KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorstudietraject fysica

Basisbegrippen van de natuurkunde

(versie 25 augustus 2026 H)

Inhoudsopgave

1 Inleiding 1.1
- 1.1 Intro . . . 1.1

2 Vectorrekenen 2.1
- 2.1 Intro vectorrekenen . . . 2.1
- 2.2 Scalaire versus vectoriële grootheden . . . 2.2
- 2.3 Vectorcomponenten . . . 2.3
- 2.4 Bewerkingen met vectoren . . . 2.6
- 2.5 Voorbeeldoefeningen . . . 2.10
- 2.6 Oefeningen Vectorrekenen . . . 2.11

3 Kinematica 3.1
- 3.1 Intro kinematica . . . 3.1
- 3.2 Grootheden kinematica . . . 3.2
- 3.3 Eén-dimensionale kinematica . . . 3.6
- 3.4 Rechtlijnige bewegingen . . . 3.10
- 3.5 Voorbeeldoefening . . . 3.12
- 3.6 Twee-dimensionale kinematica . . . 3.13
- 3.7 De cirkelvormige beweging . . . 3.16
- 3.8 Oefeningen Kinematica . . . 3.19

4 Dynamica 4.1
- 4.1 Intro dynamica . . . 4.1
- 4.2 Kracht . . . 4.2
- 4.3 Soorten krachten . . . 4.3
- 4.4 Krachtendiagramma's . . . 4.8
- 4.5 De wetten van Newton . . . 4.12
- 4.6 Centripetaalkracht . . . 4.15
- 4.7 Oefeningen Dynamica . . . 4.17

5 Arbeid en energie 5.1
- 5.1 Intro arbeid en energie . . . 5.1
- 5.2 Arbeid en vermogen . . . 5.2
- 5.3 Arbeid en kinetische energie . . . 5.5
- 5.4 Potentiële energie . . . 5.6
- 5.5 Behoudswetten . . . 5.7
- 5.6 Oefeningen Arbeid en Energie . . . 5.8

6 Trillingen 6.1
6.1 Intro trillingen . . . 6.1
6.2 De harmonische trilling . . . 6.2
6.3 Eigenschappen van een harmonische trilling . . . 6.7
6.4 Voorbeelden . . . 6.9
6.5 Energie van een harmonische trilling . . . 6.11
6.6 Soorten trillingen . . . 6.14
6.7 Oefeningen Trillingen . . . 6.16

7 Golven 7.1
7.1 Intro golven . . . 7.1
7.2 Ontstaan van een golf . . . 7.2
7.3 Begrippen . . . 7.4
7.4 De golfvergelijking(en) . . . 7.7
7.5 Energie en intensiteit van een golf . . . 7.10
7.6 Oefeningen Golven . . . 7.12

8 Hydrostatica 8.1
8.1 Intro hydrostatica . . . 8.1
8.2 Hydrostatische druk . . . 8.2
8.3 Wet van Archimedes . . . 8.4
8.4 Oefeningen Hydrostatica . . . 8.5

9 Elektrostatica 9.1
9.1 Intro elektrostatica . . . 9.1
9.2 Elektrische krachtwerking . . . 9.2
9.3 Elektrische velden . . . 9.5
9.4 Elektrische veldlijnen . . . 9.8
9.5 Elektrische potentiële energie . . . 9.9
9.6 Potentiaal . . . 9.12
9.7 Oefeningen Elektrostatica . . . 9.15

10 Elektrodynamica 10.1
10.1 Intro elektrodynamica . . . 10.1
10.2 Elektrische spanning . . . 10.2
10.3 Elektrische stroom . . . 10.7
10.4 Elektrische weerstand . . . 10.9
10.5 Warmte en vermogen in een weerstand . . . 10.13
10.6 Oefeningen Elektrodynamica . . . 10.15

INHOUDSOPGAVE

11 Elektrische schakelingen 11.1
- 11.1 Intro elektrische schakelingen . . . 11.1
- 11.2 Begrippen . . . 11.2
- 11.3 De serieschakeling . . . 11.4
- 11.4 De parallelschakeling . . . 11.6
- 11.5 Oefeningen Schakelingen . . . 11.8

12 Permanente magneten 12.1
- 12.1 Intro permanente magneten . . . 12.1
- 12.2 Eigenschappen . . . 12.2
- 12.3 Het magnetische veld . . . 12.3
- 12.4 Het magnetische veld van de aarde . . . 12.5
- 12.5 Oefeningen Magneten . . . 12.6

13 Het magnetische veld van een elektrische stroom 13.1
- 13.1 Intro magnetisch veld van een elektrische stroom . . . 13.1
- 13.2 Het magnetische veld van een rechte stroomvoerende geleider . . . 13.2
- 13.3 Het magnetische veld van één stroomvoerende winding . . . 13.4
- 13.4 Het magnetische veld van een stroomvoerende spoel . . . 13.5
- 13.5 Verklaring van magnetisme . . . 13.7
- 13.6 Oefeningen Magnetisch veld . . . 13.8

14 De elektromagnetische krachtwerking 14.1
- 14.1 Intro elektromagnetische kracht . . . 14.1
- 14.2 De elektromagnetische krachtwerking . . . 14.2
- 14.3 Oefeningen Magnetische kracht . . . 14.5

15 Elektromagnetische inductie 15.1
- 15.1 Intro elektromagnetische inductie . . . 15.1
- 15.2 Magnetische flux . . . 15.2
- 15.3 Elektromagnetische inductie . . . 15.4
- 15.4 De transformator . . . 15.8
- 15.5 Oefeningen Magnetische flux . . . 15.10

16 Kernfysica 16.1
- 16.1 Intro kernfysica . . . 16.1
- 16.2 Begrippen . . . 16.2
- 16.3 Bindingsenergie . . . 16.5
- 16.4 Natuurlijke radioactiviteit . . . 16.8
- 16.5 De vervalwet . . . 16.12

CC BY-NC-SA 4.0

16.6 Activiteit . . . 16.14
16.7 Dosis en dosisequivalent . . . 16.16
16.8 Oefeningen Kernfysica . . . 16.17

17 Thermodynamica 17.1
17.1 Intro thermodynamica . . . 17.1
17.2 Temperatuur en warmte . . . 17.2
17.3 Gaswetten . . . 17.3
17.4 Warmte . . . 17.6
17.5 Oefeningen Thermodynamica . . . 17.9

18 Herhalingsoefeningen 18.1
18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren . . . 18.1
18.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging . . . 18.4
18.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging . . . 18.6
18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica . . . 18.8
18.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie . . . 18.12
18.6 Herhalingsoefeningen: trillingen . . . 18.15
18.7 Herhalingsoefeningen: golven . . . 18.17
18.8 Herhalingsoefeningen: elektrostatica . . . 18.21
18.9 Herhalingsoefeningen: elektrodynamica . . . 18.23
18.10 Herhalingsoefeningen: schakelingen . . . 18.25
18.11 Herhalingsoefeningen: magnetisme . . . 18.28
18.12 Herhalingsoefeningen: kernfysica . . . 18.30
18.13 Herhalingsoefeningen: Usolvit . . . 18.31

19 Bibliografie 19.1
19.1 Bibliografie . . . 19.1

1.1 Intro

Deze online cursus behandelt de leerstof fysica waarmee je best vertrouwd bent bij het begin van je studies

- biochemie en biotechnologie
- biologie
- chemie
- geografie, geologie
- farmaceutische wetenschappen
- biomedische wetenschappen
- logopedische en audiologische wetenschappen
- lichamelijke opvoeding en bewegingswetenschappen
- revalidatiewetenschappen en kinesitherapie
- sommige schakelprogramma's

Voor de meeste toekomstige studenten is dit een opfrissing van leerstof die ze al hebben gezien. Toch is geprobeerd om bij de invoering van begrippen en concepten ook voldoende rekening te houden met studenten waarvoor de leerstof volledig nieuw is.

Deze cursusnota's zijn beschikbaar in meerdere vormen:

(a) als PDF, die je ofwel op je computer kan lezen, ofwel kan printen.

Als je de PDF op de computer leest, werken allerlei interne links naar oefeningen, definities en eigenschappen. In een geprinte versie verdwijnt een deel van die functionaliteit.

Via de KU Leuven website https://set.kuleuven.be/zomercursussen vind je de online versie die extra functionaliteiten biedt.

(b) als online applicatie, met volgende extra functionaliteiten:

- interactieve antwoordmogelijkheden, met feedback en/of hints
- directe links naar extra oefeningen
- een aantal filmpjes

Je kan zowel elk afzonderlijk onderdeel als de volledig cursus als PDF bestand downloaden. Er zijn telkens twee versies, een 'handout' versie met de opgaven van de oefeningen, maar zonder de antwoorden, en een 'standaard' versie die van de meeste oefeningen ook antwoorden en zelfs uitgewerkte oplossingen bevat.

De inhoud van deze recent aangemaakte online cursus is gebaseerd op leerstof fysica van het secundair onderwijs (2de en 3de graad 2u fysica) en wordt gebruikt als cursusmateriaal tijdens verschillende zomercursussen basiswetenschappen die jaarlijks georganiseerd worden. Het online leerplatform is bovendien ook uitermate geschikt voor zelfstudie.

Aangezien deze online cursus nog voortdurend wordt aangevuld en bijgewerkt, is alle feedback steeds welkom op zomercursus@set.kuleuven.be !

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Intro vectorrekenen

Rekenen met vectoren is een basisvaardigheid voor het vak fysica. In dit hoofdstuk bespreken we het verschil tussen een scalaire en een vectoriële grootheid. We vatten de belangrijkste eigenschappen en rekenregels voor vectoren samen: vectoren optellen, vectoren vermenigvuldigen met een reëel getal, en de componenten van een vector bepalen ten opzichte van een assenstelsel.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Scalaire versus vectoriële grootheden

Heel wat grootheden in de fysica kunnen voorgesteld worden door een getalwaarde met een eenheid. Denk bijvoorbeeld aan het volume van een ton, de luchttemperatuur, het tijdstip van een gebeurtenis. Deze grootheden hebben een scalair karakter.

Maar vaak zijn enkel een getal en een eenheid niet voldoende om een grootheid precies te bepalen. Stel je wandelt in een dorp en je bent op zoek naar de supermarkt. Een voorbijganger laat je weten dat het in vogelvlucht nog 500 m wandelen is. Met deze info kan de supermarkt eender waar liggen op een cirkel met straal 500 m. Om de exacte positie van de supermarkt te weten moet ook de richting en de zin, bijvoorbeeld noordoosten, gegeven zijn. Pas als zowel de afstand als de richting gekend zijn, ligt de positie vast. Deze grootheid heeft een vectorieel karakter.

Eigenschap 2.2.1. Fysische grootheden zijn ofwel 'scalair' ofwel 'vectorieel':

(a) **Scalaire grootheden** zijn volledig bepaald door een rëeel getal en een eenheid.
Voorbeelden: een massa m, lengte ℓ, temperatuur T, ...

(b) **Vectoriële grootheden** zijn volledig bepaald door een aangrijpingspunt, grootte (maatgetal met eenheid), richting en zin.
Voorbeelden: positie $\vec{r}$, snelheid $\vec{v}$, versnelling $\vec{a}$, kracht $\vec{F}$, elektrisch veld $\vec{E}$, ...

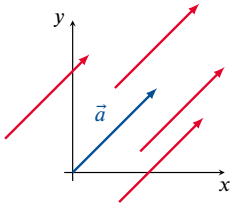
Een vectoriële grootheid wordt genoteerd door een pijltje boven de letter: $\vec{a}$.
De grootte van deze vector is een reëel getal (scalar) en noteren we als a (dus als het vectorsymbool zonder pijltje) of $\|\vec{a}\|$.

Een vector wordt grafisch voorgesteld door een pijl, waarvan de lengte evenredig is met zijn grootte. De rechte verbonden met de vector wordt de **drager** genoemd. De richting van deze drager komt overeen met de richting van de vectoriële grootheid (vb. horizontaal, verticaal, ...). De zin van de vectorpijl is de zin waarin de vectoriële grootheid wijst (vb. links, rechts, ...)



Figuur 1 – De drager van een vector $\vec{a}$.

In de fysica maakt men een onderscheid tussen vrije en gebonden vectoren. Als je een vrije vector verschuift in het vlak of in de 3-dimensionele ruimte, blijft dit dezelfde vector:



Figuur 2 – Vrije vectoren $\vec{a}$.

Op een afbeelding stellen verschillende pijlen met dezelfde lengte, richting en zin *dezelfde vrije vector* voor maar *verschillende gebonden vectoren*:

(a) **Vrije vectoren** zijn gelijk als ze dezelfde lengte, richting en zin hebben.

(b) **Gebonden vectoren** zijn gelijk als ze bovendien hetzelfde aangrijpingspunt hebben.

Afhankelijk van het probleem kunnen aangrijpingspunten soms wel belangrijk zijn, en soms niet.

CC BY-NC-SA 4.0

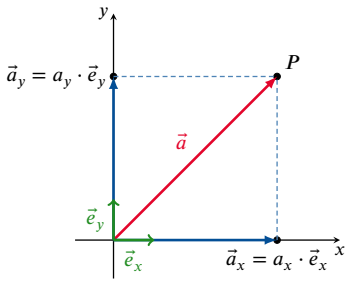
2.3 Vectorcomponenten

Wanneer we vectoren in een vlak of in de ruimte willen beschrijven, hebben we een assenstelsel nodig. Deze assen kiezen we orthogonaal (loodrecht) met eenzelfde eenheid op iedere as: ze vormen een zogenaamd **cartesiaans assenstelsel**. Conventioneel worden de assen voor een vlak benoemd met x en y.

Op elke as definiëren we een vector met lengte 1, die we de **eenheidsvector** noemen. We stellen deze voor door $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. De indices x en y duiden de richting aan, namelijk volgens de horizonale x-as en de verticale en y-as. Andere notaties van eenheidsvectoren zijn $\hat{x}$, $\hat{y}$ of $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$.

De eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ vormen een basis voor de vectoren in het x, y-vlak. Dit betekent dat je elke vector $\vec{a}$ in het x, y-vlak op éénduidige wijze kan ontbinden in **vectorcomponenten** volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$



Figuur 3 – Vector $\vec{a}$ in een x, y-assenstelsel.

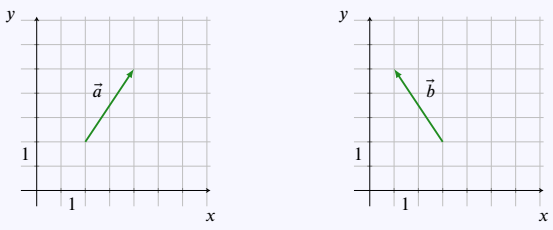
(a) $\vec{a}_x = a_x \cdot \vec{e}_x$ is dan de vectoriële component van $\vec{a}$ volgens $\vec{e}_x$.

(b) a_x noemen we de **(scalaire of algebraïsche) component** volgens de x-as.

(c) Analoog is $\vec{a}_y = a_y \cdot \vec{e}_y$ de vectoriële component van $\vec{a}$ volgens $\vec{e}_y$.

(d) a_y noemen we de scalaire of algebraïsche component volgens de y-as.

Voorbeeld 2.3.1.



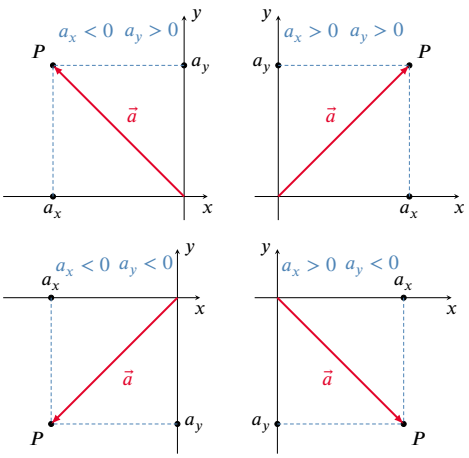
Links is $a_x = 2$ en $a_y = 3$. Je kan dus schrijven dat $\vec{a} = 2 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$ of ook $\vec{a} = (2, 3)$.

Rechts is $b_x = -2$ en $b_y = 3$. Je kan dus schrijven dat $\vec{b} = -2 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$ of ook $\vec{b} = (-2, 3)$.

De scalaire componenten zijn reële getallen die zowel positief als negatief kunnen zijn, afhankelijk van de richting en zin van de vector.

CC BY-NC-SA 4.0

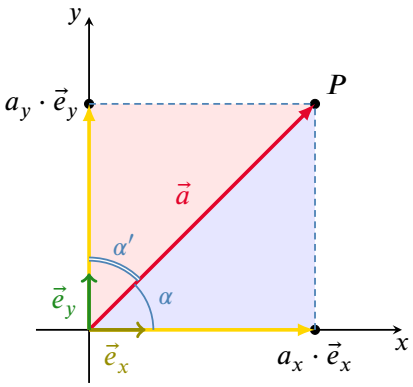
2.3 Vectorcomponenten



Figuur 4 – Voorbeelden van vector $\vec{a}$ in verschillende kwadranten.

In vele situaties is zowel de lengte van de vector als de hoek tussen de vector en één van de assen gekend. In figuur 5 bijvoorbeeld is de hoek α aangeduid tussen de vector $\vec{a}$ en de x-as. In dit geval kunnen we schrijven dat

$$a_x = a \cdot \cos\alpha \qquad \text{en} \qquad a_y = a \cdot \sin\alpha.$$



$$\begin{cases} a_x = a\cos\alpha = a\sin\alpha' \\ a_y = a\sin\alpha = a\cos\alpha' \end{cases}$$

Figuur 5 – Vector $\vec{a}$ in een x, y-assenstelsel.

Bewijs : Door de vector $\vec{a}$ te splitsen in zijn componenten, kan er op de tekening in figuur 5 een (blauwe) rechthoekige driehoek gevonden worden waarin de hoek alfa voorkomt. De schuine zijde van deze driehoek heeft lengte a, de rechthoekszijden hebben respectievelijke lengte a_x en a_y. Door de goniometrische formules voor sinus en cosinus te gebruiken, bekomt men:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_x = a\cos\alpha$$
$$\sin\alpha = \frac{a_y}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_y = a\sin\alpha$$

Indien je de hoek α' tussen de vector $\vec{a}$ en de y-as zou gebruiken bekom je uiteraard dezelfde waarden voor de scalaire componenten, maar de gebruikte formules zijn verschillend:

$$a_x = a \cdot \sin\alpha' \qquad \text{en} \qquad a_y = a \cdot \cos\alpha'.$$

Op analoge wijze kan er nu gekeken worden naar de rode rechthoekige driehoek in bovenstaande figuur.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Vectorcomponenten

Hierin geldt:

$$\cos\alpha' = \frac{a_y}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_y = a\cos\alpha'$$
$$\sin\alpha' = \frac{a_x}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_x = a\sin\alpha'$$

Merk op dat de hoek die de vector maakt met de x- of de y-as bepaalt of de scalaire componenten a_x en a_y positief of negatief zijn. Vertrekt de vector in de oorsprong van het assenstelsel dan zullen afhankelijk van het kwadrant waarin de vector $\vec{a}$ ligt de scalaire componenten positief of negatief zijn (zie figuur 4).

Omgekeerd : indien de scalaire componenten van vector $\vec{a}$ gekend zijn, kan men als volgt de hoek α die de vector met de horizontale richting maakt, berekenen:

$$\alpha = \text{Bgtan}\frac{|a_y|}{|a_x|}.$$

2.3.1 Lengte of norm

De lengte of norm van de vector $\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$ (zie figuur 5) kan berekend worden via

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Dit is een rechtstreeks gevolg van de stelling van Pythagoras die geldt in een rechthoekige driehoek.

Eigenschap 2.3.1. De vector $\vec{a}$ is volledig bepaald als zijn scalaire componenten volgens de assen gekend zijn. We noteren: $\vec{a} = (a_x, a_y)$.

Hieruit volgt dat $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$.

De vector $\vec{a}$ is dus de som van zijn vectoriële componenten.

De lengte of norm van de vector is gelijk aan $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Opmerking 2.3.1. Wil je een vector in de driedimensionale ruimte beschrijven, dan heb je drie assen nodig. Orthogonaal op de x- en y-as wordt de z-as ingevoerd. Een vector $\vec{a}$ kan dan ontbonden worden in drie vectorcomponenten:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z.$$

Dan is

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

en

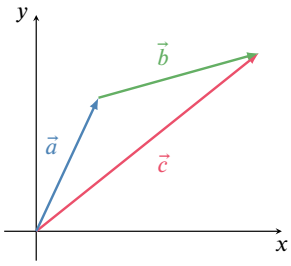
$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met vectoren

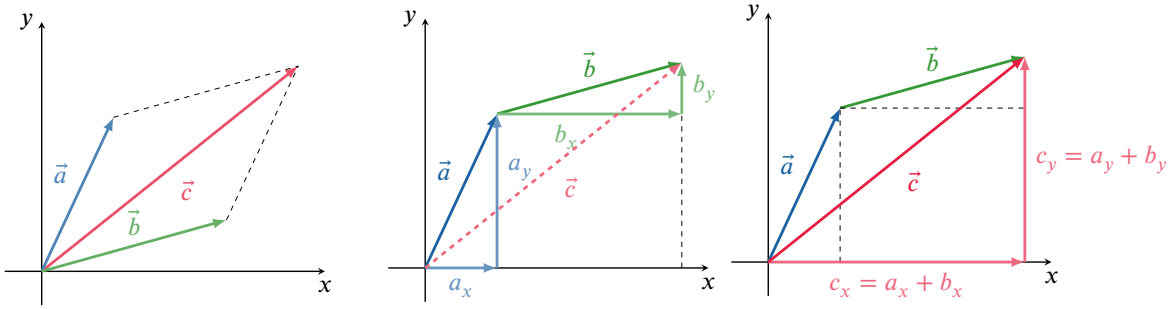
2.4.1 Som van twee vectoren

De som van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bekomt men door $\vec{b}$ te verschuiven zodat het beginpunt samenvalt met het eindpunt van $\vec{a}$. De vector die men bekomt door dan het beginpunt van $\vec{a}$ te verbinden met het eindpunt van $\vec{b}$ is de gezochte somvector $\vec{a}+\vec{b}$. Deze grafische constructie noemt men de **kop-staart-methode.**



Figuur 6 – De vector $\vec{c}$ is de som van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, bekomen met de kop-staart-methode

Een andere grafische methode om de somvector te bekomen is de zogenaamde **parallellogrammethode**. In dit geval verschuiven we geen van beide vectoren, en laten we dus de beginpunten van beide vectoren in de oorsprong liggen. Vervolgens maken we een parallellogram door de twee vectoren als zijden te gebruiken: Aangezien overstaande zijden in een parallellogram even lang en evenwijdig zijn, is er maar 1 mogelijkheid. We vinden de somvector dan als de vector met beginpunt in de oorsprong en eindpunt in de overstaande hoek van het parallellogram.



Figuur 7 – De vector $\vec{c}$ is de som van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, bekomen met de parallellogrammethode

Indien de scalaire componenten van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gegeven zijn, kunnen we de vectorsom $\vec{c}$ berekenen:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a}+\vec{b}\\ &= \left(a_x\cdot\vec{e}_x+a_y\cdot\vec{e}_y\right)+\left(b_x\cdot\vec{e}_x+b_y\cdot\vec{e}_y\right)\\ &= \left(a_x+b_x\right)\cdot\vec{e}_x+\left(a_y+b_y\right)\cdot\vec{e}_y\end{aligned}$$

Anderzijds geldt natuurlijk dat $\vec{c}=c_x\vec{e}_x+c_y\vec{e}_y$. Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} c_x = a_x+b_x \\ c_y = a_y+b_y \end{cases}.$$

2.4.2 Verschil van twee vectoren

We kunnen het verschil van 2 vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, genoteerd als $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, zien als de som van de vector $\vec{a}$ en de vector $-\vec{b}$. We noemen $-\vec{b}$ hier de **tegengestelde vector** van $\vec{b}$. De tegengestelde vector heeft dan

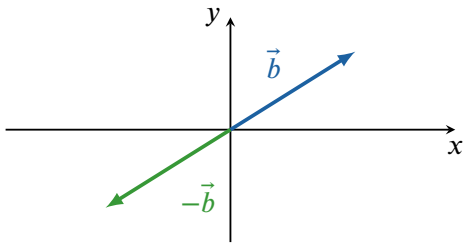
CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met vectoren

ook de tegengestelde componenten van de originele vector:

$$-\vec{b} = -\left(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y\right) = -b_x\vec{e}_x + (-b_y)\vec{e}_y\,.$$

Deze tegengestelde vector vinden we ook eenvoudig grafisch door de originele vector te spiegelen rond de oorsprong (let wel dat we hier veronderstellen dat de vector een beginpunt in de oorsprong heeft, anders moet de vector eerst nog verschoven worden tot dit wel het geval is).



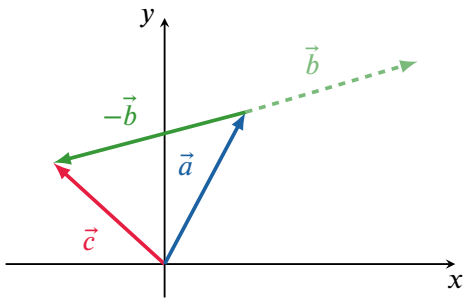
Figuur 8 – Een vector en zijn tegengestelde vector.

We kunnen bijgevolg de grafische methoden van de vorige sectie overnemen, en ook met componenten vinden we eenvoudig het resultaat:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} - \vec{b}\\ &= \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)\\ &= \left(a_x\cdot\vec{e}_x + a_y\cdot\vec{e}_y\right) + \left(-b_x\cdot\vec{e}_x + \left(-b_y\right)\cdot\vec{e}_y\right)\\ &= \left(a_x - b_x\right)\cdot\vec{e}_x + \left(a_y - b_y\right)\cdot\vec{e}_y\end{aligned}$$

Anderzijds geldt natuurlijk dat $\vec{c} = c_x\vec{e}_x + c_y\vec{e}_y$. Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \end{cases}.$$



Figuur 9 – De vector $\vec{c}$ is het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Men noteert: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

2.4.2.1 Toepassing: Verplaatsingsvector

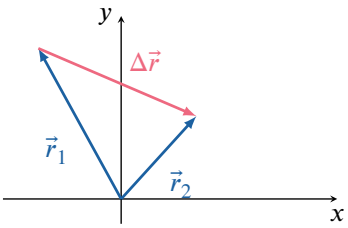
In de fysica wordt het verschil van twee vectoren bijvoorbeeld gebruikt in de zogenaamde **verplaatsingsvector**. We bekijken twee punten in de ruimte, die we noteren met de vectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ (bijvoorbeeld het vertrekpunt van een auto, en het punt van aankomst). Dan is de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ gedefinieerd als

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met vectoren

Deze vector wijst van $\vec{r}_1$ naar $\vec{r}_2$, en geeft dus de verplaatsing weer.



Figuur 10 – De verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$.

De verplaatsingsvector komt bijvoorbeeld voor in de formule voor de gemiddelde snelheid $\vec{v}_{\text{gem}}$, waar $\Delta t = t_2 - t_1$ het tijdsinterval is:

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\,.$$

2.4.3 Vermenigvuldiging van een vector met een scalar

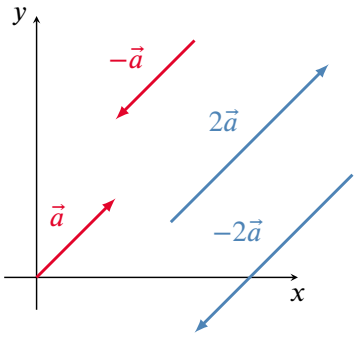
Wanneer we de vector $\vec{a}$ vermenigvuldigen met een scalar m verkrijgen we de vector $m \cdot \vec{a}$:

(a) $m \cdot \vec{a}$ heeft dezelfde richting als de vector $\vec{a}$.

(b) De lengte van de vector $m \cdot \vec{a}$ is $|m|$ keer de lengte van de vector $\vec{a}$.

(c) Indien $m > 0$ heeft $m \cdot \vec{a}$ dezelfde zin als de vector $\vec{a}$

(d) Indien $m < 0$ heeft die vector de tegengestelde zin van de vector $\vec{a}$.



Figuur 11 – Vermenigvuldiging van een vector met een scalar.

