogel, bal, ...) nadat dit werd weggeschoten of weggegooid onder een bepaalde hoek θ met de horizontale richting. Luchtwrijving wordt verwaarloosd. Men spreekt ook van **schuine worp**. Het projectiel beschrijft een parabolische baan en landt na een bepaalde tijd t terug op de grond.



Figuur 22 – De verticale component van de snelheid verandert van grootte en zin terwijl de horizontale component steeds hetzelfde blijft.

Eigenschap 3.5.1. Indien enkel de zwaartekracht op het voorwerp inwerkt, en de worp vanuit de oorsprong (0,0) vertrekt, bekom je voor de bewegingsvergelijking en de snelheidsvergelijking van de schuine worp ten opzichte van gekozen x- en y-as:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t \qquad \text{en} \qquad y(t) = v_0 \cdot \sin\theta \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}$$
$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \qquad\qquad v_y(t) = v_0 \cdot \sin\theta - g \cdot t$$

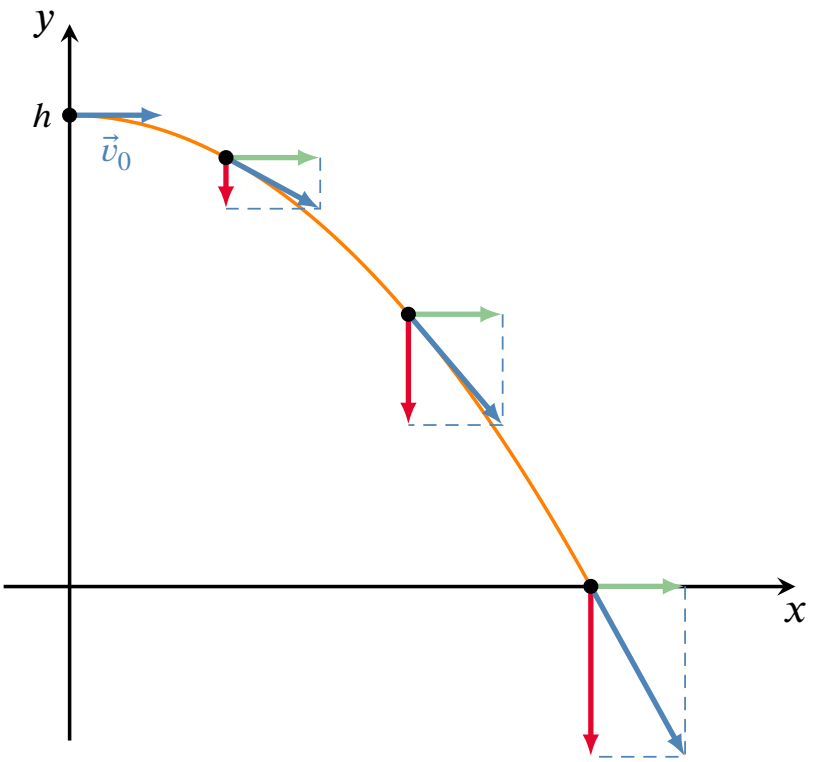
Er is enkel sprake van een versnelling in de y-richting. Deze versnelling is gelijk aan $a_y = -g$ omdat de zwaartekracht met grootte $F_z = m \cdot g$ tegen de gekozen opwaartse y-as in wijst.

3.5.2 Horizontale worp

Een speciaal geval van een schuine worp is een projectiel dat horizontaal wordt gelanceerd. Zo is de hoek tussen de beginsnelheid en de horizontale richting gelijk aan $\theta = 0°$. We kiezen hier het vertrek van de worp in het punt (0,h).

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Twee-dimensionale kinematica



Figuur 23 – Horizontale worp.

Eigenschap 3.5.2. Voor de horizontale worp vinden we de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cdot t \\ v_x(t) &= v_0 \end{aligned} \qquad \text{en} \qquad \begin{aligned} y(t) &= h - g \cdot \frac{t^2}{2} \\ v_y(t) &= -g \cdot t \end{aligned}$$

1. Een kogel wordt horizontaal weggeschoten vanop een muur met hoogte $h = 50$ m. De kogel treft de grond (en het doelwit) op 400 m afstand van de muur. Hoe groot was de (horizontale) beginsnelheid van de kogel? Verwaarloos de luchtweerstand.

Uitwerking: Stel dat de kogel op de grond valt op het tijdstip t, dan is de x-positie van de kogel 400 m en de y-positie 0 m. Er geldt dus dat $400\ \text{m} = 0\ \text{m} + \text{v}_0 \cdot \text{t}$.

En dus is

$$t = \frac{400\ \text{m}}{v_0}.$$

Voor de y-richting kunnen we dan schrijven dat:

$$\begin{aligned} 0 &= 50\ \text{m} - \text{g} \cdot \frac{\text{t}^2}{2} \\ 0 &= 50\ \text{m} - \text{g} \cdot \frac{\left(\frac{400\ \text{m}}{\text{v}_0}\right)^2}{2} \\ v_0 &= 125\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

BESLUIT: De horizontale beginsnelheid is dus $125\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Twee-dimensionale kinematica

3.5.3 Verticale worp

Een projectiel dat verticaal omhoog gelanceerd wordt (projectielbeweging met $\theta = 90°$) heeft een beginsnelheid die verticaal naar boven is gericht. Door de neerwaartsgerichte valversnelling $g = 9,81$ m/s^2 zal de snelheid afnemen met toenemende hoogte en nul worden in het hoogste punt. De beweging vertraagt omdat snelheid en valversnelling tegengesteld gericht zijn. Na het hoogste punt zal de snelheid opnieuw vergroten en zal het projectiel naar beneden vallen (snelheid en valversnelling hebben dan dezelfde zin).

Omdat de beginsnelheid een x-component gelijk aan nul heeft, zal deze nul blijven gedurende gans de beweging (eenparige rechtlijnige beweging), bijgevolg voert het projectiel een ééndimensionale, versnelde rechtlijnige beweging uit volgens de y-as.

Eigenschap 3.5.3. Indien je de y-as verticaal omhoog kiest, bekom je voor de bewegingsvergelijking en snelheidsvergelijking van een verticale worp:

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \qquad \text{en} \qquad v_y(t) = v_{y,0} - g \cdot t$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 De cirkelvormige beweging

3.6.1 Positie en hoeksnelheid

Bij het begin van dit hoofdstuk hebben we de rechtlijnige beweging besproken. De verplaatsing gebeurt dan volgens een rechte. De positie op deze rechte wordt vastgelegd met behulp van de positie x als functie van de tijd. Bij een cirkelvormige beweging is het handig om de positie aan te duiden met behulp van de hoek θ die varieert in de tijd (zie figuur 24). De afgelegde of doorlopen hoek in het tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$ is dan $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

De gemiddelde hoeksnelheid is bijgevolg

$$\omega_g = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Deze wordt uitgedrukt in rad/s.

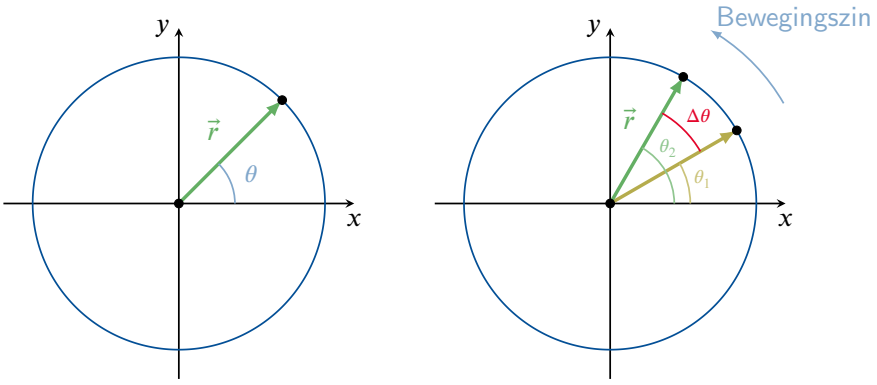
Omdat met een volledige omwenteling een hoek van 2π overeenkomt, kan je ook schrijven dat

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T}$$

met T de **periode**, dit is de tijd die nodig is voor een volledige omwenteling.

De ogenblikkelijke hoeksnelheid is

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$



Figuur 24 – Beschrijving cirkelbeweging.

De **frequentie** f is het aantal omwentelingen per seconde. Deze wordt uitgedrukt in hertz (Hz):

$$1\,\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}.$$

Duurt een volledige omwenteling bijvoorbeeld een halve seconde, dan zijn er per seconde twee volledige omwentelingen: de frequentie is dus het omgekeerde van de periode. Dit is algemeen geldig. Tussen de periode en de frequentie bestaat bijgevolg het volgende verband:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Wanneer de cirkelbeweging aan een constante hoeksnelheid verloopt, noemen we deze beweging een **eenparige cirkelvormige beweging (ECB)**. Er geldt dan dat $\omega = \omega_g$ en dus $\omega = 2\pi \cdot f$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 De cirkelvormige beweging

Voorbeeld 3.6.1. Een boormachine doet 600 toeren per minuut. Hieruit volgt dat

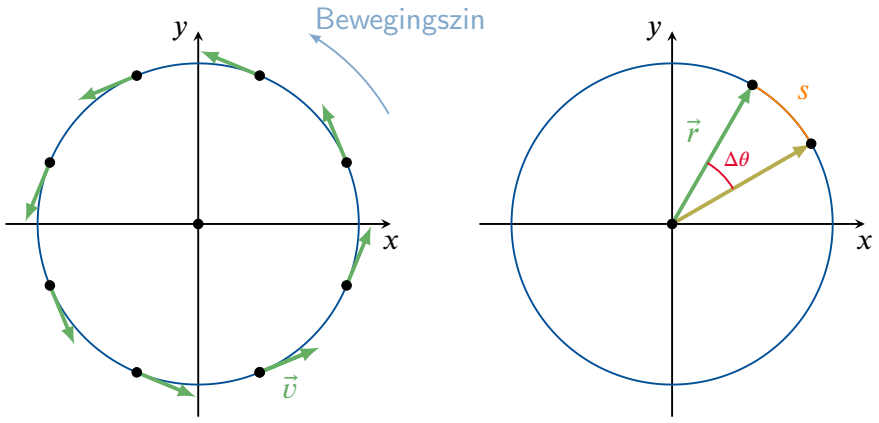
$$f = \frac{600 \text{ toeren}}{60 \text{ s}} = \frac{10 \text{ toeren}}{1 \text{ s}} = 10 \text{ Hz}.$$

De periode bedraagt

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10 \text{ Hz}} = 0,10 \text{ s}.$$

3.6.2 Omtreksnelheid of baansnelheid

De snelheidsvector $\vec{v}$ (baansnelheid) raakt op elk tijdstip aan de cirkelbaan.



Figuur 25 – *(a)* De snelheidsvector raakt op elk ogenblik aan de cirkel. *(b)* Verband tussen de booglengte en de doorlopen hoek.

Als je de hoeken uitdrukt in radialen, geldt dat de booglengte s gelijk is aan de doorlopen hoek maal de straal ($s = r \cdot \Delta\theta$). Bijgevolg kunnen we het verband afleiden tussen de grootte van de baansnelheid v, en de hoeksnelheid ω:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{r \cdot d\theta}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r \cdot \omega.$$

De grootte van deze omtreksnelheid of baansnelheid wordt uitgedrukt in m/s. Bij zekere hoeksnelheid ω geldt: hoe groter de straal van de cirkel, hoe groter de omtreksnelheid wordt.

Bij eenparige cirkelvormige bewegingen is de grootte van omtreksnelheid constant.

3.6.3 Versnelling

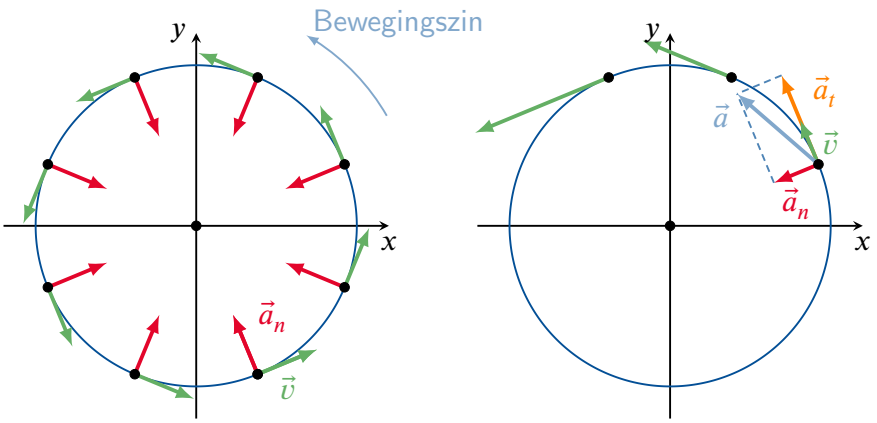
Bij een cirkelbeweging verandert de baansnelheid $\vec{v}$ voortdurend van richting (snelheidsverandering = versnelling). De versnelling die deze richtingsverandering beschrijft, is de normale of centripetale versnelling

$$a_n = a_{cp} = \frac{v^2}{r}.$$

Deze wijst naar het centrum van de cirkel.

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 De cirkelvormige beweging



Figuur 26 – *(a)* Eenparige cirkelvormige beweging. *(b)* Niet-eenparige cirkelvormige beweging.

Als de grootte van de snelheidsvector $\vec{v}$ constant blijft, spreken we over een eenparige cirkelvormige beweging, deze wordt getoond in figuur 26(a). Wanneer echter de grootte van de baansnelheid $\vec{v}$ toeneemt of afneemt, spreken we over een niet-eenparige cirkelvormige beweging (figuur 26b)). In dit laatste geval kan de versnelling ontbonden worden in twee componenten. Enerzijds de normale versnelling $\vec{a}_n$ die de verandering van de richting van de snelheid beschrijft en anderzijds de tangentiële versnelling $\vec{a}_t$ die verandering van de grootte van de snelheid beschrijft. De totale versnelling is dan de vectorsom

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 Oefeningen Kinematica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

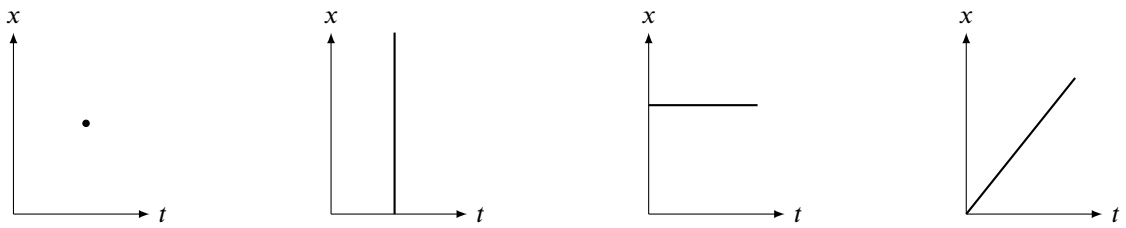
3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7.1 Instapoefeningen

1. Welke grafiek in de figuur stelt een voorwerp in rust voor? | *A* | *B* | *C* | *D* |

Neem aan dat dit voorwerp enkel volgens een rechte baan beweegt (de x-as).



(A) (B) (C) (D)

2.

1. Joseph DeLoach uit de Verenigde Staten behaalde in 1988 met een tijd van 19,75 seconden op de 200m sprint een Olympisch record. Wat was zijn gemiddelde snelheid? Geef je antwoord in m/s en km/h.

$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s } = \ldots\ldots \text{ km/h.}$$

2. In 1992 behaalde Zhuang Yong uit China een Olympisch record op de 100m vrije slag zwemmen voor vrouwen met een tijd van 54,64 seconden. Wat was haar gemiddelde snelheid in m/s en in km/h?

$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s } = \ldots\ldots \text{ km/h}$$

3. Als de snelheid van een object verschillend is van nul, kan zijn versnelling dan nul zijn? Geef een voorbeeld als je antwoord ja is, leg uit waarom als je antwoord nee is.

| Ja | Nee |

4. Als de snelheid van een object nul is op een gegeven tijdstip,

1. kan zijn versnelling dan nul zijn op dat ogenblik? | Ja | Nee | Leg uit.

2. is het mogelijk dat de versnelling van het object op dat tijdstip verschillend is van nul? | Ja | Nee |

Leg uit.

5. Een fietser beweegt volgens een rechte baan en verhoogt haar snelheid gelijkmatig van 5,0 m/s naar 11,0 m/s in 12 seconden. Wat is haar versnelling, en welke afstand legt ze af in deze tijd?

$$a = \ldots\ldots \text{ m/s}^2, \qquad d = \ldots\ldots \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.7.1 Instapoefeningen

6. Wanneer je niest versnelt de lucht vanuit rust tot ongeveer 175 km/h in $0,60$ s. Hoe groot is de versnelling van de lucht?

$$\ldots\ldots \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

7. Hoeveel (grootte en richting) bedraagt de versnelling van een projectiel op het hoogste punt van de baan? Ken je ook de versnelling net voor en net na het bereiken van dit punt?

8. Een bal wordt verticaal naar omhoog gegooid. Welke van bijgevoegde beweringen is correct in het hoogste punt van de baan?

$v = 0, a = 0$	$v \neq 0, a = 0$	$v = 0, a \neq 0$	$v \neq 0, a \neq 0$

9. An en Jan staan op de top van een gebouw. An gooit een bal vertikaal naar beneden, Jan laat een bal eenvoudigweg vallen. Welke bal heeft de grootste versnelling, juist na het loslaten? Veronderstel geen wrijving.

De bal van An	De bal van Jan	Beide ballen hebben dezelfde versnelling

10. Twee kinderen zitten op een paardenmolen. Kind 1 zit op $2,0$ m van de rotatie-as verwijderd en kind 2 zit op $1,5$ m van de as verwijderd. De paardenmolen maakt één draaibeweging in $4,5$ s.

1. Vind de hoeksnelheid ω.

$$\omega_1 = \ldots\ldots \ \mathrm{rad}/s \qquad \omega_2 = \ldots\ldots \ \mathrm{rad}/s$$

2. Vind de omtreksnelheid v van elk kind.

$$v_1 = \ldots\ldots \ m/s, \qquad v_2 = \ldots\ldots \ m/s$$

11. Een wagen rijdt aan een constante baansnelheid op een cirkelvormige baan. Beantwoord elk van de volgende vragen met "JA" of "NEE".

1. Is de snelheid van de wagen constant?

Ja	Nee

2. Is de grootte van de snelheid constant?

Ja	Nee

3. Is de grootte van de versnelling constant?

Ja	Nee

4. Is de richting van de versnelling constant?

Ja	Nee

12.

