KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorstudietraject fysica

Basisbegrippen van de natuurkunde (TEST)

(versie 25 augustus 2026 H)

Inhoudsopgave

1 Inleiding 1.1
- 1.1 Intro . . . 1.1

2 Vectorrekenen 2.1
- 2.1 Intro vectorrekenen . . . 2.1
- 2.2 Scalaire versus vectoriële grootheden . . . 2.2
- 2.3 Vectorcomponenten . . . 2.3
- 2.4 Bewerkingen met vectoren . . . 2.6
- 2.5 Voorbeeldoefeningen . . . 2.10
- 2.6 Oefeningen Vectorrekenen . . . 2.11

3 Kinematica 3.1
- 3.1 Intro kinematica . . . 3.1
- 3.2 Grootheden kinematica . . . 3.2
- 3.3 Eén-dimensionale kinematica . . . 3.6
- 3.4 Rechtlijnige bewegingen . . . 3.10
- 3.5 Voorbeeldoefening . . . 3.12
- 3.6 Twee-dimensionale kinematica . . . 3.13
- 3.7 De cirkelvormige beweging . . . 3.16
- 3.8 Oefeningen Kinematica . . . 3.19

1.1 Intro

Deze online cursus behandelt de leerstof fysica waarmee je best vertrouwd bent bij het begin van je studies

- biochemie en biotechnologie
- biologie
- chemie
- geografie, geologie
- farmaceutische wetenschappen
- biomedische wetenschappen
- logopedische en audiologische wetenschappen
- lichamelijke opvoeding en bewegingswetenschappen
- revalidatiewetenschappen en kinesitherapie
- sommige schakelprogramma's

Voor de meeste toekomstige studenten is dit een opfrissing van leerstof die ze al hebben gezien. Toch is geprobeerd om bij de invoering van begrippen en concepten ook voldoende rekening te houden met studenten waarvoor de leerstof volledig nieuw is.

Deze cursusnota's zijn beschikbaar in meerdere vormen:

(a) als PDF, die je ofwel op je computer kan lezen, ofwel kan printen.

Als je de PDF op de computer leest, werken allerlei interne links naar oefeningen, definities en eigenschappen. In een geprinte versie verdwijnt een deel van die functionaliteit.

Via de KU Leuven website https://set.kuleuven.be/zomercursussen vind je de online versie die extra functionaliteiten biedt.

(b) als online applicatie, met volgende extra functionaliteiten:

- interactieve antwoordmogelijkheden, met feedback en/of hints
- directe links naar extra oefeningen
- een aantal filmpjes

Je kan zowel elk afzonderlijk onderdeel als de volledig cursus als PDF bestand downloaden. Er zijn telkens twee versies, een 'handout' versie met de opgaven van de oefeningen, maar zonder de antwoorden, en een 'standaard' versie die van de meeste oefeningen ook antwoorden en zelfs uitgewerkte oplossingen bevat.

De inhoud van deze recent aangemaakte online cursus is gebaseerd op leerstof fysica van het secundair onderwijs (2de en 3de graad 2u fysica) en wordt gebruikt als cursusmateriaal tijdens verschillende zomercursussen basiswetenschappen die jaarlijks georganiseerd worden. Het online leerplatform is bovendien ook uitermate geschikt voor zelfstudie.

Aangezien deze online cursus nog voortdurend wordt aangevuld en bijgewerkt, is alle feedback steeds welkom op zomercursus@set.kuleuven.be !

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Intro vectorrekenen

Rekenen met vectoren is een basisvaardigheid voor het vak fysica. In dit hoofdstuk bespreken we het verschil tussen een scalaire en een vectoriële grootheid. We vatten de belangrijkste eigenschappen en rekenregels voor vectoren samen: vectoren optellen, vectoren vermenigvuldigen met een reëel getal, en de componenten van een vector bepalen ten opzichte van een assenstelsel.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Scalaire versus vectoriële grootheden

Heel wat grootheden in de fysica kunnen voorgesteld worden door een getalwaarde met een eenheid. Denk bijvoorbeeld aan het volume van een ton, de luchttemperatuur, het tijdstip van een gebeurtenis. Deze grootheden hebben een scalair karakter.

Maar vaak zijn enkel een getal en een eenheid niet voldoende om een grootheid precies te bepalen. Stel je wandelt in een dorp en je bent op zoek naar de supermarkt. Een voorbijganger laat je weten dat het in vogelvlucht nog 500 m wandelen is. Met deze info kan de supermarkt eender waar liggen op een cirkel met straal 500 m. Om de exacte positie van de supermarkt te weten moet ook de richting en de zin, bijvoorbeeld noordoosten, gegeven zijn. Pas als zowel de afstand als de richting gekend zijn, ligt de positie vast. Deze grootheid heeft een vectorieel karakter.

Eigenschap 2.2.1. Fysische grootheden zijn ofwel 'scalair' ofwel 'vectorieel':

(a) **Scalaire grootheden** zijn volledig bepaald door een rëeel getal en een eenheid.
Voorbeelden: een massa m, lengte ℓ, temperatuur T, ...

(b) **Vectoriële grootheden** zijn volledig bepaald door een aangrijpingspunt, grootte (maatgetal met eenheid), richting en zin.
Voorbeelden: positie $\vec{r}$, snelheid $\vec{v}$, versnelling $\vec{a}$, kracht $\vec{F}$, elektrisch veld $\vec{E}$, ...

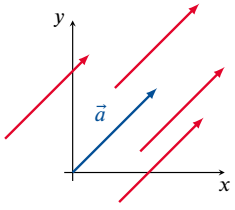
Een vectoriële grootheid wordt genoteerd door een pijltje boven de letter: $\vec{a}$.
De grootte van deze vector is een reëel getal (scalar) en noteren we als a (dus als het vectorsymbool zonder pijltje) of $\|\vec{a}\|$.

Een vector wordt grafisch voorgesteld door een pijl, waarvan de lengte evenredig is met zijn grootte. De rechte verbonden met de vector wordt de **drager** genoemd. De richting van deze drager komt overeen met de richting van de vectoriële grootheid (vb. horizontaal, verticaal, ...). De zin van de vectorpijl is de zin waarin de vectoriële grootheid wijst (vb. links, rechts, ...)



Figuur 1 – De drager van een vector $\vec{a}$.

In de fysica maakt men een onderscheid tussen vrije en gebonden vectoren. Als je een vrije vector verschuift in het vlak of in de 3-dimensionele ruimte, blijft dit dezelfde vector:



Figuur 2 – Vrije vectoren $\vec{a}$.

Op een afbeelding stellen verschillende pijlen met dezelfde lengte, richting en zin *dezelfde vrije vector* voor maar *verschillende gebonden vectoren*:

(a) **Vrije vectoren** zijn gelijk als ze dezelfde lengte, richting en zin hebben.

(b) **Gebonden vectoren** zijn gelijk als ze bovendien hetzelfde aangrijpingspunt hebben.

Afhankelijk van het probleem kunnen aangrijpingspunten soms wel belangrijk zijn, en soms niet.

CC BY-NC-SA 4.0

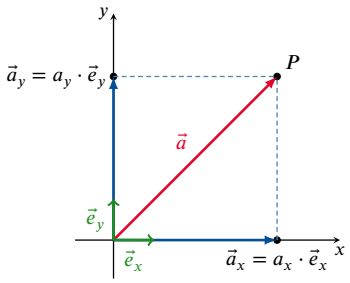
2.3 Vectorcomponenten

Wanneer we vectoren in een vlak of in de ruimte willen beschrijven, hebben we een assenstelsel nodig. Deze assen kiezen we orthogonaal (loodrecht) met eenzelfde eenheid op iedere as: ze vormen een zogenaamd **cartesiaans assenstelsel**. Conventioneel worden de assen voor een vlak benoemd met x en y.

Op elke as definiëren we een vector met lengte 1, die we de **eenheidsvector** noemen. We stellen deze voor door $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. De indices x en y duiden de richting aan, namelijk volgens de horizonale x-as en de verticale en y-as. Andere notaties van eenheidsvectoren zijn $\hat{x}$, $\hat{y}$ of $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$.

De eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ vormen een basis voor de vectoren in het x, y-vlak. Dit betekent dat je elke vector $\vec{a}$ in het x, y-vlak op éénduidige wijze kan ontbinden in **vectorcomponenten** volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$



Figuur 3 – Vector $\vec{a}$ in een x, y-assenstelsel.

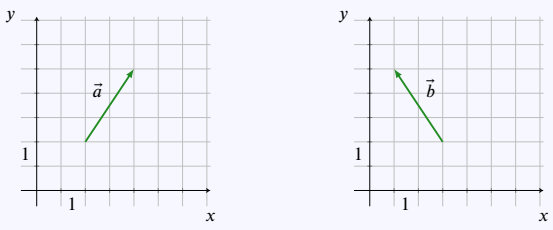
(a) $\vec{a}_x = a_x \cdot \vec{e}_x$ is dan de vectoriële component van $\vec{a}$ volgens $\vec{e}_x$.

(b) a_x noemen we de **(scalaire of algebraïsche) component** volgens de x-as.

(c) Analoog is $\vec{a}_y = a_y \cdot \vec{e}_y$ de vectoriële component van $\vec{a}$ volgens $\vec{e}_y$.

(d) a_y noemen we de scalaire of algebraïsche component volgens de y-as.

Voorbeeld 2.3.1.



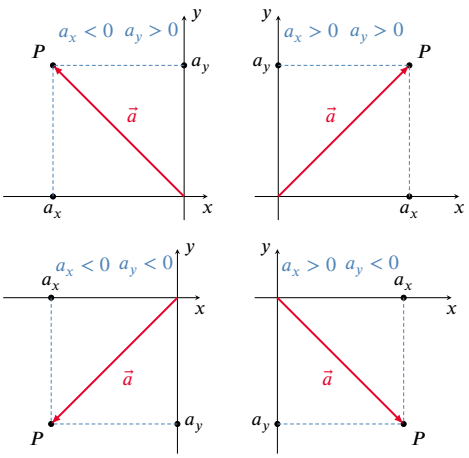
Links is $a_x = 2$ en $a_y = 3$. Je kan dus schrijven dat $\vec{a} = 2 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$ of ook $\vec{a} = (2, 3)$.

Rechts is $b_x = -2$ en $b_y = 3$. Je kan dus schrijven dat $\vec{b} = -2 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$ of ook $\vec{b} = (-2, 3)$.

De scalaire componenten zijn reële getallen die zowel positief als negatief kunnen zijn, afhankelijk van de richting en zin van de vector.

CC BY-NC-SA 4.0

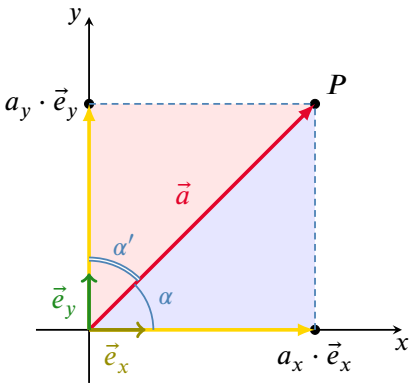
2.3 Vectorcomponenten



Figuur 4 – Voorbeelden van vector $\vec{a}$ in verschillende kwadranten.