Als de scalaire componenten van de vector $\vec{a}$ gekend zijn, dan kunnen die van de vector $m \cdot \vec{a}$ eenvoudig berekend worden:

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a} &= m \cdot \left(a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y\right) \\ &= m \cdot a_x \cdot \vec{e}_x + m \cdot a_y \cdot \vec{e}_y \\ &= \left(m \cdot a_x, m \cdot a_y\right) \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

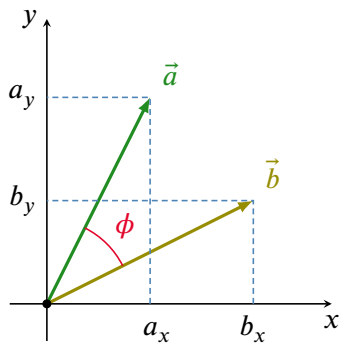
2.4 Bewerkingen met vectoren

2.4.4 Scalair product van twee vectoren

Het scalair product (dotproduct, inwendig product) van twee vectoren wordt gedefinieerd als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\phi.$$

Hierin is ϕ de kleinste hoek tussen de twee vectoren, wanneer men ze in eenzelfde punt laat aangrijpen..



Het resultaat van een scalair product van twee vectoren is een reëel getal (scalar). We noteren het scalair product met een puntje tussen de twee vectoren (belangrijk !).

Aangezien de groottes a en b van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ positief gedefinieerd zijn, bepaalt $\cos\phi$ het teken van het resultaat. Maken de twee vectoren een scherpe hoek, dan is hun scalair product positief. Maken ze een stompe hoek, dan is hun scalair product negatief. Staan ze loodrecht op elkaar, dan wordt $\cos\phi$ nul, en is het resultaat dus nul.

Indien je in plaats van de groottes van de twee vectoren en hun onderlinge hoek, de **componenten** van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ ten opzichte van een gekozen assenstel kent, dan kan je gebruik maken van volgende eigenschap:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

met $\vec{a} = (a_x, a_y)$ en $\vec{b} = (b_x, b_y)$.

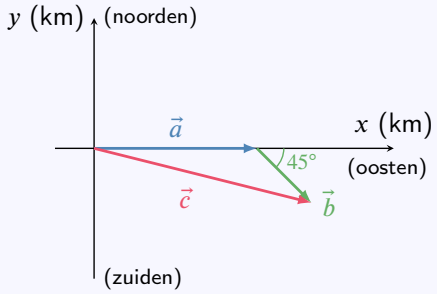
Merk tenslotte op dat het **delen van twee vectoren** niet gedefinieerd is. Ook het **delen van een scalar door een vector** is niet gedefinieerd.

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Voorbeeldoefeningen

Voorbeeld 2.5.1. Iemand loopt $5,0$ km naar het oosten en daarna $3,0$ km naar het zuidoosten. Bepaal de componenten van de vector die de eindpositie van de persoon aangeeft ten opzichte van zijn vertrekpunt.

Uitwerking: We maken eerst een grafische voorstelling van dit probleem. De eerste verplaatsing noteren we met vector $\vec{a}$, de tweede verplaatsing met vector $\vec{b}$. De eindpositie geven we aan met vector $\vec{c}$. We kiezen een assenstelsel en duiden de vectoren hierop aan.



We zoeken nu de componenten van vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$:

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}.$$

Uit de gegevens leiden we voor het gekozen assenstelsel af dat

$$\begin{cases} a_x = 5,0 \\ a_y = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} b_x = 3,0\cos(45°) = 2,1 \\ b_y = -3,0 \cdot \sin(45°) = -2,1 \end{cases}.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} c_x = 5,0 + 2,1 = 7,1 \\ c_y = 0 - 2,1 = -2,1 \end{cases}.$$

Om de notatie te vereenvoudigen hebben we geen eenheden geschreven in bovenstaande berekening, maar dat betekent niet dat deze scalaire componenten geen eenheid hebben. Strikt genomen is $c_x = 7,1$ km en $c_y = -2,1$ km.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Oefeningen Vectorrekenen

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

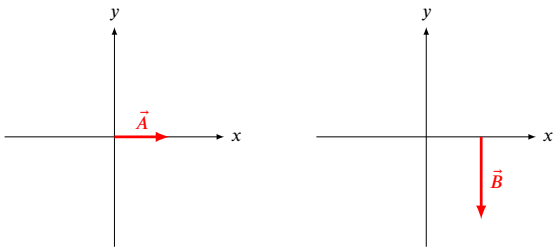
2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

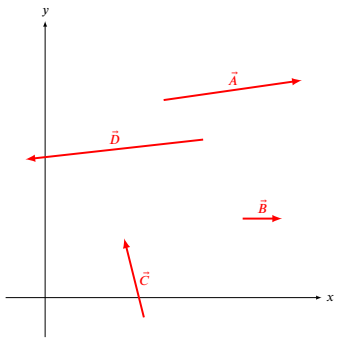
CC BY-NC-SA 4.0

2.6.1 Instapoefeningen

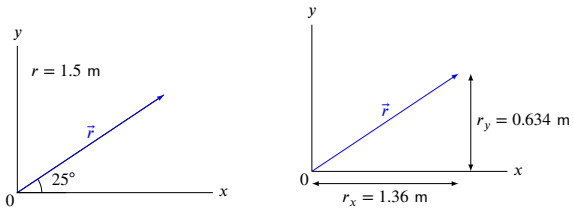
1. Stel dat A en B de lengtes zijn van de respectieve vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$. Wat zijn dan de (scalaire) x- en y-componenten van onderstaande vectoren?



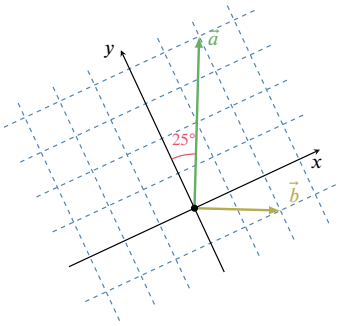
2. Rangschik onderstaande vectoren volgens grootte, x-component en y-component:



3. Verifieer of je de gegevens uit de rechtse tekening kan afleiden uit de linkse en omgekeerd.



4. Bepaal de componenten van de vector $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ten opzichte van het assenstelsel op de figuur.



$\vec{c} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.1 Instapoefeningen

5. Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ en $\vec{b} = 4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$. Bereken de grootte van beide vectoren. $a = \sqrt{\ldots\ldots}$, $b = \ldots\ldots$

6. Duid op een tekening de vectoren $\vec{a} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ en $\vec{b} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$ aan. Duid ook de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ aan.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.2 Standaardoefeningen

1. Als alle vectorcomponenten van een vector verdubbelen, wat gebeurt er dan met de richting (hoek die de vector maakt met de x-as) en de lengte van deze vector?

1. Meerkeuze:

(a) de hoek verdubbelt

(b) de hoek wordt groter, maar niet zo groot als het dubbele

(c) de hoek verandert niet

(d) de hoek wordt gereduceerd tot de helft

(e) de hoek wordt kleiner, maar niet zo veel als de helft

2. Meerkeuze:

(a) de lengte verdubbelt

(b) de lengte wordt groter, maar niet zo groot als het dubbele

(c) de lengte verandert niet

(d) de lengte wordt gereduceerd tot de helft

(e) de lengte wordt kleiner, maar niet zo veel als de helft

2. Een vector heeft x- en y-componenten die even groot zijn in absolute waarde. Welke van de onderstaande hoeken die de vector met de x-as maakt zijn dan mogelijk?

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $30°$

(b) $45°$

(c) $60°$

(d) $120°$

(e) $135°$

3. Een vector $\vec{A}$ heeft componenten $A_x > 0$ en $A_y > 0$, met $A_x = 2A_y$. Welke hoek maakt de vector met de x-as? $\theta = \ldots\ldots°$

4. Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$, $\vec{b} = -2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$, en $\vec{c} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$. Teken deze vectoren. Bereken en construeer de vectoren $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ en $\vec{t} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right)$.

5. Wat is de grootte van de vector $\vec{c} = \vec{e}_x - 3\vec{e}_y$ en welke hoek maakt deze vector met de x-as?

6. Een vector $\vec{v}$ maakt een hoek van $40°$ met de positieve x-as en heeft een y-component van -10 m/s. Wat is de waarde van de x-component?

$$v_x = \ldots\ldots \; m/s$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.2 Standaardoefeningen

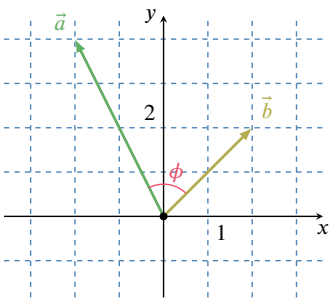
7. Jan en Piet vertrekken uit eenzelfde plaats. Jan wandelt eerst 2 km in een richting 45° ten noorden van het westen, daarna gaat hij nog 5 km in een richting 30° oostelijk van het noorden. Piet loopt 7 km in noordoostelijke richting (45° ten noorden van het oosten). Wat is de plaats van Jan ten opzichte van Piet?

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.3 Gevorderde oefeningen

1. De top van een berg bevindt zich op het punt $(-1,5)$ t.o.v. een bepaald stelsel. De positievector van een vogel t.o.v. deze top is 500 m in een richting 30° naar links t.o.v. de verticale. Wat is de afstand van de vogel tot de oorsprong van het stelsel? $r \approx \ldots\ldots$ m

2. Bepaal de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals weergegeven op de figuur.



$\varphi = \ldots\ldots$ °

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Intro kinematica

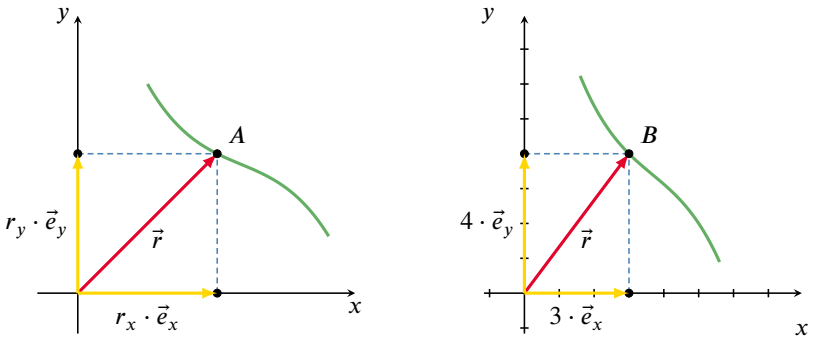
In de kinematica bestuderen we de wiskundige beschrijving van de beweging zonder de oorzaak van de beweging in rekening te brengen. De positie, snelheid en versnelling van het bewegende voorwerp, en meer bepaald hun tijdsverloop, staan hierbij centraal. Aangezien dit vectoriële grootheden zijn, zullen we vectoren invoeren om deze te beschrijven.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica

3.2.1 Positie- en verplaatsingsvector

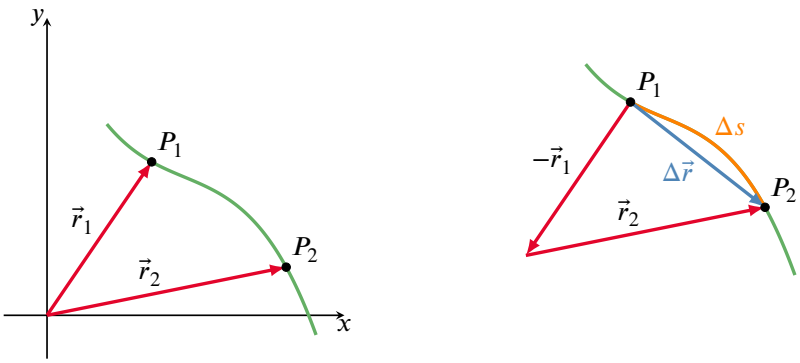
Definitie 3.2.1. De positie van het systeem op een tijdstip t ten opzichte van een gekozen oorsprong O, geven we weer met de positievector (of plaatsvector) $\vec{r}$.



Figuur 12 – Positievector.

De vector $\vec{r}$ heeft componenten r_x en r_y. De componenten r_x en r_y op een ogenblik t zijn gelijk aan de coördinaten x en y van het punt A waar het systeem zich op dat tijdstip bevindt en kunnen dus eventueel ook daarmee genoteerd worden. In het voorbeeld heeft B als coördinaten $x = 3$ en $y = 4$. Bijgevolg heeft de bijhorende plaatsvector $\vec{r}$ als componenten $r_x = +3$ en $r_y = +4$.

Als het systeem een baan beschrijft in het (x, y)-vlak, verandert de richting en/of de grootte van de vector $\vec{r}$. We bekijken de beweging van het systeem van het tijdstip t_1 tot t_2. Op het tijdstip t_1 is de positievector $\vec{r}_1$, op tijdstip t_2 is die vector $\vec{r}_2$.



Figuur 13 – Verplaatsingsvector.

Definitie 3.2.2. De afgelegde weg Δs is de afstand die het systeem in die tijd langs de baan aflegt. Δs is een getal en is altijd positief.

De verplaatsing $\Delta\vec{r}$ is $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Dat is een vector die wijst van punt 1 naar punt 2.

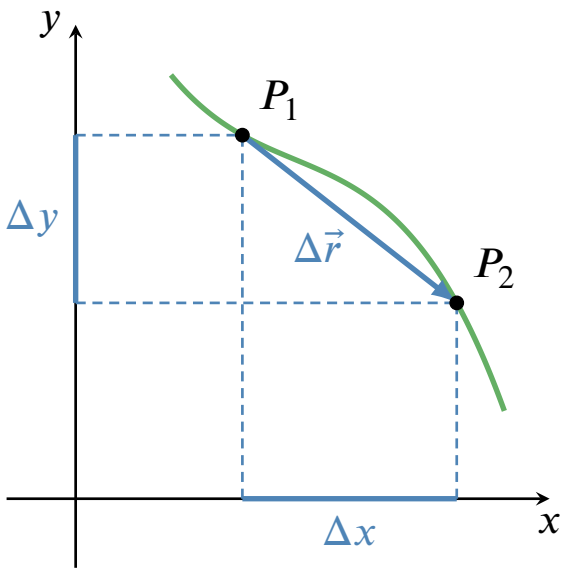
CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica

Voor de componenten van de vector $\Delta\vec{r}$ geldt

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(r_{2x} - r_{1x}, r_{2y} - r_{1y}\right)\\ &= \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1\right)\\ &= (\Delta x, \Delta y).\end{aligned}$$

De componenten van $\Delta\vec{r}$ komen dus overeen met de verplaatsing Δx en Δy t.o.v. respectievelijk de x-en de y-as. In onderstaande figuur is Δx positief en Δy negatief.



Figuur 14 – Componenten van de verplaatsingsvector.

3.2.2 De snelheidsvector

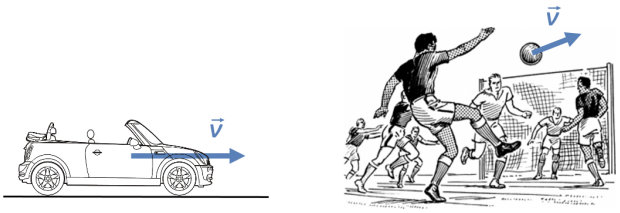
Wanneer een voorwerp in beweging is, kan je met de snelheidsvector aangeven hoe de beweging verloopt:

(a) Welke richting gaat de beweging uit (horizontaal, schuin, verticaal, ...)?

(b) In deze richting, naar welke kant (zin) beweegt het voorwerp (omhoog, omlaag, links, rechts, ...)?

(c) Hoeveel meter legt het voorwerp per seconde af (als het zijn snelheid zou aanhouden)?

Op een figuur geven we dit weer met een vector (pijl) : $\vec{v}$.



Figuur 15 – De snelheidsvector.

De grootte van de snelheid noteren we met de letter v. De eenheid is m/s. De snelheidsvector raakt altijd aan de baan van het voorwerp.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica

3.2.3 De versnellingsvector

Wanneer de snelheidsvector van een voorwerp verandert, zeggen we dat het voorwerp "versnelt". Dit woord kan soms wat verwarrend zijn omdat een snelheidsverandering ook een vertraging en/of (in twee dimensies) ook een afbuiging kan zijn. Toch spreken we steeds van een versnelling. We gaan nu verder in één dimensie (of dus zonder afbuiging, met andere woorden op een rechte baan).

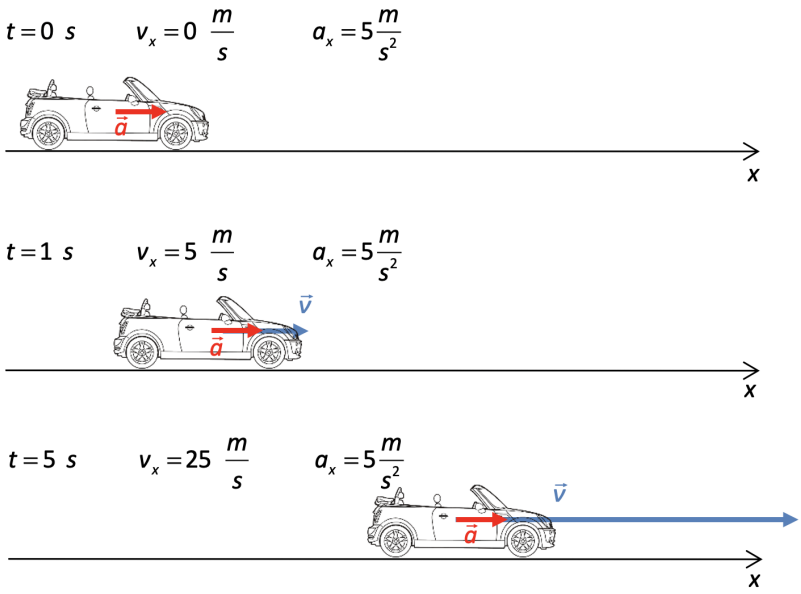
We duiden de versnelling aan met een vector $\vec{a}$.

De grootte van de versnelling duiden we aan met de letter a. De eenheid is $\mathrm{m/s^2}$.

Eigenschap 3.2.1. Wanneer de versnellingsvector dezelfde zin heeft als de snelheidsvector, dan neemt de snelheid in grootte toe (versnelling).

Wanneer de versnellingsvector een tegengestelde zin heeft t.o.v. de snelheidsvector, dan neemt de snelheid in grootte af (vertraging).

In het eerste voorbeeld zien we dat de wagen versnelt (zie onderstaande figuur): de snelheidsvector en de versnellingsvector wijzen dezelfde kant op.

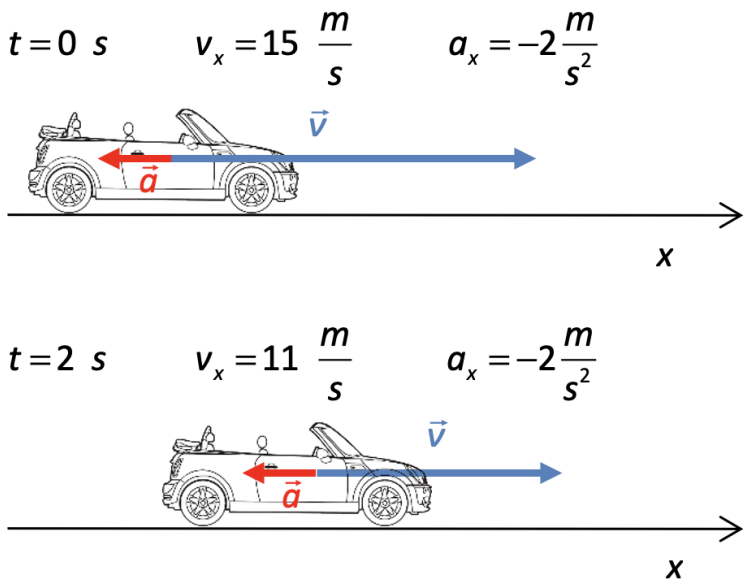


Figuur 16 – De versnellingsvector heeft dezelfde zin als de snelheidsvector : de grootte van de voorwaartse snelheid neemt toe.

In het tweede voorbeeld zien we dat de wagen vertraagt (zie onderstaande figuur). De snelheidsvector wijst tegengesteld aan de versnellingsvector.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica



Figuur 17 – De zin van de versnellingsvector is tegengesteld aan de zin van de snelheidsvector : de grootte van de voorwaartse snelheidsvector neemt af.

Verdere mogelijkheden zouden zijn : 1) snelheids- en versnellingsvector achteruit : de grootte van de achterwaartse snelheid neemt toe ; en 2) snelheidsvector achteruit en versnellingsvector vooruit : de grootte van de achterwaartse snelheid neemt af.

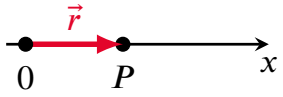
CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica

3.3.1 Positie

In een eerste stap beschrijven we de positie van een massapunt dat 1D beweegt, dus langs een rechte. Hiertoe kiezen we een x-as volgens deze rechte. De pijl op de x-as geeft aan in welke zin de x-waarde toeneemt. Als ook een oorsprong ($x = 0$) op deze rechte wordt vastgelegd, dan is de **positie** van het punt éénduidig bepaald door zijn x-coördinaat.

De positievector ligt op de x-as. De x-component van de positievector is gelijk aan de x-coördinaat van de positie: $r_x = x$



Figuur 18 – De positievector bij een beweging langs een x-as.

Wanneer het massapunt verandert van positie, ondergaat het een **verplaatsing ten opzichte van de x-as**. Als het punt van een beginpositie x_i naar een eindpositie x_f beweegt, dan is de verplaatsing

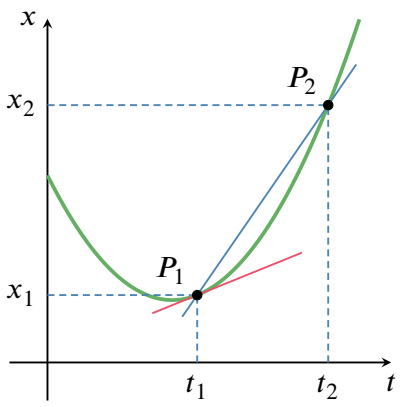
$$\Delta x = x_f - x_i.$$

De SI-eenheid van positie en verplaatsing is meter (m).

> **Opmerking 3.3.1.** De verplaatsing ten opzichte van een gekozen as kan positief, negatief of nul zijn. Er is dus een belangrijk verschil tussen de verplaatsing en de werkelijk afgelegde weg, die steeds positief is. Stel je fietst heen en terug van je huis naar de supermarkt, 2 km verderop. De totaal afgelegde weg is 4 km terwijl de verplaatsing nul is omdat het begin- en eindpunt samenvallen.

3.3.2 Snelheid

In een volgende stap bekijken we hoeveel tijd er verloopt tijdens een verplaatsing van een object. Of anders, hoe snel kan dat object bewegen? Bijvoorbeeld, hoeveel seconden heeft een sprinter nodig om de 100 m sprint af te leggen op een atletiekpiste?
Zo komen we tot het begrip snelheid. De snelheid kan dus bepaald worden als we informatie hebben over de positie x als functie van de tijd t. Deze informatie kan grafisch weergegeven worden in een $x(t)$-grafiek (zie onderstaande figuur) of in een algebraïsche uitdrukking. Deze geven voor elk tijdstip t de positie x van het object weer.



Figuur 19 – De grafiek van x als functie van t geeft ons de nodige informatie om gemiddelde of ogenblikkelijke snelheden te bepalen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica

Definitie 3.3.1. De gemiddelde snelheid $v_{x,g}$ t.o.v. de x-as in het interval Δt is

$$v_{x,g} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Hierin wordt x uitgedrukt in meter en t in seconden. Snelheid wordt uitgedrukt in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

In de definitie wordt niet de afgelegde weg Δs, maar de verplaatsing Δx gebruikt! Hieruit volgt dat de gemiddelde snelheid t.o.v. de x-as zoals gedefinieerd in de fysica ook negatief kan zijn.
De helling van de verbindingslijn (dit is de blauwe lijn) tussen de twee punten P_1 en P_2 op de $x(t)$-grafiek (in figuur 19) is gelijk aan de gemiddelde snelheid ten opzichte van de x-as gedurende dat tijdsinterval. Deze kan positief, negatief of nul zijn.

Eigenschap 3.3.1. De gemiddelde snelheid $v_{x,g}$ is

(a) positief als het systeem beweegt in de positieve zin van de x-as;

(b) negatief als het systeem beweegt in de negatieve zin van de x-as.

Dit geeft ons slechts een globaal beeld van de snelheid. Als we een meer nauwkeurige beschrijving van de beweging willen kennen, moeten we de gemiddelde snelheid berekenen over kortere tijdsperiodes. Een nog betere realistische beschrijving kan bekomen worden door de snelheid te kennen op elk ogenblik, de zogenaamde ogenblikkelijke snelheid.

Definitie 3.3.2. De ogenblikkelijke snelheid v_x t.o.v. de x-as op het ogenblik t is:

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Dat is de afgeleide van x naar t

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}.$$

De $v_x(t)$-functie noemen we de snelheidsvergelijking.

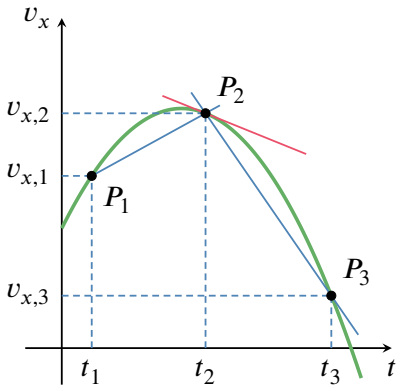
De snelheid op een bepaald tijdstip t_1 is de helling van de raaklijn (dit is de rode lijn) aan de $x(t)$-grafiek in het punt t_1 (zie figuur 19).

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica

3.3.3 Versnelling

Net zoals de snelheid de verandering is van de positie met de tijd, is de versnelling de verandering van de snelheid met de tijd. Met andere woorden, een voorwerp versnelt als zijn snelheid verandert. Een auto die aan een rood licht stilstond en plots vertrekt als het licht op groen springt, voert een versnelde beweging uit (hij trekt bijvoorbeeld op van 0 naar 50 km/u). De gemiddelde versnelling is de verhouding van de snelheidsverandering tot de tijdsduur waarover deze verandering plaatsvindt. In onderstaande figuur is de helling van de verbindingslijn tussen P_1 en P_2 de gemiddelde (positieve) versnelling in het tijdsinterval $t_2 - t_1$. Analoog is de helling van de verbindingslijn tussen P_2 en P_3 de (negatieve) versnelling over het tijdsinterval $t_3 - t_2$. De helling van de rode raaklijn aan de $v(t)$-grafiek in P_2 geeft de ogenblikkelijke versnelling op tijdstip t_2.



Figuur 20 – De hellingen van de verbindingslijnen tussen de aangeduide punten geeft de gemiddelde versnellingen op de respectievelijke tijdsintervallen. De helling van de rode raaklijn geeft de ogenblikkelijke versnelling op tijdstip t_2.

Definitie 3.3.3. De gemiddelde versnelling $a_{x,g}$ t.o.v. de x-as in het interval Δt is

$$a_{x,g} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x,2} - v_{x,1}}{t_2 - t_1}.$$

Versnelling wordt uitgedrukt in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

De gemiddelde versnelling kan positief, negatief of nul zijn. Zie figuur **??**.

Eigenschap 3.3.2. De gemiddelde versnelling $a_{x,g}$ is

(a) positief als het systeem versnelt in positieve zin van de x-as of vertraagt in negatieve zin;

(b) negatief als het systeem versnelt in negatieve zin van de x-as of vertraagt in positieve zin.

Analoog als hierboven voor de snelheid, wordt in de limiet voor steeds kleinere tijdsintervallen deze gemiddelde versnelling een ogenblikkelijke versnelling.

Definitie 3.3.4. De ogenblikkelijke versnelling a_x t.o.v. de x-as op het ogenblik t is:

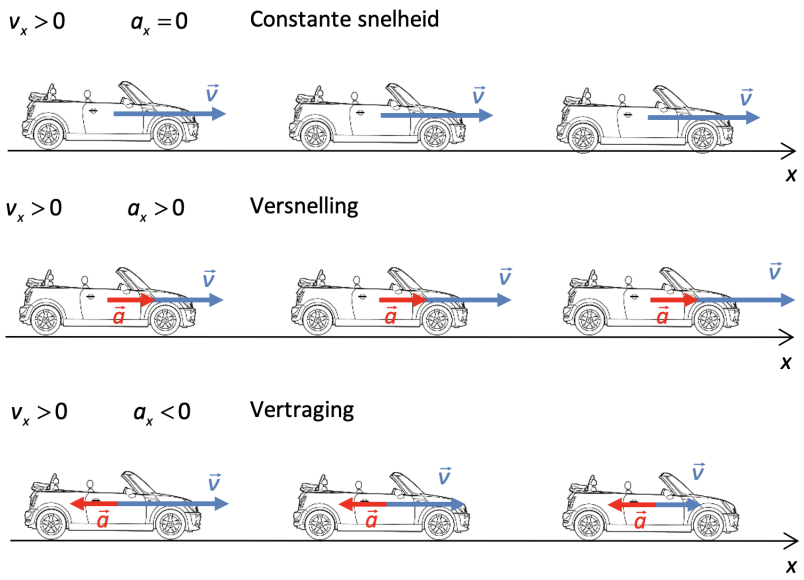
$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

Dat is de afgeleide van v_x naar t:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica



Figuur 21 – Versnelling en vertraging.