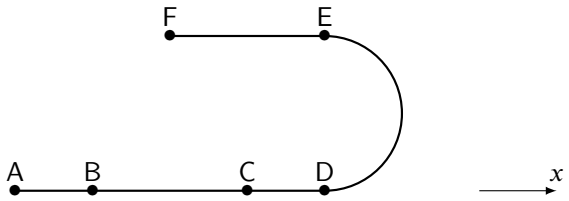
1. Een auto rijdt door een bocht met een constante snelheid van 50 km/u. Wanneer de auto diezelfde bocht neemt met een constante snelheid van 70 km/u, is zijn versnelling dan anders in het eerste geval? Licht uw antwoord toe.

2. Als een auto met 60 km/u een scherpe bocht neemt, en daarna met dezelfde snelheid een flauwe bocht neemt, is de versnelling dan in beide gevallen gelijk of niet? Leg uw antwoord uit.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7.1 Instapoefeningen

13. Hieronder staat een bovenaanzicht van de beweging van een auto van A naar F. Tussen A en B versnelt de auto. Tussen B en C rijdt de auto aan 70 km/u. Van C naar D drukt de bestuurder op de rem. De auto neemt de bocht vervolgens aan 50 km/u. Tussen E en F drukt de bestuurder het gaspedaal in en rijdt de auto steeds sneller. Bepaal de richting en zin van de versnellingsvector voor elk stuk van de baan.



14. Een jongen gooit een bal horizontaal weg met een snelheid $v_0 = 1,3$ m/s, vanaf een hoogte van $1,25$ m boven de grond.

1. Bepaal de x- en y-positie op de tijdstippen $t = 0,25$ s en $t = 0,5$ s.

2. Hoe lang duurt het voor de bal landt? $t^* = \ldots\ldots$ s

3. Waar landt de bal? $x^* = \ldots\ldots$ m

CC BY-NC-SA 4.0

3.7.2 Standaardoefeningen

1. Wat zijn de grootte en richting van de totale verplaatsing die je maakt als je eerst naar het westen reist met een snelheid van 27 m/s gedurende 125 s, en dan naar het zuiden met een snelheid van 14 m/s gedurende 66 s?

2. Een bal wordt vanuit rust losgelaten vanaf een hoogte van 20 meter.

1. Hoe lang duurt het vooraleer de bal de grond raakt? $t = \ldots\ldots$ s

2. Wat is de snelheid van de bal net voordat hij de grond raakt? $v = \ldots\ldots$ m/s

3. Een hond rent vooruit en achteruit tussen zijn twee baasjes die naar elkaar toe wandelen met elk een snelheid van 1,3 m/s. De hond start met lopen als ze 10 m van elkaar verwijderd zijn en heeft een snelheid van 3,0 m/s. Welke afstand heeft de hond afgelegd als de baasjes bij elkaar komen?

$$d = \ldots\ldots \text{ m}$$

4. Een auto die volgens een rechte baan met een snelheid van 20 m/s rijdt, begint te remmen met een constante versnelling met grootte 4,0 m/s^2.

1. Hoe lang duurt het vooraleer de auto tot stilstand komt? $t = \ldots\ldots$ s

2. Hoe ver rijdt de auto voordat hij volledig stilstaat? $d = \ldots\ldots$ m

5. Een auto rijdt met een constante snelheid van 135 km/u over een autosnelweg. Een politiewagen registreert deze snelheid als de wagen 100 m voorbij de politiewagen is en zet onmiddellijk de achtervolging in. De politiewagen houdt hiervoor een constante versnelling van 2.5 m/s^2 aan. Hoe lang duurt het eer de politiewagen de auto ingehaald heeft? Welke afstand heeft de politiewagen dan afgelegd?

6. Een projectiel wordt gelanceerd onder een hoek $\theta = 37°$ met een beginsnelheid $v_0 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Geef de grootte van de snelheid van het projectiel in het hoogste punt van zijn baan. Verklaar je antwoord.

7. Een Porsche daagt een Volkswagen uit voor een race van 400 m. Omdat de versnelling van $3,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ van de Porsche groter is dan de versnelling van $3,0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, mag de Volkswagen $1,0$ s vroeger vertrekken. Wie wint deze race?

Meerkeuze:

(a) Porche

(b) Volkswagen

8. Een bevoorradingsvliegtuig moet een wetenschappelijke expeditie op de Noordpool voorzien van een voedselpakket. Het vliegtuig vliegt 80 m boven de grond aan een snelheid van 100 m/s. Op hoeveel afstand van de landingsplaats moet het pakket uit het vliegtuig geduwd worden?

$$\ldots\ldots\ m$$

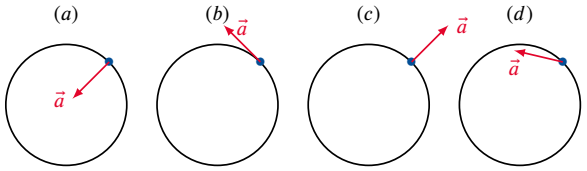
CC BY-NC-SA 4.0

3.7.2 Standaardoefeningen

9. Een wagentje op afstandsbediening rijdt een parcours dat beschreven wordt door $x = \frac{1}{2} \cdot t^3 - 2 \cdot t^2$ en $y = \frac{1}{2} \cdot t^2 - 2t$ waarbij x en y uitgedrukt worden in m en t in s. Wat is de richting van de beweging na 4 s? Geef de richting aan met behulp van een hoek met de positieve x-as.

..... °

10. Schumacher neemt met zijn Formule 1-wagen een cirkelvormige bocht, en remt een beetje tijdens het draaien. In welke figuur wordt de richting van de versnelling correct voorgesteld? In deze figuur beweegt hij in wijzerzin.



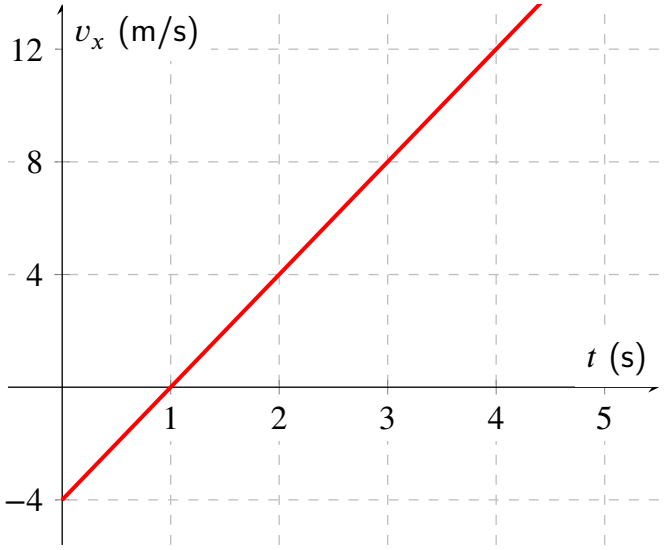
De juiste figuur is | (a) | (b) | (c) | (d) |.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7.3 Gevorderde oefeningen

1. Een kanonskogel wordt onder een hoek van 40° afgeschoten. Als de kogel een doel moet treffen gelegen op 1500 m afstand, in een 100 m lager gelegen vallei, hoe groot moet dan de beginsnelheid van de kogel zijn? Verwaarloos de luchtweerstand.

2. Een deeltje start een ééndimensionale beweging vanop positie $x_0 = 10$ m op tijdstip $t_0 = 0$ s en beweegt met een snelheid die weergegeven is op de figuur.



1. Teken een mogelijke $x(t)$-grafiek voor dit deeltje.

2. Heeft dit deeltje een keerpunt in z'n beweging? Zo ja, op welk tijdstip? ....

3. Wat is de positie van het deeltje na 4 s? .... m

3. De Aarde voert rond de Zon in werkelijkheid een niet-eenparige beweging uit op een niet-cirkelvormige baan. Bereken de gemiddelde hoeksnelheid van de Aarde in haar werkelijke beweging rond de zon.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7.4 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging

3.7.4 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging

1. Een fietser rijdt gedurende 20 minuten 8,0 km naar het oosten, dan keert hij terug en rijdt 3,2 km gedurende 8 minuten naar het westen. Daarna rijdt hij 16,0 km gedurende 40 minuten weer naar het oosten. Wat was zijn gemiddelde snelheid? Geef je antwoord in m/s.

$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$

2. Een deeltje beweegt langs de x-as volgens de vergelijking $x(t) = 10t - 2t^2$. Bereken de snelheid op $t = 2$ s en $t = 3$ s. Wat is de gemiddelde snelheid tussen $t = 2$ s en $t = 3$ s? De positie wordt bepaald in m en de tijd in s.

$$v_{x,1} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$
$$v_{x,2} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$
$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$

3. Een auto verlaat de garage vanuit rust met een constante versnelling van $1,3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Welke afstand legt de auto af alvorens een snelheid van $10,4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ te hebben?

$$\Delta x = \ldots\ldots \text{ m}$$

4. Een trein van 130 m lang rijdt het station binnen aan een snelheid van 22,0 m/s en een vertraging van 0,150 m/s². Het station is 210 m lang. Aan welke snelheid verlaat de achterkant van de trein het station?

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5. Een reddingshelikopter hangt boven een persoon wiens boot is gezonken. Eén van de hulpverleners gooit een zwemvest naar beneden met een beginsnelheid van 1,40 m/s. Het duurt 1,8 s alvorens die in het water valt. Hoe hoog bevindt de helicopter zich boven het slachtoffer? Je mag de weerstand van de lucht verwaarlozen.

$$h = \ldots\ldots \text{ m}$$

6. Een wagen rijdt over een rechte weg. De snelheid van de wagen wordt ten opzichte van een x-as die samenvalt met de weg, beschreven als

$$v_x(t) = 4t^3 - 3t^2 + 6t - 2$$

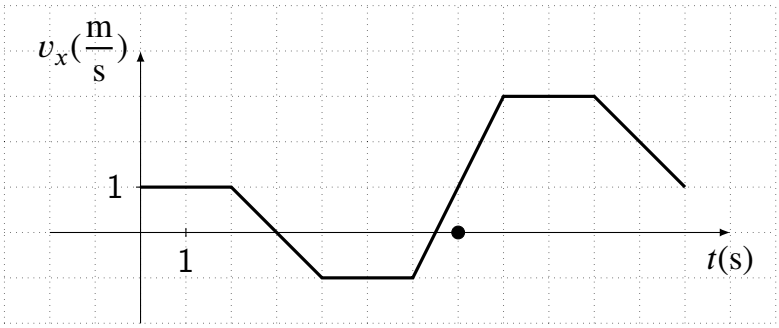
De startpositie van de wagen is $x_0 = 20$ m. De positie wordt uitgedrukt in m en de tijd in s. Bepaal de positie van de wagen op $t = 2$ s

$$x = \ldots\ldots \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

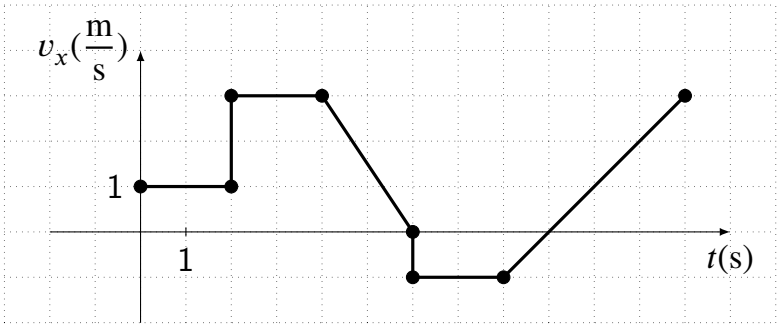
3.7.4 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging

7. Onderstaande grafiek geeft het verloop van de snelheid van een wandelaar weer ten opzichte van een gekozen x-as. Als je weet dat bij $t = 0$ de positie gelijk is aan $x_0 = 5$ m, wat is dan de positie, de snelheid en de versnelling van de wandelaar op $t = 7$ s?



$$x = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$v_x = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$a_x = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

8. Onderstaande grafiek geeft het verloop van de snelheid van een voorwerp weer ten opzichte van een gekozen x-as. Als je weet dat bij $t = 0$ de positie gelijk is aan $x_0 = 0$ m, schets dan de bijhorende $x(t)$- en $a_x(t)$-grafiek.



9. Twee treinen rijden in tegenovergestelde zin aan een constante snelheid naar elkaar toe. De ene trein rijdt 108 km/h en de andere trein 144 km/h. Op een bepaald ogenblik zijn ze 1400 m van elkaar verwijderd. Hoeveel seconden later zullen ze elkaar kruisen?

$$\Delta t = \ldots\ldots \text{ s}$$

10. Een fietser vertrekt vanuit rust met een constante versnelling zodat dat hij tussen de vierde en de vijfde seconde 9 meter aflegt. Bepaal de versnelling van de fietser.

$$a_x = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.7.5 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

1. De positie van een deeltje varieert van $\vec{r}_1 = -2,0 \cdot \vec{e}_x + 4,0 \cdot \vec{e}_y$ naar $\vec{r}_2 = 5,0 \cdot \vec{e}_x + 7,0 \cdot \vec{e}_y$. Wat is de verplaatsing van dit deeltje ten opzichte van de x-as en de y-as? De eenheid wordt uitgedrukt in m.

$$\Delta x = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$\Delta y = \ldots\ldots \text{ m}$$

2. Een golfer klopt een balletje in een eerste shot zodat de verplaatsing van het balletje kan beschreven worden door een verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}_1 = 250 \cdot \vec{e}_x$. Zijn tweede shot wordt beschreven door $\Delta\vec{r}_2 = 175 \cdot \vec{e}_x + 66 \cdot \vec{e}_y$. Wat is de afstand dat het balletje aflegt in elk shot en wat is de lengte van de totale verplaatsingsvector? De positie wordt uitgedrukt in meter.

$$\|\Delta\vec{r}_1\| = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$\|\Delta\vec{r}_1\| = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$\|\Delta\vec{r}\| = \ldots\ldots \text{ m}$$

3. Een boot vertrekt vanuit rust uit de haven op $t = 0$ en vaart een meer op met een versnelling $\vec{a} = 2,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \vec{e}_x$. Een sterke wind blaast de boot vooruit waardoor de boot een extra snelheid krijgt $\vec{v} = 2,0\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x + 3,5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_y$. Hoe groot is de snelheid van de boot na 5 seconden?

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4. Een dartspijltje wordt met een snelheid van $12\frac{\text{m}}{\text{s}}$ horizontaal weggegooid in de richting van de roos van het dartsbord, dat $2,6$ m verder staat opgesteld. Hoever onder de roos raakt het dartspijltje het bord?

$$\Delta y = \ldots\ldots \text{ cm}$$

5. Een vliegtuig vliegt met een snelheid van 360 km/h op een hoogte van 750 m. Een pallet met voedsel wordt uit het vliegtuig geduwd. Veronderstel dat de parachute niet open gaat, hoe ver van het punt waar de pallet het vliegtuig verlaat komt dit neer op de grond?

$$\Delta x = \ldots\ldots \cdot 10 \text{ m}$$

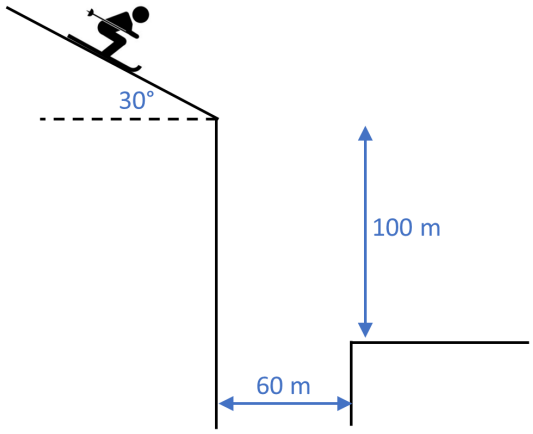
6. Op een bepaald ogenblik zakt een warmeluchtballon op 75 m hoogte verticaal naar beneden met een snelheid van $1,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Op dit ogenblik gooit een meisje een bal horizontaal weg met een snelheid van $15\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wanneer het meisje op de grond landt, hoe ver van de landingsplaats zal ze haar bal terugvinden?

$$\Delta x = \ldots\ldots \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.7.5 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

7. Een skiër skiet langs een helling die 30° maakt met de horizontale richting aan een snelheid van 54 km/h naar beneden. Plots verschijnt er een kloof van 60 m breed. De overkant van de kloof ligt 100 m lager. Zal de skier over de kloof geraken? Hoeveel meter legt de skiër in horizontale richting af als hij 100 m zakt?



$$\Delta x = \ldots\ldots \text{ m}$$

8. Een vliegwiel draait 35 toeren per seconde aan een constante snelheid. Over welke hoek, uitgedrukt in radialen, draait een punt op het vliegwiel in 20 seconden?

$$\Delta\theta = \ldots\ldots \cdot 10^2 \text{ rad}$$

9. Een loopster die deelneemt aan de 200 m wedstrijd moet aan het einde van de piste omkeren. De bocht van de piste heeft een straal van 40,0 m. De loopster loopt de volledige wedstrijd aan eenzelfde snelheid. Ze loopt de wedstrijd uit in 25,0 s. Hoe groot is haar centripetale versnelling als ze bocht neemt?

$$a = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

10. Een ventilator draait met een constane snelheid 350 toeren per minuut. Hoe groot is de snelheid van een punt dat zich op 15 cm van de draaias bevindt?

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Intro dynamica

Het vorige hoofdstuk handelde over kinematica waarin de beweging van objecten wiskundig beschreven wordt zonder de oorzaak van de beweging in acht te nemen. Bij de dynamica wordt deze oorzaak wel in de beschrijving opgenomen.

In dit hoofdstuk worden krachten en de gevolgen ervan op de bewegingstoestand bestudeerd. Wat veroorzaakt een beweging of een verandering van beweging? De wetten van Newton zullen een belangrijke rol spelen in het antwoord op deze vraag. We leren krachtendiagramma's opstellen. Tenslotte komt ook de dynamica van de cirkelvormige beweging van een puntmassa aan bod.

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Kracht

Om een doos over een ruwe vloer voort te duwen, moet je een kracht op de doos uitoefenen die de wrijvingskracht met de vloer compenseert. Om een boek in je hand te kunnen houden, moet je een opwaarts gerichte kracht uitoefenen die de neerwaarts gerichte zwaartekracht compenseert.

Definitie 4.2.1. Een kracht is een vectoriële grootheid gekenmerkt door een grootte, richting, zin en aangrijpingspunt. Ze wordt genoteerd door $\vec{F}$.

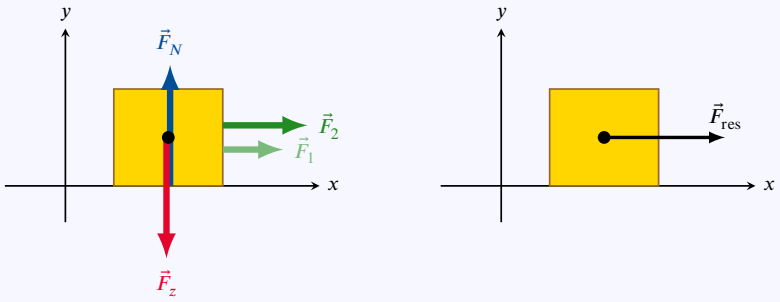
De grootte van de kracht noteren we met F. De eenheid van de grootte van de kracht is newton (N).