In vele situaties is zowel de lengte van de vector als de hoek tussen de vector en één van de assen gekend. In figuur 5 bijvoorbeeld is de hoek α aangeduid tussen de vector $\vec{a}$ en de x-as. In dit geval kunnen we schrijven dat

$$a_x = a \cdot \cos\alpha \qquad \text{en} \qquad a_y = a \cdot \sin\alpha.$$



$$\begin{cases} a_x = a\cos\alpha = a\sin\alpha' \\ a_y = a\sin\alpha = a\cos\alpha' \end{cases}$$

Figuur 5 – Vector $\vec{a}$ in een x, y-assenstelsel.

Bewijs : Door de vector $\vec{a}$ te splitsen in zijn componenten, kan er op de tekening in figuur 5 een (blauwe) rechthoekige driehoek gevonden worden waarin de hoek alfa voorkomt. De schuine zijde van deze driehoek heeft lengte a, de rechthoekszijden hebben respectievelijke lengte a_x en a_y. Door de goniometrische formules voor sinus en cosinus te gebruiken, bekomt men:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_x = a\cos\alpha$$
$$\sin\alpha = \frac{a_y}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_y = a\sin\alpha$$

Indien je de hoek α' tussen de vector $\vec{a}$ en de y-as zou gebruiken bekom je uiteraard dezelfde waarden voor de scalaire componenten, maar de gebruikte formules zijn verschillend:

$$a_x = a \cdot \sin\alpha' \qquad \text{en} \qquad a_y = a \cdot \cos\alpha'.$$

Op analoge wijze kan er nu gekeken worden naar de rode rechthoekige driehoek in bovenstaande figuur.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Vectorcomponenten

Hierin geldt:

$$\cos\alpha' = \frac{a_y}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_y = a\cos\alpha'$$
$$\sin\alpha' = \frac{a_x}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_x = a\sin\alpha'$$

Merk op dat de hoek die de vector maakt met de x- of de y-as bepaalt of de scalaire componenten a_x en a_y positief of negatief zijn. Vertrekt de vector in de oorsprong van het assenstelsel dan zullen afhankelijk van het kwadrant waarin de vector $\vec{a}$ ligt de scalaire componenten positief of negatief zijn (zie figuur 4).

Omgekeerd : indien de scalaire componenten van vector $\vec{a}$ gekend zijn, kan men als volgt de hoek α die de vector met de horizontale richting maakt, berekenen:

$$\alpha = \text{Bgtan}\frac{|a_y|}{|a_x|}.$$

2.3.1 Lengte of norm

De lengte of norm van de vector $\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$ (zie figuur 5) kan berekend worden via

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Dit is een rechtstreeks gevolg van de stelling van Pythagoras die geldt in een rechthoekige driehoek.

Eigenschap 2.3.1. De vector $\vec{a}$ is volledig bepaald als zijn scalaire componenten volgens de assen gekend zijn. We noteren: $\vec{a} = (a_x, a_y)$.

Hieruit volgt dat $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$.

De vector $\vec{a}$ is dus de som van zijn vectoriële componenten.

De lengte of norm van de vector is gelijk aan $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Opmerking 2.3.1. Wil je een vector in de driedimensionale ruimte beschrijven, dan heb je drie assen nodig. Orthogonaal op de x- en y-as wordt de z-as ingevoerd. Een vector $\vec{a}$ kan dan ontbonden worden in drie vectorcomponenten:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z.$$

Dan is

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

en

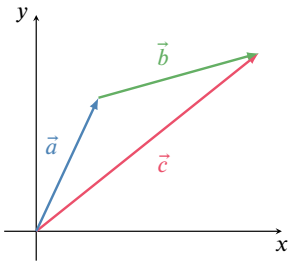
$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met vectoren

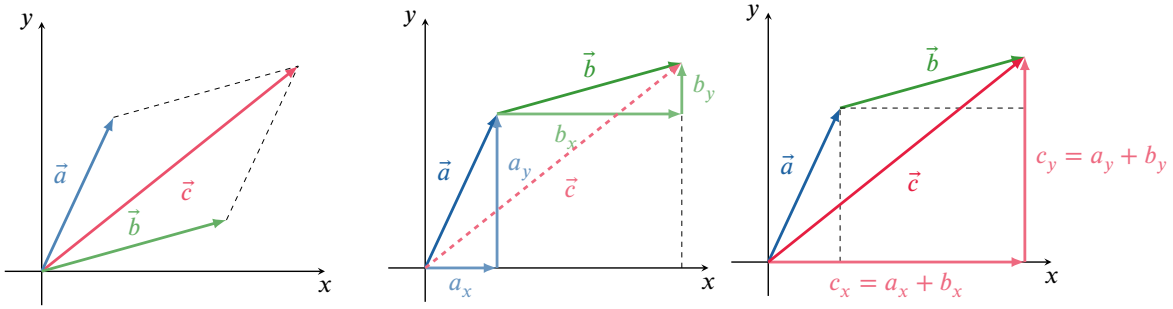
2.4.1 Som van twee vectoren

De som van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bekomt men door $\vec{b}$ te verschuiven zodat het beginpunt samenvalt met het eindpunt van $\vec{a}$. De vector die men bekomt door dan het beginpunt van $\vec{a}$ te verbinden met het eindpunt van $\vec{b}$ is de gezochte somvector $\vec{a}+\vec{b}$. Deze grafische constructie noemt men de **kop-staart-methode.**



Figuur 6 – De vector $\vec{c}$ is de som van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, bekomen met de kop-staart-methode

Een andere grafische methode om de somvector te bekomen is de zogenaamde **parallellogrammethode**. In dit geval verschuiven we geen van beide vectoren, en laten we dus de beginpunten van beide vectoren in de oorsprong liggen. Vervolgens maken we een parallellogram door de twee vectoren als zijden te gebruiken: Aangezien overstaande zijden in een parallellogram even lang en evenwijdig zijn, is er maar 1 mogelijkheid. We vinden de somvector dan als de vector met beginpunt in de oorsprong en eindpunt in de overstaande hoek van het parallellogram.



Figuur 7 – De vector $\vec{c}$ is de som van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, bekomen met de parallellogrammethode

Indien de scalaire componenten van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gegeven zijn, kunnen we de vectorsom $\vec{c}$ berekenen:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a}+\vec{b}\\ &= \left(a_x\cdot\vec{e}_x+a_y\cdot\vec{e}_y\right)+\left(b_x\cdot\vec{e}_x+b_y\cdot\vec{e}_y\right)\\ &= \left(a_x+b_x\right)\cdot\vec{e}_x+\left(a_y+b_y\right)\cdot\vec{e}_y\end{aligned}$$

Anderzijds geldt natuurlijk dat $\vec{c}=c_x\vec{e}_x+c_y\vec{e}_y$. Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} c_x = a_x+b_x \\ c_y = a_y+b_y \end{cases}.$$

2.4.2 Verschil van twee vectoren

We kunnen het verschil van 2 vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, genoteerd als $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, zien als de som van de vector $\vec{a}$ en de vector $-\vec{b}$. We noemen $-\vec{b}$ hier de **tegengestelde vector** van $\vec{b}$. De tegengestelde vector heeft dan

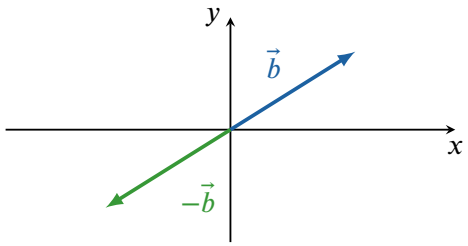
CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met vectoren

ook de tegengestelde componenten van de originele vector:

$$-\vec{b} = -\left(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y\right) = -b_x\vec{e}_x + (-b_y)\vec{e}_y\,.$$

Deze tegengestelde vector vinden we ook eenvoudig grafisch door de originele vector te spiegelen rond de oorsprong (let wel dat we hier veronderstellen dat de vector een beginpunt in de oorsprong heeft, anders moet de vector eerst nog verschoven worden tot dit wel het geval is).



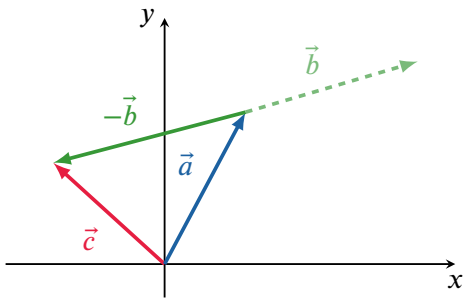
Figuur 8 – Een vector en zijn tegengestelde vector.

We kunnen bijgevolg de grafische methoden van de vorige sectie overnemen, en ook met componenten vinden we eenvoudig het resultaat:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} - \vec{b}\\ &= \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)\\ &= \left(a_x\cdot\vec{e}_x + a_y\cdot\vec{e}_y\right) + \left(-b_x\cdot\vec{e}_x + \left(-b_y\right)\cdot\vec{e}_y\right)\\ &= \left(a_x - b_x\right)\cdot\vec{e}_x + \left(a_y - b_y\right)\cdot\vec{e}_y\end{aligned}$$

Anderzijds geldt natuurlijk dat $\vec{c} = c_x\vec{e}_x + c_y\vec{e}_y$. Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \end{cases}.$$



Figuur 9 – De vector $\vec{c}$ is het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Men noteert: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

2.4.2.1 Toepassing: Verplaatsingsvector

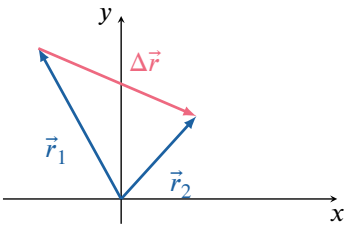
In de fysica wordt het verschil van twee vectoren bijvoorbeeld gebruikt in de zogenaamde **verplaatsingsvector**. We bekijken twee punten in de ruimte, die we noteren met de vectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ (bijvoorbeeld het vertrekpunt van een auto, en het punt van aankomst). Dan is de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ gedefinieerd als

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met vectoren

Deze vector wijst van $\vec{r}_1$ naar $\vec{r}_2$, en geeft dus de verplaatsing weer.



Figuur 10 – De verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$.

De verplaatsingsvector komt bijvoorbeeld voor in de formule voor de gemiddelde snelheid $\vec{v}_{\text{gem}}$, waar $\Delta t = t_2 - t_1$ het tijdsinterval is:

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\,.$$

2.4.3 Vermenigvuldiging van een vector met een scalar

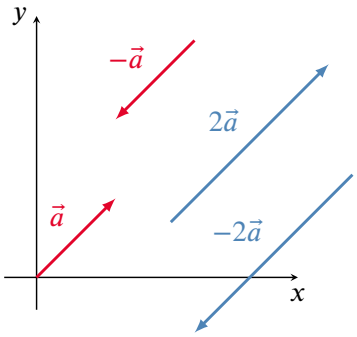
Wanneer we de vector $\vec{a}$ vermenigvuldigen met een scalar m verkrijgen we de vector $m \cdot \vec{a}$:

(a) $m \cdot \vec{a}$ heeft dezelfde richting als de vector $\vec{a}$.