De $a_x(t)$-functie is de versnellingsvergelijking.

Een goed gekende versnelling is de valversnelling op aarde, deze is bij benadering $9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Dit betekent dat de snelheid van vallende objecten elke seconde verandert met $9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Opmerking 3.3.2. Om een voorwerp te doen versnellen moet op dat voorwerp een resulterende kracht werken. Later zullen we zien dat er een vast verband bestaat tussen deze resulterende kracht en de versnelling: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Omdat dit een vectorieel verband is, betekent dit dat de resulterende kracht en de versnelling dezelfde richting en zin hebben (immers, $m > 0$).

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Rechtlijnige bewegingen

3.4.1 De eenparige rechtlijnige beweging

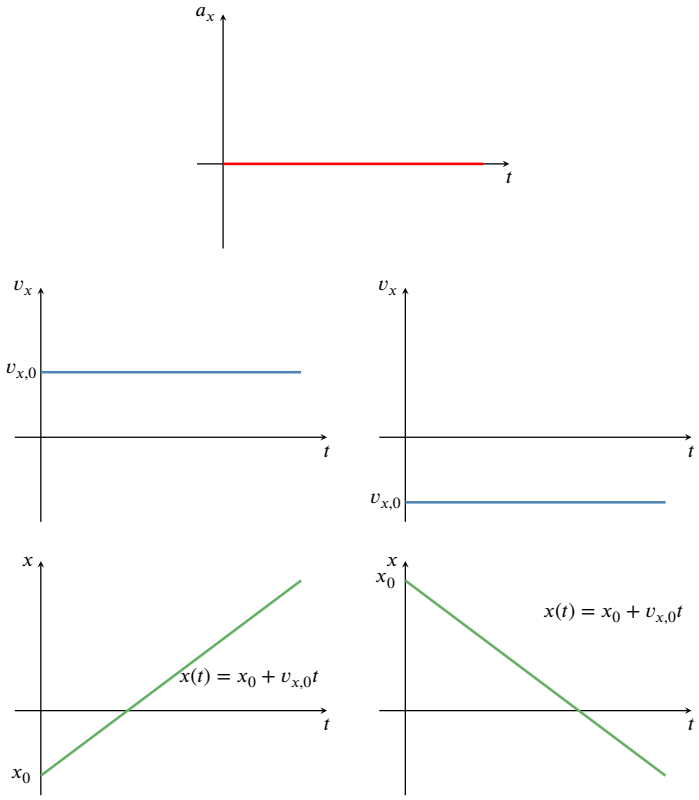
Een eenparige rechtlijnige beweging (ERB) is een beweging die verloopt met een constante snelheid langsheen een rechte. De versnelling is bijgevolg 0.

$$a_x(t) = 0$$
$$v_x(t) = v_{x,0}.$$

De constante snelheid kan positief of negatief zijn ten opzichte van een gekozen x-as. De positie x neemt dan lineair toe (of af) in de tijd. De positie als functie van de tijd voor dit soort beweging wordt gegeven door :

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t,$$

Hierbij is x_0 de beginpositie ten opzichte van de x-as en $v_{x,0}$ de constante snelheid langsheen de rechte. Deze bewegingsvergelijking beschrijft in de $x(t)$-grafiek een rechte met een positieve of negatieve helling, zoals weergegeven in volgende figuur.



Figuur 22 – Positie, snelheid en versnelling als functie van de tijd voor een eenparige rechtlijnige beweging met een positieve en negatieve snelheid v_0.

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Rechtlijnige bewegingen

3.4.2 De eenparig versnelde rechtlijnige beweging

Ten slotte bekijken we de eenparig versnelde rechtlijnige beweging (EVRB). Dit is een beweging die verloopt met een constante versnelling langsheen een rechte. De versnelling a_x kan positief of negatief zijn ten opzichte van een gekozen x-as langs de rechte. De snelheid v_x neemt dan lineair toe (of af) in de tijd. Dit betekent dat

$$v_x(t) = v_{x,0} + a_x \cdot t$$

met $v_{x,0}$ de beginsnelheid ten opzichte van de x-as.

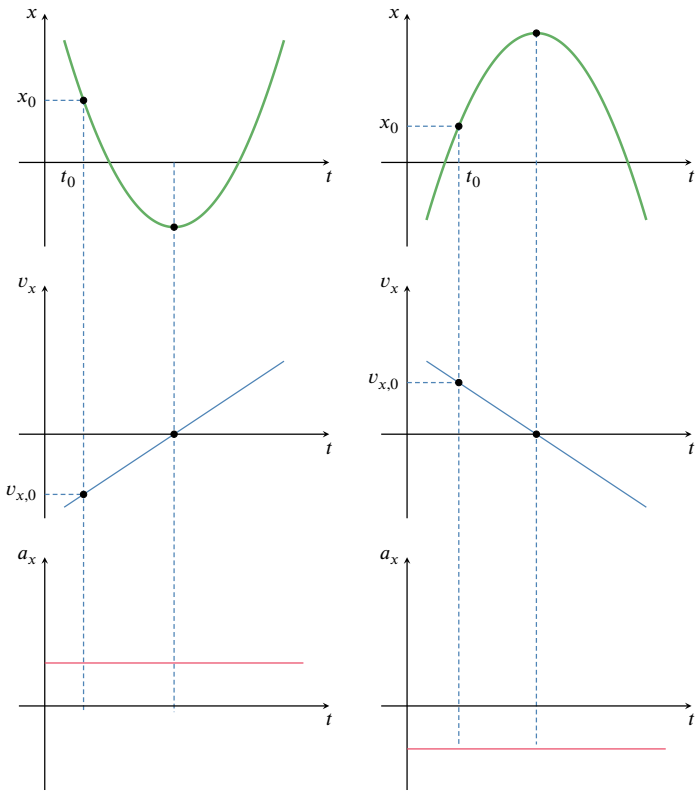
Deze snelheidsvergelijking beschrijft een rechte op een $v_x(t)$-grafiek.

De positie als functie van de tijd voor dit soort bewegingen wordt gegeven door:

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t + a_x \cdot \frac{t^2}{2}$$

met x_0 de beginpositie ten opzichte van de x-as.

Deze bewegingsvergelijking beschrijft een parabool op een $x(t)$-grafiek (zie figuur 23). Merk op dat de afgeleide van de bewegingsvergelijking gelijk is aan de snelheidsvergelijking.



Figuur 23 – Positie, snelheid en versnelling als functie van de tijd voor een eenparig versnelde rechtlijnige beweging met een positieve en negatieve versnelling a_x.

Wanneer de versnelling nul is tijdens een ééndimensionale beweging, dan noemt men de beweging een eenparige rechtlijnige beweging (ERB). De bewegingsvergelijking en de snelheidsvergelijking zijn dan

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t,$$

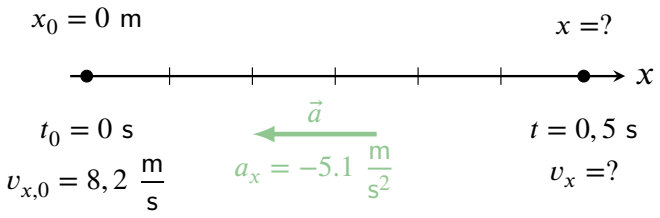
$$v_x(t) = v_{x,0}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Voorbeeldoefening

1. Een wagen komt aangereden aan een snelheid van $8,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ en moet plots remmen. De vertraging bedraagt $5,1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wat is de positie en de snelheid van de wagen na $0,5$ s ?

Uitwerking: We maken een grafische voorstelling van de opgave.



We veronderstellen dat de versnelling van de wagen constant is: we kunnen bijgevolg de formules voor de positie en de snelheid van de eenparig veranderlijke beweging gebruiken.

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t + a_x \cdot \frac{t^2}{2} \qquad \text{en} \qquad v_x(t) = v_{x,0} + a_x \cdot t.$$

We vullen de gegevens uit het schema in in de vergelijkingen en bekomen de positie en de snelheid van de wagen na $0,5$ s:

$$\begin{aligned} x(0,5\text{ s}) &= 0 + 8,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,5\text{ s} - 5,1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{0,5^2\ \text{s}^2}{2} &&= 3,5\text{ m} \\ v_x(0,5\text{ s}) &= 8,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5,1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5\text{ s} &&= 5,7\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

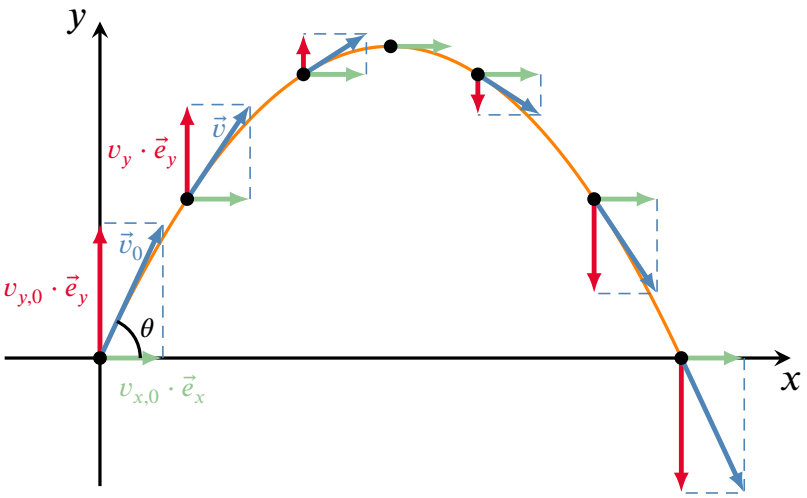
CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Twee-dimensionale kinematica

In tegenstelling tot de vorige paragraaf waar enkel rechtlijnige bewegingen (1 dimensie) werden beschouwd, bekijken we nu bewegingen in een vlak (2-dimensionaal). Daartoe splitsen we de beschrijving van de beweging op in twee 1-dimensionale bewegingen, nl. in de x- en de y-richting.

3.6.1 Projectielbeweging - Schuine worp

Een voorbeeld van een 2-dimensionale beweging is de **projectielbeweging**. Dit is de beweging van een projectiel (kogel, bal, ...) nadat dit werd weggeschoten of weggegooid onder een bepaalde hoek θ met de horizontale richting. Luchtwrijving wordt verwaarloosd. Men spreekt ook van **schuine worp**. Het projectiel beschrijft een parabolische baan en landt na een bepaalde tijd t terug op de grond.



Figuur 24 – De verticale component van de snelheid verandert van grootte en zin terwijl de horizontale component steeds hetzelfde blijft.

Eigenschap 3.6.1. Indien enkel de zwaartekracht op het voorwerp inwerkt, en de worp vanuit de oorsprong (0,0) vertrekt, bekom je voor de bewegingsvergelijking en de snelheidsvergelijking van de schuine worp ten opzichte van gekozen x- en y-as:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t \qquad \text{en} \qquad y(t) = v_0 \cdot \sin\theta \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}$$
$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \qquad v_y(t) = v_0 \cdot \sin\theta - g \cdot t$$

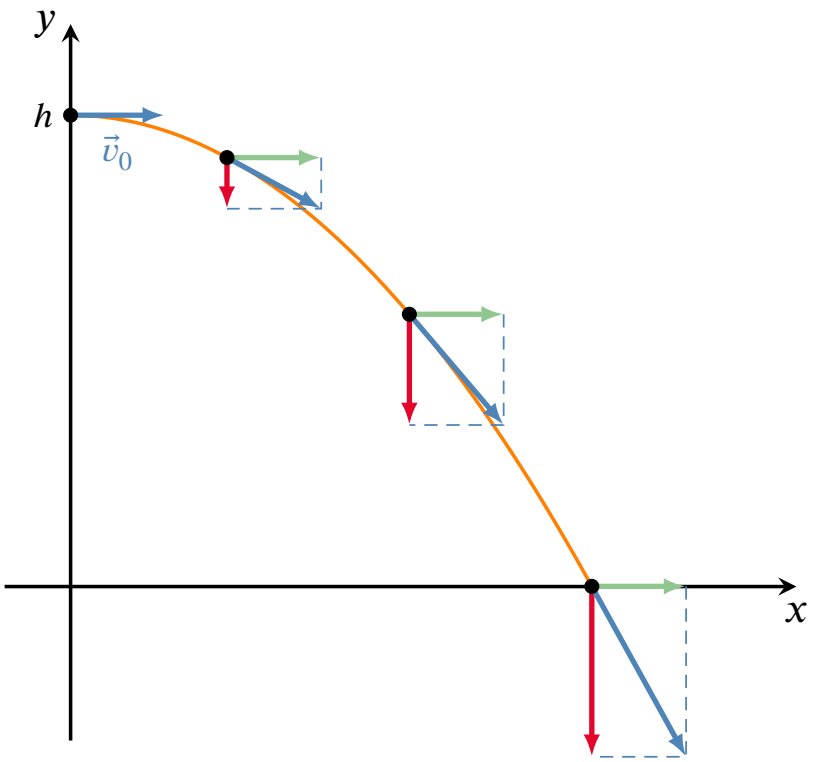
Er is enkel sprake van een versnelling in de y-richting. Deze versnelling is gelijk aan $a_y = -g$ omdat de zwaartekracht met grootte $F_z = m \cdot g$ tegen de gekozen opwaartse y-as in wijst.

3.6.2 Horizontale worp

Een speciaal geval van een schuine worp is een projectiel dat horizontaal wordt gelanceerd. Zo is de hoek tussen de beginsnelheid en de horizontale richting gelijk aan $\theta = 0°$. We kiezen hier het vertrek van de worp in het punt (0,h).

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Twee-dimensionale kinematica



Figuur 25 – Horizontale worp.

Eigenschap 3.6.2. Voor de horizontale worp vinden we de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cdot t \\ v_x(t) &= v_0 \end{aligned} \qquad \text{en} \qquad \begin{aligned} y(t) &= h - g \cdot \frac{t^2}{2} \\ v_y(t) &= -g \cdot t \end{aligned}$$

1. Een kogel wordt horizontaal weggeschoten vanop een muur met hoogte $h = 50$ m. De kogel treft de grond (en het doelwit) op 400 m afstand van de muur. Hoe groot was de (horizontale) beginsnelheid van de kogel? Verwaarloos de luchtweerstand.

Uitwerking: Stel dat de kogel op de grond valt op het tijdstip t, dan is de x-positie van de kogel 400 m en de y-positie 0 m. Er geldt dus dat $400\ \text{m} = 0\ \text{m} + \text{v}_0 \cdot \text{t}$.

En dus is

$$t = \frac{400\ \text{m}}{v_0}.$$

Voor de y-richting kunnen we dan schrijven dat:

$$\begin{aligned} 0 &= 50\ \text{m} - \text{g} \cdot \frac{\text{t}^2}{2} \\ 0 &= 50\ \text{m} - \text{g} \cdot \frac{\left(\frac{400\ \text{m}}{\text{v}_0}\right)^2}{2} \\ v_0 &= 125\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

BESLUIT: De horizontale beginsnelheid is dus $125\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Twee-dimensionale kinematica

3.6.3 Verticale worp

Een projectiel dat verticaal omhoog gelanceerd wordt (projectielbeweging met $\theta = 90°$) heeft een beginsnelheid die verticaal naar boven is gericht. Door de neerwaartsgerichte valversnelling $g = 9,81$ m/s^2 zal de snelheid afnemen met toenemende hoogte en nul worden in het hoogste punt. De beweging vertraagt omdat snelheid en valversnelling tegengesteld gericht zijn. Na het hoogste punt zal de snelheid opnieuw vergroten en zal het projectiel naar beneden vallen (snelheid en valversnelling hebben dan dezelfde zin).

Omdat de beginsnelheid een x-component gelijk aan nul heeft, zal deze nul blijven gedurende gans de beweging (eenparige rechtlijnige beweging), bijgevolg voert het projectiel een ééndimensionale, versnelde rechtlijnige beweging uit volgens de y-as.

Eigenschap 3.6.3. Indien je de y-as verticaal omhoog kiest, bekom je voor de bewegingsvergelijking en snelheidsvergelijking van een verticale worp:

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \qquad \text{en} \qquad v_y(t) = v_{y,0} - g \cdot t$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 De cirkelvormige beweging

3.7.1 Positie en hoeksnelheid

Bij het begin van dit hoofdstuk hebben we de rechtlijnige beweging besproken. De verplaatsing gebeurt dan volgens een rechte. De positie op deze rechte wordt vastgelegd met behulp van de positie x als functie van de tijd. Bij een cirkelvormige beweging is het handig om de positie aan te duiden met behulp van de hoek θ die varieert in de tijd (zie figuur 26). De afgelegde of doorlopen hoek in het tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$ is dan $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

De gemiddelde hoeksnelheid is bijgevolg

$$\omega_g = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Deze wordt uitgedrukt in rad/s.

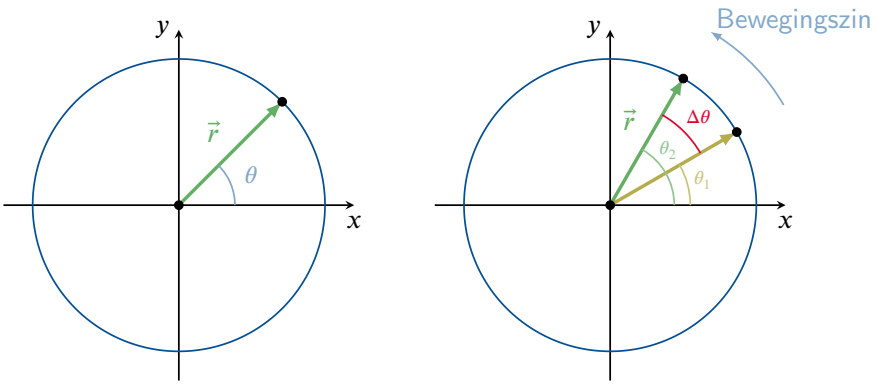
Omdat met een volledige omwenteling een hoek van 2π overeenkomt, kan je ook schrijven dat

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T}$$

met T de **periode**, dit is de tijd die nodig is voor een volledige omwenteling.

De ogenblikkelijke hoeksnelheid is

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$



Figuur 26 – Beschrijving cirkelbeweging.

De **frequentie** f is het aantal omwentelingen per seconde. Deze wordt uitgedrukt in hertz (Hz):

$$1\,\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}.$$

Duurt een volledige omwenteling bijvoorbeeld een halve seconde, dan zijn er per seconde twee volledige omwentelingen: de frequentie is dus het omgekeerde van de periode. Dit is algemeen geldig. Tussen de periode en de frequentie bestaat bijgevolg het volgende verband:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Wanneer de cirkelbeweging aan een constante hoeksnelheid verloopt, noemen we deze beweging een **eenparige cirkelvormige beweging (ECB)**. Er geldt dan dat $\omega = \omega_g$ en dus $\omega = 2\pi \cdot f$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 De cirkelvormige beweging

Voorbeeld 3.7.1. Een boormachine doet 600 toeren per minuut. Hieruit volgt dat

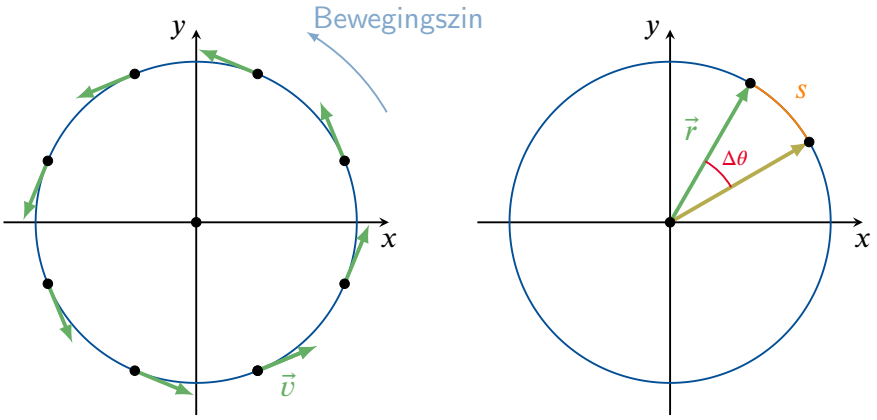
$$f = \frac{600 \text{ toeren}}{60 \text{ s}} = \frac{10 \text{ toeren}}{1 \text{ s}} = 10 \text{ Hz}.$$

De periode bedraagt

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10 \text{ Hz}} = 0,10 \text{ s}.$$

3.7.2 Omtreksnelheid of baansnelheid

De snelheidsvector $\vec{v}$ (baansnelheid) raakt op elk tijdstip aan de cirkelbaan.



Figuur 27 – *(a)* De snelheidsvector raakt op elk ogenblik aan de cirkel. *(b)* Verband tussen de booglengte en de doorlopen hoek.

Als je de hoeken uitdrukt in radialen, geldt dat de booglengte s gelijk is aan de doorlopen hoek maal de straal ($s = r \cdot \Delta\theta$). Bijgevolg kunnen we het verband afleiden tussen de grootte van de baansnelheid v, en de hoeksnelheid ω:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{r \cdot d\theta}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r \cdot \omega.$$

De grootte van deze omtreksnelheid of baansnelheid wordt uitgedrukt in m/s. Bij zekere hoeksnelheid ω geldt: hoe groter de straal van de cirkel, hoe groter de omtreksnelheid wordt.

Bij eenparige cirkelvormige bewegingen is de grootte van omtreksnelheid constant.

3.7.3 Versnelling

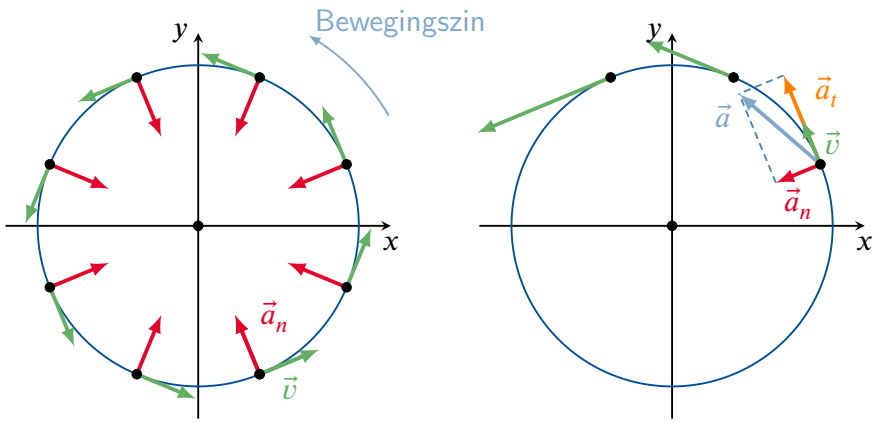
Bij een cirkelbeweging verandert de baansnelheid $\vec{v}$ voortdurend van richting (snelheidsverandering = versnelling). De versnelling die deze richtingsverandering beschrijft, is de normale of centripetale versnelling

$$a_n = a_{cp} = \frac{v^2}{r}.$$

Deze wijst naar het centrum van de cirkel.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 De cirkelvormige beweging



Figuur 28 – *(a)* Eenparige cirkelvormige beweging. *(b)* Niet-eenparige cirkelvormige beweging.

Als de grootte van de snelheidsvector $\vec{v}$ constant blijft, spreken we over een eenparige cirkelvormige beweging, deze wordt getoond in figuur 28(a). Wanneer echter de grootte van de baansnelheid $\vec{v}$ toeneemt of afneemt, spreken we over een niet-eenparige cirkelvormige beweging (figuur 28b)). In dit laatste geval kan de versnelling ontbonden worden in twee componenten. Enerzijds de normale versnelling $\vec{a}_n$ die de verandering van de richting van de snelheid beschrijft en anderzijds de tangentiële versnelling $\vec{a}_t$ die verandering van de grootte van de snelheid beschrijft. De totale versnelling is dan de vectorsom

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.8 Oefeningen Kinematica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

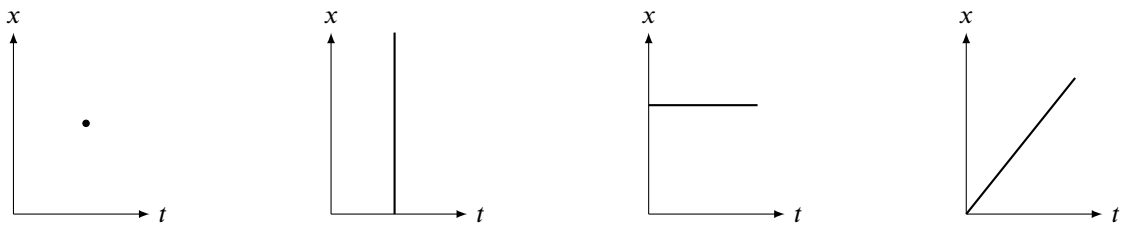
2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.1 Instapoefeningen

1. Welke grafiek in de figuur stelt een voorwerp in rust voor? | A | B | C | D |
Neem aan dat dit voorwerp enkel volgens een rechte baan beweegt (de x-as).



(A) (B) (C) (D)

2.

1. Joseph DeLoach uit de Verenigde Staten behaalde in 1988 met een tijd van 19,75 seconden op de 200m sprint een Olympisch record. Wat was zijn gemiddelde snelheid? Geef je antwoord in m/s en km/h.

$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s } = \ldots\ldots \text{ km/h.}$$

2. In 1992 behaalde Zhuang Yong uit China een Olympisch record op de 100m vrije slag zwemmen voor vrouwen met een tijd van 54,64 seconden. Wat was haar gemiddelde snelheid in m/s en in km/h?

$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s } = \ldots\ldots \text{ km/h}$$

3. Als de snelheid van een object verschillend is van nul, kan zijn versnelling dan nul zijn? Geef een voorbeeld als je antwoord ja is, leg uit waarom als je antwoord nee is.

| Ja | Nee |

4. Als de snelheid van een object nul is op een gegeven tijdstip,

1. kan zijn versnelling dan nul zijn op dat ogenblik? | Ja | Nee | Leg uit.

2. is het mogelijk dat de versnelling van het object op dat tijdstip verschillend is van nul? | Ja | Nee |
Leg uit.

5. Een fietser beweegt volgens een rechte baan en verhoogt haar snelheid gelijkmatig van 5,0 m/s naar 11,0 m/s in 12 seconden. Wat is haar versnelling, en welke afstand legt ze af in deze tijd?

$$a = \ldots\ldots \text{ m/s}^2, \qquad d = \ldots\ldots \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.1 Instapoefeningen

6. Wanneer je niest versnelt de lucht vanuit rust tot ongeveer 175 km/h in $0,60$ s. Hoe groot is de versnelling van de lucht?

$$\ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

7. Hoeveel (grootte en richting) bedraagt de versnelling van een projectiel op het hoogste punt van de baan? Ken je ook de versnelling net voor en net na het bereiken van dit punt?

8. Een bal wordt verticaal naar omhoog gegooid. Welke van bijgevoegde beweringen is correct in het hoogste punt van de baan?

$v = 0, a = 0$	$v \neq 0, a = 0$	$v = 0, a \neq 0$	$v \neq 0, a \neq 0$

9. An en Jan staan op de top van een gebouw. An gooit een bal vertikaal naar beneden, Jan laat een bal eenvoudigweg vallen. Welke bal heeft de grootste versnelling, juist na het loslaten? Veronderstel geen wrijving.

De bal van An	De bal van Jan	Beide ballen hebben dezelfde versnelling

10. Twee kinderen zitten op een paardenmolen. Kind 1 zit op $2,0$ m van de rotatie-as verwijderd en kind 2 zit op $1,5$ m van de as verwijderd. De paardenmolen maakt één draaibeweging in $4,5$ s.

1. Vind de hoeksnelheid ω.

$$\omega_1 = \ldots\ldots \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = \ldots\ldots \text{ rad/s}$$

2. Vind de omtreksnelheid v van elk kind.

$$v_1 = \ldots\ldots \ m/s, \qquad v_2 = \ldots\ldots \ m/s$$

11. Een wagen rijdt aan een constante baansnelheid op een cirkelvormige baan. Beantwoord elk van de volgende vragen met "JA" of "NEE".

1. Is de snelheid van de wagen constant?

Ja	Nee

2. Is de grootte van de snelheid constant?

Ja	Nee

3. Is de grootte van de versnelling constant?

Ja	Nee

4. Is de richting van de versnelling constant?

Ja	Nee

12.