Er kunnen meerdere krachten tegelijk inwerken op een voorwerp.

Definitie 4.2.2. De **nettokracht of resulterende kracht** $\vec{F}_{\text{res}}$ definiëren we als de **vectorsom** van alle krachten uitgeoefend op dat voorwerp:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...$$

Voorbeeld 4.2.1. Een vader en zijn zoon duwen samen een doos over de vloer verder. Vader en zoon duwen elk met een horizontale kracht met respectieve groottes $F_1 = 23$ N en $F_2 = 17$ N (zie figuur 27). Bereken de nettokracht op de doos.



Figuur 27 – De resulterende kracht of nettokracht.

Antwoord : De krachten werken allebei op de doos, alsook de zwaartekracht $\vec{F}_z$ en de normaalkracht $\vec{F}_N$ (zie verder bij 4.5 'Soorten krachten'), dus is $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_z + \vec{F}_N$. De zwaartekracht en normaalkracht werken in de y-richting en compenseren elkaar. De krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ werken beide in de x-richting (één-dimensionaal) zodat $F_{1,x} = F_1 = 23\text{N}$ en $F_{2,x} = F_2 = 17$ N. Dus is $F_{res,x} = F_{res} = 40$ N. Ze staat voorwaarts gericht en vergroot daardoor de grootte van de snelheidsvector. In vectoriële notatie wordt dit: $\vec{F}_{res} = 40\ \vec{e}_x$. Hierbij is $\vec{e}_x$ een eenheidsvector in de x-richting.

Voorbeeld 4.2.2. De beweging van de maan rond de aarde kan benaderd worden als een eenparige cirkelbeweging. De enige kracht op de maan is de aantrekkende gravitatiekracht F_{grav} van de aarde. We vinden dus voor de grootte van de resulterende kracht :

$$F_{res} = F_g = G_0 \cdot \frac{m_m \cdot m_a}{d_{am}^2}$$

met m_m en m_a respectievelijk de massa van de maan en de aarde, en d_{am} de afstand aarde-maan.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Soorten krachten

4.3.1 Trek- of duwkracht

De eenvoudigst denkbare kracht is een trek- of duwkracht op een voorwerp. Die kan geleverd worden door een persoon (**spierkracht**) of door een machine (**motorkracht**). Je zou zelfs kunnen stellen dat eigenlijk alle soorten krachten (zie volgende paragrafen) in zekere zin trek- of duwkrachten zijn. Wij zullen in deze cursus echter enkel de letterlijke duw- of trekkrachten met deze naam aanduiden.

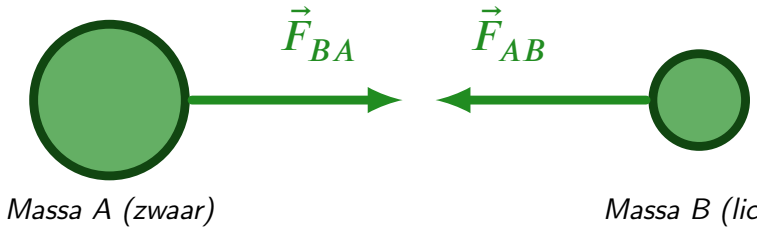
4.3.2 Gravitatiekracht, zwaartekracht

Twee voorwerpen met respectieve massa's m_1 en m_2, op een bepaalde afstand r van elkaar, oefenen op elkaar een **gravitatatiekracht** uit waarvan de grootte evenredig is met elk van de massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tussen deze massa's.

$$F_g = G_0 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

waarin G_0 de universele gravitatieconstante voorstelt en gelijk is aan $6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

De massa's worden hier als puntmassa's verondersteld. Deze krachtwerking is aantrekkend en gericht volgens de verbindingslijn tussen de punten.



Figuur 28 – Gravitatiekracht werkt van een puntmassa A op een naburige puntmassa B, en omgekeerd.

Met de gravitatiekracht kan niet alleen de beweging van de hemellichamen verklaard worden, maar ook van de voorwerpen in de buurt van het oppervlak van een hemellichaam, bijvoorbeeld de Aarde. De **zwaartekracht**, die elk voorwerp in de buurt van het aardoppervlak ervaart, is eigenlijk de gravitatiekracht die de aarde op elk voorwerp uitoefent. De grootte van de zwaartekracht op Aarde op een massa m wordt gegeven door

$$F_z = m \cdot g$$

Hierin is g gelijk aan de zwaarteveldsterkte: $9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$. Lokaal zijn hierop wel afwijkingen mogelijk. Door de zwaartekracht gelijk te stellen aan de gravitatiekracht kan je eenvoudig zien dat

$$g = G_0 \cdot \frac{m_{\text{aarde}}}{r^2} = G_0 \cdot \frac{m_{\text{aarde}}}{(r_a + h)^2}$$

waarin r_a staat voor de straal van de aarde en h voor de hoogte boven het aardoppervlak. Vermits deze waarden kunnen verschillen van plaatst tot plaats, is g niet overal even groot.

4.3.3 Touwkracht

Op een voorwerp dat aan het uiteinde van een gespannen touw bevestigd is, oefent het touw een 'touwkracht' $\vec{F}_t$ of 'spankracht' $\vec{F}_s$. Die kracht is steeds trekkend, nooit duwend, of dus : ze is steeds gericht naar de kant van het touw zelf. Zodra het touw slap hangt, is de spankracht ervan nul.

Elk touw wordt bovendien gekenmerkt door een maximale waarde $F_{s,max}$ van haar spankracht, of dus : de waarde waarbij het touw breekt.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Soorten krachten

4.3.4 Veerkracht

Op een voorwerp dat aan het uiteinde van een veer bevestigd is, oefent die veer een veerkracht $\vec{F}_v$. Die kracht is steeds gericht naar het zogenaamde 'evenwichtspunt', waar de veer haar natuurlijke lengte heeft. Of dus : als de veer ingedrukt is, is de veerkracht gericht naar een verlenging van de veer, en als de veer uitgerekt is, is de veerkracht gericht naar een verkorting van de veer.

De grootte van de veerkracht is gelijk aan

$$F_v = k \cdot \Delta l$$

met k de veerconstante (die groot is bij een stijve veer, en klein bij een slappe veer), en Δl de uitrekking óf induwing van de veer. Omwille van de gelijke grootte van de kracht bij uitrekking tegenover induwing, spreken we ook wel van 'opspanning' om beide tegelijk aan te duiden. We hebben dus een recht evenredig verband tussen de veerkracht en de opspanning van de veer.

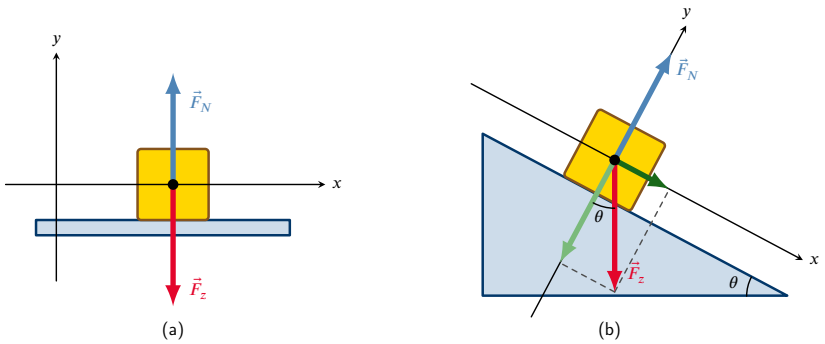
Men zegt ook wel samenvattend dat de veerkracht altijd een 'terugroepkracht' is : ze 'roept' het voorwerp altijd weer terug naar haar eigen evenwichtspunt. En omdat ze daarbij ook nog eens des te harder 'roept' naarmate het voorwerp verder verwijderd is van het evenwichtspunt, is het een voorbeeld van een zogenaamde 'elastische kracht'.

We zullen de veerkracht uitgebreider bespreken in het hoofdstuk over trillingen en golven.

> **Opmerking 4.3.1.** Je zou ook de touwkracht (zie eerder) kunnen zien als een veerkracht, als je het touw beschouwt als (een heel klein beetje) uitgerekt, zoals een veer. Het geval van induwing kan bij een touw dan niet gebeuren. Dan wordt de touwkracht nul aangezien het touw dan slap gaat hangen.

4.3.5 Normaalkracht

Veronderstel een boek dat in rust op tafel ligt. De zwaartekracht werkt in op het boek, toch versnelt het boek niet naar beneden. Er moet dus volgens de tweede wet van Newton nog een kracht op het boek werken, die de zwaartekracht compenseert. Deze kracht wordt uitgeoefend door de tafel op het boek. Ze staat loodrecht ('normaal') op het oppervlak en wordt daarom de normaalkracht genoemd. We gebruiken het symbool $\vec{F}_N$.



Figuur 29 – Normaalkracht op een voorwerp uitgeoefend door (a) een horizontaal oppervlak en (b) een schuin oppervlak. Op een schuin oppervlak zien we dat de grootte van de normaalkracht niet meer gelijk is aan die van de zwaartekracht op het voorwerp.

De grootte van de normaalkracht wordt bepaald door te eisen dat het voorwerp op het oppervlak moet blijven.

Voor het boek op het horizontaal oppervlak (figuur 29(a)) is de normaalkracht in grootte gelijk aan de zwaartekracht op het voorwerp ($F_N = m \cdot g$) om op het horizontaal oppervlak in rust te blijven.

CC BY-NC-SA 4.0

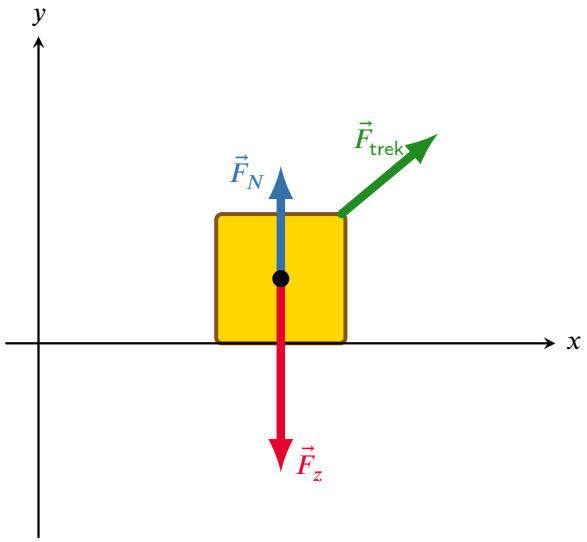
4.3 Soorten krachten

Deze gelijkheid geldt echter niet altijd. Dit is duidelijk te zien in figuur 29(b) waar een voorwerp op een schuin oppervlak ligt. Na projectie van de zwaartekracht $\vec{F}_z$ op de gekozen x- en y-as, is het duidelijk dat

$$F_N = \left|F_{z,y}\right| = mg \cdot \cos\theta$$

wat duidelijk kleiner is dan mg. Dit volgt uit de eis dat de krachten in de y-richting elkaar moeten compenseren om geen versnelling in de y-richting te krijgen, en er zo voor te zorgen dat het voorwerp inderdaad op het schuin oppervlak blijft (in de y-richting).

Merk op dat de x-component van de zwaartekracht $F_{z,x}$ het voorwerp naar beneden doet glijden (als de helling glad verondersteld is).



Figuur 30 – Normaalkracht door een horizontaal oppervlak op een voorwerp uitgeoefend. Op het voorwerp werkt nog een bijkomende uitwendige trekkracht $\vec{F}_{\text{trek}}$. In dit geval is de normaalkracht in grootte dus niet gelijk aan de zwaartekracht op het voorwerp.

In figuur 30 wordt een tweede situatie geschetst waar op een horizontaal oppervlak de normaalkracht in grootte toch niet gelijk is aan de zwaartekracht op het voorwerp. Een voorwerp ligt op een horizontaal oppervlak en wordt onder een bepaalde hoek verdergetrokken door een uitwendige kracht $\vec{F}_{\text{trek}}$. Het voorwerp komt daarbij niet los van het oppervlak. Bijgevolg moeten de krachten (volgens tweede wet van Newton) elkaar in de y-richting compenseren:

$$\begin{aligned} F_{N,y} + F_{z,y} + F_{\text{trek},y} &= m \cdot a_y \\ F_N - F_z + F_{\text{trek},y} &= 0 \\ F_N &= F_z - F_{\text{trek},y} \\ &= mg - F_{\text{trek},y} \end{aligned}$$

We zien dus dat ook in deze situatie de normaalkracht kleiner is dan de zwaartekracht op het voorwerp. Ditmaal is de oorzaak niet de helling van het oppervlak, maar een bijkomende krachtcomponent (hier van de trekkracht) in de normale richting. Het is echter niet moeilijk om in te zien dat, als de trekkracht schuin neerwaarts in plaats van schuin opwaarts gericht was, de normaalkracht groter zou worden dan de normaalkracht. Onthou dus in het algemeen dat **de normaalkracht niet altijd tegengesteld gericht staat aan de zwaartekracht, en naargelang de situatie kleiner, gelijk of groter dan de zwaartekracht kan zijn**.

In de x-richting zorgt F_x voor een versnelling $a_x = \dfrac{F_x}{m}$ van het voorwerp langs het horizontale oppervlak.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Soorten krachten

4.3.6 Dynamische wrijvingskracht

Wanneer een voorwerp over een ruw oppervlak schuift, oefent het oppervlak een dynamische wrijvingskracht $\vec{F}_w$ uit op het voorwerp, evenwijdig aan het oppervlak gelegen en achterwaarts gericht. Deze grootte van deze wrijvingskracht is evenredig met de grootte van de normaalkracht op het voorwerp en met de dynamische (of 'kinetische') wrijvingscoëfficiënt μ_k, die afhangt van het materiaal van het oppervlak en het materiaal van het voorwerp.

$$F_w = \mu_k \cdot F_N$$

Let op dat je deze formule niet vectorieel noteert! De dynamische wrijvingskracht staat langs het oppervlak gericht, en de normaalkracht loodrecht erop.

4.3.7 Statische wrijvingskracht

Wanneer op een ruw oppervlak een voorwerp weliswaar getrokken of geduwd wordt, maar niet hard genoeg om het voorwerp in beweging te brengen, dan oefent het oppervlak een statische wrijvingskracht $\vec{F}_{w,s}$ uit op het voorwerp. Deze is evenwijdig aan het oppervlak gelegen, en zodanig gericht, dat de resulterende krachtcomponent langs het oppervlak, nul blijft. Naargelang het materiaal van het oppervlak en het voorwerp, bestaat er een statische wrijvingscoëfficiënt μ_s waarvoor geldt dat, als de statische wrijvingskracht groter wordt dan

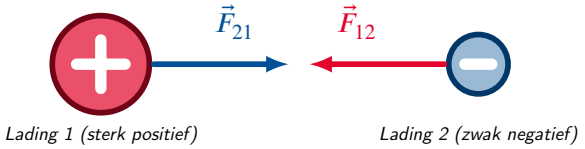
$$F_{w,s,max} = \mu_s \cdot F_N$$

, het voorwerp toch in beweging zal komen en de statische wrijvingskracht dus zal veranderen naar kinetische, zoals hierboven gedefinieerd.

4.3.8 Elektrische en magnetische kracht

De elektrische en de magnetische kracht (of samen : elektromagnetische kracht $\vec{F}_{em}$) werken in sommige omstandigheden in op elektrisch geladen voorwerpen.

We zullen deze elektromagnetische krachten uitgebreider bespreken in de hoofdstukken over Elektrostatica, Elektrodynamica en Magnetisme.



Figuur 31 – Een negatieve lading 2 trekt een positieve lading 1 aan, en omgekeerd.

4.3.9 Gewicht

Het gewicht $\vec{G}_w$ van een voorwerp dat nabij het aardoppervlak op een ondersteunend oppervlak rust, is de kracht die het voorwerp op z'n ondersteuning uitoefent. Volgens de derde wet van Newton oefent de steun een even grote tegengestelde kracht uit op het voorwerp, en deze kennen we reeds : de normaalkracht $\vec{F}_N$

$$\vec{G}_w = -\vec{F}_N$$

Dat de normaalkracht van de ondersteuning op het voorwerp, en het gewicht van het voorwerp op de ondersteuning, elkaars actie- en reactiekracht zijn, houdt in dat ze op een verschillend voorwerp aangrijpen, tegengesteld gericht zijn, en noodzakelijk even groot zijn. Wetende dat de normaalkracht naargelang de situatie kleiner, even groot of groter kan zijn dan de zwaartekracht, kunnen we nu hetzelfde concluderen voor het gewicht van een voorwerp.

Het gewicht wordt, als even grote kracht als de normaalkracht, nul bij normaalkracht nul. 'Gewichtloosheid' is normaalkrachtloosheid, niet zwaartekrachtloosheid!

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Soorten krachten

Het gewicht $\vec{G}_w$ grijpt zoals gezegd niet op het voorwerp maar op de ondersteuning aan. Je kan dus stellen dat, in de fysica, een voorwerp niet zijn eigen gewicht voelt. Het is de ondersteuning die het gewicht van het voorwerp voelt. Het voorwerp voelt wel zijn eigen zwaartekracht.

Opmerking 4.3.2. In het dagelijkse leven worden de woorden 'gewicht' en 'massa' als synoniemen gebruikt, maar in de fysica is dat helemaal niet zo. Het **gewicht** is, net zoals de zwaartekracht, een kracht, uitgedrukt in newton, terwijl **massa** uitgedrukt wordt in kilogram. Maar bovenal is er in het algemene geval geen verband tussen de massa en de grootte van de normaalkracht. Dat is er wel tussen de massa en de grootte van de **zwaartekracht**.

Definitie 4.3.1. De **massa** m van een voorwerp is een maat voor de hoeveelheid materie en wordt uitgedrukt in kg.

De **zwaartekracht** $\vec{F}_z$ op een voorwerp is de kracht waarmee de aarde het voorwerp naar zich toetrekt. Ze is in grootte recht evenredig met de massa m van het voorwerp.

Het **gewicht** $\vec{G}_w$ van een voorwerp is de kracht die het voorwerp uitoefent op zijn steun en wordt uitgedrukt in newton. Gewicht grijpt niet op het voorwerp aan maar op de steun, en is niet steeds even groot als de zwaartekracht op het voorwerp.

De **normaalkracht** $\vec{F}_N$ is de kracht van de steun op het voorwerp, en is even groot als, maar tegengesteld gericht aan, het gewicht $\vec{G}_w$ van het voorwerp op de steun.

Voorbeeld 4.3.1. Voor een voorwerp dat zich in rust bevindt op een horizontaal vlak, en waarop geen andere krachten inwerken, is de grootte van het gewicht gelijk aan:

$$\begin{aligned} G_w &= F_N \\ &= F_z \\ &= m \cdot g \end{aligned}$$

waarin g gelijk is aan de zwaarteveldsterkte. Het gewicht is dan even groot als de zwaartekracht. Maar je kunt inzien dat dit niet algemeen geldt.