(b) De lengte van de vector $m \cdot \vec{a}$ is $|m|$ keer de lengte van de vector $\vec{a}$.

(c) Indien $m > 0$ heeft $m \cdot \vec{a}$ dezelfde zin als de vector $\vec{a}$

(d) Indien $m < 0$ heeft die vector de tegengestelde zin van de vector $\vec{a}$.



Figuur 11 – Vermenigvuldiging van een vector met een scalar.

Als de scalaire componenten van de vector $\vec{a}$ gekend zijn, dan kunnen die van de vector $m \cdot \vec{a}$ eenvoudig berekend worden:

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a} &= m \cdot \left(a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y\right) \\ &= m \cdot a_x \cdot \vec{e}_x + m \cdot a_y \cdot \vec{e}_y \\ &= \left(m \cdot a_x, m \cdot a_y\right) \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

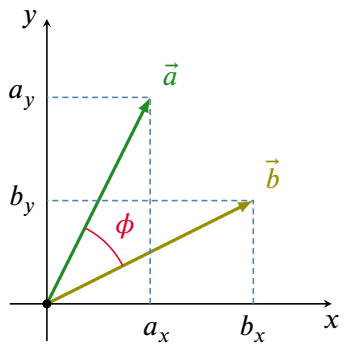
2.4 Bewerkingen met vectoren

2.4.4 Scalair product van twee vectoren

Het scalair product (dotproduct, inwendig product) van twee vectoren wordt gedefinieerd als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\phi.$$

Hierin is ϕ de kleinste hoek tussen de twee vectoren, wanneer men ze in eenzelfde punt laat aangrijpen..



Het resultaat van een scalair product van twee vectoren is een reëel getal (scalar). We noteren het scalair product met een puntje tussen de twee vectoren (belangrijk !).

Aangezien de groottes a en b van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ positief gedefinieerd zijn, bepaalt $\cos\phi$ het teken van het resultaat. Maken de twee vectoren een scherpe hoek, dan is hun scalair product positief. Maken ze een stompe hoek, dan is hun scalair product negatief. Staan ze loodrecht op elkaar, dan wordt $\cos\phi$ nul, en is het resultaat dus nul.

Indien je in plaats van de groottes van de twee vectoren en hun onderlinge hoek, de **componenten** van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ ten opzichte van een gekozen assenstel kent, dan kan je gebruik maken van volgende eigenschap:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

met $\vec{a} = (a_x, a_y)$ en $\vec{b} = (b_x, b_y)$.

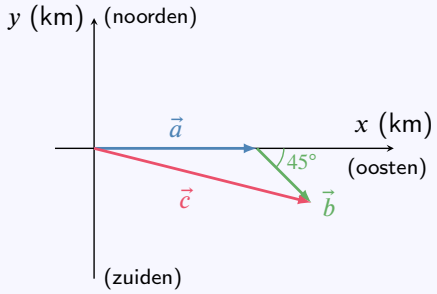
Merk tenslotte op dat het **delen van twee vectoren** niet gedefinieerd is. Ook het **delen van een scalar door een vector** is niet gedefinieerd.

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Voorbeeldoefeningen

Voorbeeld 2.5.1. Iemand loopt $5,0$ km naar het oosten en daarna $3,0$ km naar het zuidoosten. Bepaal de componenten van de vector die de eindpositie van de persoon aangeeft ten opzichte van zijn vertrekpunt.

Uitwerking: We maken eerst een grafische voorstelling van dit probleem. De eerste verplaatsing noteren we met vector $\vec{a}$, de tweede verplaatsing met vector $\vec{b}$. De eindpositie geven we aan met vector $\vec{c}$. We kiezen een assenstelsel en duiden de vectoren hierop aan.



We zoeken nu de componenten van vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$:

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}.$$

Uit de gegevens leiden we voor het gekozen assenstelsel af dat

$$\begin{cases} a_x = 5,0 \\ a_y = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} b_x = 3,0\cos(45°) = 2,1 \\ b_y = -3,0 \cdot \sin(45°) = -2,1 \end{cases}.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} c_x = 5,0 + 2,1 = 7,1 \\ c_y = 0 - 2,1 = -2,1 \end{cases}.$$

Om de notatie te vereenvoudigen hebben we geen eenheden geschreven in bovenstaande berekening, maar dat betekent niet dat deze scalaire componenten geen eenheid hebben. Strikt genomen is $c_x = 7,1$ km en $c_y = -2,1$ km.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Oefeningen Vectorrekenen

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

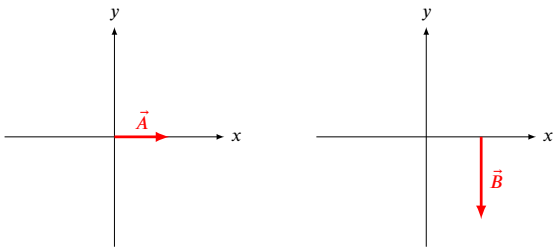
2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

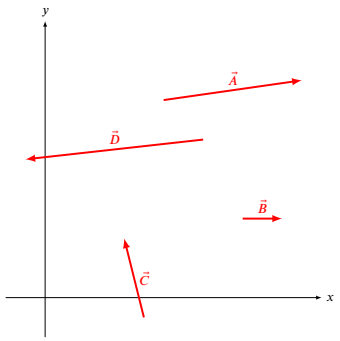
CC BY-NC-SA 4.0

2.6.1 Instapoefeningen

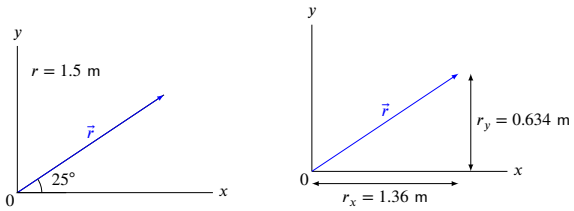
1. Stel dat A en B de lengtes zijn van de respectieve vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$. Wat zijn dan de (scalaire) x- en y-componenten van onderstaande vectoren?



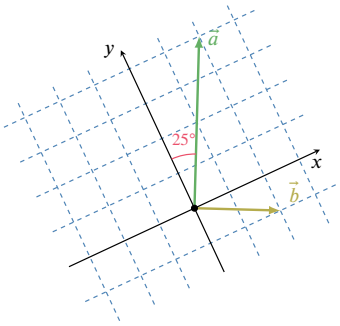
2. Rangschik onderstaande vectoren volgens grootte, x-component en y-component:



3. Verifieer of je de gegevens uit de rechtse tekening kan afleiden uit de linkse en omgekeerd.



4. Bepaal de componenten van de vector $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ten opzichte van het assenstelsel op de figuur.



$\vec{c} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.1 Instapoefeningen

5. Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ en $\vec{b} = 4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$. Bereken de grootte van beide vectoren. $a = \sqrt{\ldots\ldots}$, $b = \ldots\ldots$

6. Duid op een tekening de vectoren $\vec{a} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ en $\vec{b} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$ aan. Duid ook de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ aan.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.2 Standaardoefeningen

1. Als alle vectorcomponenten van een vector verdubbelen, wat gebeurt er dan met de richting (hoek die de vector maakt met de x-as) en de lengte van deze vector?

1. Meerkeuze:

(a) de hoek verdubbelt

(b) de hoek wordt groter, maar niet zo groot als het dubbele

(c) de hoek verandert niet

(d) de hoek wordt gereduceerd tot de helft

(e) de hoek wordt kleiner, maar niet zo veel als de helft

2. Meerkeuze:

(a) de lengte verdubbelt

(b) de lengte wordt groter, maar niet zo groot als het dubbele

(c) de lengte verandert niet

(d) de lengte wordt gereduceerd tot de helft

(e) de lengte wordt kleiner, maar niet zo veel als de helft

2. Een vector heeft x- en y-componenten die even groot zijn in absolute waarde. Welke van de onderstaande hoeken die de vector met de x-as maakt zijn dan mogelijk?

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $30°$

(b) $45°$

(c) $60°$

(d) $120°$

(e) $135°$

3. Een vector $\vec{A}$ heeft componenten $A_x > 0$ en $A_y > 0$, met $A_x = 2A_y$. Welke hoek maakt de vector met de x-as? $\theta = \ldots\ldots°$

4. Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$, $\vec{b} = -2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$, en $\vec{c} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$. Teken deze vectoren. Bereken en construeer de vectoren $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ en $\vec{t} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right)$.

5. Wat is de grootte van de vector $\vec{c} = \vec{e}_x - 3\vec{e}_y$ en welke hoek maakt deze vector met de x-as?

6. Een vector $\vec{v}$ maakt een hoek van $40°$ met de positieve x-as en heeft een y-component van -10 m/s. Wat is de waarde van de x-component?

$$v_x = \ldots\ldots \; m/s$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.2 Standaardoefeningen

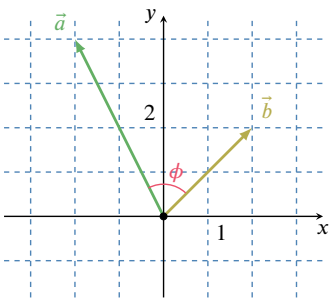
7. Jan en Piet vertrekken uit eenzelfde plaats. Jan wandelt eerst 2 km in een richting 45° ten noorden van het westen, daarna gaat hij nog 5 km in een richting 30° oostelijk van het noorden. Piet loopt 7 km in noordoostelijke richting (45° ten noorden van het oosten). Wat is de plaats van Jan ten opzichte van Piet?

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.3 Gevorderde oefeningen

1. De top van een berg bevindt zich op het punt $(-1,5)$ t.o.v. een bepaald stelsel. De positievector van een vogel t.o.v. deze top is 500 m in een richting 30° naar links t.o.v. de verticale. Wat is de afstand van de vogel tot de oorsprong van het stelsel? $r \approx \ldots\ldots$ m

2. Bepaal de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals weergegeven op de figuur.



$\varphi = \ldots\ldots$ °

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Intro kinematica

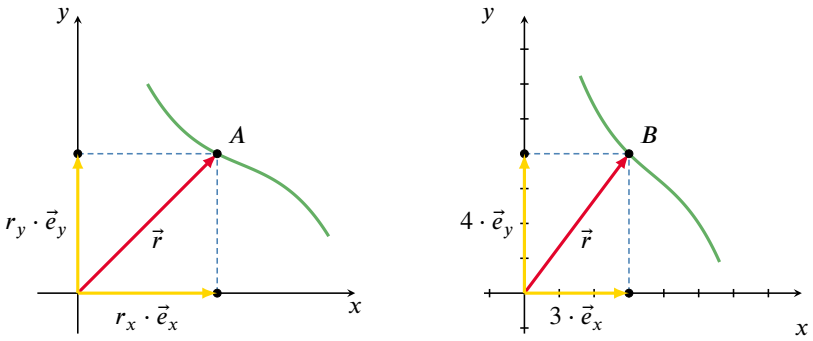
In de kinematica bestuderen we de wiskundige beschrijving van de beweging zonder de oorzaak van de beweging in rekening te brengen. De positie, snelheid en versnelling van het bewegende voorwerp, en meer bepaald hun tijdsverloop, staan hierbij centraal. Aangezien dit vectoriële grootheden zijn, zullen we vectoren invoeren om deze te beschrijven.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica

3.2.1 Positie- en verplaatsingsvector

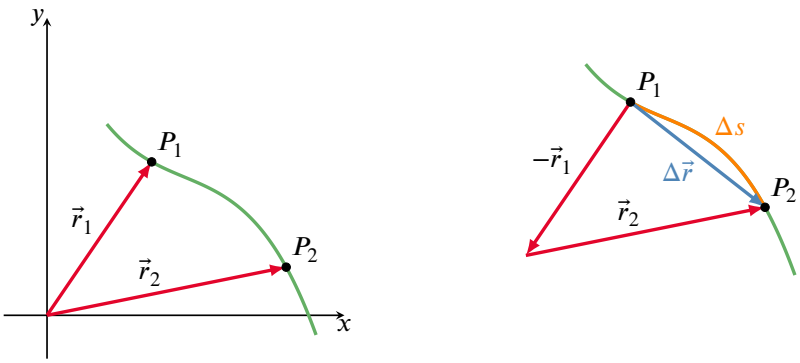
Definitie 3.2.1. De positie van het systeem op een tijdstip t ten opzichte van een gekozen oorsprong O, geven we weer met de positievector (of plaatsvector) $\vec{r}$.