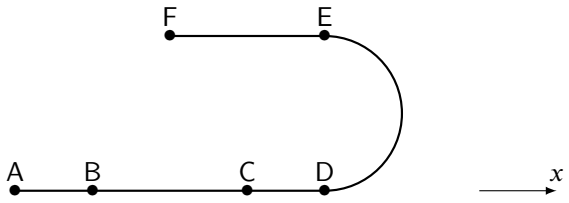
1. Een auto rijdt door een bocht met een constante snelheid van 50 km/u. Wanneer de auto diezelfde bocht neemt met een constante snelheid van 70 km/u, is zijn versnelling dan anders in het eerste geval? Licht uw antwoord toe.

2. Als een auto met 60 km/u een scherpe bocht neemt, en daarna met dezelfde snelheid een flauwe bocht neemt, is de versnelling dan in beide gevallen gelijk of niet? Leg uw antwoord uit.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.1 Instapoefeningen

13. Hieronder staat een bovenaanzicht van de beweging van een auto van A naar F. Tussen A en B versnelt de auto. Tussen B en C rijdt de auto aan 70 km/u. Van C naar D drukt de bestuurder op de rem. De auto neemt de bocht vervolgens aan 50 km/u. Tussen E en F drukt de bestuurder het gaspedaal in en rijdt de auto steeds sneller. Bepaal de richting en zin van de versnellingsvector voor elk stuk van de baan.



14. Een jongen gooit een bal horizontaal weg met een snelheid $v_0 = 1,3$ m/s, vanaf een hoogte van $1,25$ m boven de grond.

1. Bepaal de x- en y-positie op de tijdstippen $t = 0,25$ s en $t = 0,5$ s.

2. Hoe lang duurt het voor de bal landt? $t^* = \ldots\ldots$ s

3. Waar landt de bal? $x^* = \ldots\ldots$ m

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.2 Standaardoefeningen

1. Wat zijn de grootte en richting van de totale verplaatsing die je maakt als je eerst naar het westen reist met een snelheid van 27 m/s gedurende 125 s, en dan naar het zuiden met een snelheid van 14 m/s gedurende 66 s?

2. Een bal wordt vanuit rust losgelaten vanaf een hoogte van 20 meter.

1. Hoe lang duurt het vooraleer de bal de grond raakt? $t = \ldots\ldots$ s

2. Wat is de snelheid van de bal net voordat hij de grond raakt? $v = \ldots\ldots$ m/s

3. Een hond rent vooruit en achteruit tussen zijn twee baasjes die naar elkaar toe wandelen met elk een snelheid van 1,3 m/s. De hond start met lopen als ze 10 m van elkaar verwijderd zijn en heeft een snelheid van 3,0 m/s. Welke afstand heeft de hond afgelegd als de baasjes bij elkaar komen?

$$d = \ldots\ldots \text{ m}$$

4. Een auto die volgens een rechte baan met een snelheid van 20 m/s rijdt, begint te remmen met een constante versnelling met grootte 4,0 m/s^2.

1. Hoe lang duurt het vooraleer de auto tot stilstand komt? $t = \ldots\ldots$ s

2. Hoe ver rijdt de auto voordat hij volledig stilstaat? $d = \ldots\ldots$ m

5. Een auto rijdt met een constante snelheid van 135 km/u over een autosnelweg. Een politiewagen registreert deze snelheid als de wagen 100 m voorbij de politiewagen is en zet onmiddellijk de achtervolging in. De politiewagen houdt hiervoor een constante versnelling van 2.5 m/s^2 aan. Hoe lang duurt het eer de politiewagen de auto ingehaald heeft? Welke afstand heeft de politiewagen dan afgelegd?

6. Een projectiel wordt gelanceerd onder een hoek $\theta = 37°$ met een beginsnelheid $v_0 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Geef de grootte van de snelheid van het projectiel in het hoogste punt van zijn baan. Verklaar je antwoord.

7. Een Porsche daagt een Volkswagen uit voor een race van 400 m. Omdat de versnelling van $3,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ van de Porsche groter is dan de versnelling van $3,0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, mag de Volkswagen $1,0$ s vroeger vertrekken. Wie wint deze race?

Meerkeuze:

(a) Porche (b) Volkswagen

8. Een bevoorradingsvliegtuig moet een wetenschappelijke expeditie op de Noordpool voorzien van een voedselpakket. Het vliegtuig vliegt 80 m boven de grond aan een snelheid van 100 m/s. Op hoeveel afstand van de landingsplaats moet het pakket uit het vliegtuig geduwd worden?

$$\ldots\ldots\ m$$

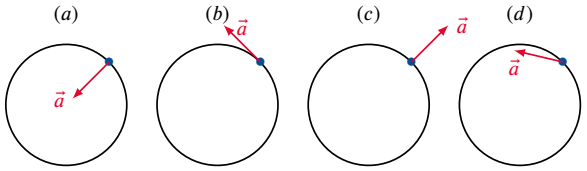
CC BY-NC-SA 4.0

3.8.2 Standaardoefeningen

9. Een wagentje op afstandsbediening rijdt een parcours dat beschreven wordt door $x = \frac{1}{2} \cdot t^3 - 2 \cdot t^2$ en $y = \frac{1}{2} \cdot t^2 - 2t$ waarbij x en y uitgedrukt worden in m en t in s. Wat is de richting van de beweging na 4 s? Geef de richting aan met behulp van een hoek met de positieve x-as.

..... °

10. Schumacher neemt met zijn Formule 1-wagen een cirkelvormige bocht, en remt een beetje tijdens het draaien. In welke figuur wordt de richting van de versnelling correct voorgesteld? In deze figuur beweegt hij in wijzerzin.



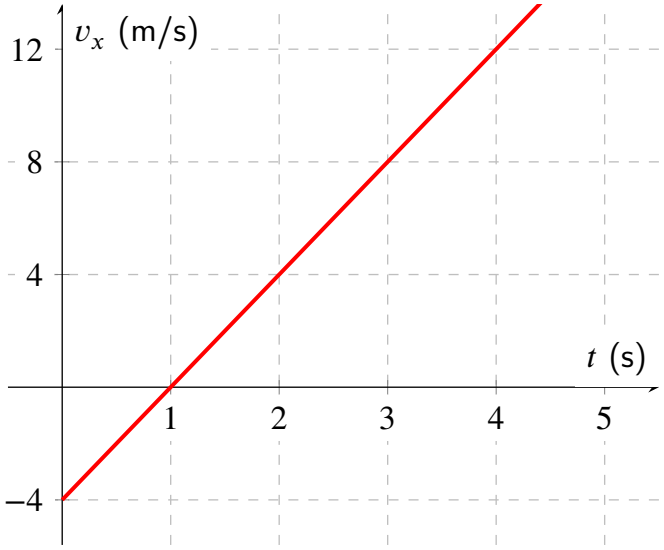
De juiste figuur is | (a) | (b) | (c) | (d) |.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.3 Gevorderde oefeningen

1. Een kanonskogel wordt onder een hoek van 40° afgeschoten. Als de kogel een doel moet treffen gelegen op 1500 m afstand, in een 100 m lager gelegen vallei, hoe groot moet dan de beginsnelheid van de kogel zijn? Verwaarloos de luchtweerstand.

2. Een deeltje start een ééndimensionale beweging vanop positie $x_0 = 10$ m op tijdstip $t_0 = 0$ s en beweegt met een snelheid die weergegeven is op de figuur.



1. Teken een mogelijke $x(t)$-grafiek voor dit deeltje.

2. Heeft dit deeltje een keerpunt in z'n beweging? Zo ja, op welk tijdstip? ... ...

3. Wat is de positie van het deeltje na 4 s? ... ... m

3. De Aarde voert rond de Zon in werkelijkheid een niet-eenparige beweging uit op een niet-cirkelvormige baan. Bereken de gemiddelde hoeksnelheid van de Aarde in haar werkelijke beweging rond de zon.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.4 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over kinematica via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Intro dynamica

Het vorige hoofdstuk handelde over kinematica waarin de beweging van objecten wiskundig beschreven wordt zonder de oorzaak van de beweging in acht te nemen. Bij de dynamica wordt deze oorzaak wel in de beschrijving opgenomen.

In dit hoofdstuk worden krachten en de gevolgen ervan op de bewegingstoestand bestudeerd. Wat veroorzaakt een beweging of een verandering van beweging? De wetten van Newton zullen een belangrijke rol spelen in het antwoord op deze vraag. We leren krachtendiagramma's opstellen. Tenslotte komt ook de dynamica van de cirkelvormige beweging van een puntmassa aan bod.

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Kracht

Om een doos over een ruwe vloer voort te duwen, moet je een kracht op de doos uitoefenen die de wrijvingskracht met de vloer compenseert. Om een boek in je hand te kunnen houden, moet je een opwaarts gerichte kracht uitoefenen die de neerwaarts gerichte zwaartekracht compenseert.

Definitie 4.2.1. Een kracht is een vectoriële grootheid gekenmerkt door een grootte, richting, zin en aangrijpingspunt. Ze wordt genoteerd door $\vec{F}$.

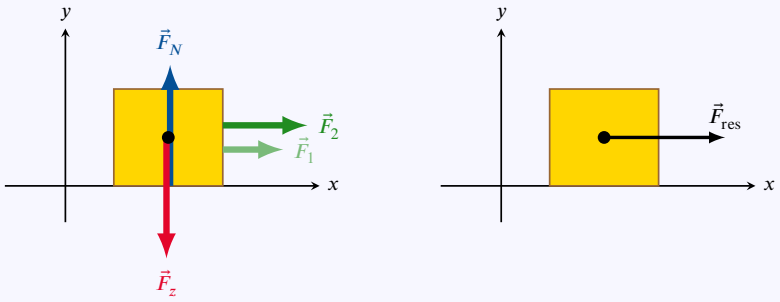
De grootte van de kracht noteren we met F. De eenheid van de grootte van de kracht is newton (N).

Er kunnen meerdere krachten tegelijk inwerken op een voorwerp.

Definitie 4.2.2. De **nettokracht of resulterende kracht** $\vec{F}_{\text{res}}$ definiëren we als de **vectorsom** van alle krachten uitgeoefend op dat voorwerp:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...$$

Voorbeeld 4.2.1. Een vader en zijn zoon duwen samen een doos over de vloer verder. Vader en zoon duwen elk met een horizontale kracht met respectieve groottes $F_1 = 23$ N en $F_2 = 17$ N (zie figuur 29). Bereken de nettokracht op de doos.



Figuur 29 – De resulterende kracht of nettokracht.

Antwoord : De krachten werken allebei op de doos, alsook de zwaartekracht $\vec{F}_z$ en de normaalkracht $\vec{F}_N$ (zie verder bij 4.5 'Soorten krachten'), dus is $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_z + \vec{F}_N$. De zwaartekracht en normaalkracht werken in de y-richting en compenseren elkaar. De krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ werken beide in de x-richting (één-dimensionaal) zodat $F_{1,x} = F_1 = 23\text{N}$ en $F_{2,x} = F_2 = 17$ N. Dus is $F_{res,x} = F_{res} = 40$ N. Ze staat voorwaarts gericht en vergroot daardoor de grootte van de snelheidsvector. In vectoriële notatie wordt dit: $\vec{F}_{res} = 40\ \vec{e}_x$. Hierbij is $\vec{e}_x$ een eenheidsvector in de x-richting.

Voorbeeld 4.2.2. De beweging van de maan rond de aarde kan benaderd worden als een eenparige cirkelbeweging. De enige kracht op de maan is de aantrekkende gravitatiekracht F_{grav} van de aarde. We vinden dus voor de grootte van de resulterende kracht :

$$F_{res} = F_g = G_0 \cdot \frac{m_m \cdot m_a}{d_{am}^2}$$

met m_m en m_a respectievelijk de massa van de maan en de aarde, en d_{am} de afstand aarde-maan.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Soorten krachten

4.3.1 Trek- of duwkracht

De eenvoudigst denkbare kracht is een trek- of duwkracht op een voorwerp. Die kan geleverd worden door een persoon (**spierkracht**) of door een machine (**motorkracht**). Je zou zelfs kunnen stellen dat eigenlijk alle soorten krachten (zie volgende paragrafen) in zekere zin trek- of duwkrachten zijn. Wij zullen in deze cursus echter enkel de letterlijke duw- of trekkrachten met deze naam aanduiden.

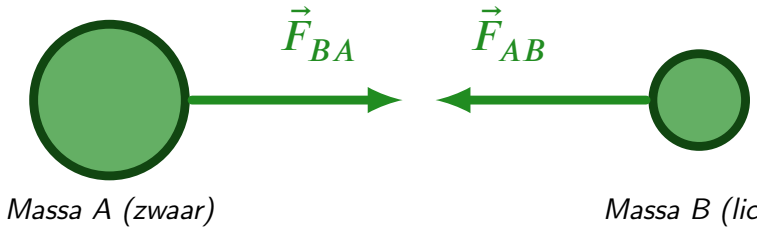
4.3.2 Gravitatiekracht, zwaartekracht

Twee voorwerpen met respectieve massa's m_1 en m_2, op een bepaalde afstand r van elkaar, oefenen op elkaar een **gravitatatiekracht** uit waarvan de grootte evenredig is met elk van de massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tussen deze massa's.

$$F_g = G_0 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

waarin G_0 de universele gravitatieconstante voorstelt en gelijk is aan $6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

De massa's worden hier als puntmassa's verondersteld. Deze krachtwerking is aantrekkend en gericht volgens de verbindingslijn tussen de punten.



Figuur 30 – Gravitatiekracht werkt van een puntmassa A op een naburige puntmassa B, en omgekeerd.

Met de gravitatiekracht kan niet alleen de beweging van de hemellichamen verklaard worden, maar ook van de voorwerpen in de buurt van het oppervlak van een hemellichaam, bijvoorbeeld de Aarde. De **zwaartekracht**, die elk voorwerp in de buurt van het aardoppervlak ervaart, is eigenlijk de gravitatiekracht die de aarde op elk voorwerp uitoefent. De grootte van de zwaartekracht op Aarde op een massa m wordt gegeven door

$$F_z = m \cdot g$$

Hierin is g gelijk aan de zwaarteveldsterkte: $9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$. Lokaal zijn hierop wel afwijkingen mogelijk. Door de zwaartekracht gelijk te stellen aan de gravitatiekracht kan je eenvoudig zien dat

$$g = G_0 \cdot \frac{m_{\text{aarde}}}{r^2} = G_0 \cdot \frac{m_{\text{aarde}}}{(r_a + h)^2}$$

waarin r_a staat voor de straal van de aarde en h voor de hoogte boven het aardoppervlak. Vermits deze waarden kunnen verschillen van plaatst tot plaats, is g niet overal even groot.

4.3.3 Touwkracht

Op een voorwerp dat aan het uiteinde van een gespannen touw bevestigd is, oefent het touw een 'touwkracht' $\vec{F}_t$ of 'spankracht' $\vec{F}_s$. Die kracht is steeds trekkend, nooit duwend, of dus : ze is steeds gericht naar de kant van het touw zelf. Zodra het touw slap hangt, is de spankracht ervan nul.

Elk touw wordt bovendien gekenmerkt door een maximale waarde $F_{s,max}$ van haar spankracht, of dus : de waarde waarbij het touw breekt.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Soorten krachten

4.3.4 Veerkracht

Op een voorwerp dat aan het uiteinde van een veer bevestigd is, oefent die veer een veerkracht $\vec{F}_v$. Die kracht is steeds gericht naar het zogenaamde 'evenwichtspunt', waar de veer haar natuurlijke lengte heeft. Of dus : als de veer ingedrukt is, is de veerkracht gericht naar een verlenging van de veer, en als de veer uitgerekt is, is de veerkracht gericht naar een verkorting van de veer.

De grootte van de veerkracht is gelijk aan

$$F_v = k \cdot \Delta l$$

met k de veerconstante (die groot is bij een stijve veer, en klein bij een slappe veer), en Δl de uitrekking óf induwing van de veer. Omwille van de gelijke grootte van de kracht bij uitrekking tegenover induwing, spreken we ook wel van 'opspanning' om beide tegelijk aan te duiden. We hebben dus een recht evenredig verband tussen de veerkracht en de opspanning van de veer.

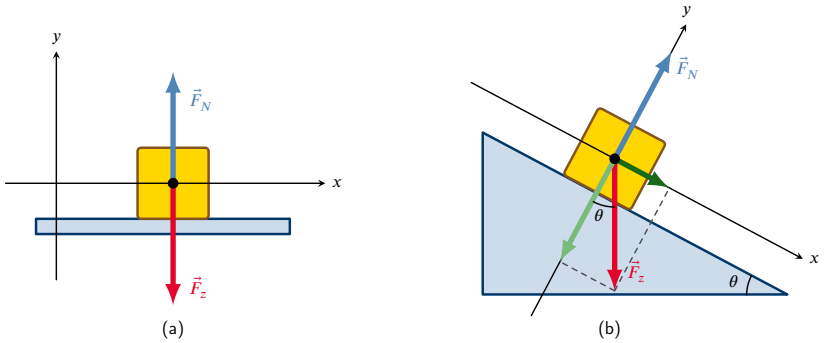
Men zegt ook wel samenvattend dat de veerkracht altijd een 'terugroepkracht' is : ze 'roept' het voorwerp altijd weer terug naar haar eigen evenwichtspunt. En omdat ze daarbij ook nog eens des te harder 'roept' naarmate het voorwerp verder verwijderd is van het evenwichtspunt, is het een voorbeeld van een zogenaamde 'elastische kracht'.

We zullen de veerkracht uitgebreider bespreken in het hoofdstuk over trillingen en golven.

> **Opmerking 4.3.1.** Je zou ook de touwkracht (zie eerder) kunnen zien als een veerkracht, als je het touw beschouwt als (een heel klein beetje) uitgerekt, zoals een veer. Het geval van induwing kan bij een touw dan niet gebeuren. Dan wordt de touwkracht nul aangezien het touw dan slap gaat hangen.

4.3.5 Normaalkracht

Veronderstel een boek dat in rust op tafel ligt. De zwaartekracht werkt in op het boek, toch versnelt het boek niet naar beneden. Er moet dus volgens de tweede wet van Newton nog een kracht op het boek werken, die de zwaartekracht compenseert. Deze kracht wordt uitgeoefend door de tafel op het boek. Ze staat loodrecht ('normaal') op het oppervlak en wordt daarom de normaalkracht genoemd. We gebruiken het symbool $\vec{F}_N$.



Figuur 31 – Normaalkracht op een voorwerp uitgeoefend door (a) een horizontaal oppervlak en (b) een schuin oppervlak. Op een schuin oppervlak zien we dat de grootte van de normaalkracht niet meer gelijk is aan die van de zwaartekracht op het voorwerp.

De grootte van de normaalkracht wordt bepaald door te eisen dat het voorwerp op het oppervlak moet blijven.

Voor het boek op het horizontaal oppervlak (figuur 31(a)) is de normaalkracht in grootte gelijk aan de zwaartekracht op het voorwerp ($F_N = m \cdot g$) om op het horizontaal oppervlak in rust te blijven.

CC BY-NC-SA 4.0

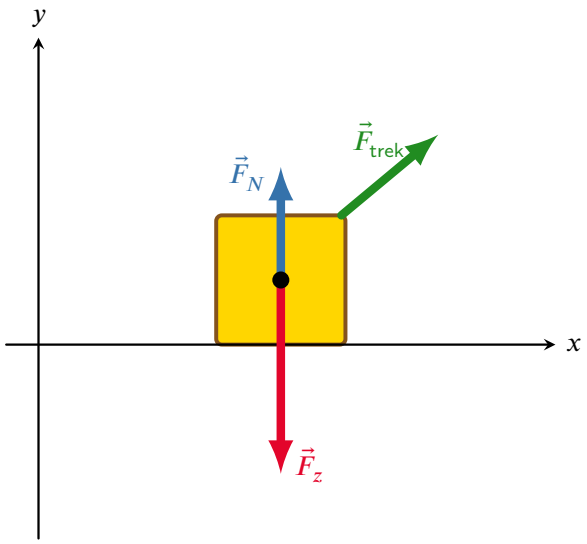
4.3 Soorten krachten

Deze gelijkheid geldt echter niet altijd. Dit is duidelijk te zien in figuur 31(b) waar een voorwerp op een schuin oppervlak ligt. Na projectie van de zwaartekracht $\vec{F}_z$ op de gekozen x- en y-as, is het duidelijk dat

$$F_N = \left|F_{z,y}\right| = mg \cdot \cos\theta$$

wat duidelijk kleiner is dan mg. Dit volgt uit de eis dat de krachten in de y-richting elkaar moeten compenseren om geen versnelling in de y-richting te krijgen, en er zo voor te zorgen dat het voorwerp inderdaad op het schuin oppervlak blijft (in de y-richting).

Merk op dat de x-component van de zwaartekracht $F_{z,x}$ het voorwerp naar beneden doet glijden (als de helling glad verondersteld is).



Figuur 32 – Normaalkracht door een horizontaal oppervlak op een voorwerp uitgeoefend. Op het voorwerp werkt nog een bijkomende uitwendige trekkracht $\vec{F}_{\text{trek}}$. In dit geval is de normaalkracht in grootte dus niet gelijk aan de zwaartekracht op het voorwerp.

In figuur 32 wordt een tweede situatie geschetst waar op een horizontaal oppervlak de normaalkracht in grootte toch niet gelijk is aan de zwaartekracht op het voorwerp. Een voorwerp ligt op een horizontaal oppervlak en wordt onder een bepaalde hoek verdergetrokken door een uitwendige kracht $\vec{F}_{\text{trek}}$. Het voorwerp komt daarbij niet los van het oppervlak. Bijgevolg moeten de krachten (volgens tweede wet van Newton) elkaar in de y-richting compenseren:

$$\begin{aligned} F_{N,y} + F_{z,y} + F_{\text{trek},y} &= m \cdot a_y \\ F_N - F_z + F_{\text{trek},y} &= 0 \\ F_N &= F_z - F_{\text{trek},y} \\ &= mg - F_{\text{trek},y} \end{aligned}$$

We zien dus dat ook in deze situatie de normaalkracht kleiner is dan de zwaartekracht op het voorwerp. Ditmaal is de oorzaak niet de helling van het oppervlak, maar een bijkomende krachtcomponent (hier van de trekkracht) in de normale richting. Het is echter niet moeilijk om in te zien dat, als de trekkracht schuin neerwaarts in plaats van schuin opwaarts gericht was, de normaalkracht groter zou worden dan de normaalkracht. Onthou dus in het algemeen dat **de normaalkracht niet altijd tegengesteld gericht staat aan de zwaartekracht, en naargelang de situatie kleiner, gelijk of groter dan de zwaartekracht kan zijn**.

In de x-richting zorgt F_x voor een versnelling $a_x = \dfrac{F_x}{m}$ van het voorwerp langs het horizontale oppervlak.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Soorten krachten

4.3.6 Dynamische wrijvingskracht

Wanneer een voorwerp over een ruw oppervlak schuift, oefent het oppervlak een dynamische wrijvingskracht $\vec{F}_w$ uit op het voorwerp, evenwijdig aan het oppervlak gelegen en achterwaarts gericht. Deze grootte van deze wrijvingskracht is evenredig met de grootte van de normaalkracht op het voorwerp en met de dynamische (of 'kinetische') wrijvingscoëfficiënt μ_k, die afhangt van het materiaal van het oppervlak en het materiaal van het voorwerp.

$$F_w = \mu_k \cdot F_N$$

Let op dat je deze formule niet vectorieel noteert! De dynamische wrijvingskracht staat langs het oppervlak gericht, en de normaalkracht loodrecht erop.

4.3.7 Statische wrijvingskracht

Wanneer op een ruw oppervlak een voorwerp weliswaar getrokken of geduwd wordt, maar niet hard genoeg om het voorwerp in beweging te brengen, dan oefent het oppervlak een statische wrijvingskracht $\vec{F}_{w,s}$ uit op het voorwerp. Deze is evenwijdig aan het oppervlak gelegen, en zodanig gericht, dat de resulterende krachtcomponent langs het oppervlak, nul blijft. Naargelang het materiaal van het oppervlak en het voorwerp, bestaat er een statische wrijvingscoëfficiënt μ_s waarvoor geldt dat, als de statische wrijvingskracht groter wordt dan

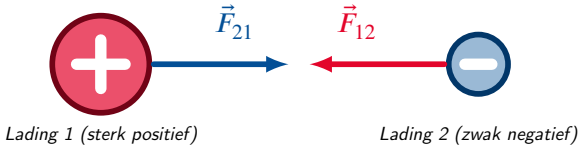
$$F_{w,s,max} = \mu_s \cdot F_N$$

, het voorwerp toch in beweging zal komen en de statische wrijvingskracht dus zal veranderen naar kinetische, zoals hierboven gedefinieerd.

4.3.8 Elektrische en magnetische kracht

De elektrische en de magnetische kracht (of samen : elektromagnetische kracht $\vec{F}_{em}$) werken in sommige omstandigheden in op elektrisch geladen voorwerpen.

We zullen deze elektromagnetische krachten uitgebreider bespreken in de hoofdstukken over Elektrostatica, Elektrodynamica en Magnetisme.



Figuur 33 – Een negatieve lading 2 trekt een positieve lading 1 aan, en omgekeerd.

4.3.9 Gewicht

Het gewicht $\vec{G}_w$ van een voorwerp dat nabij het aardoppervlak op een ondersteunend oppervlak rust, is de kracht die het voorwerp op z'n ondersteuning uitoefent. Volgens de derde wet van Newton oefent de steun een even grote tegengestelde kracht uit op het voorwerp, en deze kennen we reeds : de normaalkracht $\vec{F}_N$

$$\vec{G}_w = -\vec{F}_N$$

Dat de normaalkracht van de ondersteuning op het voorwerp, en het gewicht van het voorwerp op de ondersteuning, elkaars actie- en reactiekracht zijn, houdt in dat ze op een verschillend voorwerp aangrijpen, tegengesteld gericht zijn, en noodzakelijk even groot zijn. Wetende dat de normaalkracht naargelang de situatie kleiner, even groot of groter kan zijn dan de zwaartekracht, kunnen we nu hetzelfde concluderen voor het gewicht van een voorwerp.

Het gewicht wordt, als even grote kracht als de normaalkracht, nul bij normaalkracht nul. 'Gewichtloosheid' is normaalkrachtloosheid, niet zwaartekrachtloosheid!

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Soorten krachten

Het gewicht $\vec{G}_w$ grijpt zoals gezegd niet op het voorwerp maar op de ondersteuning aan. Je kan dus stellen dat, in de fysica, een voorwerp niet zijn eigen gewicht voelt. Het is de ondersteuning die het gewicht van het voorwerp voelt. Het voorwerp voelt wel zijn eigen zwaartekracht.

Opmerking 4.3.2. In het dagelijkse leven worden de woorden 'gewicht' en 'massa' als synoniemen gebruikt, maar in de fysica is dat helemaal niet zo. Het **gewicht** is, net zoals de zwaartekracht, een kracht, uitgedrukt in newton, terwijl **massa** uitgedrukt wordt in kilogram. Maar bovenal is er in het algemene geval geen verband tussen de massa en de grootte van de normaalkracht. Dat is er wel tussen de massa en de grootte van de **zwaartekracht**.

Definitie 4.3.1. De **massa** m van een voorwerp is een maat voor de hoeveelheid materie en wordt uitgedrukt in kg.

De **zwaartekracht** $\vec{F}_z$ op een voorwerp is de kracht waarmee de aarde het voorwerp naar zich toetrekt. Ze is in grootte recht evenredig met de massa m van het voorwerp.

Het **gewicht** $\vec{G}_w$ van een voorwerp is de kracht die het voorwerp uitoefent op zijn steun en wordt uitgedrukt in newton. Gewicht grijpt niet op het voorwerp aan maar op de steun, en is niet steeds even groot als de zwaartekracht op het voorwerp.

De **normaalkracht** $\vec{F}_N$ is de kracht van de steun op het voorwerp, en is even groot als, maar tegengesteld gericht aan, het gewicht $\vec{G}_w$ van het voorwerp op de steun.

Voorbeeld 4.3.1. Voor een voorwerp dat zich in rust bevindt op een horizontaal vlak, en waarop geen andere krachten inwerken, is de grootte van het gewicht gelijk aan:

$$\begin{aligned} G_w &= F_N \\ &= F_z \\ &= m \cdot g \end{aligned}$$

waarin g gelijk is aan de zwaarteveldsterkte. Het gewicht is dan even groot als de zwaartekracht. Maar je kunt inzien dat dit niet algemeen geldt.

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Krachtendiagramma's

Bij het oplossen van dynamische problemen met de **tweede wet van Newton**, is het belangrijk om te starten met een eenvoudige schets waarin elke uitwendige kracht op het betreffende object wordt getekend. Deze schets wordt een **krachtendiagramma** genoemd. Als we ons beperken tot translatiebewegingen ('schuivende' bewegingen zonder rotatie) mogen we het object beschouwen als een puntmassa waarop alle krachten inwerken. We kiezen een referentiestelsel en projecteren elke kracht op de x- en y-as (projectie van een vector op een as). Zo kan de tweede wet van Newton toegepast worden in elke coördinaatrichting afzonderlijk. We vatten dit samen in onderstaand stappenplan.