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Krachtendiagramma's

Bij het oplossen van dynamische problemen met de **tweede wet van Newton**, is het belangrijk om te starten met een eenvoudige schets waarin elke uitwendige kracht op het betreffende object wordt getekend. Deze schets wordt een **krachtendiagramma** genoemd. Als we ons beperken tot translatiebewegingen ('schuivende' bewegingen zonder rotatie) mogen we het object beschouwen als een puntmassa waarop alle krachten inwerken. We kiezen een referentiestelsel en projecteren elke kracht op de x- en y-as (projectie van een vector op een as). Zo kan de tweede wet van Newton toegepast worden in elke coördinaatrichting afzonderlijk. We vatten dit samen in onderstaand stappenplan.

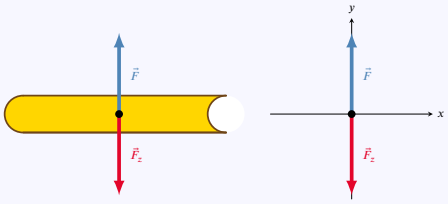
(a) Vervang het object door een puntmassa waarop alle krachten inwerken, en teken alle krachten op de puntmassa.

(b) Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze, bijvoorbeeld de x-as volgens de bewegingsrichting).

(c) Projecteer de krachten op de x- en y-as.

(d) Pas de tweede wet van Newton toe in elke coördinaatrichting en analyseer zo de beweging in elke richting apart.

Voorbeeld 4.4.1. Stel dat je een boek vasthoudt in je hand. Wat is de grootte van de opwaartse kracht van je hand op het boek zodat dit in rust blijft? Het corresponderende krachtendiagramma wordt getoond in figuur 32. Het boek wordt voorgesteld als een puntmassa waarop de krachten inwerken. De twee krachten die inwerken op het boek zijn enerzijds de zwaartekracht $\vec{F}_z$ en anderzijds de opwaartse kracht $\vec{F}$ van je hand op het boek. Merk op dat in een krachtendiagramma enkel de krachten getekend worden die op het object (in dit geval het boek) inwerken, en niet de bijhorende reactiekrachten, die immers op andere systemen inwerken : de reactiekracht van de zwaartekracht grijpt aan in het middelpunt van de aarde, en de reactiekracht van de normaalkracht grijpt aan op de hand.



Figuur 32 – Het krachtendiagramma bestaande uit twee uitwendige krachten op het boek.

Vervolgens kiezen we een x-y assenstelsel zodat we de componenten van de krachten kunnen bepalen. In dit geval zijn alle krachten verticaal, zo wordt de tweede wet van Newton in de opwaarts gekozen y-richting:

$$\sum_i F_{i,y} = F - F_z = m \cdot a_y.$$

Omdat het boek in rust blijft, is de versnelling in de y-richting 0, dus is

$$F - F_z = m \cdot a_y = 0,$$

of

$$F = F_z.$$

Zoals verwacht is de opwaartse kracht van je hand hier dus even groot als de zwaartekracht die op het boek inwerkt.

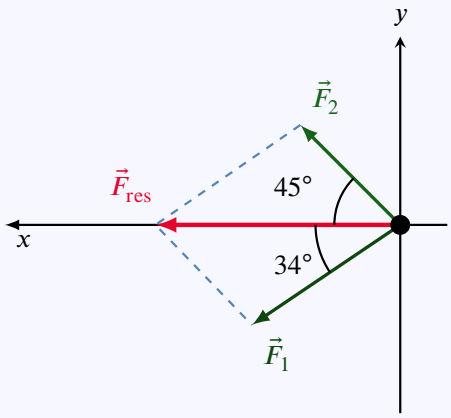
CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Krachtendiagramma's

Voorbeeld 4.4.2. Twee landbouwers trekken een kar met twee touwen voort. Een landbouwer trekt met een kracht van 130 N onder een hoek van 34° met de voortbewegingsrichting van de kar. De tweede landbouwer trekt onder een hoek van 45°. Met welke kracht moet de tweede landbouwer trekken opdat de nettokracht uitgeoefend door de twee personen in de voorwaartse bewegingsrichting van de kar staat?

Via het stappenplan proberen we deze oefening op te lossen.

(a) Vervang het object door een puntmassa waarop alle krachten inwerken, en teken alle krachten op het object (zie figuur). In de tekening hebben we ons beperkt tot alle krachten in het x-y vlak. De zwaartekracht en normaalkracht heffen mekaar op in de z-richting.



Figuur 33 – Krachtendiagramma kar.

(b) Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze). Hier kiezen we de x-as met richting en zin van de beweging. (zie figuur).

(c) Projecteer de krachten op de x- en y-as.

$$\begin{aligned} F_{1,x} &= F_1 \cdot \cos(34°) \\ F_{2,x} &= F_2 \cdot \cos(45°) \\ F_{1,y} &= -F_1 \cdot \sin(34°) \\ F_{2,y} &= F_2 \cdot \sin(45°) \end{aligned}$$

(d) Pas de tweede wet van Newton toe in elke coördinaatrichting en analyseer zo de beweging in elke richting apart.

$$F_{1,x} + F_{2,x} = m \cdot a_x \qquad (1)$$
$$F_{1,y} + F_{2,y} = m \cdot a_y \qquad (2)$$

(e) Wat wordt er precies gevraagd? De resulterende kracht moet volgens de x-as liggen. Dit wil

CC BY-NC-SA 4.0

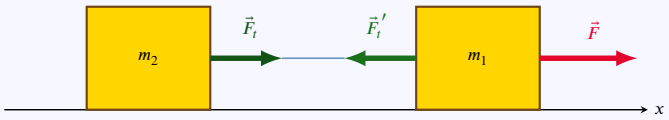
4.4 Krachtendiagramma's

zeggen dat de resulterende kracht geen y-component heeft. Vergelijking (2) wordt dan:

$$\begin{aligned} F_{1,y} + F_{2,y} &= m \cdot a_y = 0 \\ -F_1 \cdot \sin(34°) + F_2 \cdot \sin(45°) &= 0 \\ F_1 \cdot \sin(34°) &= F_2 \cdot \sin(45°) \\ F_2 &= \frac{F_2 \cdot \sin(34°)}{\sin(45°)} \\ &= \frac{130\ \text{N} \cdot \sin(34°)}{\sin(45°)} \\ &= 103\ \text{N} \end{aligned}$$

Voorbeeld 4.4.3 (Gekoppelde opbjecten)**.** We passen de tweede wet van Newton toe op objecten die met mekaar verbonden zijn. In dit voorbeeld wordt met een kracht $\vec{F}$ getrokken aan twee dozen die verbonden zijn door een massaloos touw en die schuiven over een wrijvingsloos oppervlak. Zo ontstaat er een spanning in het touw en bewegen de dozen verder met dezelfde versnelling $\vec{a}$. Stel dat de massa's m_1 en m_2 van de dozen gekend zijn.

Bepaal dan de spankracht in het touw en de versnelling van de dozen. We maken weer gebruik van het stappenplan.



Figuur 34 – Twee dozen verbonden door een massaloos touw worden voortgetrokken. Zo krijgen de twee dozen dezelfde versnelling.

(a) Vervang de twee dozen door twee puntmassa's waarop de krachten inwerken (zie figuur). Op doos 1 met massa m_1 werken twee krachten: de trekkracht $\vec{F}$ naar rechts en de spankracht $\vec{F}_t'$ naar links. Op doos 2 met massa m_2 werkt slechts één kracht, nl. de spankracht $\vec{F}_t$ naar rechts toe.

(b) Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze). Hier kiezen we de x-as in de richting van de beweging, naar rechts dus.

(c) Projecteer de krachten op de x- en y-as. Vermits alle krachten horizontaal zijn, zijn alle x-projecties even groot als de krachten zelf.

(d) Pas de tweede wet van Newton toe voor elk object. We dienen hier enkel de x-richting te bekijken.

$$\begin{aligned} &\text{Doos 1:} \quad F - F_t' = m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot a \qquad (1) \\ &\text{Doos 2:} \quad F_t = m_2 \cdot a_2 = m_2 \cdot a \qquad (2) \end{aligned}$$

Merk hierbij op dat beide dozen dezelfde versnelling krijgen, dus $a_1 = a_2 = a$. Wiskundig gezien is dit een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met drie onbekenden F_t, F_t' en a, wat dus niet oplosbaar lijkt. Maar omdat voor de spankrachten geldt dat ze afkomstig zijn van hetzeflde touw en dus even groot zijn : $F_t = F_t'$, blijven er slechts twee onbekenden over en is dit stelsel oplosbaar met behulp van substitutie of combinatie. Tellen we beide vergelijkingen op dan bekomen we:

$$F = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Krachtendiagramma's

Wanneer we deze laatste uitdrukking voor a substitueren in vergelijking (2) bekomen we:

$$T = m_2 \cdot a = \frac{m_2 \cdot F}{m_1 + m_2}$$

Deze uitdrukking voor a kunnen we eigenlijk ook sneller vinden als we de twee dozen als één geheel bekijken met massa $m_1 + m_2$, waarop een uitwendige kracht $\vec{F}$ werkt. De spankrachten in het touw worden dan inwendige krachten die mekaar compenseren en dus geen rol spelen in de tweede wet van Newton. Nadeel is dan natuurlijk dat we voor deze spankrachten geen uitdrukking kunnen vinden.

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 De wetten van Newton

4.5.1 Eerste wet van Newton - traagheidswet

Gedurende meer dan 15 eeuwen dacht men zoals Aristoteles dat een voorwerp maar in beweging kan blijven als er een kracht op wordt uitgeoefend. Newton (1642-1727) toonde aan dat dat niet klopt: een kracht zorgt niet voor beweging, een kracht kan enkel voor een *verandering* van een beweging zorgen. Een voorwerp kan dus wel degelijk bewegen zonder dat er een resulterende kracht op werkt!

Eigenschap 4.5.1 (EERSTE WET VAN NEWTON - TRAAGHEIDSWET)**.**

Als er op een voorwerp geen resulterende kracht wordt uitgeoefend, behoudt het zijn bewegingstoestand:

(a) is het voorwerp in rust, dan blijft het in rust;

(b) beweegt het voorwerp met een bepaalde snelheid in een bepaalde richting, dan blijft het eenparig rechtlijnig bewegen met deze snelheid in deze richting.

4.5.2 Tweede wet van Newton

Wanneer de snelheid van het object verandert, kan je ook zeggen dat dat voorwerp een versnelling heeft.

De mate waarin het object door een gegeven kracht versneld wordt, hangt af van de massa van het object. Dit is een scalaire grootheid met als SI-eenheid de kilogram (niet de gram !). De massa van een object is dus een maat voor de weerstand tegen snelheidsveranderingen (= maat voor traagheid).

Hoe moeilijk is het om een object in beweging te krijgen? Bijvoorbeeld als je een doos vooruit wenst te duwen zal je minder kracht moeten uitoefenen dan wanneer je een auto al duwend in beweging wil krijgen. De massa van een auto is dan ook veel groter dan de massa van de doos. Bij dezelfde resulterende kracht zal een object met grote massa een kleine versnelling krijgen en een object met een kleine massa een grote versnelling. De versnelling is bij een een zekere resulterende kracht dus omgekeerd evenredig met de massa.

De tweede wet van Newton geeft een verband tussen de resulterende kracht op een massa en de verandering van de bewegingstoestand van die massa.

Eigenschap 4.5.2 (TWEEDE WET VAN NEWTON)**.**

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$$

De tweede wet van Newton is een vectoriële wet. Omdat de resulterende kracht een vectoriële grootheid is, zal de versnelling ook een vector zijn. Bovendien hebben de versnelling en de resulterende kracht dezelfde richting en zin (zie figuur 35).

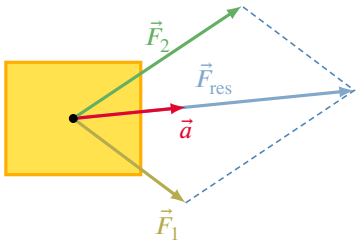
Bij het oplossen van vraagstukken zullen we daarom de tweede wet van Newton schrijven met behulp van krachtcomponenten, met andere woorden we projecteren de krachten, die vectoren zijn, op de x-, y- en z-as, zo bekomen we:

$$\sum_i F_{i,x} = m \cdot a_x \qquad \sum_i F_{i,y} = m \cdot a_y \qquad \sum_i F_{i,z} = m \cdot a_z$$

Dit zijn nu algebraïsche vergelijkingen (geen vectorvergelijkingen) waarmee we kunnen rekenen. Merk op dat de krachtcomponent volgens een bepaalde richting enkel de beweging in dezelfde richting als de krachtcomponent beïnvloedt.

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 De wetten van Newton



Figuur 35 – De resulterende kracht (of nettokracht) $\vec{F}_{\text{res}}$ is de vectorsom van de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ die werken op een puntmassa m. Deze nettokracht geeft de massa een versnelling $\vec{a}$ met dezelfde richting en zin als $\vec{F}_{\text{res}}$.

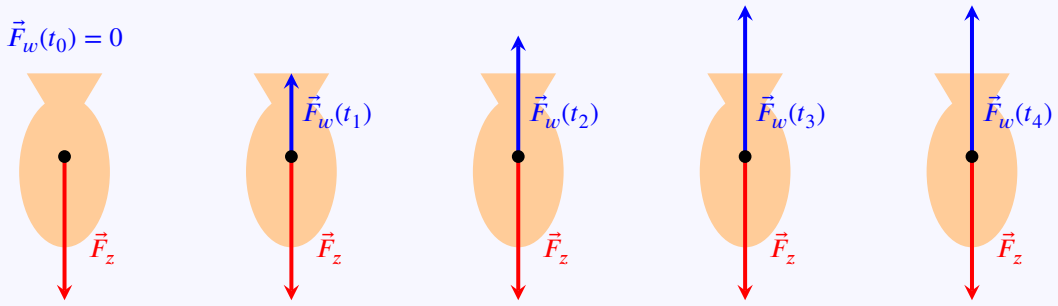
Krachten worden gemeten in newton.

Definitie 4.5.1. Kracht wordt uitgedrukt in newton, symbool N.

Een newton is gedefinieerd als de kracht die nodig is om een massa van 1 kilogram een versnelling van $1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ te geven:

$$1\ N = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Voorbeeld 4.5.1. Als je een zandzakje uit de mand van een stilhangende luchtballon laat vallen, werken op het zandzakje twee tegengesteld gerichte krachten: de zwaartekracht $\vec{F}_z$ en de luchtweerstand $\vec{F}_w$. Op tijd nul, bij het loslaten, is de luchtweerstand nog nul, en is de zwaartekracht dus gelijk aan de resulterende kracht. Geleidelijk aan neemt de luchtwrijving toe, waardoor de resulterende kracht, en dus de versnelling van het zandzakje, afneemt. Na verloop van tijd zijn de twee krachten even groot geworden. De luchtweerstand wordt niet nog groter. De resulterende kracht is vanaf dan dus nul, zodat er vanaf dan geen versnelling meer is, en het zandzakje vanaf dan dus eenparig valt.



4.5.3 Derde wet van Newton - wet van actie en reactie

Als je met een hamer een spijker in de muur klopt, moet je de hamer stevig vasthouden: op het ogenblik dat je de spijker raakt, voel je een kracht op de hamer.

Eigenschap 4.5.3 (DERDE WET VAN NEWTON - WET VAN ACTIE EN REACTIE)**.**

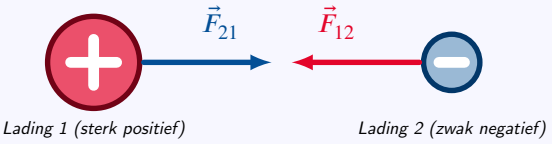
Als een systeem 1 een kracht $\vec{F}_{12}$ uitoefent op een systeem 2, oefent systeem 2 een even grote tegengestelde kracht $\vec{F}_{21}$ uit op systeem 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 De wetten van Newton

Voorbeeld 4.5.2. Een negatieve lading 2 trekt een positieve lading 1 aan en tegelijkertijd trekt de positieve lading even sterk de negatieve lading aan.



Enkele opmerkingen:

(a) Volgens de derde wet van Newton treden krachten dus nooit alleen op, maar altijd per twee.

(b) Men noemt deze wet ook wel de wet van actie en reactie: de ene kracht (de 'actie') heeft als gevolg dat er ook een andere kracht ('de reactie') optreedt. Het is echter niet zo dat de ene kracht eerder optreedt dan de andere. Beide krachten treden gelijktijdig op!

(c) De twee krachten grijpen aan op twee verschillende systemen: de ene kracht op het ene systeem, de andere op het andere systeem. Daarom kun je geen resultante bepalen van een actie- en een reactiekracht!

(d) Alhoewel de twee krachten even groot zijn, kan de versnelling van de twee systemen toch verschillend zijn: als een vrachtwagen tegen een personenauto botst, ervaren ze beide een even grote kracht, maar omdat de massa van de vrachtwagen veel groter is dan de massa van de wagen, zal de versnelling van de vrachtwagen ten gevolge van de botsing heel wat kleiner zijn dan die van de wagen. Bovendien is het niet noodzakelijk zo dat de krachten in kwestie de enige zijn die op de systemen werken. Mogelijk werken er nog andere krachten op één of allebei de systemen, en dan bepalen die natuurlijk ook mee de versnelling(en).

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Centripetaalkracht

In het hoofdstuk over kinematica leerden we dat bij een **eenparige cirkelbeweging** de versnellingsvector steeds naar het middelpunt van de cirkel gericht moet zijn. We noemden daarom de versnelling in dat geval ook wel de normale of middelpuntzoekende of centripetale versnelling, of centripetaalversnelling.

Nu vertelt de tweede wet van Newton ons dat de versnellingsvector steeds gelijkgericht is aan de resulterende kracht. Daarom zal in het geval van een eenparige cirkelbeweging, ook de resulterende kracht steeds naar het middelpunt van de cirkel gericht moeten zijn. We noemen daarom de resulterende kracht in dat geval ook wel de normale of middelpuntzoekende of **centripetale** kracht, of **centripetaalkracht**.

Definitie 4.6.1. De centripetaalkracht verandert de snelheidsvector niet van grootte maar enkel van richting. Ze levert zo dus de centripetaalversnelling $a_{CP} = v^2/r$ die nodig is voor een eenparige cirkelbeweging.

Haar grootte is daarom gelijk aan :

$$F_{res} = F_{CP} = m \cdot a_{CP} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

met m de massa van het object, v de grootte van de snelheid van het object, en r de straal van de cirkelbaan.

Voorbeeld 4.6.1. De beweging van de maan rond de aarde kan benaderd worden als een eenparige cirkelbeweging. De enige kracht op de maan (en dus meteen de resulterende kracht op de maan) is de aantrekkende gravitatiekracht F_{grav} van de aarde. We vinden in deze benadering dus dat :

$$F_{grav} = m_{maan} \cdot \frac{v^2}{d_{am}}$$

met d_{am} de afstand aarde-maan.