Figuur 12 – Positievector.

De vector $\vec{r}$ heeft componenten r_x en r_y. De componenten r_x en r_y op een ogenblik t zijn gelijk aan de coördinaten x en y van het punt A waar het systeem zich op dat tijdstip bevindt en kunnen dus eventueel ook daarmee genoteerd worden. In het voorbeeld heeft B als coördinaten $x = 3$ en $y = 4$. Bijgevolg heeft de bijhorende plaatsvector $\vec{r}$ als componenten $r_x = +3$ en $r_y = +4$.

Als het systeem een baan beschrijft in het (x, y)-vlak, verandert de richting en/of de grootte van de vector $\vec{r}$. We bekijken de beweging van het systeem van het tijdstip t_1 tot t_2. Op het tijdstip t_1 is de positievector $\vec{r}_1$, op tijdstip t_2 is die vector $\vec{r}_2$.



Figuur 13 – Verplaatsingsvector.

Definitie 3.2.2. De afgelegde weg Δs is de afstand die het systeem in die tijd langs de baan aflegt. Δs is een getal en is altijd positief.

De verplaatsing $\Delta\vec{r}$ is $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Dat is een vector die wijst van punt 1 naar punt 2.

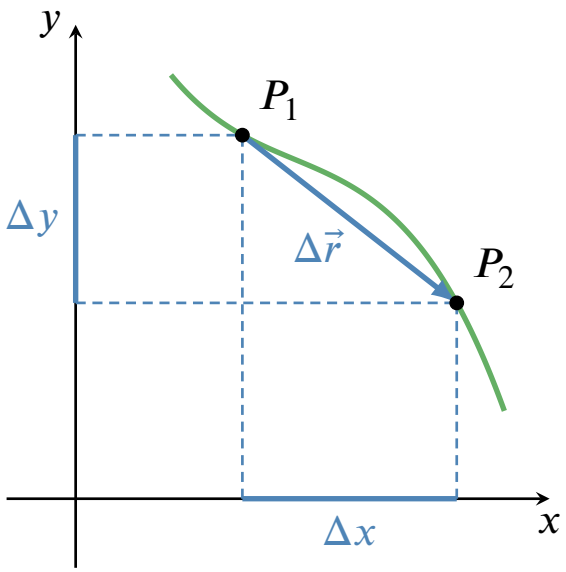
CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica

Voor de componenten van de vector $\Delta\vec{r}$ geldt

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(r_{2x} - r_{1x}, r_{2y} - r_{1y}\right)\\ &= \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1\right)\\ &= (\Delta x, \Delta y).\end{aligned}$$

De componenten van $\Delta\vec{r}$ komen dus overeen met de verplaatsing Δx en Δy t.o.v. respectievelijk de x-en de y-as. In onderstaande figuur is Δx positief en Δy negatief.



Figuur 14 – Componenten van de verplaatsingsvector.

3.2.2 De snelheidsvector

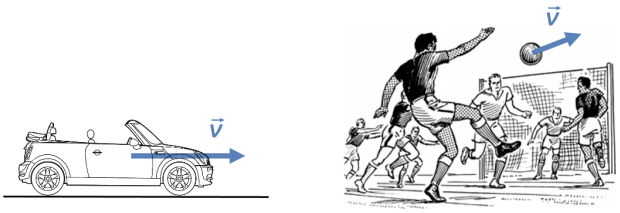
Wanneer een voorwerp in beweging is, kan je met de snelheidsvector aangeven hoe de beweging verloopt:

(a) Welke richting gaat de beweging uit (horizontaal, schuin, verticaal, ...)?

(b) In deze richting, naar welke kant (zin) beweegt het voorwerp (omhoog, omlaag, links, rechts, ...)?

(c) Hoeveel meter legt het voorwerp per seconde af (als het zijn snelheid zou aanhouden)?

Op een figuur geven we dit weer met een vector (pijl) : $\vec{v}$.



Figuur 15 – De snelheidsvector.

De grootte van de snelheid noteren we met de letter v. De eenheid is m/s. De snelheidsvector raakt altijd aan de baan van het voorwerp.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica

3.2.3 De versnellingsvector

Wanneer de snelheidsvector van een voorwerp verandert, zeggen we dat het voorwerp "versnelt". Dit woord kan soms wat verwarrend zijn omdat een snelheidsverandering ook een vertraging en/of (in twee dimensies) ook een afbuiging kan zijn. Toch spreken we steeds van een versnelling. We gaan nu verder in één dimensie (of dus zonder afbuiging, met andere woorden op een rechte baan).

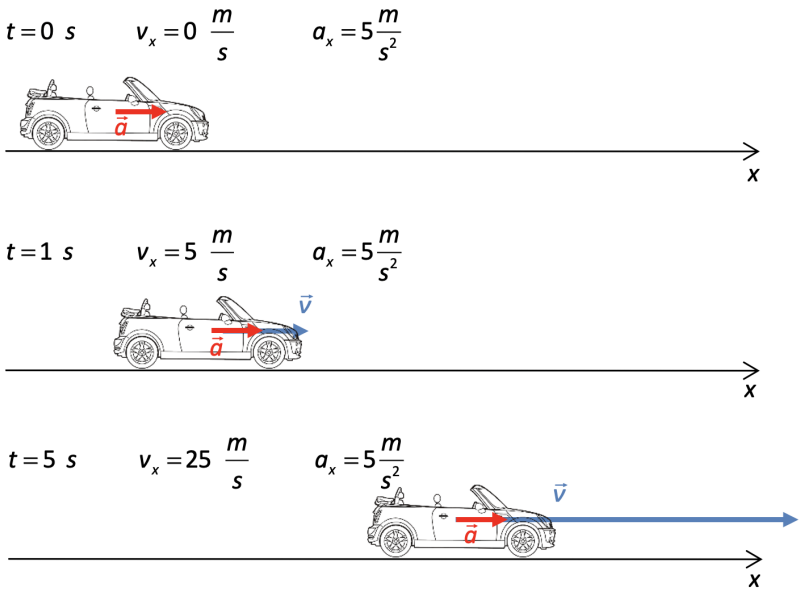
We duiden de versnelling aan met een vector $\vec{a}$.

De grootte van de versnelling duiden we aan met de letter a. De eenheid is $\mathrm{m/s^2}$.

Eigenschap 3.2.1. Wanneer de versnellingsvector dezelfde zin heeft als de snelheidsvector, dan neemt de snelheid in grootte toe (versnelling).

Wanneer de versnellingsvector een tegengestelde zin heeft t.o.v. de snelheidsvector, dan neemt de snelheid in grootte af (vertraging).

In het eerste voorbeeld zien we dat de wagen versnelt (zie onderstaande figuur): de snelheidsvector en de versnellingsvector wijzen dezelfde kant op.

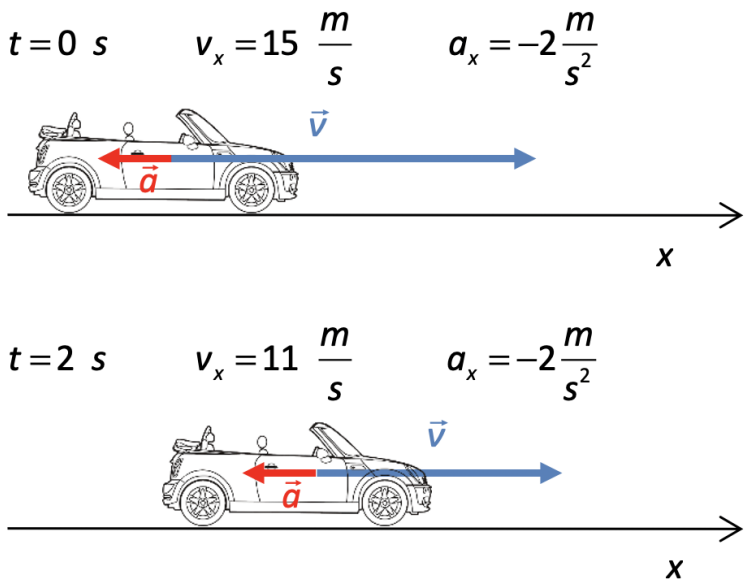


Figuur 16 – De versnellingsvector heeft dezelfde zin als de snelheidsvector : de grootte van de voorwaartse snelheid neemt toe.

In het tweede voorbeeld zien we dat de wagen vertraagt (zie onderstaande figuur). De snelheidsvector wijst tegengesteld aan de versnellingsvector.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica



Figuur 17 – De zin van de versnellingsvector is tegengesteld aan de zin van de snelheidsvector : de grootte van de voorwaartse snelheidsvector neemt af.

Verdere mogelijkheden zouden zijn : 1) snelheids- en versnellingsvector achteruit : de grootte van de achterwaartse snelheid neemt toe ; en 2) snelheidsvector achteruit en versnellingsvector vooruit : de grootte van de achterwaartse snelheid neemt af.

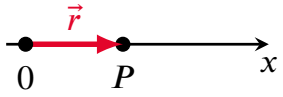
CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica

3.3.1 Positie

In een eerste stap beschrijven we de positie van een massapunt dat 1D beweegt, dus langs een rechte. Hiertoe kiezen we een x-as volgens deze rechte. De pijl op de x-as geeft aan in welke zin de x-waarde toeneemt. Als ook een oorsprong ($x = 0$) op deze rechte wordt vastgelegd, dan is de **positie** van het punt éénduidig bepaald door zijn x-coördinaat.

De positievector ligt op de x-as. De x-component van de positievector is gelijk aan de x-coördinaat van de positie: $r_x = x$



Figuur 18 – De positievector bij een beweging langs een x-as.