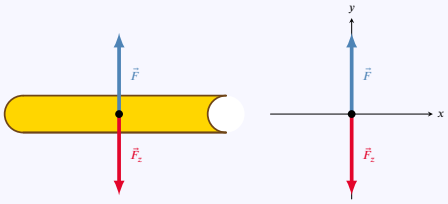
(a) Vervang het object door een puntmassa waarop alle krachten inwerken, en teken alle krachten op de puntmassa.

(b) Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze, bijvoorbeeld de x-as volgens de bewegingsrichting).

(c) Projecteer de krachten op de x- en y-as.

(d) Pas de tweede wet van Newton toe in elke coördinaatrichting en analyseer zo de beweging in elke richting apart.

Voorbeeld 4.4.1. Stel dat je een boek vasthoudt in je hand. Wat is de grootte van de opwaartse kracht van je hand op het boek zodat dit in rust blijft? Het corresponderende krachtendiagramma wordt getoond in figuur 34. Het boek wordt voorgesteld als een puntmassa waarop de krachten inwerken. De twee krachten die inwerken op het boek zijn enerzijds de zwaartekracht $\vec{F}_z$ en anderzijds de opwaartse kracht $\vec{F}$ van je hand op het boek. Merk op dat in een krachtendiagramma enkel de krachten getekend worden die op het object (in dit geval het boek) inwerken, en niet de bijhorende reactiekrachten, die immers op andere systemen inwerken : de reactiekracht van de zwaartekracht grijpt aan in het middelpunt van de aarde, en de reactiekracht van de normaalkracht grijpt aan op de hand.



Figuur 34 – Het krachtendiagramma bestaande uit twee uitwendige krachten op het boek.

Vervolgens kiezen we een x-y assenstelsel zodat we de componenten van de krachten kunnen bepalen. In dit geval zijn alle krachten verticaal, zo wordt de tweede wet van Newton in de opwaarts gekozen y-richting:

$$\sum_i F_{i,y} = F - F_z = m \cdot a_y.$$

Omdat het boek in rust blijft, is de versnelling in de y-richting 0, dus is

$$F - F_z = m \cdot a_y = 0,$$

of

$$F = F_z.$$

Zoals verwacht is de opwaartse kracht van je hand hier dus even groot als de zwaartekracht die op het boek inwerkt.

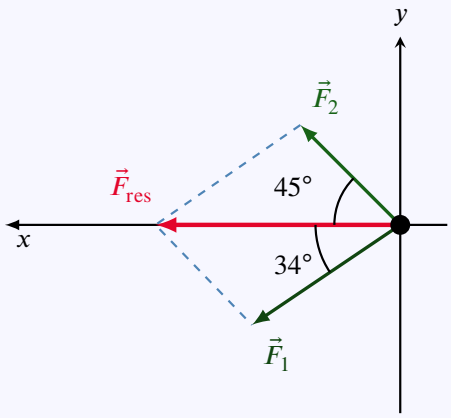
CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Krachtendiagramma's

Voorbeeld 4.4.2. Twee landbouwers trekken een kar met twee touwen voort. Een landbouwer trekt met een kracht van 130 N onder een hoek van 34° met de voortbewegingsrichting van de kar. De tweede landbouwer trekt onder een hoek van 45°. Met welke kracht moet de tweede landbouwer trekken opdat de nettokracht uitgeoefend door de twee personen in de voorwaartse bewegingsrichting van de kar staat?

Via het stappenplan proberen we deze oefening op te lossen.

(a) Vervang het object door een puntmassa waarop alle krachten inwerken, en teken alle krachten op het object (zie figuur). In de tekening hebben we ons beperkt tot alle krachten in het x-y vlak. De zwaartekracht en normaalkracht heffen mekaar op in de z-richting.



Figuur 35 – Krachtendiagramma kar.

(b) Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze). Hier kiezen we de x-as met richting en zin van de beweging. (zie figuur).

(c) Projecteer de krachten op de x- en y-as.

$$\begin{aligned} F_{1,x} &= F_1 \cdot \cos(34°) \\ F_{2,x} &= F_2 \cdot \cos(45°) \\ F_{1,y} &= -F_1 \cdot \sin(34°) \\ F_{2,y} &= F_2 \cdot \sin(45°) \end{aligned}$$

(d) Pas de tweede wet van Newton toe in elke coördinaatrichting en analyseer zo de beweging in elke richting apart.

$$F_{1,x} + F_{2,x} = m \cdot a_x \qquad (1)$$
$$F_{1,y} + F_{2,y} = m \cdot a_y \qquad (2)$$

(e) Wat wordt er precies gevraagd? De resulterende kracht moet volgens de x-as liggen. Dit wil

CC BY-NC-SA 4.0

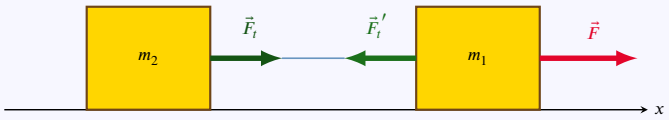
4.4 Krachtendiagramma's

zeggen dat de resulterende kracht geen y-component heeft. Vergelijking (2) wordt dan:

$$\begin{aligned} F_{1,y} + F_{2,y} &= m \cdot a_y = 0 \\ -F_1 \cdot \sin(34°) + F_2 \cdot \sin(45°) &= 0 \\ F_1 \cdot \sin(34°) &= F_2 \cdot \sin(45°) \\ F_2 &= \frac{F_2 \cdot \sin(34°)}{\sin(45°)} \\ &= \frac{130\ \text{N} \cdot \sin(34°)}{\sin(45°)} \\ &= 103\ \text{N} \end{aligned}$$

Voorbeeld 4.4.3 (Gekoppelde opbjecten)**.** We passen de tweede wet van Newton toe op objecten die met mekaar verbonden zijn. In dit voorbeeld wordt met een kracht $\vec{F}$ getrokken aan twee dozen die verbonden zijn door een massaloos touw en die schuiven over een wrijvingsloos oppervlak. Zo ontstaat er een spanning in het touw en bewegen de dozen verder met dezelfde versnelling $\vec{a}$. Stel dat de massa's m_1 en m_2 van de dozen gekend zijn.

Bepaal dan de spankracht in het touw en de versnelling van de dozen. We maken weer gebruik van het stappenplan.



Figuur 36 – Twee dozen verbonden door een massaloos touw worden voortgetrokken. Zo krijgen de twee dozen dezelfde versnelling.

(a) Vervang de twee dozen door twee puntmassa's waarop de krachten inwerken (zie figuur). Op doos 1 met massa m_1 werken twee krachten: de trekkracht $\vec{F}$ naar rechts en de spankracht $\vec{F}_t'$ naar links. Op doos 2 met massa m_2 werkt slechts één kracht, nl. de spankracht $\vec{F}_t$ naar rechts toe.

(b) Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze). Hier kiezen we de x-as in de richting van de beweging, naar rechts dus.

(c) Projecteer de krachten op de x- en y-as. Vermits alle krachten horizontaal zijn, zijn alle x-projecties even groot als de krachten zelf.

(d) Pas de tweede wet van Newton toe voor elk object. We dienen hier enkel de x-richting te bekijken.

$$\begin{aligned} &\text{Doos 1:} \quad F - F_t' = m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot a \qquad (1) \\ &\text{Doos 2:} \quad F_t = m_2 \cdot a_2 = m_2 \cdot a \qquad (2) \end{aligned}$$

Merk hierbij op dat beide dozen dezelfde versnelling krijgen, dus $a_1 = a_2 = a$. Wiskundig gezien is dit een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met drie onbekenden F_t, F_t' en a, wat dus niet oplosbaar lijkt. Maar omdat voor de spankrachten geldt dat ze afkomstig zijn van hetzeflde touw en dus even groot zijn : $F_t = F_t'$, blijven er slechts twee onbekenden over en is dit stelsel oplosbaar met behulp van substitutie of combinatie. Tellen we beide vergelijkingen op dan bekomen we:

$$F = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Krachtendiagramma's

Wanneer we deze laatste uitdrukking voor a substitueren in vergelijking (2) bekomen we:

$$T = m_2 \cdot a = \frac{m_2 \cdot F}{m_1 + m_2}$$

Deze uitdrukking voor a kunnen we eigenlijk ook sneller vinden als we de twee dozen als één geheel bekijken met massa $m_1 + m_2$, waarop een uitwendige kracht $\vec{F}$ werkt. De spankrachten in het touw worden dan inwendige krachten die mekaar compenseren en dus geen rol spelen in de tweede wet van Newton. Nadeel is dan natuurlijk dat we voor deze spankrachten geen uitdrukking kunnen vinden.

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 De wetten van Newton

4.5.1 Eerste wet van Newton - traagheidswet

Gedurende meer dan 15 eeuwen dacht men zoals Aristoteles dat een voorwerp maar in beweging kan blijven als er een kracht op wordt uitgeoefend. Newton (1642-1727) toonde aan dat dat niet klopt: een kracht zorgt niet voor beweging, een kracht kan enkel voor een *verandering* van een beweging zorgen. Een voorwerp kan dus wel degelijk bewegen zonder dat er een resulterende kracht op werkt!

Eigenschap 4.5.1 (EERSTE WET VAN NEWTON - TRAAGHEIDSWET)**.**

Als er op een voorwerp geen resulterende kracht wordt uitgeoefend, behoudt het zijn bewegingstoestand:

(a) is het voorwerp in rust, dan blijft het in rust;

(b) beweegt het voorwerp met een bepaalde snelheid in een bepaalde richting, dan blijft het eenparig rechtlijnig bewegen met deze snelheid in deze richting.

4.5.2 Tweede wet van Newton

Wanneer de snelheid van het object verandert, kan je ook zeggen dat dat voorwerp een versnelling heeft.

De mate waarin het object door een gegeven kracht versneld wordt, hangt af van de massa van het object. Dit is een scalaire grootheid met als SI-eenheid de kilogram (niet de gram !). De massa van een object is dus een maat voor de weerstand tegen snelheidsveranderingen (= maat voor traagheid).

Hoe moeilijk is het om een object in beweging te krijgen? Bijvoorbeeld als je een doos vooruit wenst te duwen zal je minder kracht moeten uitoefenen dan wanneer je een auto al duwend in beweging wil krijgen. De massa van een auto is dan ook veel groter dan de massa van de doos. Bij dezelfde resulterende kracht zal een object met grote massa een kleine versnelling krijgen en een object met een kleine massa een grote versnelling. De versnelling is bij een een zekere resulterende kracht dus omgekeerd evenredig met de massa.

De tweede wet van Newton geeft een verband tussen de resulterende kracht op een massa en de verandering van de bewegingstoestand van die massa.

Eigenschap 4.5.2 (TWEEDE WET VAN NEWTON)**.**

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$$

De tweede wet van Newton is een vectoriële wet. Omdat de resulterende kracht een vectoriële grootheid is, zal de versnelling ook een vector zijn. Bovendien hebben de versnelling en de resulterende kracht dezelfde richting en zin (zie figuur 37).

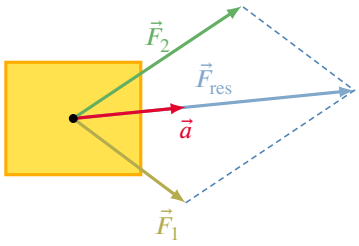
Bij het oplossen van vraagstukken zullen we daarom de tweede wet van Newton schrijven met behulp van krachtcomponenten, met andere woorden we projecteren de krachten, die vectoren zijn, op de x-, y- en z-as, zo bekomen we:

$$\sum_i F_{i,x} = m \cdot a_x \qquad \sum_i F_{i,y} = m \cdot a_y \qquad \sum_i F_{i,z} = m \cdot a_z$$

Dit zijn nu algebraïsche vergelijkingen (geen vectorvergelijkingen) waarmee we kunnen rekenen. Merk op dat de krachtcomponent volgens een bepaalde richting enkel de beweging in dezelfde richting als de krachtcomponent beïnvloedt.

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 De wetten van Newton



Figuur 37 – De resulterende kracht (of nettokracht) $\vec{F}_{\text{res}}$ is de vectorsom van de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ die werken op een puntmassa m. Deze nettokracht geeft de massa een versnelling $\vec{a}$ met dezelfde richting en zin als $\vec{F}_{\text{res}}$.

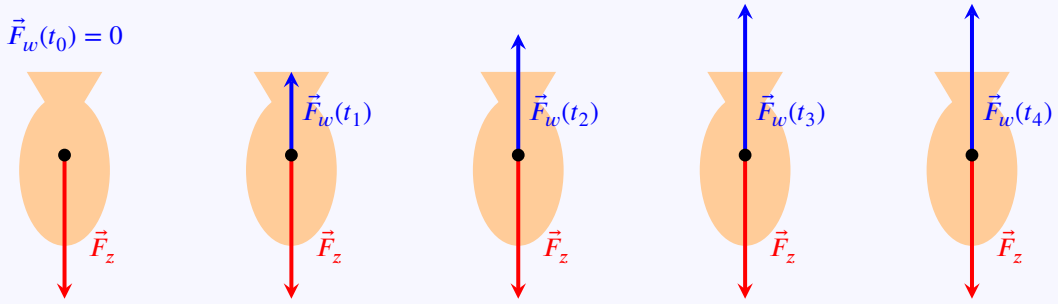
Krachten worden gemeten in newton.

Definitie 4.5.1. Kracht wordt uitgedrukt in newton, symbool N.

Een newton is gedefinieerd als de kracht die nodig is om een massa van 1 kilogram een versnelling van $1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ te geven:

$$1\ N = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Voorbeeld 4.5.1. Als je een zandzakje uit de mand van een stilhangende luchtballon laat vallen, werken op het zandzakje twee tegengesteld gerichte krachten: de zwaartekracht $\vec{F}_z$ en de luchtweerstand $\vec{F}_w$. Op tijd nul, bij het loslaten, is de luchtweerstand nog nul, en is de zwaartekracht dus gelijk aan de resulterende kracht. Geleidelijk aan neemt de luchtwrijving toe, waardoor de resulterende kracht, en dus de versnelling van het zandzakje, afneemt. Na verloop van tijd zijn de twee krachten even groot geworden. De luchtweerstand wordt niet nog groter. De resulterende kracht is vanaf dan dus nul, zodat er vanaf dan geen versnelling meer is, en het zandzakje vanaf dan dus eenparig valt.



4.5.3 Derde wet van Newton - wet van actie en reactie

Als je met een hamer een spijker in de muur klopt, moet je de hamer stevig vasthouden: op het ogenblik dat je de spijker raakt, voel je een kracht op de hamer.

Eigenschap 4.5.3 (DERDE WET VAN NEWTON - WET VAN ACTIE EN REACTIE)**.**

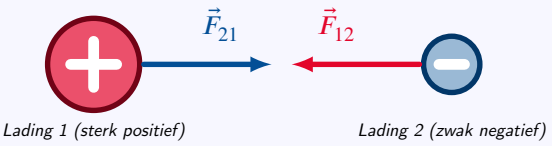
Als een systeem 1 een kracht $\vec{F}_{12}$ uitoefent op een systeem 2, oefent systeem 2 een even grote tegengestelde kracht $\vec{F}_{21}$ uit op systeem 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 De wetten van Newton

Voorbeeld 4.5.2. Een negatieve lading 2 trekt een positieve lading 1 aan en tegelijkertijd trekt de positieve lading even sterk de negatieve lading aan.



Enkele opmerkingen:

(a) Volgens de derde wet van Newton treden krachten dus nooit alleen op, maar altijd per twee.

(b) Men noemt deze wet ook wel de wet van actie en reactie: de ene kracht (de 'actie') heeft als gevolg dat er ook een andere kracht ('de reactie') optreedt. Het is echter niet zo dat de ene kracht eerder optreedt dan de andere. Beide krachten treden gelijktijdig op!

(c) De twee krachten grijpen aan op twee verschillende systemen: de ene kracht op het ene systeem, de andere op het andere systeem. Daarom kun je geen resultante bepalen van een actie- en een reactiekracht!

(d) Alhoewel de twee krachten even groot zijn, kan de versnelling van de twee systemen toch verschillend zijn: als een vrachtwagen tegen een personenauto botst, ervaren ze beide een even grote kracht, maar omdat de massa van de vrachtwagen veel groter is dan de massa van de wagen, zal de versnelling van de vrachtwagen ten gevolge van de botsing heel wat kleiner zijn dan die van de wagen. Bovendien is het niet noodzakelijk zo dat de krachten in kwestie de enige zijn die op de systemen werken. Mogelijk werken er nog andere krachten op één of allebei de systemen, en dan bepalen die natuurlijk ook mee de versnelling(en).

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Centripetaalkracht

In het hoofdstuk over kinematica leerden we dat bij een **eenparige cirkelbeweging** de versnellingsvector steeds naar het middelpunt van de cirkel gericht moet zijn. We noemden daarom de versnelling in dat geval ook wel de normale of middelpuntzoekende of centripetale versnelling, of centripetaalversnelling.

Nu vertelt de tweede wet van Newton ons dat de versnellingsvector steeds gelijkgericht is aan de resulterende kracht. Daarom zal in het geval van een eenparige cirkelbeweging, ook de resulterende kracht steeds naar het middelpunt van de cirkel gericht moeten zijn. We noemen daarom de resulterende kracht in dat geval ook wel de normale of middelpuntzoekende of **centripetale** kracht, of **centripetaalkracht**.

Definitie 4.6.1. De centripetaalkracht verandert de snelheidsvector niet van grootte maar enkel van richting. Ze levert zo dus de centripetaalversnelling $a_{CP} = v^2/r$ die nodig is voor een eenparige cirkelbeweging.

Haar grootte is daarom gelijk aan :

$$F_{res} = F_{CP} = m \cdot a_{CP} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

met m de massa van het object, v de grootte van de snelheid van het object, en r de straal van de cirkelbaan.

Voorbeeld 4.6.1. De beweging van de maan rond de aarde kan benaderd worden als een eenparige cirkelbeweging. De enige kracht op de maan (en dus meteen de resulterende kracht op de maan) is de aantrekkende gravitatiekracht F_{grav} van de aarde. We vinden in deze benadering dus dat :

$$F_{grav} = m_{maan} \cdot \frac{v^2}{d_{am}}$$

met d_{am} de afstand aarde-maan.

In het hoofdstuk over kinematica leerden we vervolgens ook dat bij een **niet-eenparige cirkelbeweging**, de versnellingsvector schuin gericht staat. Dat betekende dat de versnellingsvector naast een centripetale component ook een tangentiële component bevat.

Hetzelfde zullen we nu dus ook kunnen zeggen over de resulterende kracht. Deze zal bij de niet-eenparige cirkelbeweging schuin gericht staan, en naast een centripetale component (die we nog steeds 'de centripetaalkracht' zullen blijven noemen) ook een tangentiële component bevatten. De centripetale component van de resulterende kracht zullen we nog steeds de 'centripetaalkracht' blijven noemen, en deze zal nog steeds volgens de hierboven gegeven definitie, gelijkgesteld kunnen worden aan :

$$F_{CP} = m \cdot a_{CP} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Voorbeeld 4.6.2. Een balletje slingert heen en weer aan een touw dat aan het plafond is bevestigd. Bereken de resulterende kracht op het balletje in het onderste punt van de baan.

Hoe is de resulterende kracht in het onderste punt van de baan gericht ?

Hoe is de resulterende kracht in een willekeurig ander punt van de baan gericht ?

Antwoord : Op het balletje werken de neerwaartse zwaartekracht F_z, en de touwkracht F_t die gericht is naar het ophangpunt aan het plafond.

In het onderste punt van de slingerbeweging staat de touwkracht dus opwaarts. De resulterende kracht staat daar, als vectorsom van beide krachtvectoren, dus al zeker verticaal (op- of neerwaarts) gericht.

Omdat we weten dat het balletje een (stuk van) een cirkelbaan aflegt, moet de resulterende kracht

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Centripetaalkracht

noodzakelijk naar de binnenkant van de cirkelbaan gericht staan, en niet naar de buitenkant. Dit maakt dat de touwkracht $F - t$ daar groter is dan de zwaartekracht F_z, en de resulterende kracht **opwaarts** gericht staat, met als grootte :

$$F_{res} = F_t - F_z$$

In een willekeurig ander punt van de baan zal de resulterende kracht schuin gericht staan, en dus zowel een centripetale als een tangentiële component bevatten. In al deze punten zal de cirkelbeweging niet-eenparig verlopen : tijdens het stijgen zal ze vertraagd gebeuren, en tijdens het dalen versneld.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Oefeningen Dynamica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

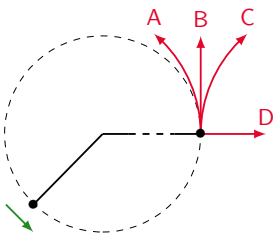
CC BY-NC-SA 4.0

4.7.1 Instapoefeningen

1. Een doos staat op een horizontale baan zonder wrijving. De doos wordt geduwd en dan losgelaten. Wat gebeurt er na het loslaten met de doos?

- De doos vertraagt en komt langzaam tot stilstand.
- De doos schuift verder met constante versnelling.
- De doos schuift verder met afnemende versnelling.
- De doos schuift verder met een constante snelheid.

2. Een schijf die vastgemaakt is aan een touw voert een cirkelvormige beweging uit op een luchtkussentafel. Welk pad zou de schijf volgen indien het touw breekt op de plaats P aangegeven op de figuur, die een bovenzicht van de situatie geeft ?



Het juiste pad is A | B | C | D .

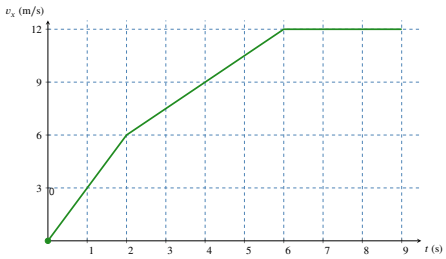
CC BY-NC-SA 4.0

4.7.2 Standaardoefeningen

1. De Aarde bevindt zich op 150 miljoen km van de Zon. De massa van de Aarde bedraagt $5,98 \cdot 10^{24}$kg, terwijl de massa van de Zon $1,99 \cdot 10^{30}$kg bedraagt. Hoe groot is de centripetale versnelling van de Aarde tijdens haar baan rond de Zon, als we deze beweging benaderen als een eenparige cirkelvormige beweging ?

$$a = \ldots\ldots \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

2. De figuur geeft de snelheidsgrafiek weer van een deeltje met een massa van $2,0$ kg dat langs de x-as beweegt. Wat is de resulterende kracht op dit deeltje na 1 s, 4 s en 7 s?



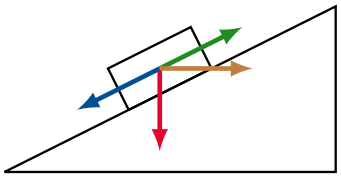
1. Na 1 s: …… N

2. Na 4 s: …… N

3. Na 7 s: …… N

3. Een baseball-speler schuift over de grond met een initiële snelheid van 4,0 m/s. Stel dat de kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen zijn schoenen en de grond 0,46 is, hoe ver zal de speler dan glijden voor hij tot rust komt?

4. Een voorwerp krijgt een stoot onderaan een helling en schuift daarna zonder wrijving omhoog langs de helling. Welke vector geeft de resulterende kracht juist weer na de stoot, dus tijdens het omhoog schuiven?

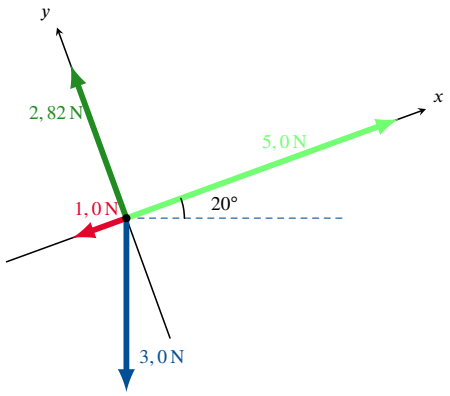


Blauw	Rood	Bruin	Groen

5. Op een massa van $2,0$ kg werken vier krachten, zoals weergegeven op de figuur. Bepaal de x- en y-component van de versnelling ten opzichte van het aangeduide assenstelsel.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.2 Standaardoefeningen



1. $a_x = \ldots\ldots$ m/s^2

2. $a_y = \ldots\ldots$ m/s^2

6. Een dakwerker met een massa van 87 kg staat op een dak met een helling van 30°. Hoe groot is de normaalkracht van het dak op de dakwerker?

$$F_N = \ldots\ldots \ N$$

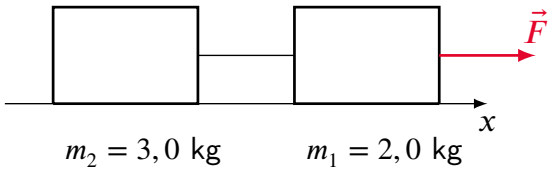
7. Een reiskoffer van 23 kg wordt horizontaal verder getrokken door een kracht $\vec{F}$ van 110 N onder een hoek van 25° boven de horizontale. Hierbij wordt de wrijving verwaarloosd.

1. Bereken de normaalkracht op de koffer (rond af zonder komma). $F_N = \ldots\ldots N$

2. Bereken de versnelling van de koffer (rond af tot op één getal na de komma, bv. 1.4).

$$\vec{a} = (\ldots\ldots \ ; \ \ldots\ldots) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

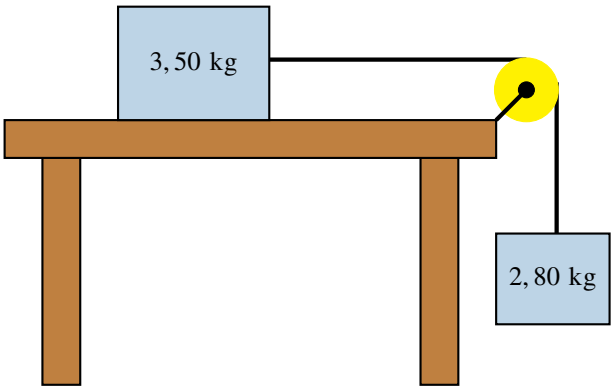
8. Twee blokken zijn met elkaar verbonden via een touw. Ze worden verder getrokken door een kracht met grootte $F = 5$ N. Bereken de versnelling van beide blokken en de spankracht in het touw. De tafel mag wrijvingsloos verondersteld worden.



9. Een blok van 3,50 kg ligt op een gladde wrijvingsloze tafel en is via een touw verbonden met een blok van 2,80 kg zoals weergegeven in onderstaande figuur. Zoek de versnelling a van de massa's en de spankracht F_t in het touw. Antwoord: $|a| = \ldots\ldots$ m/s^2, $F_t = \ldots\ldots$ N.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.2 Standaardoefeningen

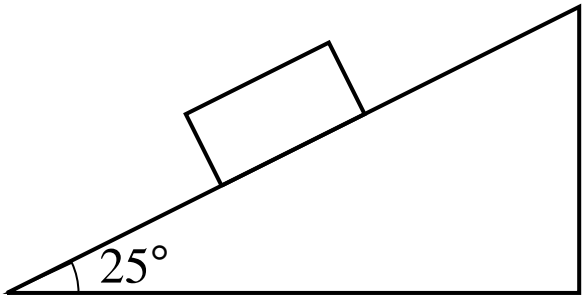


CC BY-NC-SA 4.0

4.7.3 Gevorderde oefeningen

1. In een speeltuin glijdt een kind van een glijbaan met een versnelling van $1,26$ m/s^2. De glijbaan maakt een hoek van $33°$ onder de horizontale. Zoek de wrijvingscoëfficiënt μ_k tussen het kind en de glijbaan. $\mu_k =$ ... ...

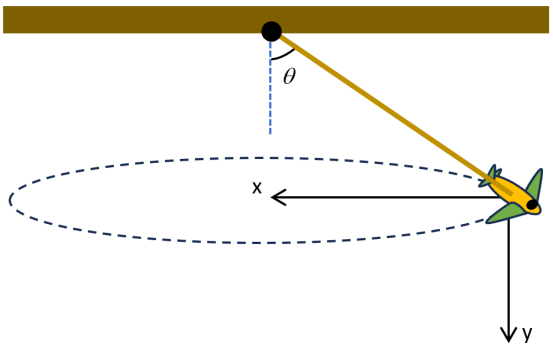
2. Een blok met een massa van $6,0$ kg ligt op een schuine helling die een hoek van $25°$ maakt met de horizontale richting. We geven een forse tik tegen het blok zodat het de helling opschuift met een beginsnelheid van $15\frac{\text{m}}{\text{s}}$. De wrijvingskracht bedraagt 20 N. Na hoeveel tijd zal het blok zijn beginpositie weer bereiken?