In het hoofdstuk over kinematica leerden we vervolgens ook dat bij een **niet-eenparige cirkelbeweging**, de versnellingsvector schuin gericht staat. Dat betekende dat de versnellingsvector naast een centripetale component ook een tangentiële component bevat.

Hetzelfde zullen we nu dus ook kunnen zeggen over de resulterende kracht. Deze zal bij de niet-eenparige cirkelbeweging schuin gericht staan, en naast een centripetale component (die we nog steeds 'de centripetaalkracht' zullen blijven noemen) ook een tangentiële component bevatten. De centripetale component van de resulterende kracht zullen we nog steeds de 'centripetaalkracht' blijven noemen, en deze zal nog steeds volgens de hierboven gegeven definitie, gelijkgesteld kunnen worden aan :

$$F_{CP} = m \cdot a_{CP} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Voorbeeld 4.6.2. Een balletje slingert heen en weer aan een touw dat aan het plafond is bevestigd. Bereken de resulterende kracht op het balletje in het onderste punt van de baan.

Hoe is de resulterende kracht in het onderste punt van de baan gericht ?

Hoe is de resulterende kracht in een willekeurig ander punt van de baan gericht ?

Antwoord : Op het balletje werken de neerwaartse zwaartekracht F_z, en de touwkracht F_t die gericht is naar het ophangpunt aan het plafond.

In het onderste punt van de slingerbeweging staat de touwkracht dus opwaarts. De resulterende kracht staat daar, als vectorsom van beide krachtvectoren, dus al zeker verticaal (op- of neerwaarts) gericht.

Omdat we weten dat het balletje een (stuk van) een cirkelbaan aflegt, moet de resulterende kracht

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Centripetaalkracht

noodzakelijk naar de binnenkant van de cirkelbaan gericht staan, en niet naar de buitenkant. Dit maakt dat de touwkracht $F - t$ daar groter is dan de zwaartekracht F_z, en de resulterende kracht **opwaarts** gericht staat, met als grootte :

$$F_{res} = F_t - F_z$$

In een willekeurig ander punt van de baan zal de resulterende kracht schuin gericht staan, en dus zowel een centripetale als een tangentiële component bevatten. In al deze punten zal de cirkelbeweging niet-eenparig verlopen : tijdens het stijgen zal ze vertraagd gebeuren, en tijdens het dalen versneld.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Oefeningen Dynamica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

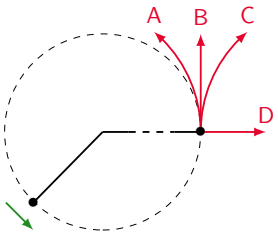
CC BY-NC-SA 4.0

4.7.1 Instapoefeningen

1. Een doos staat op een horizontale baan zonder wrijving. De doos wordt geduwd en dan losgelaten. Wat gebeurt er na het loslaten met de doos?

- De doos vertraagt en komt langzaam tot stilstand.
- De doos schuift verder met constante versnelling.
- De doos schuift verder met afnemende versnelling.
- De doos schuift verder met een constante snelheid.

2. Een schijf die vastgemaakt is aan een touw voert een cirkelvormige beweging uit op een luchtkussentafel. Welk pad zou de schijf volgen indien het touw breekt op de plaats P aangegeven op de figuur, die een bovenzicht van de situatie geeft ?



Het juiste pad is A | B | C | D.

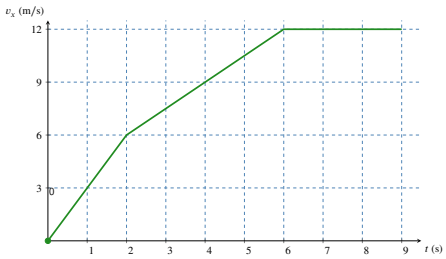
CC BY-NC-SA 4.0

4.7.2 Standaardoefeningen

1. De Aarde bevindt zich op 150 miljoen km van de Zon. De massa van de Aarde bedraagt $5,98 \cdot 10^{24}$kg, terwijl de massa van de Zon $1,99 \cdot 10^{30}$kg bedraagt. Hoe groot is de centripetale versnelling van de Aarde tijdens haar baan rond de Zon, als we deze beweging benaderen als een eenparige cirkelvormige beweging ?

$$a = \ldots\ldots \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

2. De figuur geeft de snelheidsgrafiek weer van een deeltje met een massa van $2,0$ kg dat langs de x-as beweegt. Wat is de resulterende kracht op dit deeltje na 1 s, 4 s en 7 s?



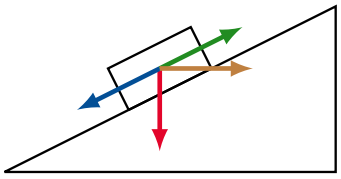
1. Na 1 s: ..... N

2. Na 4 s: ..... N

3. Na 7 s: ..... N

3. Een baseball-speler schuift over de grond met een initiële snelheid van 4,0 m/s. Stel dat de kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen zijn schoenen en de grond 0,46 is, hoe ver zal de speler dan glijden voor hij tot rust komt?

4. Een voorwerp krijgt een stoot onderaan een helling en schuift daarna zonder wrijving omhoog langs de helling. Welke vector geeft de resulterende kracht juist weer na de stoot, dus tijdens het omhoog schuiven?

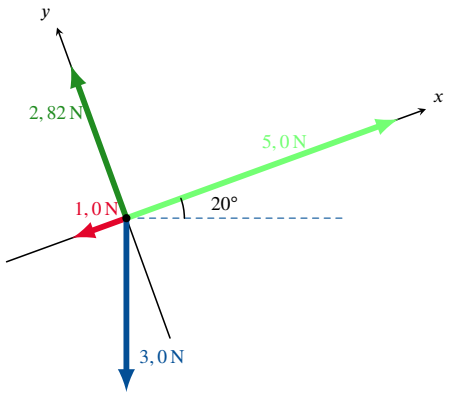


Blauw	Rood	Bruin	Groen

5. Op een massa van $2,0$ kg werken vier krachten, zoals weergegeven op de figuur. Bepaal de x- en y-component van de versnelling ten opzichte van het aangeduide assenstelsel.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.2 Standaardoefeningen



1. $a_x = \ldots\ldots$ m/s^2

2. $a_y = \ldots\ldots$ m/s^2

6. Een dakwerker met een massa van 87 kg staat op een dak met een helling van 30°. Hoe groot is de normaalkracht van het dak op de dakwerker?

$$F_N = \ldots\ldots \ N$$

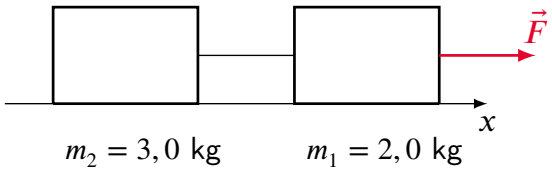
7. Een reiskoffer van 23 kg wordt horizontaal verder getrokken door een kracht $\vec{F}$ van 110 N onder een hoek van 25° boven de horizontale. Hierbij wordt de wrijving verwaarloosd.

1. Bereken de normaalkracht op de koffer (rond af zonder komma). $F_N = \ldots\ldots N$

2. Bereken de versnelling van de koffer (rond af tot op één getal na de komma, bv. 1.4).

$$\vec{a} = (\ldots\ldots \ ; \ \ldots\ldots) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

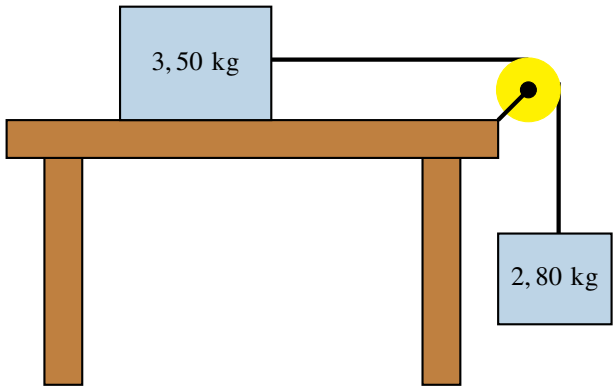
8. Twee blokken zijn met elkaar verbonden via een touw. Ze worden verder getrokken door een kracht met grootte $F = 5$ N. Bereken de versnelling van beide blokken en de spankracht in het touw. De tafel mag wrijvingsloos verondersteld worden.



9. Een blok van 3,50 kg ligt op een gladde wrijvingsloze tafel en is via een touw verbonden met een blok van 2,80 kg zoals weergegeven in onderstaande figuur. Zoek de versnelling a van de massa's en de spankracht F_t in het touw. Antwoord: $|a| = \ldots\ldots$ m/s^2, $F_t = \ldots\ldots$ N.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.2 Standaardoefeningen

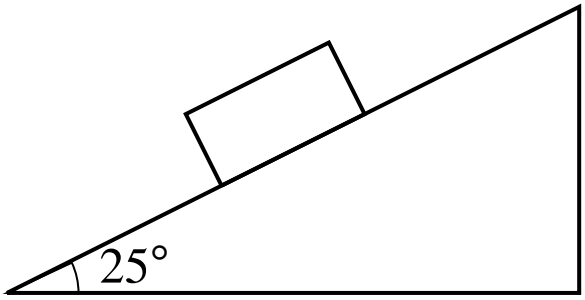


CC BY-NC-SA 4.0

4.7.3 Gevorderde oefeningen

1. In een speeltuin glijdt een kind van een glijbaan met een versnelling van $1,26$ m/s^2. De glijbaan maakt een hoek van $33°$ onder de horizontale. Zoek de wrijvingscoëfficiënt μ_k tussen het kind en de glijbaan. $\mu_k = \ldots\ldots$

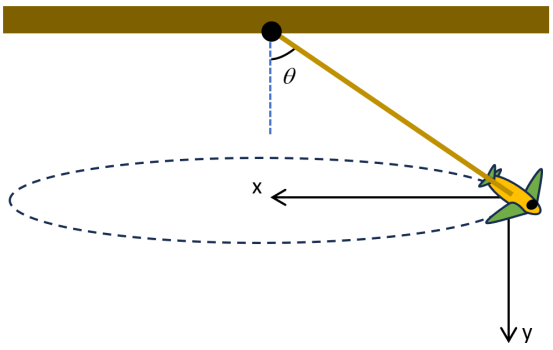
2. Een blok met een massa van $6,0$ kg ligt op een schuine helling die een hoek van $25°$ maakt met de horizontale richting. We geven een forse tik tegen het blok zodat het de helling opschuift met een beginsnelheid van $15\frac{\text{m}}{\text{s}}$. De wrijvingskracht bedraagt 20 N. Na hoeveel tijd zal het blok zijn beginpositie weer bereiken?



1. Aankomst in beginpunt na: $\ldots\ldots$ s

3. In de jungle slingert Tarzan ($m = 63$ kg) aan een touw van 6,9 m lang. Wat is de spanning in het touw als Tarzan met een snelheid van 2,4 m/s vliegt wanneer het touw verticaal is (laagste positie) ?

4. Een speelgoedvliegtuigje met massa $m = 0,075$ kg is vastgemaakt aan het plafond met een touw. Wanneer de motor van het vliegtuigje gestart wordt, beweegt het met een constante snelheid van $1,21$ m/s in een horizontale cirkel met straal $0,44$ m.



1. Zoek de hoek θ die het touw maakt met de verticale (rond af tot op een graad).

$$\theta = \ldots\ldots \ °$$

2. Zoek de spanning F_T in het touw.

$$F_T = \ldots\ldots \ N$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

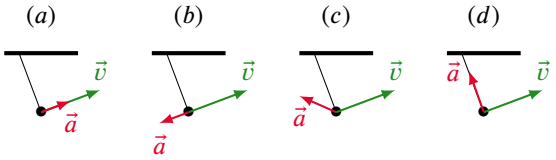
1. Een hockeypuck glijdt op ijs met een constante snelheid. Hoeveel bedraagt de nettokracht die op de puck inwerkt?

- Een kracht gelijk aan de zwaartekracht van de puck.
- Een kracht kleiner dan de zwaartekracht, maar groter dan nul.
- Hangt af van de snelheid van de puck.
- De kracht is nul.

2. Je knijpt een boek tussen duim en wijsvinger vast waardoor het niet valt. Elk van de twee vingers knijpt met een kracht van $6,0$ N loodrecht op de kaft van het boek. Hoe groot mag de zwaartekracht van het boek maximaal zijn opdat het niet tussen je vingers weg zou glippen? De statische wrijvingscoëfficiënt tussen je vingers en de kaft van het boek bedraagt $0,80$.

$$G_w = \ldots\ldots \text{ N}$$

3. Een balletje slingert in een verticaal vlak. In welk van de onderstaande figuren is de versnelling correct getekend, op het tijdstip van de getoonde snelheidsvector $\vec{v}$?

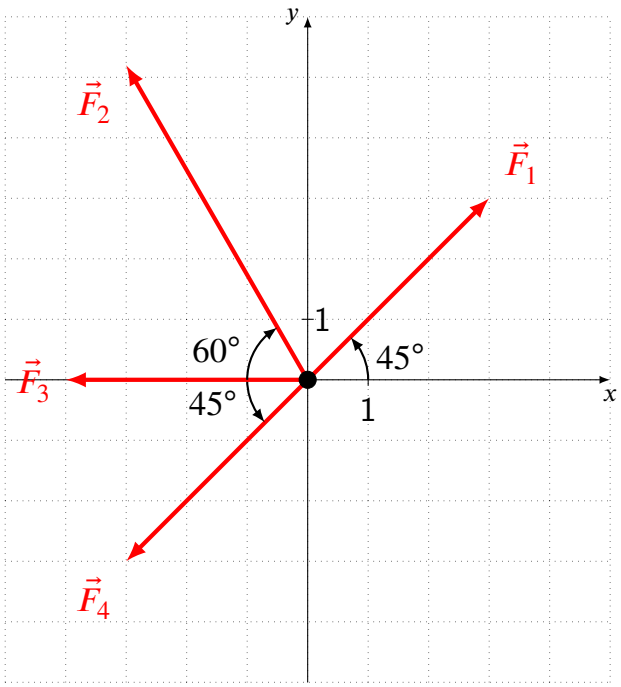


De juiste figuur is (a) | (b) | (c) | (d).

4. Op een voorwerp met $m = 5,0$ kg werken vier krachten, zoals weergegeven op de figuur. Er is gegeven dat $F_1 = 4,2$ N, $F_2 = 6,0$ N, $F_3 = 4,0$ N, $F_4 = 4,2$ N. Bepaal de grootte van de versnelling van het voorwerp.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.4 Herhalingsoefeningen: dynamica



$a = \ldots\ldots$ m/s^2

5. Bepaal de verhouding van de zwaarteveldsterkte op Mars tot de zwaarteveldsterkte op Aarde. Er is gegeven dat $m_{Mars} = 6,42 \cdot 10^{23}$ kg en $r_{Mars} = 3,38 \cdot 10^{6}$ m.

$$\frac{g_{Mars}}{g_{Aarde}} = \ldots\ldots$$

6. Een auto met een gewicht van 15000 N vertrekt op een horizontale weg vanuit rust en versnelt tot 90 km/h in 5,0 s. De totale wrijvingskracht op de auto is 1250 N. Bepaal de kracht die de motor op de auto uitoefent.

$$F = \ldots\ldots \cdot 10 \text{ N}$$

7. Een proton met een mass van $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg beweegt op een cirkel met een straal $r = 1,5$ m door een magneetveld met sterkte $B = 0,085$ T. Het proton heeft een lading van $Q = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C. Hoe groot is de snelheid van het proton op zijn cirkelbaan?

$$v = \ldots\ldots \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8. Een vrachtwagen met een massa van $m = 3800$ kg rijdt aan een snelheid van 50,4 km/h als hij plots moet remmen. De vrachtwagen staat stil na 14 s. Hoe groot is de remkracht?

$$F = \ldots\ldots \cdot 10^2 \text{ N}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

9. Een slee met een massa van $m = 40\,\text{kg}$ glijdt vanuit rust een besneeuwde helling af. De helling heeft een lengte van $5,0\,\text{m}$ en maakt een hoek van $30°$ met de horizontale. De dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen de slee en de sneeuw bedraagt $\mu_d = 0,15$. Bereken de versnelling van de slee langs de helling. Bepaal hoe lang het duurt voordat de slee de voet van de helling bereikt.

$$a = \ldots\ldots \text{ m/s}^2$$

$$\Delta t = \ldots\ldots \text{ s}$$

10. Een skiër met massa $m = 65$ kg glijdt langs een wrijvingsloze helling naar beneden. De helling maakt een hoek θ van $22°$ met de horizontale.

1. Bepaal de richting en grootte van de resulterende kracht op de skiër (rond af zonder komma).

$$\vec{F}_{\text{net}} = (\ldots\ldots \ ; \ \ldots\ldots) \ N$$

$$F_{\text{net}} = \ldots\ldots \ N$$

2. Als de helling steiler wordt, dan wordt de resulterende kracht | groter | kleiner | hetzelfde | . . Verklaar.

11. Een zeeleeuw schuift vanuit rust langs een helling naar beneden. De helling is 3.0 m lang en maakt een hoek van $23°$ boven de horizontale. Als de dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen de zeeleeuw en de helling $0,26$ is, hoe lang duurt het dan tot de zeeleeuw in het water belandt?
$\Delta t = \ldots\ldots$ s

12. Een kleine bal met een massa van $m = 0,50\,\text{kg}$ is bevestigd aan het uiteinde van een licht, onrekbaar touw met een lengte van $r = 1,2\,\text{m}$. Het andere uiteinde van het touw is vastgemaakt aan een vast punt op een wrijvingsloze horizontale tafel. De bal wordt in een horizontale cirkelbaan gebracht met een constante snelheid van $v = 3,0\,\text{m/s}$. Bereken de grootte van de spankracht in het touw.

$$F_T = \ldots\ldots \text{ N}$$

13. Een massa $m = 0,25\,\text{kg}$ draait aan het uiteinde van een massaloos touwtje in een cirkel over een horizontale tafel. De wrijving kan verwaarloosd worden. De lengte van het touw is $L = 0,50\,\text{m}$. Het touwtje kan in verticale positie en in rust maximaal een massa van $M = 50\,\text{kg}$ dragen zonder te breken. Wat is de maximale snelheid waarmee m kan draaien zonder dat het touwtje breekt?

$$v = \ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

14. Je schuift een zoutvat naar de andere kant van de tafel en geeft het een initïele snelheid van 1.15 m/s . Het zoutvat vertraagt en komt tot rust na 0.840 m. Wat is de dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen het zoutvat en de tafel?