Wanneer het massapunt verandert van positie, ondergaat het een **verplaatsing ten opzichte van de x-as**. Als het punt van een beginpositie x_i naar een eindpositie x_f beweegt, dan is de verplaatsing

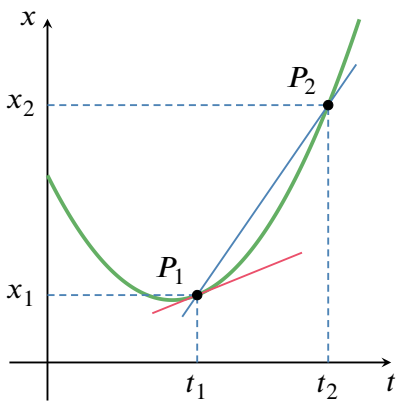
$$\Delta x = x_f - x_i.$$

De SI-eenheid van positie en verplaatsing is meter (m).

> **Opmerking 3.3.1.** De verplaatsing ten opzichte van een gekozen as kan positief, negatief of nul zijn. Er is dus een belangrijk verschil tussen de verplaatsing en de werkelijk afgelegde weg, die steeds positief is. Stel je fietst heen en terug van je huis naar de supermarkt, 2 km verderop. De totaal afgelegde weg is 4 km terwijl de verplaatsing nul is omdat het begin- en eindpunt samenvallen.

3.3.2 Snelheid

In een volgende stap bekijken we hoeveel tijd er verloopt tijdens een verplaatsing van een object. Of anders, hoe snel kan dat object bewegen? Bijvoorbeeld, hoeveel seconden heeft een sprinter nodig om de 100 m sprint af te leggen op een atletiekpiste?
Zo komen we tot het begrip snelheid. De snelheid kan dus bepaald worden als we informatie hebben over de positie x als functie van de tijd t. Deze informatie kan grafisch weergegeven worden in een $x(t)$-grafiek (zie onderstaande figuur) of in een algebraïsche uitdrukking. Deze geven voor elk tijdstip t de positie x van het object weer.



Figuur 19 – De grafiek van x als functie van t geeft ons de nodige informatie om gemiddelde of ogenblikkelijke snelheden te bepalen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica

Definitie 3.3.1. De gemiddelde snelheid $v_{x,g}$ t.o.v. de x-as in het interval Δt is

$$v_{x,g} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Hierin wordt x uitgedrukt in meter en t in seconden. Snelheid wordt uitgedrukt in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

In de definitie wordt niet de afgelegde weg Δs, maar de verplaatsing Δx gebruikt! Hieruit volgt dat de gemiddelde snelheid t.o.v. de x-as zoals gedefinieerd in de fysica ook negatief kan zijn.
De helling van de verbindingslijn (dit is de blauwe lijn) tussen de twee punten P_1 en P_2 op de $x(t)$-grafiek (in figuur 19) is gelijk aan de gemiddelde snelheid ten opzichte van de x-as gedurende dat tijdsinterval. Deze kan positief, negatief of nul zijn.

Eigenschap 3.3.1. De gemiddelde snelheid $v_{x,g}$ is

(a) positief als het systeem beweegt in de positieve zin van de x-as;

(b) negatief als het systeem beweegt in de negatieve zin van de x-as.

Dit geeft ons slechts een globaal beeld van de snelheid. Als we een meer nauwkeurige beschrijving van de beweging willen kennen, moeten we de gemiddelde snelheid berekenen over kortere tijdsperiodes. Een nog betere realistische beschrijving kan bekomen worden door de snelheid te kennen op elk ogenblik, de zogenaamde ogenblikkelijke snelheid.

Definitie 3.3.2. De ogenblikkelijke snelheid v_x t.o.v. de x-as op het ogenblik t is:

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Dat is de afgeleide van x naar t

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}.$$

De $v_x(t)$-functie noemen we de snelheidsvergelijking.

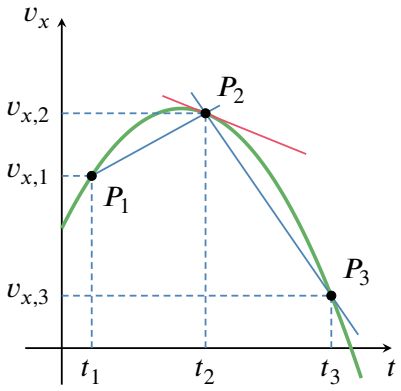
De snelheid op een bepaald tijdstip t_1 is de helling van de raaklijn (dit is de rode lijn) aan de $x(t)$-grafiek in het punt t_1 (zie figuur 19).

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica

3.3.3 Versnelling

Net zoals de snelheid de verandering is van de positie met de tijd, is de versnelling de verandering van de snelheid met de tijd. Met andere woorden, een voorwerp versnelt als zijn snelheid verandert. Een auto die aan een rood licht stilstond en plots vertrekt als het licht op groen springt, voert een versnelde beweging uit (hij trekt bijvoorbeeld op van 0 naar 50 km/u). De gemiddelde versnelling is de verhouding van de snelheidsverandering tot de tijdsduur waarover deze verandering plaatsvindt. In onderstaande figuur is de helling van de verbindingslijn tussen P_1 en P_2 de gemiddelde (positieve) versnelling in het tijdsinterval $t_2 - t_1$. Analoog is de helling van de verbindingslijn tussen P_2 en P_3 de (negatieve) versnelling over het tijdsinterval $t_3 - t_2$. De helling van de rode raaklijn aan de $v(t)$-grafiek in P_2 geeft de ogenblikkelijke versnelling op tijdstip t_2.



Figuur 20 – De hellingen van de verbindingslijnen tussen de aangeduide punten geeft de gemiddelde versnellingen op de respectievelijke tijdsintervallen. De helling van de rode raaklijn geeft de ogenblikkelijke versnelling op tijdstip t_2.

Definitie 3.3.3. De gemiddelde versnelling $a_{x,g}$ t.o.v. de x-as in het interval Δt is

$$a_{x,g} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x,2} - v_{x,1}}{t_2 - t_1}.$$

Versnelling wordt uitgedrukt in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

De gemiddelde versnelling kan positief, negatief of nul zijn. Zie figuur **??**.

Eigenschap 3.3.2. De gemiddelde versnelling $a_{x,g}$ is

(a) positief als het systeem versnelt in positieve zin van de x-as of vertraagt in negatieve zin;

(b) negatief als het systeem versnelt in negatieve zin van de x-as of vertraagt in positieve zin.

Analoog als hierboven voor de snelheid, wordt in de limiet voor steeds kleinere tijdsintervallen deze gemiddelde versnelling een ogenblikkelijke versnelling.

Definitie 3.3.4. De ogenblikkelijke versnelling a_x t.o.v. de x-as op het ogenblik t is:

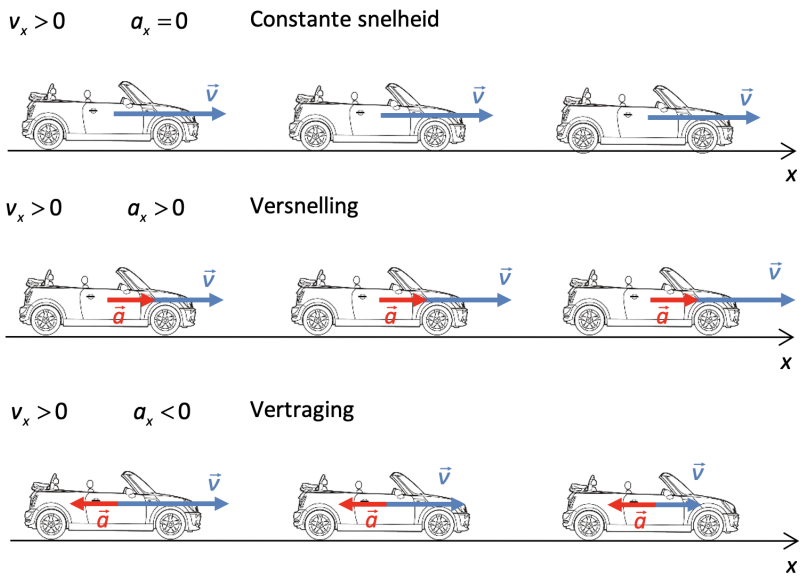
$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

Dat is de afgeleide van v_x naar t:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica



Figuur 21 – Versnelling en vertraging.

De $a_x(t)$-functie is de versnellingsvergelijking.

Een goed gekende versnelling is de valversnelling op aarde, deze is bij benadering $9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Dit betekent dat de snelheid van vallende objecten elke seconde verandert met $9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Opmerking 3.3.2. Om een voorwerp te doen versnellen moet op dat voorwerp een resulterende kracht werken. Later zullen we zien dat er een vast verband bestaat tussen deze resulterende kracht en de versnelling: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Omdat dit een vectorieel verband is, betekent dit dat de resulterende kracht en de versnelling dezelfde richting en zin hebben (immers, $m > 0$).

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Rechtlijnige bewegingen

3.4.1 De eenparige rechtlijnige beweging

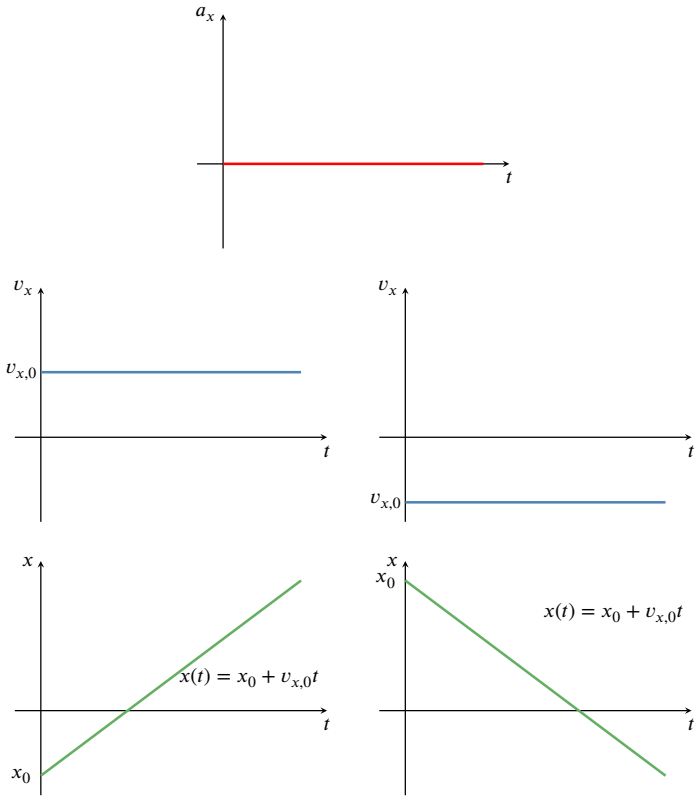
Een eenparige rechtlijnige beweging (ERB) is een beweging die verloopt met een constante snelheid langsheen een rechte. De versnelling is bijgevolg 0.

$$a_x(t) = 0$$
$$v_x(t) = v_{x,0}.$$

De constante snelheid kan positief of negatief zijn ten opzichte van een gekozen x-as. De positie x neemt dan lineair toe (of af) in de tijd. De positie als functie van de tijd voor dit soort beweging wordt gegeven door :

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t,$$

Hierbij is x_0 de beginpositie ten opzichte van de x-as en $v_{x,0}$ de constante snelheid langsheen de rechte. Deze bewegingsvergelijking beschrijft in de $x(t)$-grafiek een rechte met een positieve of negatieve helling, zoals weergegeven in volgende figuur.