1. Aankomst in beginpunt na: ... ... s

3. In de jungle slingert Tarzan ($m = 63$ kg) aan een touw van 6,9 m lang. Wat is de spanning in het touw als Tarzan met een snelheid van 2,4 m/s vliegt wanneer het touw verticaal is (laagste positie) ?

4. Een speelgoedvliegtuigje met massa $m = 0,075$ kg is vastgemaakt aan het plafond met een touw. Wanneer de motor van het vliegtuigje gestart wordt, beweegt het met een constante snelheid van $1,21$ m/s in een horizontale cirkel met straal $0,44$ m.



1. Zoek de hoek θ die het touw maakt met de verticale (rond af tot op een graad).

$$\theta = \ldots\ldots\ ^\circ$$

2. Zoek de spanning F_T in het touw.

$$F_T = \ldots\ldots\ N$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.4 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over de wetten van Newton via het Usolv-it oefenplatform.

2. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over soorten krachten via het Usolv-it oefenplatform.

3. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over de gravitatiekracht via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Intro arbeid en energie

In dit hoofdstuk definiëren we de arbeid die door een kracht wordt uitgeoefend op een voorwerp, en tonen aan hoe die arbeid gerelateerd is aan de kinetische energie van het voorwerp. Vervolgens bespreken we de potentiële energie van een voorwerp, en zien we wanneer de mechanische energie ervan behouden blijft.

CC BY-NC-SA 4.0

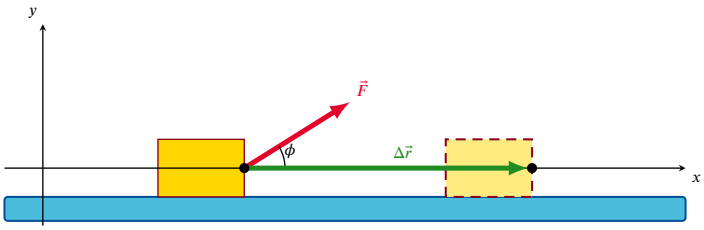
5.2 Arbeid en vermogen

5.2.1 Definitie van arbeid

Wanneer je een doos verderduwt over een ruwe vloer, verricht je spierkracht arbeid. Hoe groter de uitgeoefende spierkracht, hoe groter de arbeid. En ook hoe groter de afstand waarover je de doos duwt, hoe groter de verrichte arbeid.

Neem een massa die op een rechte baan een verplaatsing $\Delta\vec{r}$ maakt en daarbij een constante kracht $\vec{F}$ ondervindt (zie figuur). De arbeid geleverd door de kracht $\vec{F}$ wordt gedefinieerd als het scalair product van de kracht en de verplaatsing:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot |\Delta r| \cdot \cos\phi.$$



Figuur 38 – Arbeid door een kracht $\vec{F}$ op een massa bij een verplaatsing $\Delta\vec{r}$.

Afhankelijk van de hoek kan de arbeid positief ($\phi < \frac{\pi}{2}$), negatief ($\phi > \frac{\pi}{2}$) of nul zijn ($\phi = \frac{\pi}{2}$).

De arbeid geleverd door een kracht die loodrecht staat op de verplaatsing is dus steeds nul. Dit is bijvoorbeeld steeds het geval voor de normaalkracht, die immers steeds loodrecht staat op de bewegingsrichting.

Arbeid is een scalaire grootheid met als SI-eenheid $1\ Nm = 1\ \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 1\,J$.

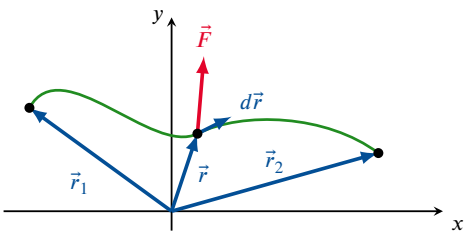
Wanneer de kracht echter tijdens de verplaatsing van punt 1 naar punt 2 niet constant blijft, gebruiken we voor de arbeid de integraal over de kracht $\vec{F}$ tijdens deze verplaatsing.

Definitie 5.2.1. De arbeid die een kracht verricht is de integraal van de kracht met betrekking tot de verplaatsing langs het pad van de verplaatsing:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

De eenheid van arbeid is joule (J).

Voor een ééndimensionale beweging langs de x-as vereenvoudigt dit tot $W_{1\to 2} = \int_1^2 F_x \cdot dx$.



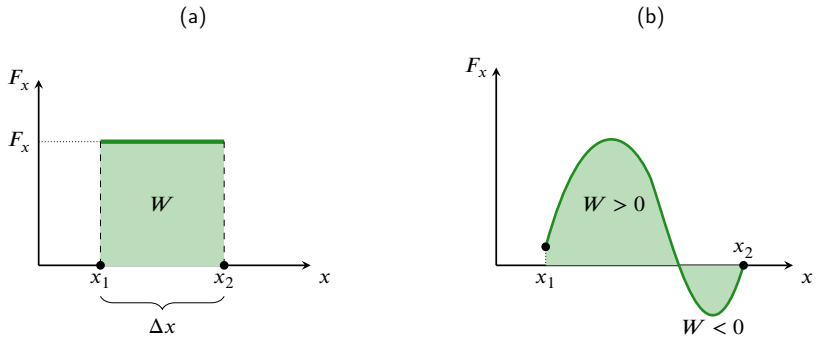
Figuur 39 – Arbeid door een niet-constante kracht $\vec{F}$ op een puntmassa bij een verplaatsing van 1 naar 2 langsheen een kromme.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Arbeid en vermogen

5.2.2 Grafische betekenis van arbeid

Uit $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ (voor een constante kracht) volgt dat voor een ééndimensionale beweging langs de x-as geldt dat $W = F_x \cdot \Delta x$ als je de x-as kiest volgens de baan van het voorwerp. Als F_x constant is in elk punt van de baan ziet de $F_x(x)$-grafiek er uit zoals de linker grafiek hieronder. De arbeid W die een constante kracht $\vec{F}$ verricht tijdens een verplaatsing Δx is dan de oppervlakte onder de $F_x(x)$-rechte voor het interval Δx.



Figuur 40 – grafische betekenis van arbeid bij (a) een constante kracht en (b) een niet-constante kracht.

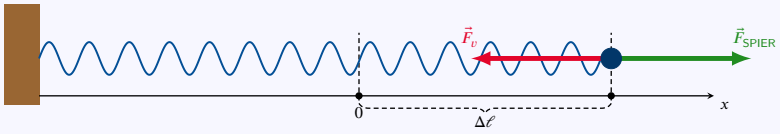
Dit principe is ook geldig voor een niet-constante kracht. Algemeen geldt:

(a) Als F_x positief is tussen x_1 en x_2, is de arbeid gelijk aan de oppervlakte van de figuur gelegen tussen de kromme, de x-as en de rechten $x = x_1$ en $x = x_2$.

(b) Als de kracht F_x verandert van teken in het interval, is de integraal de som van de oppervlakten van de delen van de figuur die boven de x-as liggen verminderd met de oppervlakten van de delen die onder de x-as liggen.

(c) De arbeid is nul als beide oppervlakten gelijk zijn.

Voorbeeld 5.2.1 (De arbeid nodig om een veer uit te rekken)**.** We berekenen de arbeid die je spierkracht moet verrichten om een veer uit te rekken over een afstand d.



Figuur 41 – Uitrekking van een veer waarbij $F_{\text{SPIER}} = F_v$

De grootte van de veerkracht van een veer die uitgerekt is over een afstand $\Delta\ell$, wordt gevonden via de wet van Hooke:

$$F_v = k \cdot \Delta\ell.$$

Hierin is k de veerconstante. Hoe groter de uitrekking, hoe groter de veerkracht. Bijgevolg is de veerkracht tijdens de uitrekking van de veer niet constant.

Als je de veer met constante snelheid uitrekt, is de spierkracht op elk ogenblik even groot als de veerkracht:

$$F_{\text{SPIER}} = F_v = k \cdot \Delta\ell.$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Arbeid en vermogen

De spierarbeid nodig om de veer over een afstand d uit te rekken, moet je berekenen met de formule

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{SPIER},x} \cdot dx$$

omdat de spierkracht niet constant is. We kiezen de x-as zoals in de figuur.

De functie die hier overeenkomt met $F_x(x)$ is gelijk aan $F_x(x) = k \cdot x$ want hier is de veranderlijke grootheid $\Delta\ell$ en door de keuze van het assenstelsel is $\Delta\ell = x$.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^d k \cdot x \, dx \\ &= k \cdot \int_0^d x \, dx \\ &= k \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^d \\ &= k \cdot \frac{d^2}{2} \end{aligned}$$

Dit is dus de arbeid die de spierkracht verricht tijdens het uitrekken van een veer met veerconstante k over een afstand d.

Uit vorig voorbeeld besluiten we:

Eigenschap 5.2.1. De spierkracht levert een arbeid $k \cdot \frac{(\Delta\ell)^2}{2}$ om de veer met veerconstante k uit te rekken over een afstand $\Delta\ell$.

5.2.3 Vermogen

Definitie 5.2.2. Het gemiddelde vermogen P_g van (de kracht $\vec{F}$ uitgeoefend op) een systeem in een tijdsduur Δt, is de arbeid W die erop verricht wordt per tijdseenheid:

$$P_g = \frac{W}{\Delta t}.$$

Vermogen wordt uitgedrukt in watt (W): $1\ \text{W} = 1\ \frac{\text{J}}{\text{s}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Arbeid en kinetische energie

Van een systeem dat in staat is arbeid te leveren, zegt men dat het energie bezit. Arbeid leveren is energie verbruiken. Dat zowel arbeid als energie scalaire grootheden zijn, beide uitgedrukt in dezelfde eenheid joule, is dan ook geen toeval.

De kinetische energie is de energie die een massa bezit omwille van zijn (snelheid en dus) beweging. We gebruiken hiervoor het symbool E_k.

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

In tegenstelling tot arbeid, is kinetische energie altijd positief.

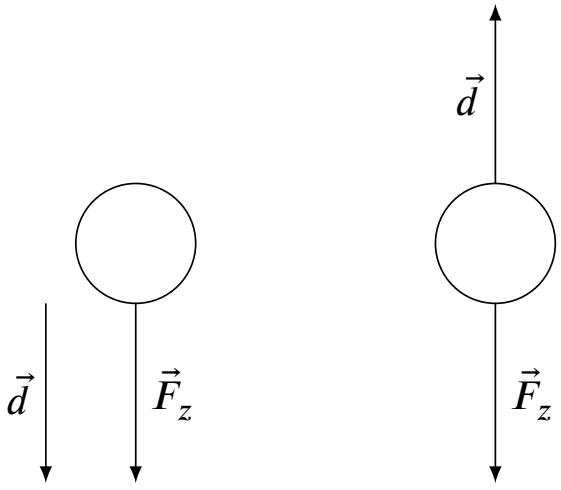
De arbeid die de resulterende kracht uitoefent op een massa is gelijk aan de verandering van kinetische energie van de massa. Dit is de wet van arbeid en kinetische energie, die als volgt wordt uitgedrukt:

$$W_{1\to 2} = E_k(2) - E_k(1) = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}.$$

Wanneer op een object een resulterende kracht werkt over een bepaalde afstand, verricht deze kracht arbeid op dat object wat resulteert in een snelheidsverandering van het object. Bijgevolg zal ook de kinetische energie van het object veranderen, met een bedrag precies gelijk aan de geleverde arbeid:

(a) Als de resulterende kracht positieve arbeid levert op een object, neemt de kinetische energie van het object toe. Dit is het geval voor de linker massa in Figuur 42, waar de kracht op de massa en de verplaatsing van de massa volgens dezelfde zin zijn. De kracht werkt mee met de beweging.

(b) Als de resulterende kracht negatieve arbeid levert op een object, neemt de kinetische energie van het object af. Dit is het geval voor de rechter massa in Figuur 42, waar de kracht op de massa en de verplaatsing van de massa volgens tegengestelde zin zijn. In dat geval werkt de kracht de beweging tegen.



Figuur 42 – Deze figuren tonen hoe de zin van de beweging en van de kracht het teken van de arbeid beïnvloeden: in de linkse situatie levert de zwaartekracht positieve arbeid tijdens de verplaatsing (de kinetische energie neemt toe), in de rechtse situatie negatieve arbeid (de kinetische energie neemt af).

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Potentiële energie

We kunnen de soorten krachten onderverdelen in conservatieve en niet-conservatieve krachten.

Definitie 5.4.1.

Conservatieve krachten zijn krachten waarvoor de arbeid die op een systeem verricht wordt tussen twee punten niet afhankelijk is van de gevolgde weg.
Voorbeelden: de zwaartekracht, de gravitatiekracht, de coulombkracht, ...

Niet-conservatieve krachten zijn krachten waarvoor de arbeid tussen twee punten wel afhankelijk is van de gevolgde weg.
Voorbeelden: de wrijvingskracht, de spierkracht, de kracht van een motor, de normaalkracht, ...

Voor conservatieve krachten kunnen we bijhorende potentiële energie E_P definiëren door te stellen dat voor die conservatieve kracht geldt dat

$$W_{1\to 2,C} = -\Delta E_p = E_p(1) - E_p(2).$$

(a) Levert een conservatieve kracht positieve arbeid op een object, dan neemt de bijhorende potentiële energie van dat object af.

(b) Levert een conservatieve kracht negatieve arbeid op een object, dan neemt de bijhorende potentiële energie van dat object toe.

Een onmiddellijk gevolg van deze definitie van potentiële energie is dat de potentiële energie van een object maar bepaald is op een constante na. Vaak kiest men een referentiepunt waar men de potentiële energie van een object nul stelt.

Eigenschap 5.4.1. Wanneer een object zich op een bepaalde positie in een (conservatief) krachtveld bevindt, krijgt het potentiële energie. De potentiële energie van dit object is gelijk aan de arbeid die de veldkracht op het object zou leveren bij een verplaatsing van dat object van zijn positie naar het referentiepunt.

Op basis van deze definitie kan je voor de verschillende soorten krachtvelden de bijhorende potentiële energie van een object berekenen. We geven de potentiële energie voor enkele conservatieve krachten:

Conservatieve kracht	**Potentiële energie**
Zwaartekracht	$E_p = m \cdot g \cdot h$
Gravitatiekracht	$E_p = -\dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}$
Veerkracht	$E_p = \dfrac{1}{2} k \cdot (\Delta \ell)^2$
Coulombkracht	$E_p = \dfrac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{r}$

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Behoudswetten

De mechanische energie van een systeem is het geheel van zijn kinetische en potentiële energie:

$$E_{mech} = E_k + E_p.$$

De arbeid verricht door niet-conservatieve krachten (bv. de wrijvingskracht) op een puntmassa is gelijk aan de verandering van mechanische energie van die puntmassa:

$$\begin{aligned} W_{NC} &= \Delta E_{\text{mech}} \\ &= E_{\text{mech}}(2) - E_{\text{mech}}(1) \end{aligned}$$

Als er geen niet-conservatieve krachten aanwezig zijn of als de resulterende niet-conservatieve kracht geen arbeid op het systeem verricht, is $\Delta E_{\text{mech}} = 0$ of $E_{\text{mech}}(1) = E_{\text{mech}}(2)$ en blijft de mechanische energie van het systeem behouden.

In een systeem met alleen conservatieve krachten blijft dus de mechanische energie steeds behouden:

$$E_{\text{mech}} = E_k + E_p = \text{constant}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Oefeningen Arbeid en Energie

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.1 Instapoefeningen

1. Kan er door een kracht een van nul verschillende arbeid verricht worden op een voorwerp dat niet beweegt?

Ja	Nee

2. Een vrouw duwt een hooibaal van 26 kg over een afstand van 3,9 m verder over de vloer van een schuur. Als ze een horizontale kracht van 88 N op het hooi uitoefent, hoeveel arbeid heeft ze dan geleverd? $W =$ …… J

3. Een doos wordt over een vloer getrokken aan een constante snelheid. Wat kan je zeggen over de arbeid van de wrijvingskracht?

Meerkeuze:

(a) De wrijving levert geen arbeid.

(b) De arbeid van de wrijving is negatief.

(c) De arbeid van de wrijving is positief.

4. Een vrachtwagen heeft een snelheid van $v = 15$ m/s en een kinetische energie $K = 4,8 \cdot 10^5$ J.

1. De massa van de vrachtwagen is dan $m =$ …… $\cdot 10^3$ kg.

2. Als de snelheid van de vrachtwagen verdubbelt, dan vermeerdert zijn kinetische energie met een factor ……

5. Een jongedame rijdt op een skateboard met een snelheid van 2 m/s. Nadat een kracht op haar inwerkt, verhoogt haar snelheid tot 3 m/s. Was de arbeid geleverd door de kracht

Meerkeuze:

(a) positief

(b) negatief

(c) nul

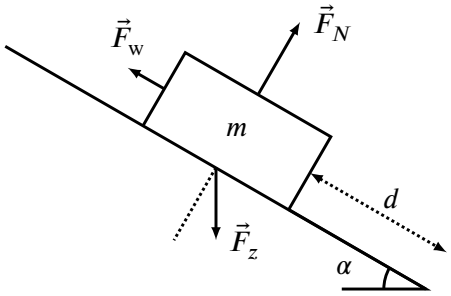
Verklaar.

6. Hoeveel arbeid is nodig om een jogger van 73 kg te versnellen van rust tot 7,7 m/s? $W_{net} =$ …… J

CC BY-NC-SA 4.0

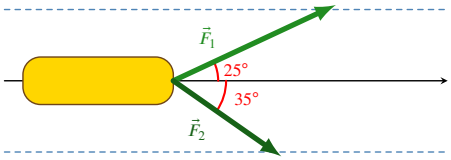
5.6.2 Standaardoefeningen

1. Er werken drie krachten op de auto (massa m) in de figuur: de zwaartekracht $\vec{F}_z$, de normaalkracht $\vec{F}_N$ en een wrijvingskracht $\vec{F}_w$, ten gevolge van de lucht. De auto verplaatst zich over een afstand d. Bereken de netto-arbeid op de auto als je weet dat $\alpha = 30°$, $F_w = 1555$ N, $d = 20.0$ m, en $m = 1500$ kg.



$W =$ …… kJ

2. Een boot met motorpech wordt door twee paarden op de oever voortgetrokken met een snelheid van $3,0\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Het eerste paard oefent een kracht uit van 1250 N en het tweede paard oefent een kracht uit van 920 N volgens de aangeduide vectoren. Welke arbeid verricht elk paard gedurende één uur op de boot?



1. $W_1 =$ …… $\cdot 10^6$ J

2. $W_2 =$ …… $\cdot 10^6$ J

3. Een vader en zijn jonge zoon lopen op een piste op zo'n manier dat ze beiden dezelfde kinetische energie bezitten. De zoon heeft een massa die vier keer kleiner is dan die van zijn papa. Wat is de verhouding van de snelheden van vader en zoon?

$$\frac{v_{\text{zoon}}}{v_{\text{vader}}} = \ldots\ldots$$

4. Een 'Acapulco cliff diver' duikt in het water vanop een hoogte van 46 m. De gravitationele potentiële energie neemt af met 25 000 J. Wat is het gewicht van de duiker, uitgedrukt in Newton? …… N

5. Een doosje met een massa van $2,0$ kg staat op een tafel met een hoogte van 75 cm. Je neemt het doosje van de tafel en zet het op een rek op $2,25$ m boven de grond.

1. De arbeid die de zwaartekracht tijdens je hefbeweging heeft verricht op het doosje is $W =$ …… J.

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.2 Standaardoefeningen

2. De arbeid die je spierkracht tijdens je hefbeweging heeft verricht op het doosje is $W = \ldots\ldots\ J$.

6. Je gooit een muntstukje met een massa van $5,5$ g recht naar beneden vanaf een 35 m hoge brug. De beginsnelheid van het muntstukje is $4,0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dan raakt het muntje het water met snelheid

$$v = \ldots\ldots\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

7. Hoe groot moet het vermogen van een liftmotor zijn om een lift met een massa van 1000 kg in 50 s naar een hoogte van 100 m te brengen?

$$P_g = \ldots\ldots\ \cdot 10^4\ \text{W}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.3 Gevorderde oefeningen

5.6.3 Gevorderde oefeningen

1. Je skiet van een helling van 15 °. Als je een snelheid van 10 m/s hebt, laat je je 100 m langsheen de helling naar beneden glijden.

1. Neem aan dat de wrijving verwaarloosbaar is. Wat is dan je snelheid na 100 m? $v =$ ..... m/s

2. Wat is je snelheid na 100 m als de kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen de sneeuw en de skies 0,1 is? $v =$ ..... m/s

2. Vanop welke hoogte moet een bal van 100 g vallen vanuit rust om een verticale veer (met veerconstante k = 70 N/m) in te drukken over een maximale afstand van 5 cm? $h =$ ..... m

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.4 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over arbeid en energie via het Usolv-it oefenplatform.

2. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over behoud van energie via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Intro trillingen

In de kinematica bestudeer je de beweging van voorwerpen.

(a) Als een voorwerp een beweging uitvoert die zich na enige tijd herhaalt, spreken we van een **periodieke beweging**. Een voorbeeld hiervan is de eenparige cirkelvormige beweging van een paardje op een paardenmolen.

(b) Wanneer een systeem (object) een heen en weer gaande beweging uitvoert rond een punt, spreken we van een **trilling**. Voorbeelden hiervan zijn: een trilplaat in een fitnesscenter, een boorhamer, het vlies van een luidspreker... Een trilling is dus een periodieke beweging, die zich afspeelt rond een evenwichtspunt.

(c) Kan de trillingsbeweging beschreven worden door een sinusfunctie, dan spreken we van een **harmonische trilling**.

In dit hoofdstuk bestuderen we de wiskundige beschrijving van de harmonische trilling, de verschillende eigenschappen ervan en we staan ook stil bij de energie van een systeem dat een harmonische trilling uitvoert.

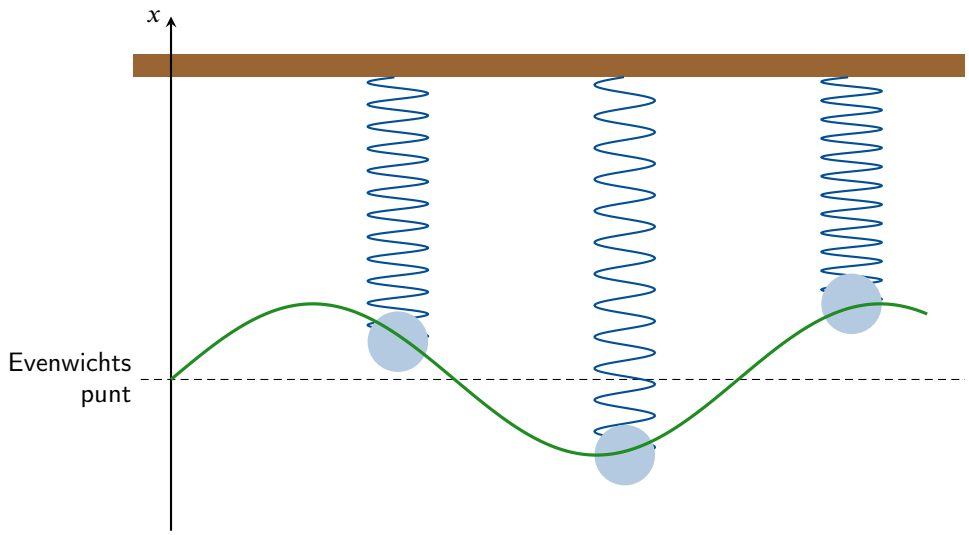
CC BY-NC-SA 4.0

6.2 De harmonische trilling

6.2.1 Definitie

We bekijken een massa aan een veer. Hangt de massa in rust aan de veer, dan bevindt zij zich in het evenwichtspunt van het massa-veer systeem. Als je de massa uit haar evenwichtspunt brengt en loslaat, voert ze een trilling uit rond het evenwichtspunt.

Voer je een x-as in zoals op de figuur, dan geeft de positie x de uitwijking van de massa aan, uitgedrukt in meter. De $x(t)$-functie noemt men de **trillingsvergelijking**.



Figuur 43 – Verticale trilling van een massa aan een veer.

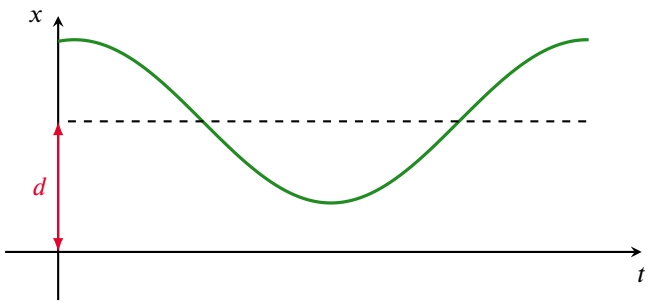
Een systeem voert een **harmonische trilling** uit als de trillingsvergelijking te schrijven is als een algemene sinusfunctie:

$$x(t) = a \cdot \sin(bt + c) + d.$$

Opmerking : in plaats van een sinus, kan er ook gekozen worden voor een cosinus in dit functievoorschrift. Wij werken hieronder verder met de keuze voor de sinus.

We bespreken nu de betekenis van a, b, c en d in dit functievoorschrift.

(a) d is de positie van het evenwichtspunt.



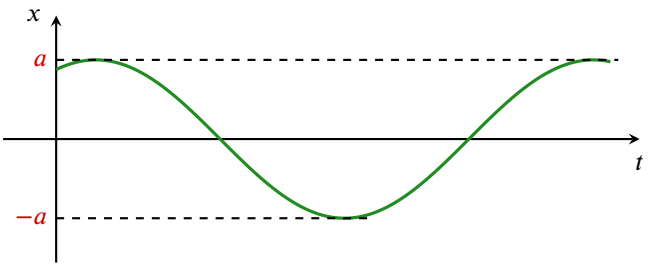
Tip : het is nuttig om bij de keuze van de x-as de oorsprong in het evenwichtspunt te kiezen, want dan wordt d gelijk aan nul. Er geldt dan dat:

$$x(t) = a \cdot \sin(bt + c).$$

CC BY-NC-SA 4.0

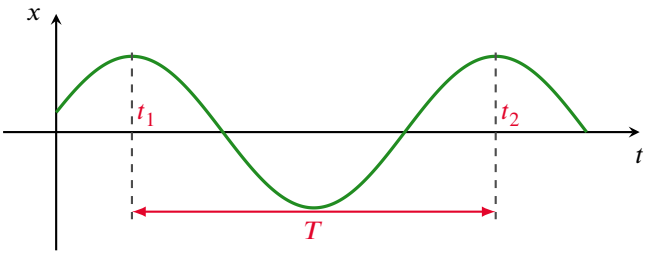
6.2 De harmonische trilling

(b) a is de maximale uitwijking t.o.v. het evenwichtspunt. Als $\sin(bt+c)=1$, is de uitwijking x positief, maximaal en gelijk aan $+a$. Als $\sin(bt+c)=-1$, is de uitwijking x negatief, maximaal en gelijk aan $-a$. We noemen a de **amplitude** van de trilling en noteren meestal A.



(c) b is niet rechtstreeks af te lezen uit de grafiek, maar bepaalt de periode. **De periode T is de tijdsduur van één volledige trillingsbeweging.** De uitwijking x bereikt haar positief maximum als $\sin(bt+c)=1$. Als dit de eerste maal het geval is op tijdstip t_1, dan is

$$b\cdot t_1 + c = \frac{\pi}{2}(rad) \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{\frac{\pi}{2}-c}{b}.$$



Stel dat de uitwijking x de tweede maal haar positief maximum bereikt op het tijdstip t_2. Dan geldt

$$b\cdot t_2 + c = \frac{\pi}{2}+2\pi \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi-c}{b}.$$

Na het tijdsverloop $t_2 - t_1$ herhaalt de trilling zich. Dat tijdsverloop is de periode T:

$$T = t_2 - t_1 = \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi-c}{b} - \frac{\frac{\pi}{2}-c}{b} = \frac{2\pi}{b}.$$

Bijgevolg is

$$b = \frac{2\pi}{T}$$

We zien nu dat b inderdaad de periode T bepaalt, maar dit op omgekeerd evenredige wijze. Als we deze uitdrukking herformuleren als

$$b = 2\pi\cdot f$$

dan definiëren we zo de frequentie f van de trilling. **De frequentie f is het aantal trillingen per seconde (uitgedrukt in s^{-1} of Hz).** 1 Hertz komt overeen met één volledige trillingsbeweging per seconde. We noemen b de **pulsatie** van de trilling en noteren dit als ω (uitgedrukt in rad/s). Onthoud dus dat:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

of dus ook dat

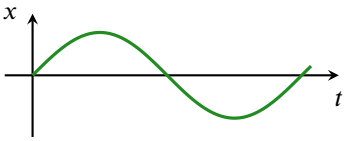
$$f = \frac{1}{T}$$

CC BY-NC-SA 4.0

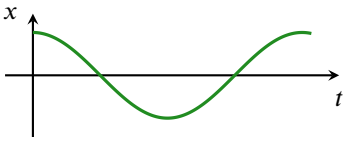
6.2 De harmonische trilling

(d) Ook c is niet rechtstreeks af te lezen uit de grafiek, maar bepaalt de positie en snelheid op tijdstip $t = 0$ s en wordt de **beginfase** φ_0 genoemd.