15. Een verkeerslicht met een gewicht van $G = 120\,\text{N}$ hangt boven een kruispunt aan twee lichte kabels. De eerste kabel maakt een hoek van $\alpha = 30°$ met de horizontale, en de tweede kabel maakt een hoek van $\beta = 45°$ met de horizontale. Beide kabels zijn aan een vast punt bevestigd. Bereken

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

de grootte van de beide spankrachten.

$$F_{T,1} = \ldots\ldots \text{ N}$$
$$F_{T,2} = \ldots\ldots \text{ N}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Intro arbeid en energie

In dit hoofdstuk definiëren we de arbeid die door een kracht wordt uitgeoefend op een voorwerp, en tonen aan hoe die arbeid gerelateerd is aan de kinetische energie van het voorwerp. Vervolgens bespreken we de potentiële energie van een voorwerp, en zien we wanneer de mechanische energie ervan behouden blijft.

CC BY-NC-SA 4.0

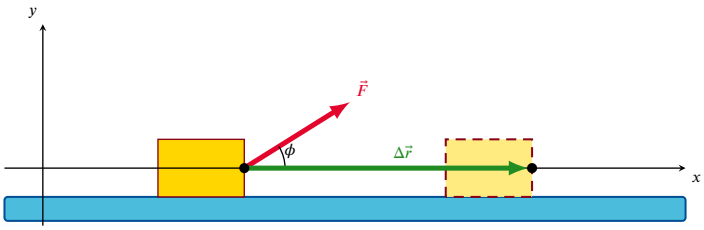
5.2 Arbeid en vermogen

5.2.1 Definitie van arbeid

Wanneer je een doos verderduwt over een ruwe vloer, verricht je spierkracht arbeid. Hoe groter de uitgeoefende spierkracht, hoe groter de arbeid. En ook hoe groter de afstand waarover je de doos duwt, hoe groter de verrichte arbeid.

Neem een massa die op een rechte baan een verplaatsing $\Delta\vec{r}$ maakt en daarbij een constante kracht $\vec{F}$ ondervindt (zie figuur). De arbeid geleverd door de kracht $\vec{F}$ wordt gedefinieerd als het scalair product van de kracht en de verplaatsing:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot |\Delta r| \cdot \cos\phi.$$



Figuur 36 – Arbeid door een kracht $\vec{F}$ op een massa bij een verplaatsing $\Delta\vec{r}$.

Afhankelijk van de hoek kan de arbeid positief ($\phi < \frac{\pi}{2}$), negatief ($\phi > \frac{\pi}{2}$) of nul zijn ($\phi = \frac{\pi}{2}$).

De arbeid geleverd door een kracht die loodrecht staat op de verplaatsing is dus steeds nul. Dit is bijvoorbeeld steeds het geval voor de normaalkracht, die immers steeds loodrecht staat op de bewegingsrichting.

Arbeid is een scalaire grootheid met als SI-eenheid $1\ Nm = 1\ \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 1\,J$.

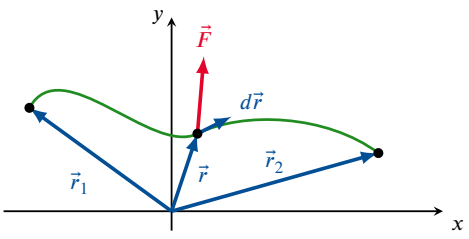
Wanneer de kracht echter tijdens de verplaatsing van punt 1 naar punt 2 niet constant blijft, gebruiken we voor de arbeid de integraal over de kracht $\vec{F}$ tijdens deze verplaatsing.

Definitie 5.2.1. De arbeid die een kracht verricht is de integraal van de kracht met betrekking tot de verplaatsing langs het pad van de verplaatsing:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

De eenheid van arbeid is joule (J).

Voor een ééndimensionale beweging langs de x-as vereenvoudigt dit tot $W_{1\to 2} = \int_1^2 F_x \cdot dx$.



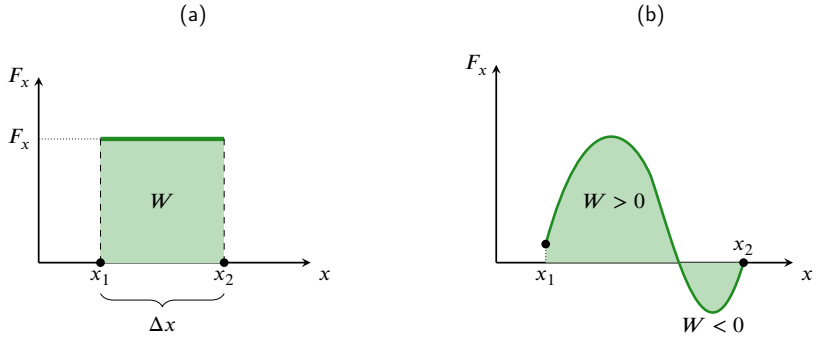
Figuur 37 – Arbeid door een niet-constante kracht $\vec{F}$ op een puntmassa bij een verplaatsing van 1 naar 2 langsheen een kromme.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Arbeid en vermogen

5.2.2 Grafische betekenis van arbeid

Uit $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ (voor een constante kracht) volgt dat voor een ééndimensionale beweging langs de x-as geldt dat $W = F_x \cdot \Delta x$ als je de x-as kiest volgens de baan van het voorwerp. Als F_x constant is in elk punt van de baan ziet de $F_x(x)$-grafiek er uit zoals de linker grafiek hieronder. De arbeid W die een constante kracht $\vec{F}$ verricht tijdens een verplaatsing Δx is dan de oppervlakte onder de $F_x(x)$-rechte voor het interval Δx.



Figuur 38 – grafische betekenis van arbeid bij (a) een constante kracht en (b) een niet-constante kracht.

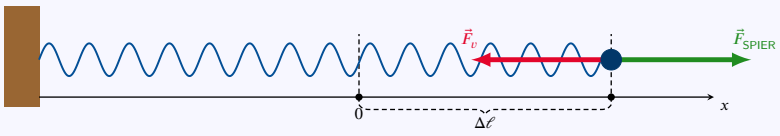
Dit principe is ook geldig voor een niet-constante kracht. Algemeen geldt:

(a) Als F_x positief is tussen x_1 en x_2, is de arbeid gelijk aan de oppervlakte van de figuur gelegen tussen de kromme, de x-as en de rechten $x = x_1$ en $x = x_2$.

(b) Als de kracht F_x verandert van teken in het interval, is de integraal de som van de oppervlakten van de delen van de figuur die boven de x-as liggen verminderd met de oppervlakten van de delen die onder de x-as liggen.

(c) De arbeid is nul als beide oppervlakten gelijk zijn.

Voorbeeld 5.2.1 (De arbeid nodig om een veer uit te rekken)**.** We berekenen de arbeid die je spierkracht moet verrichten om een veer uit te rekken over een afstand d.



Figuur 39 – Uitrekking van een veer waarbij $F_{\text{SPIER}} = F_v$

De grootte van de veerkracht van een veer die uitgerekt is over een afstand $\Delta\ell$, wordt gevonden via de wet van Hooke:

$$F_v = k \cdot \Delta\ell.$$

Hierin is k de veerconstante. Hoe groter de uitrekking, hoe groter de veerkracht. Bijgevolg is de veerkracht tijdens de uitrekking van de veer niet constant.

Als je de veer met constante snelheid uitrekt, is de spierkracht op elk ogenblik even groot als de veerkracht:

$$F_{\text{SPIER}} = F_v = k \cdot \Delta\ell.$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Arbeid en vermogen

De spierarbeid nodig om de veer over een afstand d uit te rekken, moet je berekenen met de formule

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{SPIER},x} \cdot dx$$

omdat de spierkracht niet constant is. We kiezen de x-as zoals in de figuur.

De functie die hier overeenkomt met $F_x(x)$ is gelijk aan $F_x(x) = k \cdot x$ want hier is de veranderlijke grootheid $\Delta\ell$ en door de keuze van het assenstelsel is $\Delta\ell = x$.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^d k \cdot x \, dx \\ &= k \cdot \int_0^d x \, dx \\ &= k \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^d \\ &= k \cdot \frac{d^2}{2} \end{aligned}$$

Dit is dus de arbeid die de spierkracht verricht tijdens het uitrekken van een veer met veerconstante k over een afstand d.

Uit vorig voorbeeld besluiten we:

Eigenschap 5.2.1. De spierkracht levert een arbeid $k \cdot \frac{(\Delta\ell)^2}{2}$ om de veer met veerconstante k uit te rekken over een afstand $\Delta\ell$.

5.2.3 Vermogen

Definitie 5.2.2. Het gemiddelde vermogen P_g van (de kracht $\vec{F}$ uitgeoefend op) een systeem in een tijdsduur Δt, is de arbeid W die erop verricht wordt per tijdseenheid:

$$P_g = \frac{W}{\Delta t}.$$

Vermogen wordt uitgedrukt in watt (W): $1\ \text{W} = 1\ \frac{\text{J}}{\text{s}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Arbeid en kinetische energie

Van een systeem dat in staat is arbeid te leveren, zegt men dat het energie bezit. Arbeid leveren is energie verbruiken. Dat zowel arbeid als energie scalaire grootheden zijn, beide uitgedrukt in dezelfde eenheid joule, is dan ook geen toeval.

De kinetische energie is de energie die een massa bezit omwille van zijn (snelheid en dus) beweging. We gebruiken hiervoor het symbool E_k.

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

In tegenstelling tot arbeid, is kinetische energie altijd positief.

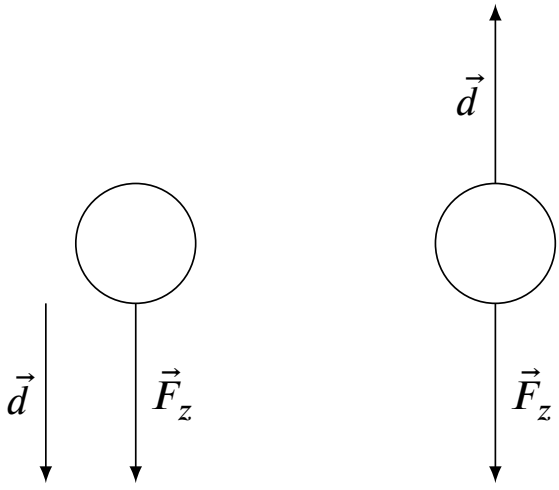
De arbeid die de resulterende kracht uitoefent op een massa is gelijk aan de verandering van kinetische energie van de massa. Dit is de wet van arbeid en kinetische energie, die als volgt wordt uitgedrukt:

$$W_{1\to 2} = E_k(2) - E_k(1) = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}.$$

Wanneer op een object een resulterende kracht werkt over een bepaalde afstand, verricht deze kracht arbeid op dat object wat resulteert in een snelheidsverandering van het object. Bijgevolg zal ook de kinetische energie van het object veranderen, met een bedrag precies gelijk aan de geleverde arbeid:

(a) Als de resulterende kracht positieve arbeid levert op een object, neemt de kinetische energie van het object toe. Dit is het geval voor de linker massa in Figuur 40, waar de kracht op de massa en de verplaatsing van de massa volgens dezelfde zin zijn. De kracht werkt mee met de beweging.

(b) Als de resulterende kracht negatieve arbeid levert op een object, neemt de kinetische energie van het object af. Dit is het geval voor de rechter massa in Figuur 40, waar de kracht op de massa en de verplaatsing van de massa volgens tegengestelde zin zijn. In dat geval werkt de kracht de beweging tegen.



Figuur 40 – Deze figuren tonen hoe de zin van de beweging en van de kracht het teken van de arbeid beïnvloeden: in de linkse situatie levert de zwaartekracht positieve arbeid tijdens de verplaatsing (de kinetische energie neemt toe), in de rechtse situatie negatieve arbeid (de kinetische energie neemt af).

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Potentiële energie

We kunnen de soorten krachten onderverdelen in conservatieve en niet-conservatieve krachten.

Definitie 5.4.1.

Conservatieve krachten zijn krachten waarvoor de arbeid die op een systeem verricht wordt tussen twee punten niet afhankelijk is van de gevolgde weg.
Voorbeelden: de zwaartekracht, de gravitatiekracht, de coulombkracht, ...

Niet-conservatieve krachten zijn krachten waarvoor de arbeid tussen twee punten wel afhankelijk is van de gevolgde weg.
Voorbeelden: de wrijvingskracht, de spierkracht, de kracht van een motor, de normaalkracht, ...

Voor conservatieve krachten kunnen we bijhorende potentiële energie E_P definiëren door te stellen dat voor die conservatieve kracht geldt dat

$$W_{1\to 2,C} = -\Delta E_p = E_p(1) - E_p(2).$$

(a) Levert een conservatieve kracht positieve arbeid op een object, dan neemt de bijhorende potentiële energie van dat object af.

(b) Levert een conservatieve kracht negatieve arbeid op een object, dan neemt de bijhorende potentiële energie van dat object toe.

Een onmiddellijk gevolg van deze definitie van potentiële energie is dat de potentiële energie van een object maar bepaald is op een constante na. Vaak kiest men een referentiepunt waar men de potentiële energie van een object nul stelt.

Eigenschap 5.4.1. Wanneer een object zich op een bepaalde positie in een (conservatief) krachtveld bevindt, krijgt het potentiële energie. De potentiële energie van dit object is gelijk aan de arbeid die de veldkracht op het object zou leveren bij een verplaatsing van dat object van zijn positie naar het referentiepunt.

Op basis van deze definitie kan je voor de verschillende soorten krachtvelden de bijhorende potentiële energie van een object berekenen. We geven de potentiële energie voor enkele conservatieve krachten:

Conservatieve kracht	**Potentiële energie**
Zwaartekracht	$E_p = m \cdot g \cdot h$
Gravitatiekracht	$E_p = -\dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}$
Veerkracht	$E_p = \dfrac{1}{2} k \cdot (\Delta \ell)^2$
Coulombkracht	$E_p = \dfrac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{r}$

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Behoudswetten

De mechanische energie van een systeem is het geheel van zijn kinetische en potentiële energie:

$$E_{mech} = E_k + E_p.$$

De arbeid verricht door niet-conservatieve krachten (bv. de wrijvingskracht) op een puntmassa is gelijk aan de verandering van mechanische energie van die puntmassa:

$$\begin{aligned} W_{NC} &= \Delta E_{\text{mech}} \\ &= E_{\text{mech}}(2) - E_{\text{mech}}(1) \end{aligned}$$

Als er geen niet-conservatieve krachten aanwezig zijn of als de resulterende niet-conservatieve kracht geen arbeid op het systeem verricht, is $\Delta E_{\text{mech}} = 0$ of $E_{\text{mech}}(1) = E_{\text{mech}}(2)$ en blijft de mechanische energie van het systeem behouden.

In een systeem met alleen conservatieve krachten blijft dus de mechanische energie steeds behouden:

$$E_{\text{mech}} = E_k + E_p = \text{constant}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Oefeningen Arbeid en Energie

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.1 Instapoefeningen

1. Kan er door een kracht een van nul verschillende arbeid verricht worden op een voorwerp dat niet beweegt? | Ja | Nee |

2. Een vrouw duwt een hooibaal van 26 kg over een afstand van 3,9 m verder over de vloer van een schuur. Als ze een horizontale kracht van 88 N op het hooi uitoefent, hoeveel arbeid heeft ze dan geleverd? $W =$ …… J

3. Een doos wordt over een vloer getrokken aan een constante snelheid. Wat kan je zeggen over de arbeid van de wrijvingskracht?

Meerkeuze:

(a) De wrijving levert geen arbeid.

(b) De arbeid van de wrijving is negatief.

(c) De arbeid van de wrijving is positief.

4. Een vrachtwagen heeft een snelheid van $v = 15$ m/s en een kinetische energie $K = 4,8 \cdot 10^5$ J.

1. De massa van de vrachtwagen is dan $m =$ …… $\cdot 10^3$ kg.

2. Als de snelheid van de vrachtwagen verdubbelt, dan vermeerdert zijn kinetische energie met een factor ……

5. Een jongedame rijdt op een skateboard met een snelheid van 2 m/s. Nadat een kracht op haar inwerkt, verhoogt haar snelheid tot 3 m/s. Was de arbeid geleverd door de kracht

Meerkeuze:

(a) positief

(b) negatief

(c) nul

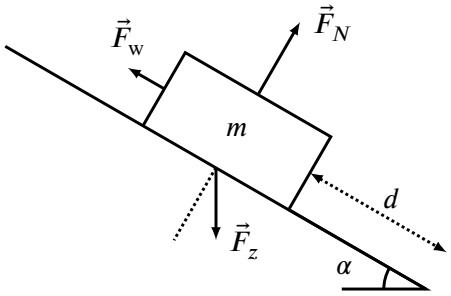
Verklaar.

6. Hoeveel arbeid is nodig om een jogger van 73 kg te versnellen van rust tot 7,7 m/s? $W_{net} =$ …… J

CC BY-NC-SA 4.0

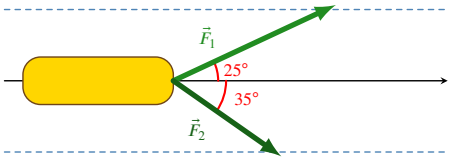
5.6.2 Standaardoefeningen

1. Er werken drie krachten op de auto (massa m) in de figuur: de zwaartekracht $\vec{F}_z$, de normaalkracht $\vec{F}_N$ en een wrijvingskracht $\vec{F}_w$, ten gevolge van de lucht. De auto verplaatst zich over een afstand d. Bereken de netto-arbeid op de auto als je weet dat $\alpha = 30°$, $F_w = 1555$ N, $d = 20.0$ m, en $m = 1500$ kg.



$W =$ …… kJ

2. Een boot met motorpech wordt door twee paarden op de oever voortgetrokken met een snelheid van $3,0\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Het eerste paard oefent een kracht uit van 1250 N en het tweede paard oefent een kracht uit van 920 N volgens de aangeduide vectoren. Welke arbeid verricht elk paard gedurende één uur op de boot?



1. $W_1 =$ …… $\cdot 10^6$ J

2. $W_2 =$ …… $\cdot 10^6$ J

3. Een vader en zijn jonge zoon lopen op een piste op zo'n manier dat ze beiden dezelfde kinetische energie bezitten. De zoon heeft een massa die vier keer kleiner is dan die van zijn papa. Wat is de verhouding van de snelheden van vader en zoon?

$$\frac{v_{\text{zoon}}}{v_{\text{vader}}} = \ldots\ldots$$

4. Een 'Acapulco cliff diver' duikt in het water vanop een hoogte van 46 m. De gravitationele potentiële energie neemt af met 25 000 J. Wat is het gewicht van de duiker, uitgedrukt in Newton? …… N

5. Een doosje met een massa van $2,0$ kg staat op een tafel met een hoogte van 75 cm. Je neemt het doosje van de tafel en zet het op een rek op $2,25$ m boven de grond.