Figuur 22 – Positie, snelheid en versnelling als functie van de tijd voor een eenparige rechtlijnige beweging met een positieve en negatieve snelheid v_0.

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Rechtlijnige bewegingen

3.4.2 De eenparig versnelde rechtlijnige beweging

Ten slotte bekijken we de eenparig versnelde rechtlijnige beweging (EVRB). Dit is een beweging die verloopt met een constante versnelling langsheen een rechte. De versnelling a_x kan positief of negatief zijn ten opzichte van een gekozen x-as langs de rechte. De snelheid v_x neemt dan lineair toe (of af) in de tijd. Dit betekent dat

$$v_x(t) = v_{x,0} + a_x \cdot t$$

met $v_{x,0}$ de beginsnelheid ten opzichte van de x-as.

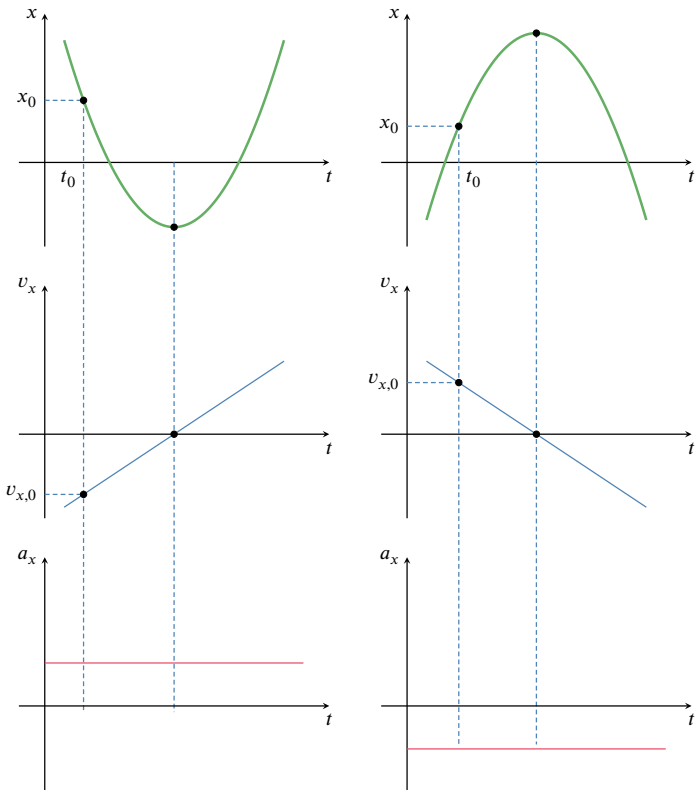
Deze snelheidsvergelijking beschrijft een rechte op een $v_x(t)$-grafiek.

De positie als functie van de tijd voor dit soort bewegingen wordt gegeven door:

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t + a_x \cdot \frac{t^2}{2}$$

met x_0 de beginpositie ten opzichte van de x-as.

Deze bewegingsvergelijking beschrijft een parabool op een $x(t)$-grafiek (zie figuur 23). Merk op dat de afgeleide van de bewegingsvergelijking gelijk is aan de snelheidsvergelijking.



Figuur 23 – Positie, snelheid en versnelling als functie van de tijd voor een eenparig versnelde rechtlijnige beweging met een positieve en negatieve versnelling a_x.

Wanneer de versnelling nul is tijdens een ééndimensionale beweging, dan noemt men de beweging een eenparige rechtlijnige beweging (ERB). De bewegingsvergelijking en de snelheidsvergelijking zijn dan

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t,$$

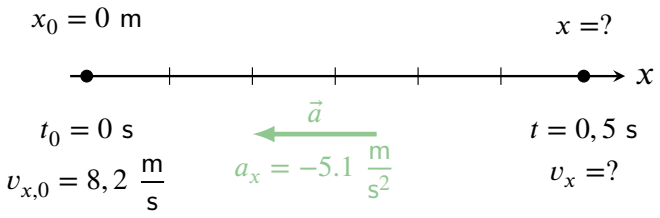
$$v_x(t) = v_{x,0}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Voorbeeldoefening

1. Een wagen komt aangereden aan een snelheid van $8,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ en moet plots remmen. De vertraging bedraagt $5,1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wat is de positie en de snelheid van de wagen na $0,5$ s ?

Uitwerking: We maken een grafische voorstelling van de opgave.



We veronderstellen dat de versnelling van de wagen constant is: we kunnen bijgevolg de formules voor de positie en de snelheid van de eenparig veranderlijke beweging gebruiken.

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t + a_x \cdot \frac{t^2}{2} \qquad \text{en} \qquad v_x(t) = v_{x,0} + a_x \cdot t.$$

We vullen de gegevens uit het schema in in de vergelijkingen en bekomen de positie en de snelheid van de wagen na $0,5$ s:

$$\begin{aligned} x(0,5\text{ s}) &= 0 + 8,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,5\text{ s} - 5,1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{0,5^2\ \text{s}^2}{2} &&= 3,5\text{ m} \\ v_x(0,5\text{ s}) &= 8,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5,1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5\text{ s} &&= 5,7\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

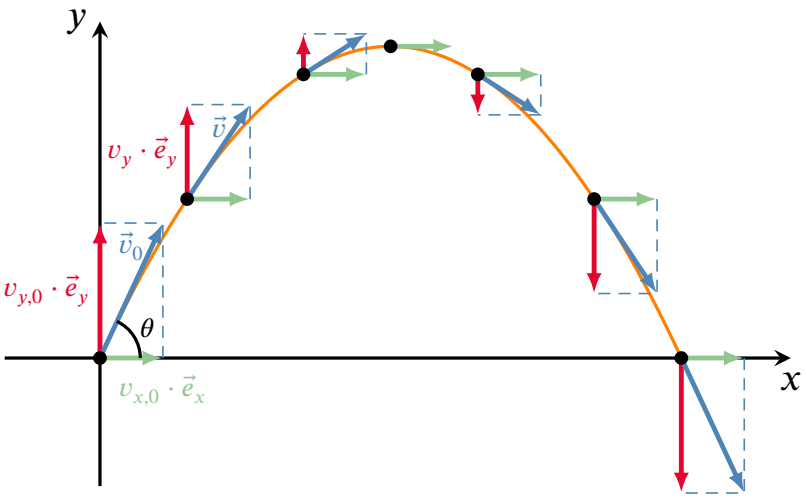
CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Twee-dimensionale kinematica

In tegenstelling tot de vorige paragraaf waar enkel rechtlijnige bewegingen (1 dimensie) werden beschouwd, bekijken we nu bewegingen in een vlak (2-dimensionaal). Daartoe splitsen we de beschrijving van de beweging op in twee 1-dimensionale bewegingen, nl. in de x- en de y-richting.

3.6.1 Projectielbeweging - Schuine worp

Een voorbeeld van een 2-dimensionale beweging is de **projectielbeweging**. Dit is de beweging van een projectiel (kogel, bal, ...) nadat dit werd weggeschoten of weggegooid onder een bepaalde hoek θ met de horizontale richting. Luchtwrijving wordt verwaarloosd. Men spreekt ook van **schuine worp**. Het projectiel beschrijft een parabolische baan en landt na een bepaalde tijd t terug op de grond.



Figuur 24 – De verticale component van de snelheid verandert van grootte en zin terwijl de horizontale component steeds hetzelfde blijft.

Eigenschap 3.6.1. Indien enkel de zwaartekracht op het voorwerp inwerkt, en de worp vanuit de oorsprong (0,0) vertrekt, bekom je voor de bewegingsvergelijking en de snelheidsvergelijking van de schuine worp ten opzichte van gekozen x- en y-as:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t \qquad \text{en} \qquad y(t) = v_0 \cdot \sin\theta \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}$$
$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \qquad v_y(t) = v_0 \cdot \sin\theta - g \cdot t$$

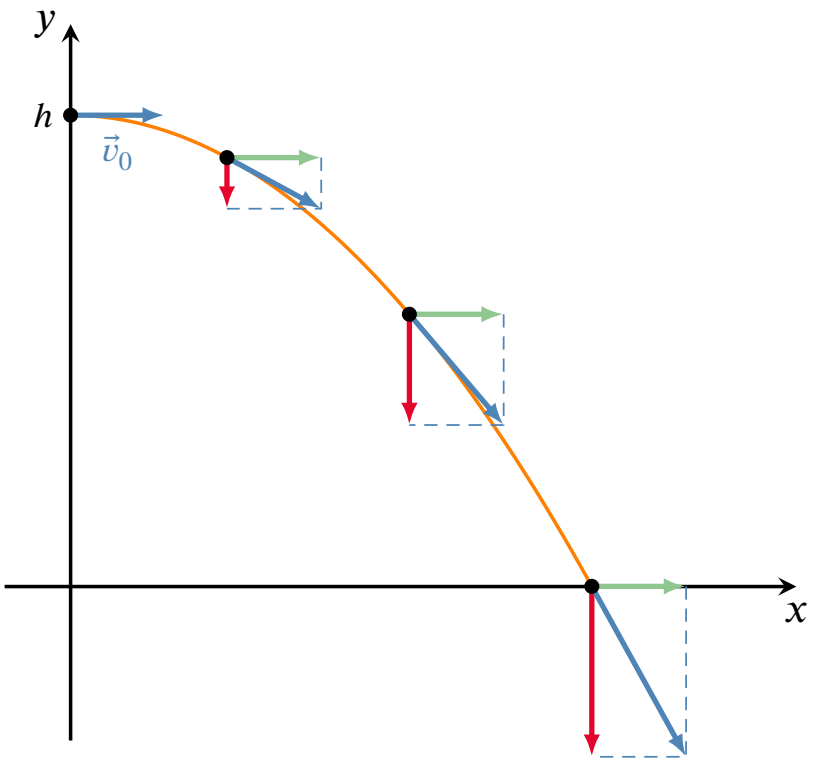
Er is enkel sprake van een versnelling in de y-richting. Deze versnelling is gelijk aan $a_y = -g$ omdat de zwaartekracht met grootte $F_z = m \cdot g$ tegen de gekozen opwaartse y-as in wijst.

3.6.2 Horizontale worp

Een speciaal geval van een schuine worp is een projectiel dat horizontaal wordt gelanceerd. Zo is de hoek tussen de beginsnelheid en de horizontale richting gelijk aan $\theta = 0°$. We kiezen hier het vertrek van de worp in het punt (0,h).

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Twee-dimensionale kinematica



Figuur 25 – Horizontale worp.

Eigenschap 3.6.2. Voor de horizontale worp vinden we de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cdot t \\ v_x(t) &= v_0 \end{aligned} \qquad \text{en} \qquad \begin{aligned} y(t) &= h - g \cdot \frac{t^2}{2} \\ v_y(t) &= -g \cdot t \end{aligned}$$

1. Een kogel wordt horizontaal weggeschoten vanop een muur met hoogte $h = 50$ m. De kogel treft de grond (en het doelwit) op 400 m afstand van de muur. Hoe groot was de (horizontale) beginsnelheid van de kogel? Verwaarloos de luchtweerstand.