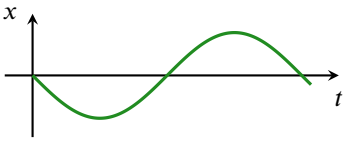
Indien $c = 0$ (rad) op $t = 0$ s, dan bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in de oorsprong en beweegt het in de positieve zin van de x-as. Als $c = \frac{\pi}{2}$ bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in het positief maximum. Indien $c = \pi$ (rad) op $t = 0$ s, dan bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in de oorsprong en beweegt het in de negatieve zin van de x-as. Als $c = -\frac{\pi}{2}$ bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in het negatief maximum.



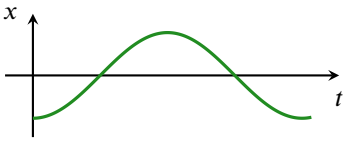
$c = 0$



$c = \frac{\pi}{2}$



$c = \pi$



$c = \frac{3\pi}{2}$

Opmerking : voor de bepaling van c is het wel degelijk van belang dat we hier voor een sinus gekozen hebben in het voorschrift van de trilling. Kiezen we een cosinus, dan zal c in elk van deze vier gevallen anders zijn ! Probeer zelf eens c te vinden in deze vier gevallen, bij de keuze van een cosinus in het trillingsvoorschrift.

Eigenschap 6.2.1. Een harmonische trilling wordt gekenmerkt door de amplitude A, de pulsatie ω, de beginfase φ_0 en de waarde d van het evenwichtspunt. Als we de oorsprong van de x-as in het evenwichtspunt leggen, wordt d nul, en wordt de trillingsvergelijking gegeven door:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

x is de uitwijking t.o.v. het evenwichtspunt; A is de maximale uitwijking t.o.v. het evenwichtspunt;
ω is 2π maal het aantal trillingsbewegingen per tijdseenheid;

$\omega \cdot t + \varphi_0$ is de **fase** φ van de harmonische trilling;

φ_0 is de fase op tijd nul.

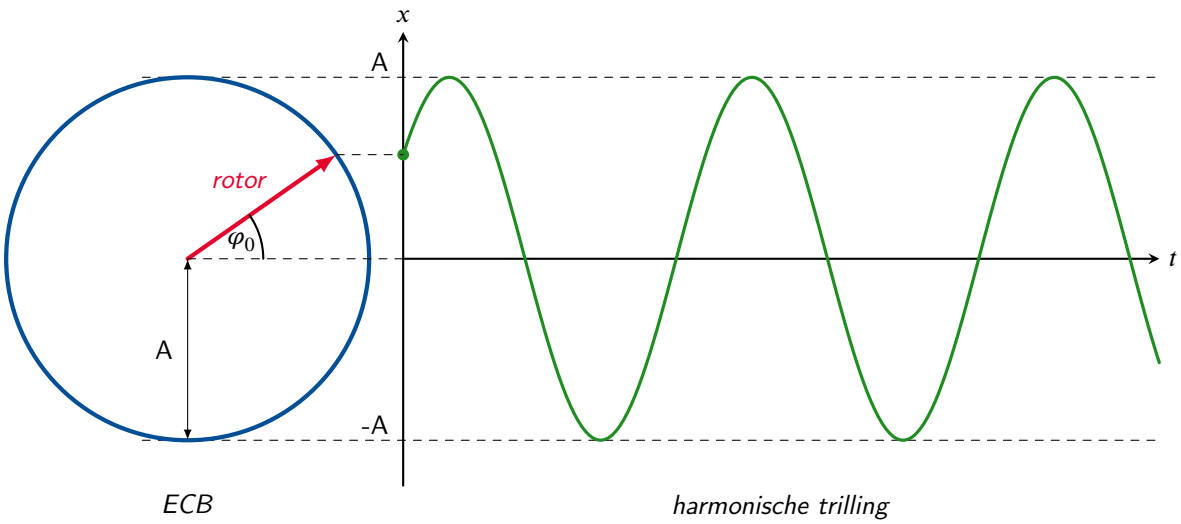
Opmerking 6.2.1. De beginfase φ_0 wordt vaak verward met de beginuitwijking x_0. De beginfase is een hoek in radialen, terwijl de beginuitwijking de x-waarde is, in meter, op tijdstip $t = 0$. Het verband tussen de twee wordt duidelijk in de paragraaf hieronder over de link tussen een harmonische trilling en een eenparige cirkelbeweging.

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 De harmonische trilling

6.2.2 Link met de eenparige cirkelbeweging

De harmonische trilling kan in verband gebracht worden met de eenparige cirkelvormige beweging (ECB). Indien je de projectie van een ECB op een verticale as bekijkt, dan volgt het geprojecteerde punt een harmonische trilling.



Figuur 44 – Verband tussen de harmonische trilling en een eenparige cirkelvormige beweging.

Met behulp van de cirkel die je naast de verticale as tekent, kan je de fase φ en de beginfase φ_0 visueel voorstellen. De hoek tussen de horizontale en de rotor (roterende vector) die overeenkomt met de uitwijking op een willekeurig tijdstip t, is φ, en die hoek op tijdstip $t = 0$ is dan uiteraard gelijk aan de beginfase φ_0.

6.2.3 Trillingen in fase en in tegenfase

We beschouwen twee harmonische trillingen met dezelfde pulsatie ω:

$$x_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{01}) = A_1 \cdot \sin \varphi_1,$$

$$x_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{02}) = A_2 \cdot \sin \varphi_2.$$

Het **faseverschil** $\Delta\varphi$ tussen de twee trillingen is:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \cdot t + \varphi_{02} - \left(\omega \cdot t + \varphi_{01}\right) = \varphi_{02} - \varphi_{01}.$$

We bekijken twee speciale gevallen (met $n \in \mathbb{Z}$):

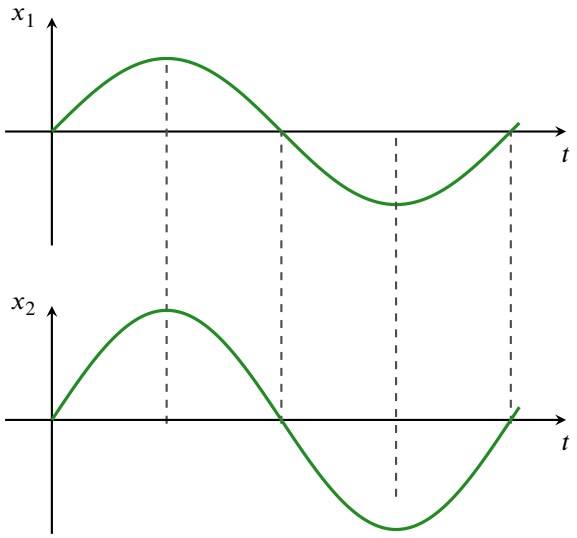
(a)

$$\Delta\varphi = n \cdot 2\pi.$$

De twee trillingen zijn **in fase**: de twee systemen passeren op hetzelfde ogenblik het evenwichtspunt en bewegen dan ook in dezelfde zin. Ze bereiken op hetzelfde ogenblik hun positief maximum.

CC BY-NC-SA 4.0

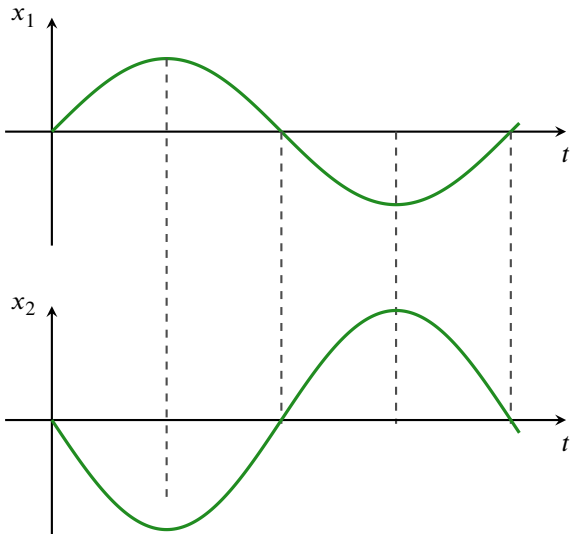
6.2 De harmonische trilling



(b)

$$\Delta\varphi = (2n+1)\cdot\pi.$$

De twee trillingen zijn dan **in tegenfase**: de twee systemen passeren op hetzelfde ogenblik het evenwichtspunt maar bewegen dan in tegengestelde zin. Als het ene systeem zijn positief maximum bereikt, is het andere systeem in zijn negatief maximum.



Definitie 6.2.1. Twee harmonische trillingen met dezelfde pulsatie zijn

- **in fase** als het faseverschil gelijk is aan $n\cdot 2\pi$;
- **in tegenfase** als het faseverschil gelijk is aan $(2n+1)\cdot\pi$. $(n\in\mathbb{Z})$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Eigenschappen van een harmonische trilling

6.3.1 Snelheid

We bekijken een harmonische trilling waarvoor $\varphi_0 = 0$:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

De snelheid v_x op het ogenblik t wordt gegeven door

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) \\ &= A\cos(\omega \cdot t) \cdot \omega = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t). \end{aligned}$$

Op de $v_x(t)$-grafiek zie je dat de snelheid nul is als het systeem zich in de uiterste punten bevindt, dus als de uitwijking gelijk is aan $+A$ of $-A$. Op deze uiterste punten keert het object om en is dan momentaan in rust, of dus : de snelheid wordt daar nul. De grootte van de snelheid is daarentegen (positief of negatief) maximaal als het systeem het evenwichtspunt passeert.

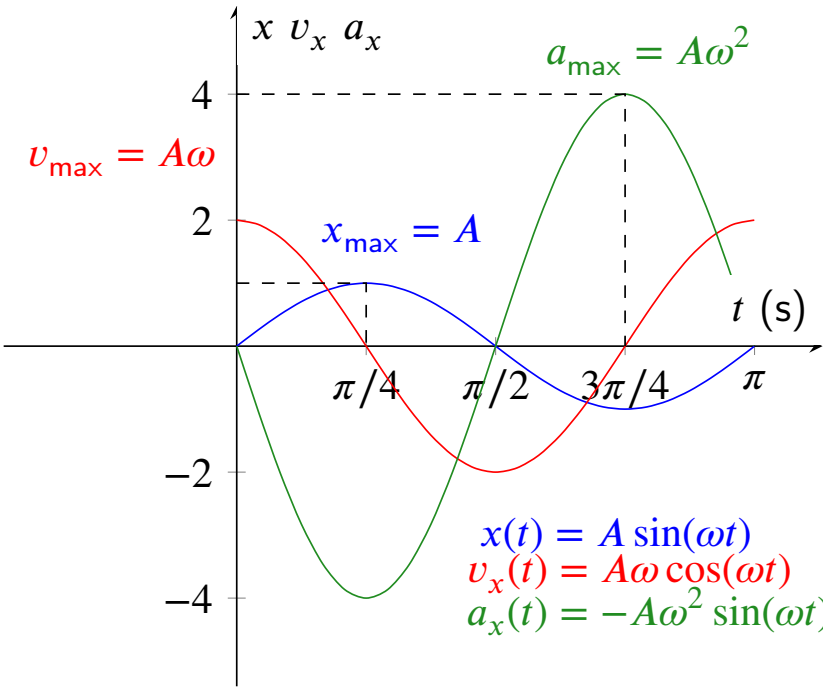
6.3.2 Versnelling

De versnelling a_x wordt gegeven door

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\right) \\ &= -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega = -A \cdot \omega^2 \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

De versnelling is nul als de snelheid (positief of negatief) maximaal is. Dat is in het evenwichtspunt. De grootte van de versnelling is maximaal als de snelheid nul is. Dat is in de uiterste punten.

Volgende figuur geeft de positie, snelheid en versnelling van een harmonische trilling weer in eenzelfde grafiek. De gebruikte waarden zijn $A = 1, \omega = 2$. Hierop is ook duidelijk te zien dat de extrema van de positie en versnelling samenvallen, terwijl de extrema van de snelheid voorkomen wanneer de positie en versnelling nul zijn.



6.3 Eigenschappen van een harmonische trilling

6.3.3 Kracht

Voor de resulterende kracht $\vec{F}$ op het systeem geldt volgens de tweede wet van Newton: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Projecteren op de x-as geeft

$$\begin{aligned} F_x &= m \cdot a_x \\ &= -m \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

En omdat $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$, is

$$F_x(t) = -m \cdot \omega^2 x(t).$$

De constante $m \cdot \omega^2$ noemen we de elasticiteitsconstante:

$$\varepsilon = m \cdot \omega^2$$

en dus

$$F_x(t) = -\varepsilon \cdot x(t).$$

Uit deze formule volgt:

(a) de resulterende kracht die inwerkt op een systeem dat een harmonische trilling uitvoert, is tegengesteld aan de uitwijking (min-teken!) en wijst dus altijd naar het evenwichtspunt: daarom noemen we de kracht een **terugroepkracht**. Hoe groter de elasticiteitsconstante, hoe groter de terugroepkracht.

(b) de terugroepkracht is op elk moment recht evenredig met de uitwijking. Hoe groter de uitwijking, hoe groter de kracht. Zo'n kracht noemen we daarom ook wel een **elastische kracht**.

6.3.4 De eigenfrequentie van een trillend systeem

Uit $\varepsilon = m \cdot \omega^2$ en $\omega = 2\pi f$ volgt

$$\varepsilon = m \cdot (2\pi f)^2$$

en dus

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}.$$

De frequentie waarmee een systeem trilt, is de **eigenfrequentie** f van een systeem. Ze hangt af van de massa van het trillend systeem en van de elasticiteitsconstante.

(a) Hoe groter ε, hoe groter de eigenfrequentie van de trilling. Dat merk je bv. bij een gitaarsnaar: bij een sterk opgespannen snaar is de terugroepkracht groot. De elasticiteitsconstante ε is dan groot. Uit de formule volgt dat de frequentie hoog is. Daarom hoor je een hogere toon als je een snaar meer opspant.

(b) Hoe groter m, hoe lager de eigenfrequentie en dus de toon. Daarom produceren voorwerpen met een grote massa lagere tonen, dan voorwerpen met een kleinere massa (viool ↔ contrabas ; picolo ↔ dwarsfluit, ...).

Eigenschap 6.3.1. Als een systeem met massa m een harmonische trilling uitvoert, is de resulterende kracht op het systeem elastisch:

$$F_x(t) = -\varepsilon \cdot x(t)$$

met ε de elasticiteitsconstante (eenheid N/m).

De eigenfrequentie van het systeem is $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

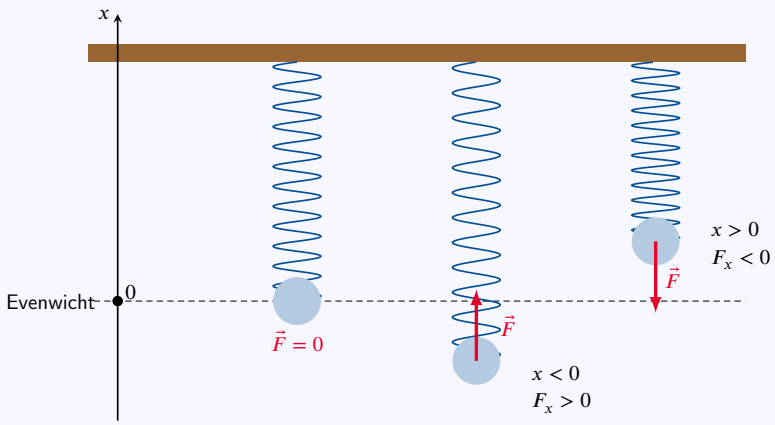
6.4 Voorbeelden

6.4.1 Trilling van een verticale veer

Voorbeeld 6.4.1 (Trilling van een verticale veer)**.** Indien het trillend systeem een verticaal (dwz hangend of staand) massa-veer systeem is, is de elasticiteitsconstante gelijk aan de veerconstante k van de veer. We bekomen dan dat

$$F_x(t) = -k \cdot x(t).$$

De resulterende kracht op de massa is de vectorsom van de zwaartekracht en de veerkracht, en wijst op elk ogenblik naar het 'nieuwe' evenwichtspunt, dat iets lager zal liggen dan het 'oude' evenwichtspunt, namelijk de plaats waar de veer haar normale lengte heeft.



Figuur 45 – De resulterende kracht wijst steeds naar het evenwichtspunt.

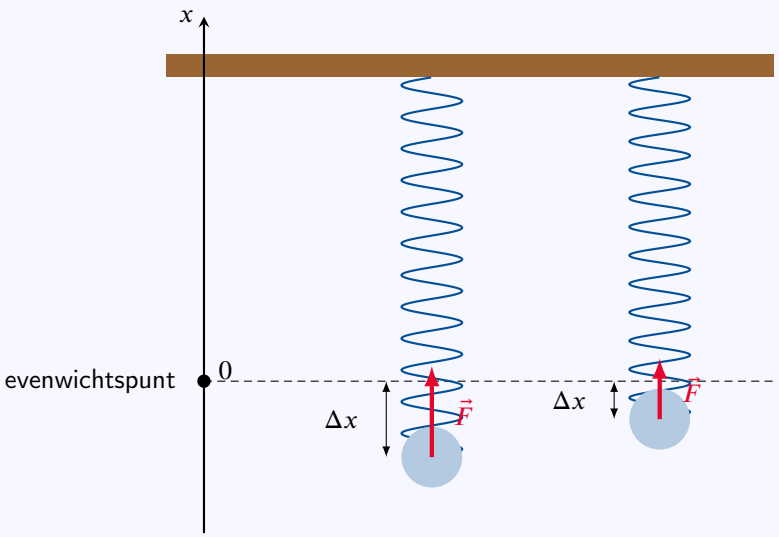
Hierin is x de uitwijking uit evenwicht, zodat als we enkel groottes bekijken, we bekomen dat

$$F(t) = k \cdot |x(t)|\,,$$

Hieruit blijkt dat de resulterende kracht, bestaande uit zwaartekracht en veerkracht, elastisch mag genoemd worden. De veerkracht schreven we vroeger reeds als de wet van Hooke: $F_v = k \cdot |\Delta\ell|$. Hierin is F_v de veerkracht en $\Delta\ell$ de uitwijking uit evenwicht (waar de veer haar normale lengte heeft). De veerkracht zelf is dus ook een elastische kracht.

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Voorbeelden



Figuur 46 – De resulterende kracht is evenredig met de uitwijking Δx uit het 'nieuwe' evenwichtspunt.

Voor de eigenfrequentie van het massa-veer-systeem zien we dat:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

De frequentie waarmee de massa trilt, hangt af van de veerconstante k en van de massa m.

(a) Hoe groter de veerconstante, hoe groter de frequentie waarmee het systeem trilt.

(b) Hoe groter de massa, hoe kleiner de frequentie.

Opmerking 6.4.1. (a) Bij een horizontaal trillende veer is de resulterende kracht op de veer gelijk aan enkel de veerkracht. De elastische kracht is dus gelijk aan de veerkracht.

(b) Zoals hiervoor aangegeven is bij een verticaal trillende veer de resulterende kracht niet meer gelijk aan de veerkracht alleen. Ze is de som van de veerkracht en de zwaartekracht. Op de bovenstaande figuren werd de resulterende kracht weergegeven.

6.4.2 Snaartrilling

Voorbeeld 6.4.2 (Een trillende snaar)**.** Bepaal de frequentie van de trillende snaar van een gitaar met een massa van $10,0$ g. De elasticiteitsconstante bedraagt $19,1 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

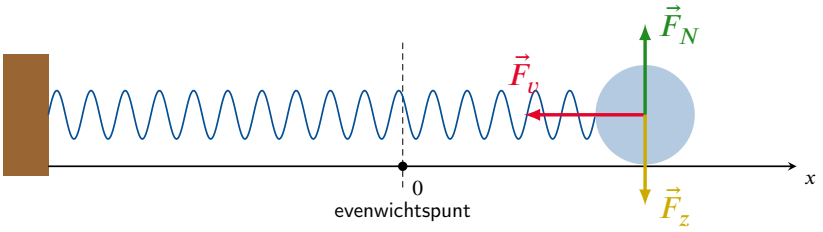
Uitwerking: We veronderstellen dat de snaar een harmonische trilling uitvoert. De eigenfrequentie van dit trillend systeem wordt gegeven door:

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\text{m}}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{19,1 \cdot 10^3 \text{ N/m}}{0,0100 \text{ kg}}} = 220 \text{ Hz}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Energie van een harmonische trilling

Beschouw een massa die een horizontale trilling uitvoert waarbij de wrijving verwaarloosbaar is. Op de massa werken drie krachten: de zwaartekracht $\vec{F}_z$, de normaalkracht $\vec{F}_N$ en de veerkracht $\vec{F}_v$.



Figuur 47 – Krachten bij een horizontale trilling.

De normaalkracht is de enige niet-conservatieve kracht en deze levert geen arbeid omdat deze kracht loodrecht op de verplaatsing staat: de niet-conservatieve arbeid W_{NC} is dus gelijk aan nul.

Volgens de wet van **behoud van mechanische energie** geldt dan:

$$E_{\text{mech}}(1) = E_{\text{mech}}(2)$$

We gaan dit na door de mechanische energie van de trillende massa op een bepaald tijdstip t te beschouwen.

De positie van de massa m op een bepaald ogenblik is

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t)\,.$$

De snelheid van de massa m op dat ogenblik is dus

$$v_x(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)\,.$$

De kinetische energie is

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(t) &= \frac{1}{2} m \cdot [v(t)]^2 \\ &= \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t)\,. \end{aligned}$$

Vermits

$$\omega = 2\pi f \qquad \text{en} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

volgt dat

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Voor de kinetische energie bekomen we nu dat

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot k \cdot \cos^2(\omega t)\,.$$

Op het beschouwde tijdstip is de uitwijking van de massa t.o.v. het evenwichtspunt gelijk aan $\Delta\ell$. Bij de harmonische trilling hebben we die uitwijking x genoemd, met

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Energie van een harmonische trilling

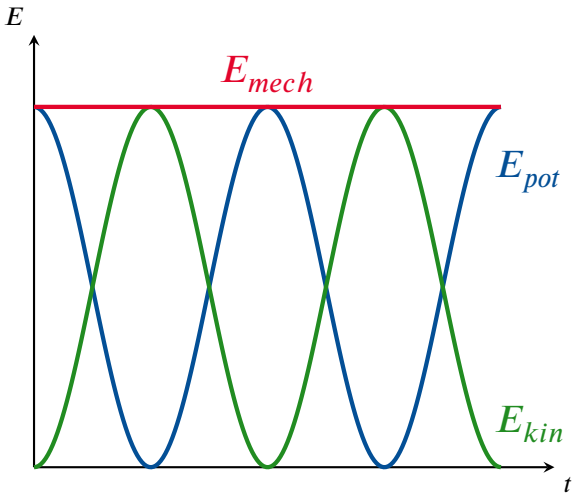
De potentiële energie van de veer is bijgevolg

$$E_{\text{p}}(t) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta \ell)^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega t)\,.$$

Voor de mechanische energie bekomen we nu

$$\begin{aligned} E_{\text{mech}}(t) &= E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{p}}(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \end{aligned}$$

We bekomen inderdaad dat de mechanische energie van de massa die aan een veer een horizontale harmonische trilling uitvoert, constant is en dus behouden blijft.



Figuur 48 – De mechanische energie is bij een harmonische trilling van een massa-veersysteem constant.

We hadden het hierboven over een massa-veersysteem. Voor andere harmonisch trillende systemen kan men ook **algemeen** aantonen dat:

$$E_{mech}(t) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot A^2.$$

Vermits $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{m}}$ is dus

$$E_{mech}(t) = 2\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2.$$

De mechanische energie van een systeem dat een harmonische trilling uitvoert, is afhankelijk van de amplitude en de frequentie:

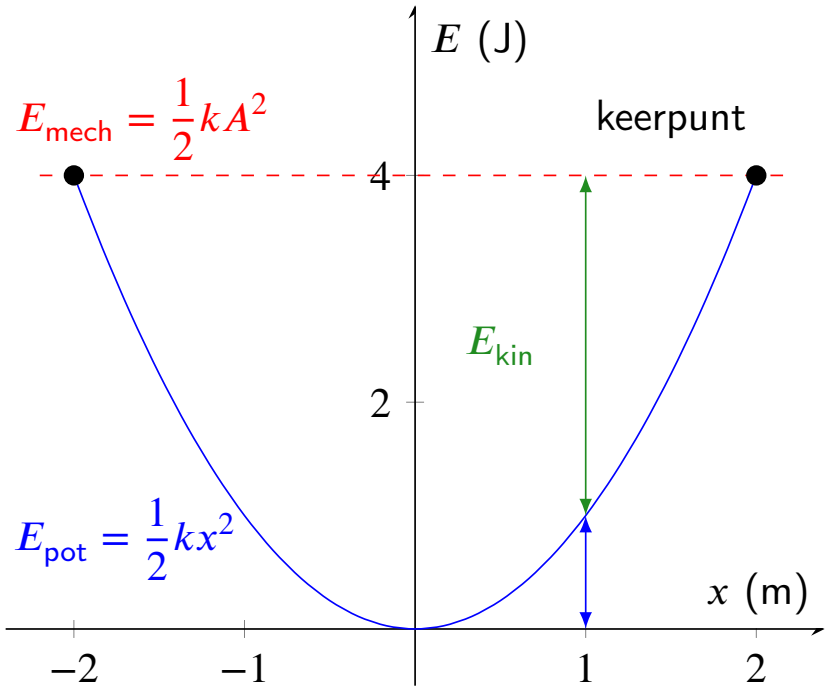
(a) Hoe groter de amplitude, hoe groter de mechanische energie van het systeem.

(b) Hoe groter de frequentie, hoe groter de mechanische energie van het trillende systeem.

We kunnen de mechanische energie van de harmonische trilling ook weergeven als functie van de (1D) positie langs de x-as. In volgende figuur is $A = 2$ m en $k = 2$ N/m.

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Energie van een harmonische trilling



De blauwe curve geeft de potentiële energie weer als functie van de positie: de hoogte van de curve komt dus overeen met E_{pot}. In evenwicht is de potentiële energie nul. De totale mechanische energie E_{mech} is behouden, en dus constant als functie van de positie: deze is weergegeven in het rood. Het verschil tussen de totale energie en de potentiële energie is de kinetische energie. Dit is weergegeven met de groene dubbele pijl. Deze is in evenwicht maximaal, maar op de uiteinden nul.

Voorbeeld 6.5.1. Als een systeem dat een harmonische trilling uitvoert $3,0$ keer zoveel energie heeft als een tweede dat met gelijke frequentie en massa trilt, wat is dan de verhouding tussen de beide amplitudes?

Uitwerking: Voor de energie kunnen we schrijven dat

$$\begin{aligned} E_{mech}(1) &= 3 \cdot E_{mech}(2) \\ 2\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A_1^2 &= 3 \cdot 2\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A_2^2 \end{aligned}$$

Hieruit volgt voor de amplitudes dat

$$\begin{aligned} A_1^2 &= 3 \cdot A_2^2 \\ \frac{A_1}{A_2} &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

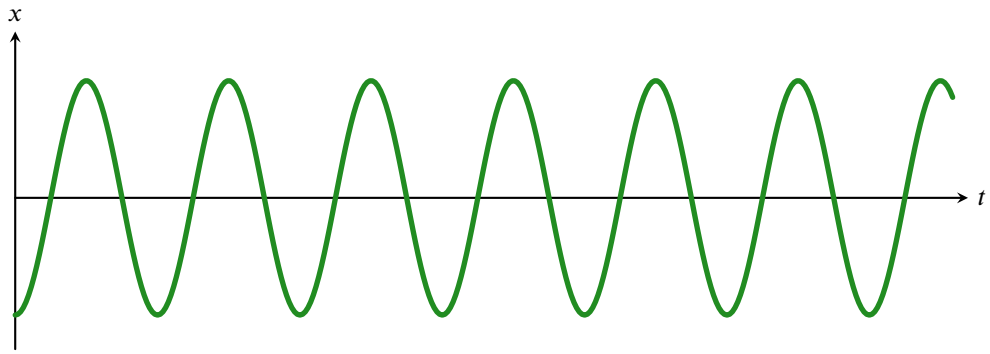
CC BY-NC-SA 4.0

6.6 Soorten trillingen

6.6.1 De vrije harmonische trilling

Als een voorwerp een trilling uitvoert en enkel onderhevig is aan een elastische kracht, voert het voorwerp een harmonische trilling uit. We spreken dan van een spontane of **vrije harmonische trilling**. De trillingsvergelijking wordt gegeven door een zuivere sinusfunctie.