1. De arbeid die de zwaartekracht tijdens je hefbeweging heeft verricht op het doosje is $W =$ …… J.

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.2 Standaardoefeningen

2. De arbeid die je spierkracht tijdens je hefbeweging heeft verricht op het doosje is $W = \ldots\ldots\ J$.

6. Je gooit een muntstukje met een massa van $5,5$ g recht naar beneden vanaf een 35 m hoge brug. De beginsnelheid van het muntstukje is $4,0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dan raakt het muntje het water met snelheid

$$v = \ldots\ldots\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

7. Hoe groot moet het vermogen van een liftmotor zijn om een lift met een massa van 1000 kg in 50 s naar een hoogte van 100 m te brengen?

$$P_g = \ldots\ldots\ \cdot 10^4\ \text{W}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.3 Gevorderde oefeningen

1. Je skiet van een helling van 15 °. Als je een snelheid van 10 m/s hebt, laat je je 100 m langsheen de helling naar beneden glijden.

1. Neem aan dat de wrijving verwaarloosbaar is. Wat is dan je snelheid na 100 m? $v =$ ..... m/s

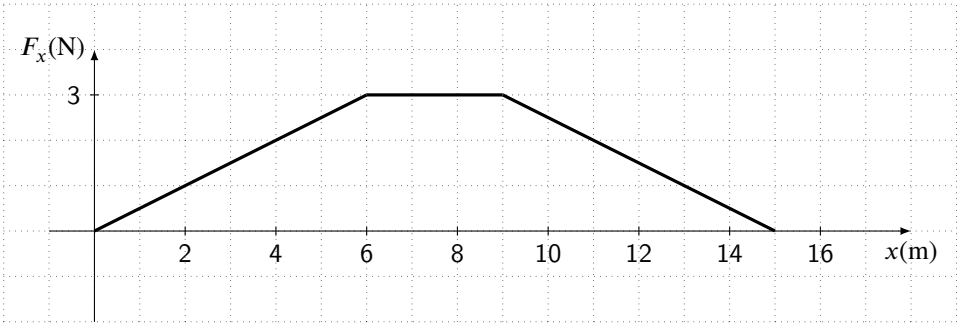
2. Wat is je snelheid na 100 m als de kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen de sneeuw en de skies 0,1 is? $v =$ ..... m/s

2. Vanop welke hoogte moet een bal van 100 g vallen vanuit rust om een verticale veer (met veerconstante k = 70 N/m) in te drukken over een maximale afstand van 5 cm? $h =$ ..... m

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.4 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

1. Een deeltje is onderworpen aan een kracht $\vec{F}$ die varieert met de positie x. De figuur geeft aan hoe F_x afhangt van x. Bereken de arbeid die de kracht verricht tijdens de verplaatsig van $x = 4$ m tot $x = 8$ m.



$$W = \ldots\ldots \text{ J}$$

2. Een blok van 7,0 kg wordt vanuit rust over een wrijvingsloos oppervlak geduwd door een constante horizontale kracht van 10 N. Bepaal de snelheid van het blok nadat het een afstand van 5,6 m heeft afgelegd.

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3. Een kracht $\vec{F} = 5x \cdot \vec{e}_x + 3y \cdot \vec{e}_y$ werkt in op een deeltje terwijl dit deeltje beweegt langs de x-as van de oorsprong naar $x = 4,0$ m. Hoe groot is de arbeid die deze kracht op het deeltje verricht tijdens deze verplaatsing?

$$W = \ldots\ldots \text{ J}$$

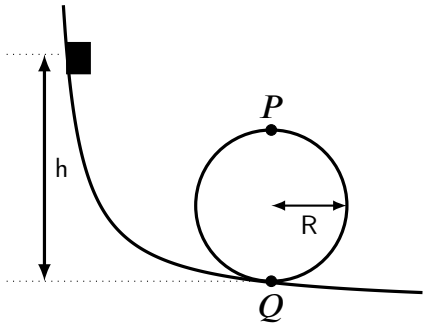
4. Een voorwerp met een massa van $1,50$ kg hangt aan een lichte veer, die voldoet aan de wet van Hooke. De veer is $2,50$ cm uitgerekt. Je neemt het voorwerp nu weg van de veer en hangt er een nieuw voorwerp aan met een massa van $4,50$ kg. Hoe ver rekt de veer nu uit? Hoeveel arbeid moet je verrichten om de veer nog $4,0$ cm extra uit te rekken?

$$\Delta\ell = \ldots\ldots \text{ cm}$$
$$W = \ldots\ldots \text{ J}$$

5. Een voorwerp met massa $m = 5,00$ g glijdt over een wrijvingsloze baan naar beneden en komt in een 'loop' terecht, zoals weergegeven op de figuur. Het voorwerp wordt losgelaten van een hoogte $h = 3,0R$. Wat is de snelheid van het voorwerp in het punt P? Er is gegeven dat $R = 15,0$ cm.

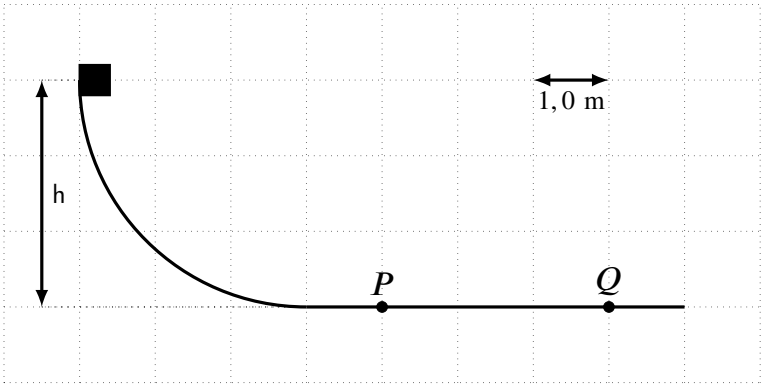
CC BY-NC-SA 4.0

5.6.4 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie



$$v = \ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6. Een blok met een massa van 10,0 kg wordt vanuit rust van op hoogte h losgelaten. Het pad is wrijvingsloos behalve tussen de punten P en Q. De snelheid van het blok in punt Q is $6,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Bepaal de dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen het blok en het oppervlak tussen P en Q.



$$\mu_d = \ldots\ldots$$

7. Een massa van $1,5$ kg hangt aan een veer op een horizontale tafel. De veer heeft in rust een lengte van $0,30$ m en een veerconstante van $75\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Je duwt nu tegen de massa zodat de veer 10 cm is ingedukt. Je laat dan de massa los, zodat die begint te trillen. Hoe groot is de snelheid van de massa wanneer die het evenwichtspunt passeert? De wrijving mag verwaarloosd worden.

$$v = \ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8. In een eerste situatie heeft een bal met massa m die naar beneden valt op hoogte h een snelheid v. Op dat ogenblik is de kinetische energie van de bal gelijk aan de potentiële energie van de bal. Wanneer diezelfde bal in een tweede situatie op hoogte h/2 een snelheid 2v heeft, wat kan je dan zeggen over de mechanische energie van de bal in die twee situaties?

Meerkeuze:

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.4 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

(a) $E_{mech}(1) = E_{mech}(2)$

(b) $E_{mech}(1) < E_{mech}(2)$

(c) $E_{mech}(1) > E_{mech}(2)$

(d) Er zijn te weinig gegevens om een uitspraak te kunnen doen.

9. Een deeltje met een massa van $2,5$ kg beweegt volgens de x-as. Zijn positie verandert in de tijd volgens $x = t + 3,0 \cdot t^2$. Bepaal de arbeid die uitgeoefend wordt op het deeltje tussen $t = 1,00$ s en $t = 2,00$ s.

$$W = \ldots\ldots \cdot 10 \text{ J}$$

10. Een massa m trilt aan een veer met veerconstante k met een amplitude A. Welke percentage van de mechanische energie van de massa is kinetische energie op het ogenblik dat de uitwijking gelijk is aan $A/2$?

$$percentage = \ldots\ldots \%$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

1. De grootte van een vector is 1 m. Wat zijn de x- en y-componenten indien de hoek die de vector maakt met de x-as (in tegenuurwerkzin gemeten) gelijk is aan:

1. Als de hoek $0°$ is, dan zijn $x = \ldots\ldots$ m en $y = \ldots\ldots$ m

2. Als de hoek $45°$ is, dan zijn $x \approx \ldots\ldots$ m en $y \approx \ldots\ldots$ m

3. Als de hoek $90°$ is, dan zijn $x = \ldots\ldots$ m en $y = \ldots\ldots$ m

2. Bereken de grootte van de vector $\vec{a} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y$. $\|\vec{a}\| = \ldots\ldots$

3. Een vector $\vec{a}$ met lengte 10 maakt een hoek van $225°$ met de x-as. Bereken de scalaire componenten volgens de x- en y-as. $a_x = \ldots\ldots, a_y = \ldots\ldots$

4. Een vogel vliegt vanuit een boom 100 meter naar het oosten. Daarna vliegt hij 50 m naar het noordwesten. Bepaal de lengte van de vector tussen de begin- en eindpositie.

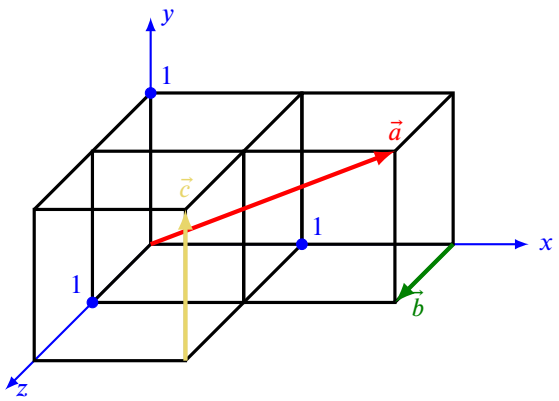
$$\|\vec{a}\| = \ldots\ldots \; m$$

5. Teken de vector $\vec{a} = -4 \cdot \vec{e}_x + 5 \cdot \vec{e}_y$. Bepaal de hoek die deze vector maakt met de positieve x-as.

$$\theta = \ldots\ldots \; °$$

6. Erica verplaatst zich vanuit een plaats P en gaat 3 km oostwaarts en daarna 5 km zuidwaarts. Welke verplaatsing heeft Erica gemaakt?

7. Lees op de figuur de componenten af van de drie vectoren in een driedimensionaal assenstelsel.



$$\vec{a} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$$

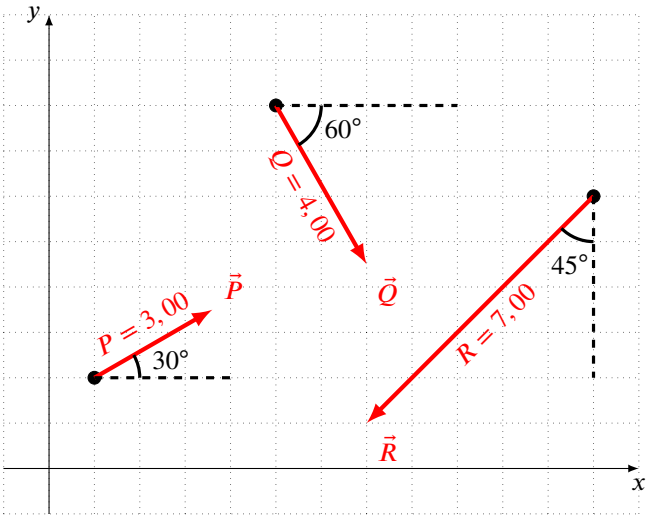
$$\vec{b} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$$

$$\vec{c} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

8. Bepaal de componenten van de drie vectoren ten opzichte van de weergegeven x-as en y-as.



$\vec{P} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

$\vec{Q} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

$\vec{R} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

9. Een boot vaart een meer op met een snelheid $\vec{v} = 2{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x + 3{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_y$. Veronderstel dat de gekozen x-as samenvalt met de oever. Onder welk hoek vaart de boot ten opzichte van de oever?

$\theta = \ldots\ldots\ °$

10. Bepaal de hoek tussen de twee vectoren $\vec{a} = 4\ \vec{e}_x + 2\ \vec{e}_y$ en $\vec{b} = 1\ \vec{e}_x + 4\ \vec{e}_y$.

$\theta = \ldots\ldots\ °$

11. Gegeven twee vectoren $\vec{a} = 3\ \vec{e}_x + 2\ \vec{e}_y$ en $\vec{b} = m\ \cdot \vec{e}_x + 3\ \vec{e}_y$. Bepaal m zodat de twee vectoren loodrecht op elkaar staan

$m = \ldots\ldots$

12. Een vector $\vec{a}$ met lengte 5 maakt een hoek van -135° met de x-as. Bereken de vectorcomponenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. $a_x = \ldots\ldots, a_y = \ldots\ldots$

13. Wat is de grootte van de vector $\vec{c} = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$ en welke hoek maakt deze vector met de x-as?

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

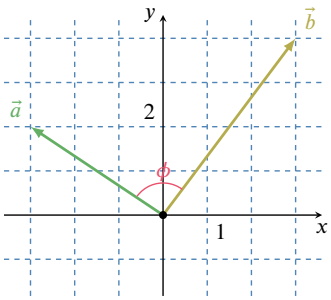
14. Een vector $\vec{v}$ maakt een hoek van 150° met de positieve x-as en heeft een y-component van 10 m/s. Wat is de waarde van v?

$$v = \ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

15. Teken de vector $\vec{a} = -3 \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot \vec{e}_y$. Bepaal de hoek die deze vector maakt met de positieve y-as.

$$\theta = \ldots\ldots \ ^\circ$$

16. Bepaal de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals weergegeven op de figuur.



$$\varphi = \ldots\ldots \ ^\circ$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging

1. Een fietser rijdt gedurende 20 minuten 8,0 km naar het oosten, dan keert hij terug en rijdt 3,2 km gedurende 8 minuten naar het westen. Daarna rijdt hij 16,0 km gedurende 40 minuten weer naar het oosten. Wat was zijn gemiddelde snelheid? Geef je antwoord in m/s.

$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$

2. Een deeltje beweegt langs de x-as volgens de vergelijking $x(t) = 10t - 2t^2$. Bereken de snelheid op $t = 2$ s en $t = 3$ s. Wat is de gemiddelde snelheid tussen $t = 2$ s en $t = 3$ s? De positie wordt bepaald in m en de tijd in s.

$$v_{x,1} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$
$$v_{x,2} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$
$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$

3. Een auto verlaat de garage vanuit rust met een constante versnelling van $1,3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Welke afstand legt de auto af alvorens een snelheid van $10,4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ te hebben?

$$\Delta\text{x} = \ldots\ldots \text{ m}$$

4. Een trein van 130 m lang rijdt het station binnen aan een snelheid van 22,0 m/s en een vertraging van 0,150 m/s². Het station is 210 m lang. Aan welke snelheid verlaat de achterkant van de trein het station?

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5. Een reddingshelikopter hangt boven een persoon wiens boot is gezonken. Eén van de hulpverleners gooit een zwemvest naar beneden met een beginsnelheid van 1,40 m/s. Het duurt 1,8 s alvorens die in het water valt. Hoe hoog bevindt de helicopter zich boven het slachtoffer? Je mag de weerstand van de lucht verwaarlozen.

$$h = \ldots\ldots \text{ m}$$

6. Een wagen rijdt over een rechte weg. De snelheid van de wagen wordt ten opzichte van een x-as die samenvalt met de weg, beschreven als

$$v_x(t) = 4t^3 - 3t^2 + 6t - 2$$

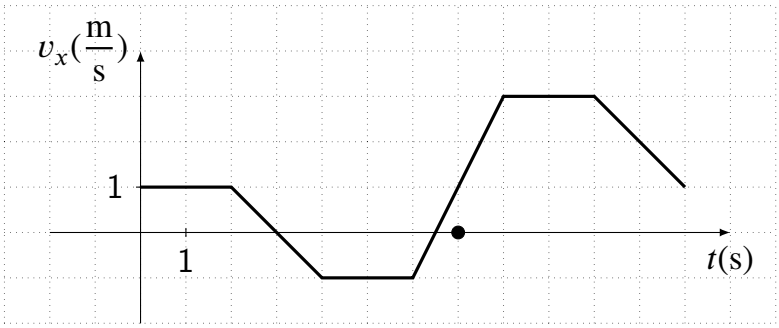
De startpositie van de wagen is $x_0 = 20$ m. De positie wordt uitgedrukt in m en de tijd in s. Bepaal de positie van de wagen op $t = 2$ s

$$x = \ldots\ldots \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

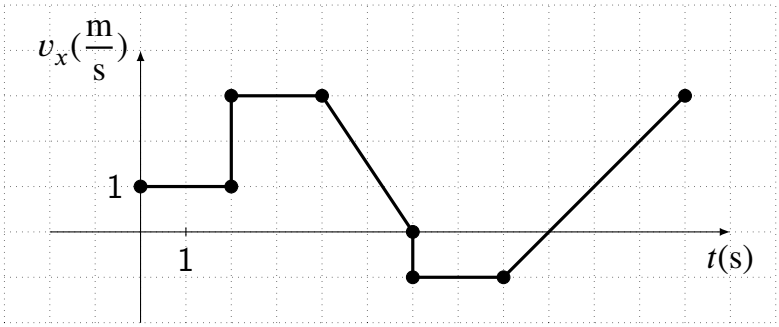
6.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging

7. Onderstaande grafiek geeft het verloop van de snelheid van een wandelaar weer ten opzichte van een gekozen x-as. Als je weet dat bij $t = 0$ de positie gelijk is aan $x_0 = 5$ m, wat is dan de positie, de snelheid en de versnelling van de wandelaar op $t = 7$ s?



$$x = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$v_x = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$a_x = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

8. Onderstaande grafiek geeft het verloop van de snelheid van een voorwerp weer ten opzichte van een gekozen x-as. Als je weet dat bij $t = 0$ de positie gelijk is aan $x_0 = 0$ m, schets dan de bijhorende $x(t)$- en $a_x(t)$-grafiek.



9. Twee treinen rijden in tegenovergestelde zin aan een constante snelheid naar elkaar toe. De ene trein rijdt 108 km/h en de andere trein 144 km/h. Op een bepaald ogenblik zijn ze 1400 m van elkaar verwijderd. Hoeveel seconden later zullen ze elkaar kruisen?

$$\Delta t = \ldots\ldots \text{ s}$$

10. Een fietser vertrekt vanuit rust met een constante versnelling zodat dat hij tussen de vierde en de vijfde seconde 9 meter aflegt. Bepaal de versnelling van de fietser.

$$a_x = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

1. De positie van een deeltje varieert van $\vec{r}_1 = -2,0 \cdot \vec{e}_x + 4,0 \cdot \vec{e}_y$ naar $\vec{r}_2 = 5,0 \cdot \vec{e}_x + 7,0 \cdot \vec{e}_y$. Wat is de verplaatsing van dit deeltje ten opzichte van de x-as en de y-as? De eenheid wordt uitgedrukt in m.

$$\Delta x = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$\Delta y = \ldots\ldots \text{ m}$$

2. Een golfer klopt een balletje in een eerste shot zodat de verplaatsing van het balletje kan beschreven worden door een verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}_1 = 250 \cdot \vec{e}_x$. Zijn tweede shot wordt beschreven door $\Delta\vec{r}_2 = 175 \cdot \vec{e}_x + 66 \cdot \vec{e}_y$. Wat is de afstand dat het balletje aflegt in elk shot en wat is de lengte van de totale verplaatsingsvector? De positie wordt uitgedrukt in meter.

$$\|\Delta\vec{r}_1\| = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$\|\Delta\vec{r}_1\| = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$\|\Delta\vec{r}\| = \ldots\ldots \text{ m}$$

3. Een boot vertrekt vanuit rust uit de haven op $t = 0$ en vaart een meer op met een versnelling $\vec{a} = 2,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \vec{e}_x$. Een sterke wind blaast de boot vooruit waardoor de boot een extra snelheid krijgt $\vec{v} = 2,0\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x + 3,5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_y$. Hoe groot is de snelheid van de boot na 5 seconden?