Uitwerking: Stel dat de kogel op de grond valt op het tijdstip t, dan is de x-positie van de kogel 400 m en de y-positie 0 m. Er geldt dus dat $400\ \text{m} = 0\ \text{m} + \text{v}_0 \cdot \text{t}$.

En dus is

$$t = \frac{400\ \text{m}}{v_0}.$$

Voor de y-richting kunnen we dan schrijven dat:

$$\begin{aligned} 0 &= 50\ \text{m} - \text{g} \cdot \frac{\text{t}^2}{2} \\ 0 &= 50\ \text{m} - \text{g} \cdot \frac{\left(\frac{400\ \text{m}}{\text{v}_0}\right)^2}{2} \\ v_0 &= 125\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

BESLUIT: De horizontale beginsnelheid is dus $125\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Twee-dimensionale kinematica

3.6.3 Verticale worp

Een projectiel dat verticaal omhoog gelanceerd wordt (projectielbeweging met $\theta = 90°$) heeft een beginsnelheid die verticaal naar boven is gericht. Door de neerwaartsgerichte valversnelling $g = 9,81$ m/s^2 zal de snelheid afnemen met toenemende hoogte en nul worden in het hoogste punt. De beweging vertraagt omdat snelheid en valversnelling tegengesteld gericht zijn. Na het hoogste punt zal de snelheid opnieuw vergroten en zal het projectiel naar beneden vallen (snelheid en valversnelling hebben dan dezelfde zin).

Omdat de beginsnelheid een x-component gelijk aan nul heeft, zal deze nul blijven gedurende gans de beweging (eenparige rechtlijnige beweging), bijgevolg voert het projectiel een ééndimensionale, versnelde rechtlijnige beweging uit volgens de y-as.

Eigenschap 3.6.3. Indien je de y-as verticaal omhoog kiest, bekom je voor de bewegingsvergelijking en snelheidsvergelijking van een verticale worp:

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \qquad \text{en} \qquad v_y(t) = v_{y,0} - g \cdot t$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 De cirkelvormige beweging

3.7.1 Positie en hoeksnelheid

Bij het begin van dit hoofdstuk hebben we de rechtlijnige beweging besproken. De verplaatsing gebeurt dan volgens een rechte. De positie op deze rechte wordt vastgelegd met behulp van de positie x als functie van de tijd. Bij een cirkelvormige beweging is het handig om de positie aan te duiden met behulp van de hoek θ die varieert in de tijd (zie figuur 26). De afgelegde of doorlopen hoek in het tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$ is dan $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

De gemiddelde hoeksnelheid is bijgevolg

$$\omega_g = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Deze wordt uitgedrukt in rad/s.

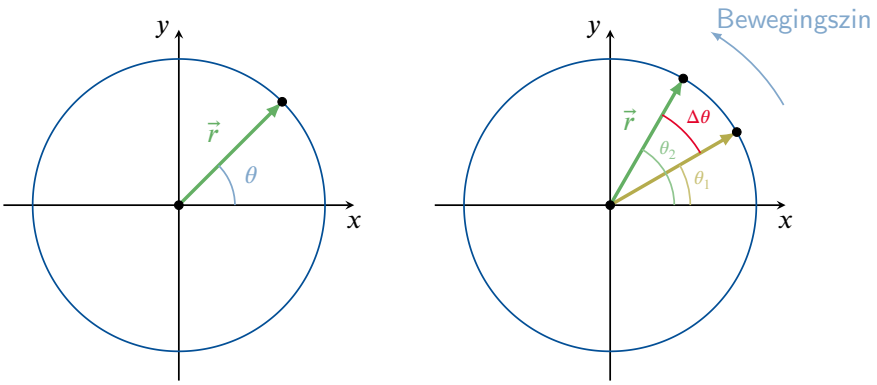
Omdat met een volledige omwenteling een hoek van 2π overeenkomt, kan je ook schrijven dat

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T}$$

met T de **periode**, dit is de tijd die nodig is voor een volledige omwenteling.

De ogenblikkelijke hoeksnelheid is

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$



Figuur 26 – Beschrijving cirkelbeweging.

De **frequentie** f is het aantal omwentelingen per seconde. Deze wordt uitgedrukt in hertz (Hz):

$$1\,\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}.$$

Duurt een volledige omwenteling bijvoorbeeld een halve seconde, dan zijn er per seconde twee volledige omwentelingen: de frequentie is dus het omgekeerde van de periode. Dit is algemeen geldig. Tussen de periode en de frequentie bestaat bijgevolg het volgende verband:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Wanneer de cirkelbeweging aan een constante hoeksnelheid verloopt, noemen we deze beweging een **eenparige cirkelvormige beweging (ECB)**. Er geldt dan dat $\omega = \omega_g$ en dus $\omega = 2\pi \cdot f$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 De cirkelvormige beweging

Voorbeeld 3.7.1. Een boormachine doet 600 toeren per minuut. Hieruit volgt dat

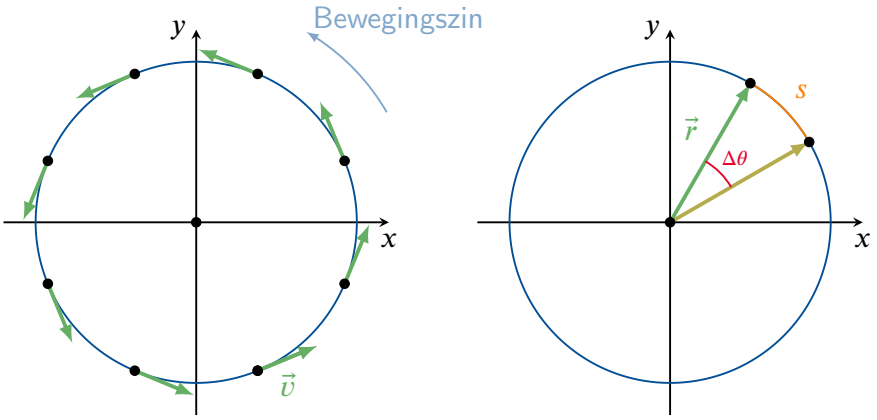
$$f = \frac{600 \text{ toeren}}{60 \text{ s}} = \frac{10 \text{ toeren}}{1 \text{ s}} = 10 \text{ Hz}.$$

De periode bedraagt

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10 \text{ Hz}} = 0,10 \text{ s}.$$

3.7.2 Omtreksnelheid of baansnelheid

De snelheidsvector $\vec{v}$ (baansnelheid) raakt op elk tijdstip aan de cirkelbaan.



Figuur 27 – *(a)* De snelheidsvector raakt op elk ogenblik aan de cirkel. *(b)* Verband tussen de booglengte en de doorlopen hoek.

Als je de hoeken uitdrukt in radialen, geldt dat de booglengte s gelijk is aan de doorlopen hoek maal de straal ($s = r \cdot \Delta\theta$). Bijgevolg kunnen we het verband afleiden tussen de grootte van de baansnelheid v, en de hoeksnelheid ω:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{r \cdot d\theta}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r \cdot \omega.$$

De grootte van deze omtreksnelheid of baansnelheid wordt uitgedrukt in m/s. Bij zekere hoeksnelheid ω geldt: hoe groter de straal van de cirkel, hoe groter de omtreksnelheid wordt.

Bij eenparige cirkelvormige bewegingen is de grootte van omtreksnelheid constant.

3.7.3 Versnelling

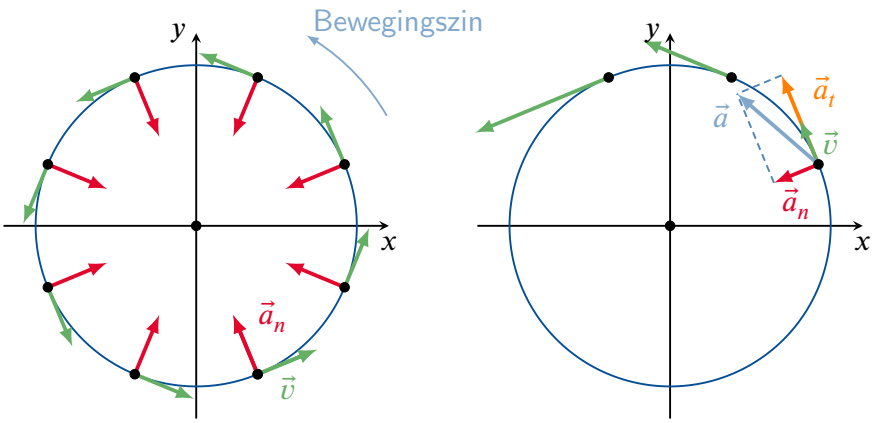
Bij een cirkelbeweging verandert de baansnelheid $\vec{v}$ voortdurend van richting (snelheidsverandering = versnelling). De versnelling die deze richtingsverandering beschrijft, is de normale of centripetale versnelling

$$a_n = a_{cp} = \frac{v^2}{r}.$$

Deze wijst naar het centrum van de cirkel.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 De cirkelvormige beweging



Figuur 28 – *(a)* Eenparige cirkelvormige beweging. *(b)* Niet-eenparige cirkelvormige beweging.

Als de grootte van de snelheidsvector $\vec{v}$ constant blijft, spreken we over een eenparige cirkelvormige beweging, deze wordt getoond in figuur 28(a). Wanneer echter de grootte van de baansnelheid $\vec{v}$ toeneemt of afneemt, spreken we over een niet-eenparige cirkelvormige beweging (figuur 28b)). In dit laatste geval kan de versnelling ontbonden worden in twee componenten. Enerzijds de normale versnelling $\vec{a}_n$ die de verandering van de richting van de snelheid beschrijft en anderzijds de tangentiële versnelling $\vec{a}_t$ die verandering van de grootte van de snelheid beschrijft. De totale versnelling is dan de vectorsom

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.8 Oefeningen Kinematica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

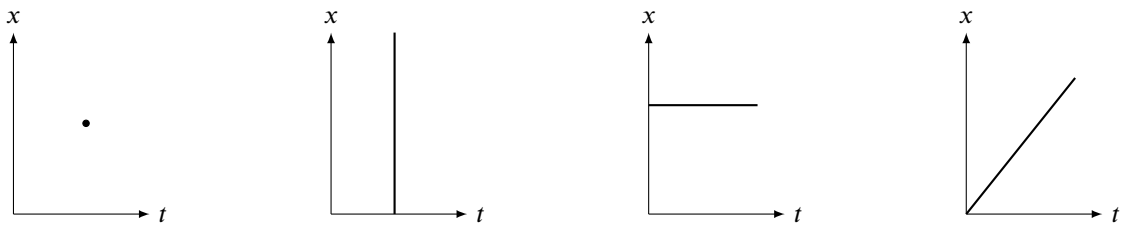
2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.1 Instapoefeningen

1. Welke grafiek in de figuur stelt een voorwerp in rust voor? | A | B | C | D |
Neem aan dat dit voorwerp enkel volgens een rechte baan beweegt (de x-as).



(A) (B) (C) (D)

2.

1. Joseph DeLoach uit de Verenigde Staten behaalde in 1988 met een tijd van 19,75 seconden op de 200m sprint een Olympisch record. Wat was zijn gemiddelde snelheid? Geef je antwoord in m/s en km/h.

$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s } = \ldots\ldots \text{ km/h.}$$

2. In 1992 behaalde Zhuang Yong uit China een Olympisch record op de 100m vrije slag zwemmen voor vrouwen met een tijd van 54,64 seconden. Wat was haar gemiddelde snelheid in m/s en in km/h?

$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s } = \ldots\ldots \text{ km/h}$$

3. Als de snelheid van een object verschillend is van nul, kan zijn versnelling dan nul zijn? Geef een voorbeeld als je antwoord ja is, leg uit waarom als je antwoord nee is.

| Ja | Nee |

4. Als de snelheid van een object nul is op een gegeven tijdstip,

1. kan zijn versnelling dan nul zijn op dat ogenblik? | Ja | Nee | Leg uit.

2. is het mogelijk dat de versnelling van het object op dat tijdstip verschillend is van nul? | Ja | Nee |
Leg uit.

5. Een fietser beweegt volgens een rechte baan en verhoogt haar snelheid gelijkmatig van 5,0 m/s naar 11,0 m/s in 12 seconden. Wat is haar versnelling, en welke afstand legt ze af in deze tijd?

$$a = \ldots\ldots \text{ m/s}^2, \qquad d = \ldots\ldots \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.1 Instapoefeningen

6. Wanneer je niest versnelt de lucht vanuit rust tot ongeveer 175 km/h in $0,60$ s. Hoe groot is de versnelling van de lucht?

$$\ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

7. Hoeveel (grootte en richting) bedraagt de versnelling van een projectiel op het hoogste punt van de baan? Ken je ook de versnelling net voor en net na het bereiken van dit punt?

8. Een bal wordt verticaal naar omhoog gegooid. Welke van bijgevoegde beweringen is correct in het hoogste punt van de baan?

$v = 0, a = 0$	$v \neq 0, a = 0$	$v = 0, a \neq 0$	$v \neq 0, a \neq 0$

9. An en Jan staan op de top van een gebouw. An gooit een bal vertikaal naar beneden, Jan laat een bal eenvoudigweg vallen. Welke bal heeft de grootste versnelling, juist na het loslaten? Veronderstel geen wrijving.

De bal van An	De bal van Jan	Beide ballen hebben dezelfde versnelling

10. Twee kinderen zitten op een paardenmolen. Kind 1 zit op $2,0$ m van de rotatie-as verwijderd en kind 2 zit op $1,5$ m van de as verwijderd. De paardenmolen maakt één draaibeweging in $4,5$ s.

1. Vind de hoeksnelheid ω.

$$\omega_1 = \ldots\ldots \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = \ldots\ldots \text{ rad/s}$$

2. Vind de omtreksnelheid v van elk kind.

$$v_1 = \ldots\ldots \ m/s, \qquad v_2 = \ldots\ldots \ m/s$$

11. Een wagen rijdt aan een constante baansnelheid op een cirkelvormige baan. Beantwoord elk van de volgende vragen met "JA" of "NEE".

1. Is de snelheid van de wagen constant?

Ja	Nee

2. Is de grootte van de snelheid constant?

Ja	Nee

3. Is de grootte van de versnelling constant?

Ja	Nee

4. Is de richting van de versnelling constant?

Ja	Nee

12.

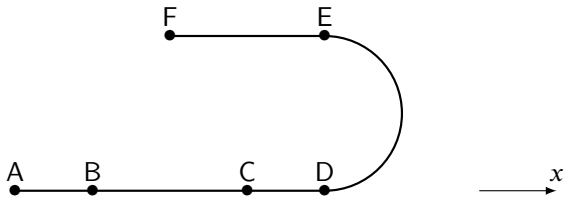
1. Een auto rijdt door een bocht met een constante snelheid van 50 km/u. Wanneer de auto diezelfde bocht neemt met een constante snelheid van 70 km/u, is zijn versnelling dan anders in het eerste geval? Licht uw antwoord toe.

2. Als een auto met 60 km/u een scherpe bocht neemt, en daarna met dezelfde snelheid een flauwe bocht neemt, is de versnelling dan in beide gevallen gelijk of niet? Leg uw antwoord uit.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.1 Instapoefeningen

13. Hieronder staat een bovenaanzicht van de beweging van een auto van A naar F. Tussen A en B versnelt de auto. Tussen B en C rijdt de auto aan 70 km/u. Van C naar D drukt de bestuurder op de rem. De auto neemt de bocht vervolgens aan 50 km/u. Tussen E en F drukt de bestuurder het gaspedaal in en rijdt de auto steeds sneller. Bepaal de richting en zin van de versnellingsvector voor elk stuk van de baan.



14. Een jongen gooit een bal horizontaal weg met een snelheid $v_0 = 1,3$ m/s, vanaf een hoogte van $1,25$ m boven de grond.

1. Bepaal de x- en y-positie op de tijdstippen $t = 0,25$ s en $t = 0,5$ s.

2. Hoe lang duurt het voor de bal landt? $t^* = \ldots\ldots$ s

3. Waar landt de bal? $x^* = \ldots\ldots$ m

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.2 Standaardoefeningen

1. Wat zijn de grootte en richting van de totale verplaatsing die je maakt als je eerst naar het westen reist met een snelheid van 27 m/s gedurende 125 s, en dan naar het zuiden met een snelheid van 14 m/s gedurende 66 s?

2. Een bal wordt vanuit rust losgelaten vanaf een hoogte van 20 meter.

1. Hoe lang duurt het vooraleer de bal de grond raakt? $t = \ldots\ldots$ s

2. Wat is de snelheid van de bal net voordat hij de grond raakt? $v = \ldots\ldots$ m/s

3. Een hond rent vooruit en achteruit tussen zijn twee baasjes die naar elkaar toe wandelen met elk een snelheid van 1,3 m/s. De hond start met lopen als ze 10 m van elkaar verwijderd zijn en heeft een snelheid van 3,0 m/s. Welke afstand heeft de hond afgelegd als de baasjes bij elkaar komen?

$$d = \ldots\ldots \text{ m}$$

4. Een auto die volgens een rechte baan met een snelheid van 20 m/s rijdt, begint te remmen met een constante versnelling met grootte 4,0 m/s^2.

1. Hoe lang duurt het vooraleer de auto tot stilstand komt? $t = \ldots\ldots$ s

2. Hoe ver rijdt de auto voordat hij volledig stilstaat? $d = \ldots\ldots$ m

5. Een auto rijdt met een constante snelheid van 135 km/u over een autosnelweg. Een politiewagen registreert deze snelheid als de wagen 100 m voorbij de politiewagen is en zet onmiddellijk de achtervolging in. De politiewagen houdt hiervoor een constante versnelling van 2.5 m/s^2 aan. Hoe lang duurt het eer de politiewagen de auto ingehaald heeft? Welke afstand heeft de politiewagen dan afgelegd?

6. Een projectiel wordt gelanceerd onder een hoek $\theta = 37°$ met een beginsnelheid $v_0 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Geef de grootte van de snelheid van het projectiel in het hoogste punt van zijn baan. Verklaar je antwoord.

7. Een Porsche daagt een Volkswagen uit voor een race van 400 m. Omdat de versnelling van $3,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ van de Porsche groter is dan de versnelling van $3,0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, mag de Volkswagen $1,0$ s vroeger vertrekken. Wie wint deze race?

Meerkeuze:

(a) Porche (b) Volkswagen

8. Een bevoorradingsvliegtuig moet een wetenschappelijke expeditie op de Noordpool voorzien van een voedselpakket. Het vliegtuig vliegt 80 m boven de grond aan een snelheid van 100 m/s. Op hoeveel afstand van de landingsplaats moet het pakket uit het vliegtuig geduwd worden?

$$\ldots\ldots\ m$$

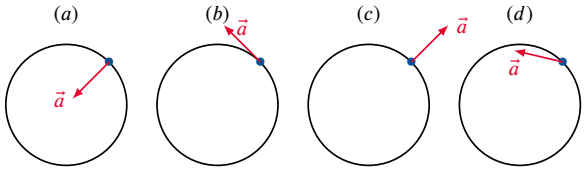
CC BY-NC-SA 4.0

3.8.2 Standaardoefeningen

9. Een wagentje op afstandsbediening rijdt een parcours dat beschreven wordt door $x = \frac{1}{2} \cdot t^3 - 2 \cdot t^2$ en $y = \frac{1}{2} \cdot t^2 - 2t$ waarbij x en y uitgedrukt worden in m en t in s. Wat is de richting van de beweging na 4 s? Geef de richting aan met behulp van een hoek met de positieve x-as.

..... °

10. Schumacher neemt met zijn Formule 1-wagen een cirkelvormige bocht, en remt een beetje tijdens het draaien. In welke figuur wordt de richting van de versnelling correct voorgesteld? In deze figuur beweegt hij in wijzerzin.



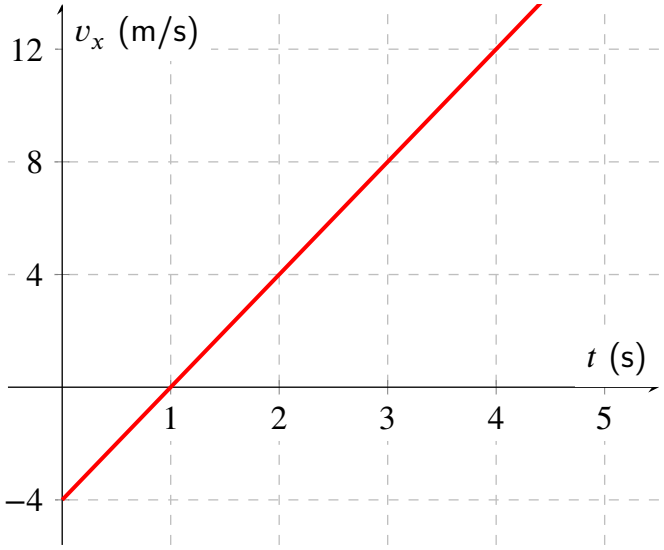
De juiste figuur is | (a) | (b) | (c) | (d) |.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.3 Gevorderde oefeningen

1. Een kanonskogel wordt onder een hoek van 40° afgeschoten. Als de kogel een doel moet treffen gelegen op 1500 m afstand, in een 100 m lager gelegen vallei, hoe groot moet dan de beginsnelheid van de kogel zijn? Verwaarloos de luchtweerstand.

2. Een deeltje start een ééndimensionale beweging vanop positie $x_0 = 10$ m op tijdstip $t_0 = 0$ s en beweegt met een snelheid die weergegeven is op de figuur.



1. Teken een mogelijke $x(t)$-grafiek voor dit deeltje.

2. Heeft dit deeltje een keerpunt in z'n beweging? Zo ja, op welk tijdstip? ... ...

3. Wat is de positie van het deeltje na 4 s? ... ... m

3. De Aarde voert rond de Zon in werkelijkheid een niet-eenparige beweging uit op een niet-cirkelvormige baan. Bereken de gemiddelde hoeksnelheid van de Aarde in haar werkelijke beweging rond de zon.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.4 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over kinematica via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0