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4. Een dartspijltje wordt met een snelheid van $12\frac{\text{m}}{\text{s}}$ horizontaal weggegooid in de richting van de roos van het dartsbord, dat $2,6$ m verder staat opgesteld. Hoever onder de roos raakt het dartspijltje het bord?

$$\Delta y = \ldots\ldots \text{ cm}$$

5. Een vliegtuig vliegt met een snelheid van 360 km/h op een hoogte van 750 m. Een pallet met voedsel wordt uit het vliegtuig geduwd. Veronderstel dat de parachute niet open gaat, hoe ver van het punt waar de pallet het vliegtuig verlaat komt dit neer op de grond?

$$\Delta x = \ldots\ldots \cdot 10 \text{ m}$$

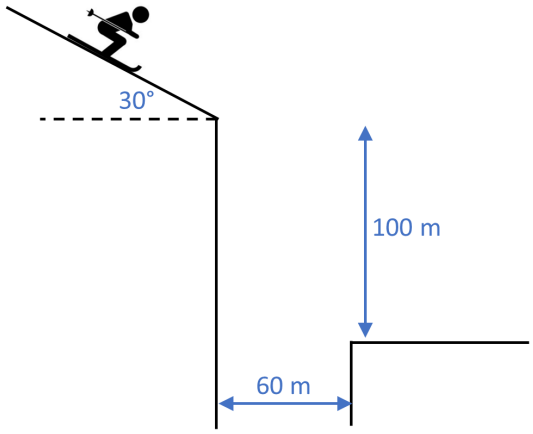
6. Op een bepaald ogenblik zakt een warmeluchtballon op 75 m hoogte verticaal naar beneden met een snelheid van $1,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Op dit ogenblik gooit een meisje een bal horizontaal weg met een snelheid van $15\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wanneer het meisje op de grond landt, hoe ver van de landingsplaats zal ze haar bal terugvinden?

$$\Delta x = \ldots\ldots \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

7. Een skiër skiet langs een helling die 30° maakt met de horizontale richting aan een snelheid van 54 km/h naar beneden. Plots verschijnt er een kloof van 60 m breed. De overkant van de kloof ligt 100 m lager. Zal de skier over de kloof geraken? Hoeveel meter legt de skiër in horizontale richting af als hij 100 m zakt?



$$\Delta x = \ldots\ldots \text{ m}$$

8. Een vliegwiel draait 35 toeren per seconde aan een constante snelheid. Over welke hoek, uitgedrukt in radialen, draait een punt op het vliegwiel in 20 seconden?

$$\Delta\theta = \ldots\ldots \cdot 10^2 \text{ rad}$$

9. Een loopster die deelneemt aan de 200 m wedstrijd moet aan het einde van de piste omkeren. De bocht van de piste heeft een straal van 40,0 m. De loopster loopt de volledige wedstrijd aan eenzelfde snelheid. Ze loopt de wedstrijd uit in 25,0 s. Hoe groot is haar centripetale versnelling als ze bocht neemt?

$$a = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

10. Een ventilator draait met een constane snelheid 350 toeren per minuut. Hoe groot is de snelheid van een punt dat zich op 15 cm van de draaias bevindt?

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

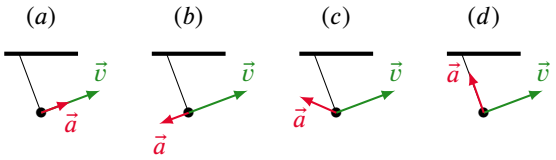
1. Een hockeypuck glijdt op ijs met een constante snelheid. Hoeveel bedraagt de nettokracht die op de puck inwerkt?

- Een kracht gelijk aan de zwaartekracht van de puck.
- Een kracht kleiner dan de zwaartekracht, maar groter dan nul.
- Hangt af van de snelheid van de puck.
- De kracht is nul.

2. Je knijpt een boek tussen duim en wijsvinger vast waardoor het niet valt. Elk van de twee vingers knijpt met een kracht van $6,0$ N loodrecht op de kaft van het boek. Hoe groot mag de zwaartekracht van het boek maximaal zijn opdat het niet tussen je vingers weg zou glippen? De statische wrijvingscoëfficiënt tussen je vingers en de kaft van het boek bedraagt $0,80$.

$$G_w = \ldots\ldots \text{ N}$$

3. Een balletje slingert in een verticaal vlak. In welk van de onderstaande figuren is de versnelling correct getekend, op het tijdstip van de getoonde snelheidsvector $\vec{v}$?

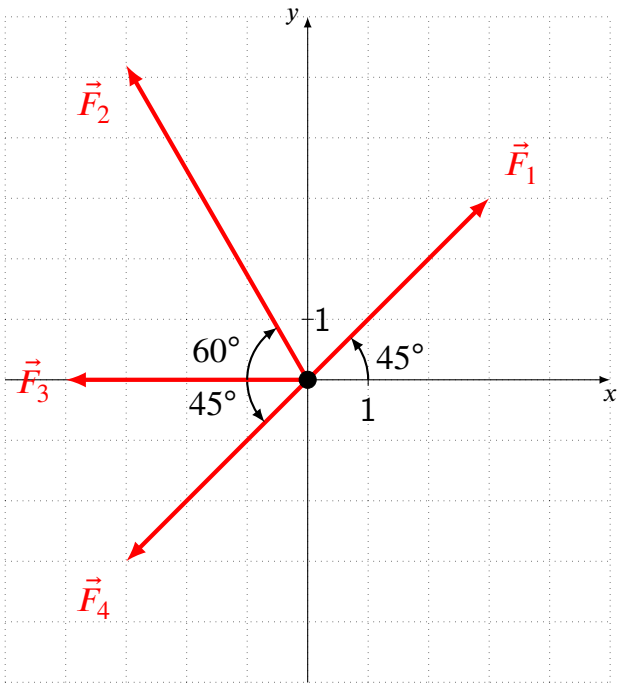


De juiste figuur is (a) | (b) | (c) | (d).

4. Op een voorwerp met $m = 5,0$ kg werken vier krachten, zoals weergegeven op de figuur. Er is gegeven dat $F_1 = 4,2$ N, $F_2 = 6,0$ N, $F_3 = 4,0$ N, $F_4 = 4,2$ N. Bepaal de grootte van de versnelling van het voorwerp.

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Herhalingsoefeningen: dynamica



$$a = \ldots\ldots \text{ m/s}^2$$

5. Bepaal de verhouding van de zwaarteveldsterkte op Mars tot de zwaarteveldsterkte op Aarde. Er is gegeven dat $m_{Mars} = 6,42 \cdot 10^{23}$ kg en $r_{Mars} = 3,38 \cdot 10^{6}$ m.

$$\frac{g_{Mars}}{g_{Aarde}} = \ldots\ldots$$

6. Een auto met een gewicht van 15000 N vertrekt op een horizontale weg vanuit rust en versnelt tot 90 km/h in 5,0 s. De totale wrijvingskracht op de auto is 1250 N. Bepaal de kracht die de motor op de auto uitoefent.

$$F = \ldots\ldots \cdot 10 \text{ N}$$

7. Een proton met een mass van $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg beweegt op een cirkel met een straal $r = 1,5$ m door een magneetveld met sterkte $B = 0,085$ T. Het proton heeft een lading van $Q = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C. Hoe groot is de snelheid van het proton op zijn cirkelbaan?

$$v = \ldots\ldots \cdot 10^{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8. Een vrachtwagen met een massa van $m = 3800$ kg rijdt aan een snelheid van 50,4 km/h als hij plots moet remmen. De vrachtwagen staat stil na 14 s. Hoe groot is de remkracht?

$$F = \ldots\ldots \cdot 10^{2} \text{ N}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

9. Een slee met een massa van $m = 40\,\text{kg}$ glijdt vanuit rust een besneeuwde helling af. De helling heeft een lengte van $5,0\,\text{m}$ en maakt een hoek van $30°$ met de horizontale. De dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen de slee en de sneeuw bedraagt $\mu_d = 0,15$. Bereken de versnelling van de slee langs de helling. Bepaal hoe lang het duurt voordat de slee de voet van de helling bereikt.

$$a = \ldots\ldots \text{ m/s}^2$$

$$\Delta t = \ldots\ldots \text{ s}$$

10. Een skiër met massa $m = 65$ kg glijdt langs een wrijvingsloze helling naar beneden. De helling maakt een hoek θ van $22°$ met de horizontale.

1. Bepaal de richting en grootte van de resulterende kracht op de skiër (rond af zonder komma).

$$\vec{F}_{\text{net}} = (\ldots\ldots \ ; \ \ldots\ldots) \ N$$

$$F_{\text{net}} = \ldots\ldots \ N$$

2. Als de helling steiler wordt, dan wordt de resulterende kracht | groter | kleiner | hetzelfde | . . Verklaar.

11. Een zeeleeuw schuift vanuit rust langs een helling naar beneden. De helling is 3.0 m lang en maakt een hoek van $23°$ boven de horizontale. Als de dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen de zeeleeuw en de helling $0,26$ is, hoe lang duurt het dan tot de zeeleeuw in het water belandt?
$\Delta t = \ldots\ldots$ s

12. Een kleine bal met een massa van $m = 0,50\,\text{kg}$ is bevestigd aan het uiteinde van een licht, onrekbaar touw met een lengte van $r = 1,2\,\text{m}$. Het andere uiteinde van het touw is vastgemaakt aan een vast punt op een wrijvingsloze horizontale tafel. De bal wordt in een horizontale cirkelbaan gebracht met een constante snelheid van $v = 3,0\,\text{m/s}$. Bereken de grootte van de spankracht in het touw.

$$F_T = \ldots\ldots \text{ N}$$

13. Een massa $m = 0,25\,\text{kg}$ draait aan het uiteinde van een massaloos touwtje in een cirkel over een horizontale tafel. De wrijving kan verwaarloosd worden. De lengte van het touw is $L = 0,50\,\text{m}$. Het touwtje kan in verticale positie en in rust maximaal een massa van $M = 50\,\text{kg}$ dragen zonder te breken. Wat is de maximale snelheid waarmee m kan draaien zonder dat het touwtje breekt?

$$v = \ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

14. Je schuift een zoutvat naar de andere kant van de tafel en geeft het een initïele snelheid van 1.15 m/s . Het zoutvat vertraagt en komt tot rust na 0.840 m. Wat is de dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen het zoutvat en de tafel?

15. Een verkeerslicht met een gewicht van $G = 120\,\text{N}$ hangt boven een kruispunt aan twee lichte kabels. De eerste kabel maakt een hoek van $\alpha = 30°$ met de horizontale, en de tweede kabel maakt een hoek van $\beta = 45°$ met de horizontale. Beide kabels zijn aan een vast punt bevestigd. Bereken

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

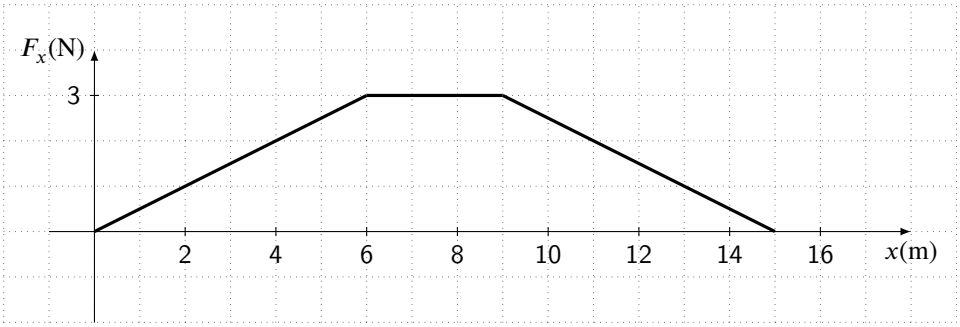
de grootte van de beide spankrachten.

$$F_{T,1} = \ldots\ldots \text{ N}$$
$$F_{T,2} = \ldots\ldots \text{ N}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

1. Een deeltje is onderworpen aan een kracht $\vec{F}$ die varieert met de positie x. De figuur geeft aan hoe F_x afhangt van x. Bereken de arbeid die de kracht verricht tijdens de verplaatsig van $x = 4$ m tot $x = 8$ m.



$$W = \ldots\ldots \text{ J}$$

2. Een blok van 7,0 kg wordt vanuit rust over een wrijvingsloos oppervlak geduwd door een constante horizontale kracht van 10 N. Bepaal de snelheid van het blok nadat het een afstand van 5,6 m heeft afgelegd.

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3. Een kracht $\vec{F} = 5x \cdot \vec{e}_x + 3y \cdot \vec{e}_y$ werkt in op een deeltje terwijl dit deeltje beweegt langs de x-as van de oorsprong naar $x = 4,0$ m. Hoe groot is de arbeid die deze kracht op het deeltje verricht tijdens deze verplaatsing?

$$W = \ldots\ldots \text{ J}$$

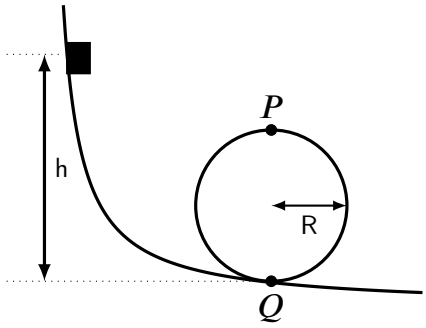
4. Een voorwerp met een massa van $1,50$ kg hangt aan een lichte veer, die voldoet aan de wet van Hooke. De veer is $2,50$ cm uitgerekt. Je neemt het voorwerp nu weg van de veer en hangt er een nieuw voorwerp aan met een massa van $4,50$ kg. Hoe ver rekt de veer nu uit? Hoeveel arbeid moet je verrichten om de veer nog $4,0$ cm extra uit te rekken?

$$\Delta\ell = \ldots\ldots \text{ cm}$$
$$W = \ldots\ldots \text{ J}$$

5. Een voorwerp met massa $m = 5,00$ g glijdt over een wrijvingsloze baan naar beneden en komt in een 'loop' terecht, zoals weergegeven op de figuur. Het voorwerp wordt losgelaten van een hoogte $h = 3,0R$. Wat is de snelheid van het voorwerp in het punt P? Er is gegeven dat $R = 15,0$ cm.

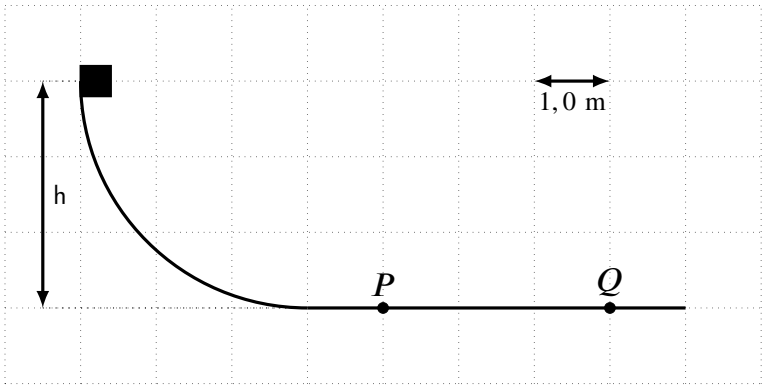
CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie



$$v = \ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6. Een blok met een massa van 10,0 kg wordt vanuit rust van op hoogte h losgelaten. Het pad is wrijvingsloos behalve tussen de punten P en Q. De snelheid van het blok in punt Q is $6,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Bepaal de dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen het blok en het oppervlak tussen P en Q.



$$\mu_d = \ldots\ldots$$

7. Een massa van $1,5$ kg hangt aan een veer op een horizontale tafel. De veer heeft in rust een lengte van $0,30$ m en een veerconstante van $75\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Je duwt nu tegen de massa zodat de veer 10 cm is ingedukt. Je laat dan de massa los, zodat die begint te trillen. Hoe groot is de snelheid van de massa wanneer die het evenwichtspunt passeert? De wrijving mag verwaarloosd worden.

$$v = \ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8. In een eerste situatie heeft een bal met massa m die naar beneden valt op hoogte h een snelheid v. Op dat ogenblik is de kinetische energie van de bal gelijk aan de potentiële energie van de bal. Wanneer diezelfde bal in een tweede situatie op hoogte h/2 een snelheid 2v heeft, wat kan je dan zeggen over de mechanische energie van de bal in die twee situaties?

Meerkeuze:

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

(a) $E_{mech}(1) = E_{mech}(2)$

(b) $E_{mech}(1) < E_{mech}(2)$

(c) $E_{mech}(1) > E_{mech}(2)$

(d) Er zijn te weinig gegevens om een uitspraak te kunnen doen.

9. Een deeltje met een massa van $2,5$ kg beweegt volgens de x-as. Zijn positie verandert in de tijd volgens $x = t + 3,0 \cdot t^2$. Bepaal de arbeid die uitgeoefend wordt op het deeltje tussen $t = 1,00$ s en $t = 2,00$ s.

$$W = \ldots\ldots \cdot 10 \text{ J}$$

10. Een massa m trilt aan een veer met veerconstante k met een amplitude A. Welke percentage van de mechanische energie van de massa is kinetische energie op het ogenblik dat de uitwijking gelijk is aan $A/2$?

$$percentage = \ldots\ldots \%$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Bibliografie

- Pearson International Edition, *Physics Technology Update*, James S. Walker.
- Pearson International Edition, *Physics for scientists and engineers with Modern Physics*, Douglas Giancoli.
- Pearson Global Edition, *Physics for Scientists and Engineers: A strategic approach with modern physics*, Randall D. Knight.
- Jos Rogiers, *Van fysica naar biofysica, cursustekst KU Leuven*, 2010.
- Roger Silverans, *Algemene natuurkunde, cursustekst KU Leuven*, 2007.
- Enkele handboeken fysica voor het secundair onderwijs 2de en 3de graad 2u fysica :
  - Interactie, Die Keure
  - Focus Fysica, Pelckmans
  - Quark, Van Inn
  - Fysica Vandaag, Pelckmans
  - ...

CC BY-NC-SA 4.0