De amplitude is op elk ogenblik even groot. De frequentie waarmee het systeem trilt, is $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$.



Figuur 49 – De vrije harmonische trilling.

6.6.2 De gedempte harmonische trilling

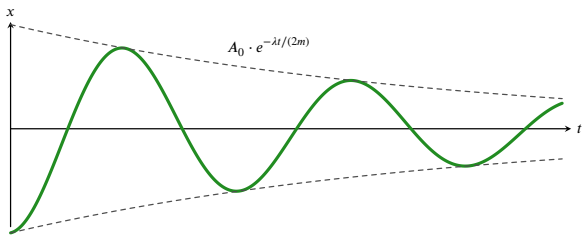
Een vrije harmonische trilling kan in realiteit niet bestaan omdat er er op een bewegend systeem steeds wrijvings- of weerstandskrachten inwerken. In een trillende veer wordt o.a. warmte geproduceerd, waardoor de mechanische energie van het systeem afneemt: de uitwijking wordt na verloop van tijd steeds kleiner, het systeem voert een **gedempte harmonische trilling** uit.

Vergelijken we een gedempte met een niet-gedempte trilling, dan vinden we twee verschillen.

(a) De amplitude $A(t)$ is dan geen constante meer, maar volgt een dalende exponentiële functie.

(b) De trillingsfrequentie f' is (wel opnieuw een constante, maar) gedaald naar een lagere waarde (noem f') dan de ongedempte frequentie f. Uiteraard kunnen we hetzelfde zeggen over de pulsatie ω'.

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t/2m} \cdot \sin\left(\omega' \cdot t + \varphi_0\right).$$



Figuur 50 – De gedempte harmonische trilling.

De factor $A_0 \cdot e^{-\lambda t/2m}$ komt overeen met de amplitude. Hierin bepaalt λ de demping. Hoe groter λ, hoe sterker de demping is, en hoe sneller de amplitude afneemt.

CC BY-NC-SA 4.0

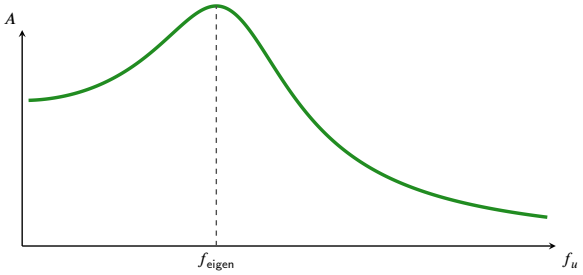
6.6 Soorten trillingen

6.6.3 De gedwongen harmonische trilling

Het energieverlies (en dus amplitudeverlies) bij een gedempte harmonische trilling kan gecompenseerd worden als er een uitwendige kracht op het systeem inwerkt. Op die manier kan je toch een blijvende harmonische trilling realiseren. Bekijk bv. een kindje op een schommel: als je af en toe een duwtje in de rug geeft, blijft het kindje in beweging.

Veronderstel dat de uitwendige kracht ook periodisch is in de tijd met frequentie f_u. Na enige tijd zal het systeem harmonisch trillen met de frequentie f_u van de uitwendige kracht. Vanaf dan blijft de amplitude constant en verloopt de trilling ongedempt. Het energieverlies door de wrijving wordt gecompenseerd door de uitwendige kracht.

Als de frequentie van de uitwendige kracht overeenkomt met de **resonantiefrequentie** van het gedempte massa-veer systeem (en als de demping niet te sterk is) blijkt de amplitude van de harmonische trilling erg groot te zijn. Men spreekt dan van **resonantie**. De resonantiefrequentie van een gedempt harmonisch trillend systeem ligt in de buurt van (namelijk iets lager dan) de eerder gedefinieerde **eigenfrequentie** van het systeem. Omdat het verschil tussen beide vaak klein is, benaderen we de resonantiefrequentie in wat volgt steeds door de eigenfrequentie. Bij resonantie is de overdracht van energie van het uitwendige aandrijfsteem naar het massa-veer systeem maximaal. Zoals het volgende voorbeeld aangeeft, is een resonantiefenomeen niet steeds gewenst.



Figuur 51 – Als de frequentie van de uitwendige kracht f_u precies gelijk is aan de resonantiefrequentie f_{reson}, treedt resonantie op. De resonantiefrequentie kan benaderd worden door de eigenfrequentie van het systeem.

Voorbeeld 6.6.1. In 1940 stortte de Tacoma Narrows Bridge (Washington) neer. Dit was een hangbrug. De wind zorgde blijkbaar voor een periodieke kracht waarvan de frequentie overeenkwam met de eigenfrequentie. De splinternieuwe brug kwam daardoor in resonantie en stortte in.



Figuur 52 – Instorting van de Tacoma bridge (bron: https://www.businessinsider.com/biggest-structural-failures-disasters-history-2019-11?r=US&IR=T).

CC BY-NC-SA 4.0

6.7 Oefeningen Trillingen

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.1 Instapoefeningen

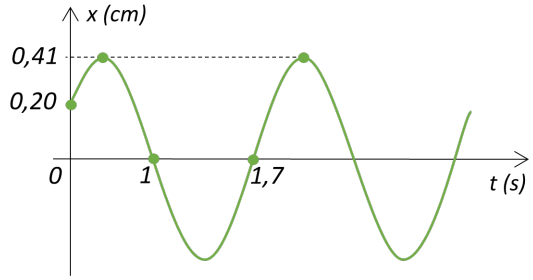
1. Het vlies van een luidspreker trilt met een amplitude van $A = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ m en een frequentie van 262 Hz. Dat komt overeen met een lage do op een piano. Bereken de pulsatie van de trilling en de maximumsnelheid van het vlies van de luidspreker.

$$\omega = \ldots\ldots \text{ rad/s}$$
$$v_{max} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$

2. Als de schokdempers van een auto versleten zijn, zal de auto bij de kleinste schok door bijvoorbeeld een put in de weg, een trilling uitvoeren. Bereken de frequentie en de periode van zo'n trilling als je weet dat de totale massa van de auto gelijk is aan 1250 kg en de veerconstante van het veringssysteem van de auto gelijk is aan $6,65 \cdot 10^4$ N/m.

$$f = \ldots\ldots \text{ Hz}$$
$$T = \ldots\ldots \text{ s}$$

3. Onderstaande figuur geeft de uitwijking van een kleine massa $m = 4{,}5$ g aan het uiteinde van een veer, als functie van de tijd weer. Op de figuur zijn een aantal punten aangeduid. Leid uit deze gegevens de veerconstante van de veer af.



Figuur 53 – Trilling van een kleine massa aan een veer

$$k = \ldots\ldots \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

4. Bepaal de maximale snelheid van de massa waarvoor de trilling weergegeven is in bovenstaande figuur.

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.2 Standaardoefeningen

1. Een voorwerp voert een horizontale harmonische trilling uit met een amplitude van 2 cm en een frequentie van 2 Hz. Op $t = 0$ s beweegt het voorwerp door het evenwichtspunt, terwijl het naar rechts beweegt. Noteer het voorschrift van de bewegingsvergelijking $x(t)$, als je de x-as naar rechts kiest.

2. Een veer hangt verticaal aan het plafond. Als je er een massa aan hangt, rekt de veer 2,0 cm uit waardoor ze een nieuw evenwichtspunt bereikt. Als je nu zachtjes aan de massa trekt en dan weer los laat, wat zal dan de frequentie van de trilling zijn?

$$f = \ldots\ldots \text{ Hz}$$

3. Een balletje voert een horizontale harmonische trilling uit die je kan beschrijven door $x(t) = 25\text{cm} \cdot \cos(10t)$ waarin t in s wordt uitgedrukt. Op welk ogenblik is de kinetische energie voor het eerst dubbel zo groot als de potentiële energie?

$$t = \ldots\ldots \text{ s}$$

4. Beschouw een harmonische trilling. Definieer Δt_1 als de tijd die nodig is om vanuit de evenwichtspositie een halve amplitude af te leggen. Definieer Δt_2 als de tijd die nodig is om vanaf een halve amplitude te bewegen tot de maximale uitwijking. Welke uitspraak is juist?

Meerkeuze:

(a) $\Delta t_1 < \Delta t_2$

(b) $\Delta t_1 = \Delta t_2$

(c) $\Delta t_1 > \Delta t_2$

(d) Er zijn te weinig gegevens over de trilling om hierover een uitspraak te doen.

5. Een massa van 0,400 kg trilt aan een verticale veer zodat de massa tot op 2 cm boven het tafelblad komt als laagste punt en tot op 18 cm boven de tafel als hoogste punt. De periode is 5,0 s. Bepaal de amplitude en de veerconstante. Bepaal ook de snelheid en de versnelling van de massa in het punt op 10 cm boven het tafelblad.

$$A = \ldots\ldots \text{ cm}$$
$$k = \ldots\ldots \text{ N/m}$$
$$v = \ldots\ldots \text{ m/s}$$
$$a = \ldots\ldots \text{ m/s}^2$$

6. Een massa van 2,750 kg voert een harmonische trilling uit aan een horizontale veer met veerconstante $k = 275$ N/m. In het punt op 3,0 cm van het evenwichtspunt is de snelheid van de massa $0,45$ m/s. Bepaal de amplitude van de beweging.

De amplitude is: …… cm

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.3 Gevorderde oefeningen

1. Een persoon met een massa van 75,0 kg maakt een bungeesprong vanaf een hoge kraan. Nadat het laagste punt is bereikt veert de persoon in 49,0 s zeven keer op en neer. Uiteindelijk hangt de persoon stil op 30 m onder de kraan. Hoe lang is de niet-uitgerekte bungee elastiek?

De lengte van de niet-uitgerekte bungee elastiek is: ..... m

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.4 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over trillingen via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Intro golven

In vorig hoofdstuk leerde je hoe een puntmassa een harmonische trilling kan uitvoeren. In dit hoofdstuk leer je wat er gebeurt als zo'n trillende puntmassa, die deel uitmaakt van bijvoorbeeld een touw, zijn buur aanstoot zodat die ook begint te trillen, waarna die hetzelfde doet met zijn buur enzovoort ... Steeds meer en meer puntmassa's zullen beginnen trillen, telkens met een minieme achterstand op de vorige, zodat er een golf van trillingen zal lopen door bijvoorbeeld het touw. We bestuderen vervolgens de eigenschappen van lopende golven.

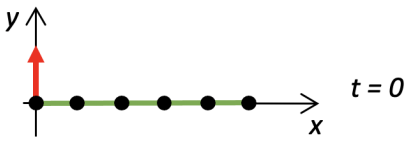
CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Ontstaan van een golf

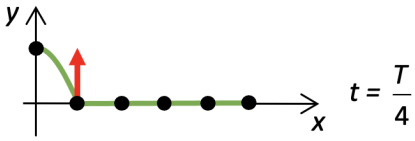
Een **golf** is een fenomeen dat ontstaat wanneer een trilling die op een bepaalde plaats opgewekt is, zich voortplant in de omgeving. Een typisch voorbeeld is geluid: een trillende snaar doet de luchtmoleculen errond trillen, die op hun beurt naburige luchtmoleculen doen trillen, die uiteindlijk je trommelvlies doen trillen, zodat je het geluid waarneemt.

Definitie 7.2.1. Een golf is de voortplanting van een trilling in de ruimte. De bron is de plaats waar de trillingen worden voortgebracht en waar de golf vertrekt.

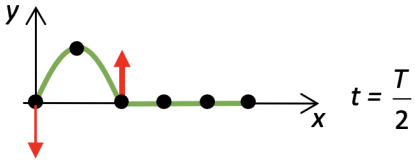
Beschouw een touw waarop je zes punten hebt aangeduid. Op een bepaald tijdstip laat je punt 1 een trilling uitvoeren. De bron van de trilling is dus punt 1.



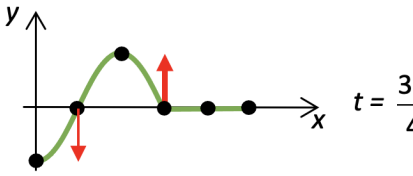
De bron (punt 1) bevindt zich in haar evenwichtspunt en beweegt naar boven.



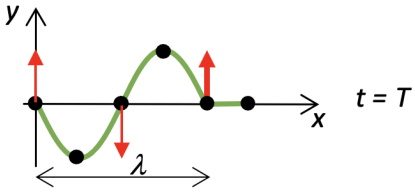
De bron bereikt haar positief maximum. Deeltjes naast de bron worden mee naar boven getrokken door cohesiekrachten. De storing heeft zich uitgebreid tot punt 2. Punt 2 begint te trillen en start naar boven.



De bron bereikt terug haar evenwichtspunt terwijl ze naar beneden beweegt. Punt 2 bereikt zijn positief maximum. Punt 3 begint te trillen en start naar boven. Dat punt trilt in tegenfase met de bron.



De bron bereikt haar negatief maximum. Punt 2 bereikt bereikt terug het evenwichtspunt. Punt 4 begint te trillen en start naar boven



De bron heeft één volledige trilling uitgevoerd. De storing heeft zich uitgebreid tot punt 5, dat vanaf nu begint te trillen. Punt 5 trilt in fase met de bron. De afstand van dat punt tot de bron definiëren we als de golflengte λ.

Als een bron een harmonische trilling uitvoert in een middenstof, zal die trilling zich uitbreiden en zal na enige tijd elk deeltje van die middenstof een harmonische trilling uitvoeren met

(a) een amplitude A die dezelfde is, als of kleiner dan, die van de bron;

CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Ontstaan van een golf

(b) een frequentie f die dezelfde is als die van de bron;

(c) een beginfase φ_0 die afhangt van de afstand van dat punt tot de bron.

Enkel bij ééndimensionale, ongedempte golven is de amplitude overal dezelfde. In alle andere gevallen (meerdimensionaal en/of gedempt) zal de amplitude afnemen als je van de bron weg beweegt. De frequentie is enkel dezelfde als de middenstof homogeen is.

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Begrippen

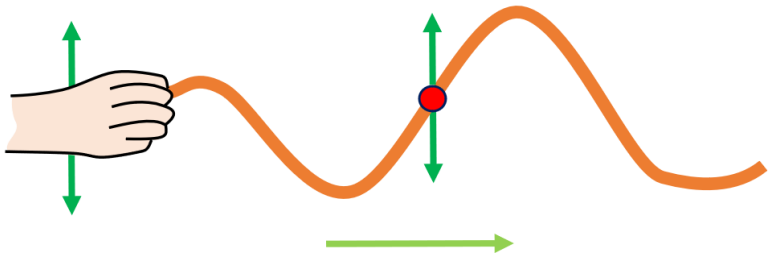
Er bestaan verschillende soorten golven. We kunnen de golven bijvoorbeeld indelen volgens de middenstof waarin ze zich voortplanten:

(a) Sommige golven hebben een middenstof nodig om zich te kunnen voortplanten. Zo'n golven noemen we **mechanische golven**. Voorbeeld: geluidsgolven planten zich voort via de lucht.

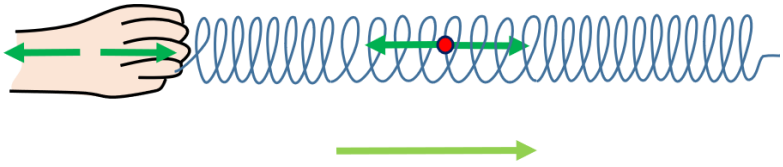
(b) **Elektromagnetische golven** (EM-golven) zoals radiogolven, lichtgolven, röntgenstralen, licht ... hebben geen middenstof nodig.

Je kan golven ook indelen volgens de trilrichting van de deeltjes:

(a) Bij een **transversale golf** staat de richting waarin de golven zich voortplanten loodrecht op de trilrichting van de deeltjes: bv. golven op een touw, golven op een wateroppervlak.



(b) Bij een **longitudinale golf** is de richting waarin de golven zich voortplanten dezelfde als de trilrichting van de deeltjes. Daardoor ontstaan verdichtingen en verdunningen in de middenstof: bv. geluidsgolven, golven in een veer.



Een derde indeling die je kan maken is volgens het aantal dimensies waarin de golf zich voortplant:

(a) **Eéndimensionale golven** zijn golven die zich uitbreiden in één enkele richting: bv. een golf op een touw, een geluidsgolf in een tunnel.

(b) **Tweedimensionale golven** zijn golven die zich uitbreiden in een vlak: bv. golven op een trommelvlies, golven op een wateroppervlak.

(c) **Driedimensionale golven** zijn golven die zich uitbreiden in de ruimte: bv. geluidsgolven in een open ruimte.

We definiëren nu een aantal begrippen, die nodig zijn om een golf te beschrijven.

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Begrippen

Als je een steen in stilstaand water gooit, zie je cirkels ontstaan, die groter en groter worden. Die cirkels worden gevormd door deeltjes die op hetzelfde ogenblik zijn beginnen te trillen. De lijn of het oppervlak gevormd door die deeltjes noemen we een **golffront**. Alle deeltjes van eenzelfde golffront trillen in fase met elkaar.

Er zijn oneindig veel golffronten, maar meestal tekenen we enkel de golffronten enkel voor de deeltjes die zich in een positief maximum bevinden.

Golffronten kunnen verschillende vormen hebben:

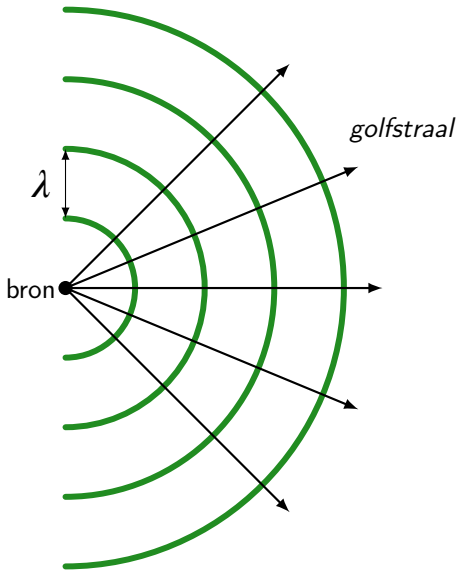
(a) lijnen of vlakken: dan spreken we van (1D) **vlakke golven**, bv. geluidsgolven in een tunnel;

(b) cirkelvormig: dat zijn (2D) **circulaire golven**, bv. golven op een wateroppervlak;

(c) bolvormig: dat zijn (3D) **sferische golven**, bv. geluidsgolven in de ruimte.

De **golfstraal** door een punt geeft de richting weer waarin het golffront van dat punt beweegt. Golfstralen staan loodrecht op de golffronten.

De **golflengte** λ is de afstand waarover de golf zich uitbreidt in een tijd T. De afstand tussen twee opeenvolgende golffronten (enkel getekend in positieve maxima) is gelijk aan de golflengte.



Circulair golffront

In een tijdsverloop gelijk aan de periode T breidt de golf zich uit over een afstand λ. Voor de snelheid waarmee dit gebeurt, geldt daarom

$$v_g = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f.$$

Deze snelheid waarmee een golf zich uitbreidt, noemen we de **voortplantingssnelheid** v_g van de golf of de **golfsnelheid**. Ze hangt af van de middenstof: bij mechanische golven is de golfsnelheid groter naarmate de cohesiekrachten tussen de deeltjes van de middenstof groter is. Bij niet-mechanische golven is dat effect, als er een middenstof is, meestal omgekeerd.

Voorbeeld 7.3.1. (a) Geluid is een mechanische golf. De geluidssnelheid in lucht bedraagt 344 m/s. In water (met grotere cohesie) is dat 1500 m/s.

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Begrippen

(b) Licht is een niet-mechanische golf. De lichtsnelheid in lucht of vacuüm bedraagt $2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, in water is dat $2,26 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Voorbeeld 7.3.2 (Vraagstuk)**.** Een HeNe-laser zendt rood licht uit met een golflengte van $632,8$ nm. Welke frequentie heeft dit licht?

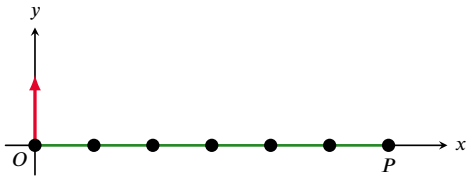
Uitwerking: De golfsnelheid van het laserlicht is natuurlijk gelijk aan de lichtsnelheid. Bijgevolg is de frequentie gelijk aan

$$f = \frac{v_g}{\lambda} = \frac{2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{632,8 \cdot 10^{-9}\text{m}} = 4,738 \cdot 10^{14}\text{Hz}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 De golfvergelijking(en)

De bron voert een harmonische trilling uit met amplitude A, pulsatie ω en beginfase 0. Ze verspreidt een ééndimensionale golf die ongedempt is. We leiden de **trillingsvergelijking** af voor een willekeurig punt P op een zekere afstand van de bron.



De x-coördinaat van het punt P noemen we x. Op het ogenblik $t = \frac{x}{v_g}$ komt de golf aan in het punt P.

De trillingsvergelijking van de bron wordt gegeven door $y_B(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

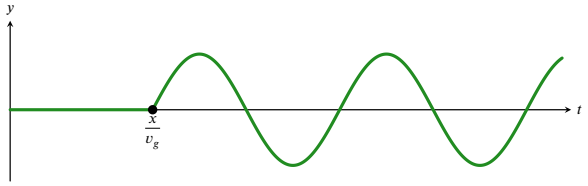
Je kan aantonen dat de trillingsvergelijking van een punt P met coördinaat x dan gegeven wordt door

$$y_P(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \qquad (\text{met } t \geq \frac{x}{v_g} \text{ en } k = \frac{2\pi}{\lambda}).$$

Voor de trillingsvergelijking van punt P geldt dus

$$\begin{cases} y_P(t) = 0 & (\text{met } t < \frac{x}{v_g}), \qquad (1) \\ y_P(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) & (\text{met } t \geq \frac{x}{v_g}). \end{cases}$$

Dat is een samengestelde functie waarin de tijd t de variabele is en de positie x een bepaalde (vaste) waarde heeft. De $y_P(t)$-grafiek toont de uitwijking y van één punt P als functie van de tijd.



Figuur 54 – De trilling van het gekozen punt start pas als de golf is toegekomen in het punt.

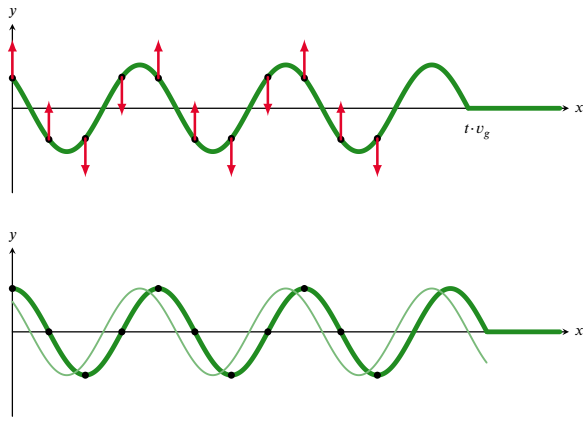
Maar je kunt in de samengestelde functie (1) ook de positie x als veranderlijke beschouwen en voor het tijdstip t een bepaalde (vaste) waarde nemen. Als je die functie omvormt, verkrijg je

$$\begin{cases} y(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) & (\text{met } x \leq t \cdot v_g), \\ y(x) = 0 & (\text{met } x > t \cdot v_g). \end{cases}$$

De onderstaande $y(x)$-grafiek toont de uitwijking y van alle punten op één bepaald tijdstip. Op de figuur eronder zie je de golf een tijdje later. Vermits de golftoppen naar rechts (= mee met de x-as) opschuiven, noemen we het een **rechtslopende golf**. Schuiven de toppen tegen de x-as op, dan spreken we van een **linkslopende golf**.

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 De golfvergelijking(en)



Figuur 55 – (a) momentopname van de trilling van alle punten, met in enkele punten de stand van de snelheidsvector op dat tijdstip. (b) momentopname een tijdje na de momentopname in figuur (a), die ter vergelijking in dunne lijn toegevoegd is.

Zo'n grafiek kan je bekijken alsof het een foto is van de golf: je bekijkt de hele golf op één bepaald tijdstip.

Eigenschap 7.4.1. De golfvergelijking van een ééndimensionale ongedempte rechtslopende golf wordt gegeven door

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \\ &= A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \\ &= A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \end{aligned}$$

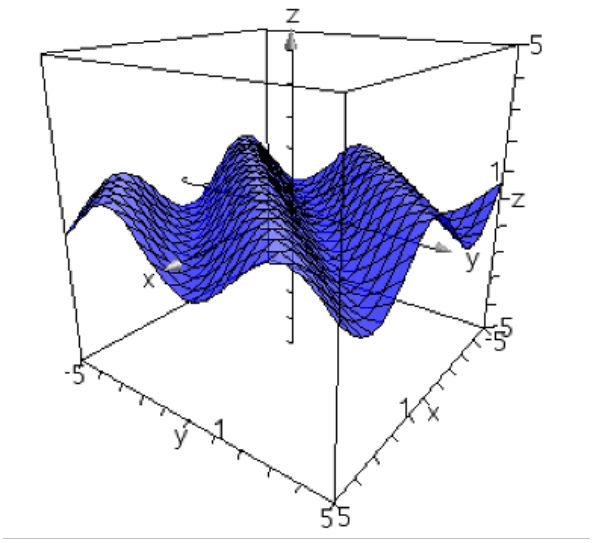
$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ is de pulsatie *van de trilling* en $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ is het golfgetal.

Voor een linkslopende golf wordt dit $y(x,t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + k \cdot x)$.

Tot slot kunnen we stellen dat de **golffunctie** een functie is met **twee onafhankelijke veranderlijken**, x en t. Vandaar dat een grafiek moeilijk te maken is en enkel via aangepaste computersoftware in 3D een mooi beeld kan geven van de functie.

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 De golfvergelijking(en)



Figuur 56 – Computergrafiek van de golffunctie (betekenis van de assen : horizontaal x- en t-as, verticaal de uitwijking $y(x,t)$).

CC BY-NC-SA 4.0

7.5 Energie en intensiteit van een golf

Een golf is de voortplanting van een trilling in de ruimte. In het geval van sferische mechanische golven worden daarbij steeds meer deeltjes aan het trillen gebracht. Elk trillend deeltje heeft een hoeveelheid mechanische energie. Een golf transporteert dus energie door de ruimte. Een golf transporteert geen massa.

Om de trilling van een bron in stand te houden, moet voortdurend energie aan de bron geleverd worden: de bron staat immers voortdurend energie af aan de deeltjes errond. De hoeveelheid energie die de bron per seconde uitzendt is het vermogen van de bron:

$$P = \frac{E_{omgezet}}{\Delta t}$$

Deze wordt uitgedrukt in watt (W).

Voorbeeld 7.5.1.

Neem als voorbeeld een luidspreker van 26 W, die de lucht errond aan het trillen brengt.

Beschouw nu een bolvormig oppervlak rond de luidspreker op een afstand van 1 m. De oppervlakte van dit oppervlak is $A_s = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (1,0\ \text{m})^2 = 13\ \text{m}^2$. De energie die de luidspreker uitzendt wordt verdeeld over de deeltjes op dit boloppervlak.

Verdubbel je nu de afstand tot de bron, dan wordt het boloppervlak vier keer groter: $A_s = 4\pi \cdot (2,0\ \text{m})^2 = 50\ \text{m}^2$. Ook nu wordt de energie van de bron over al deze deeltjes verdeeld, waardoor elk trillend deeltje minder energie ontvangt van de bron. Daardoor is de amplitude van de trilling van die deeltjes kleiner. Het geluid wordt minder sterk voor een waarnemer die zich verder van de bron bevindt: de intensiteit van de golf neemt af.

Definitie 7.5.1. De intensiteit I van een golf is de energie die per seconde en per m^2 doorheen een doorsnede loodrecht op de golfstralen stroomt op die plaats.

$$I = \frac{E}{\Delta t \cdot A_s} = \frac{P}{A_s}$$

I wordt uitgedrukt in $\frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

In bovenstaand voorbeeld is de intensiteit van de geluidsgolf op 1 m van de bron gelijk aan $I = \frac{26\ W}{13\ \text{m}^2} = 2,0\frac{W}{\text{m}^2}$, terwijl dit op 2 m van de bron vier keer kleiner is, $I = \frac{26\ W}{50\ \text{m}^2} = 0,52\frac{W}{\text{m}^2}$.

7.5.1 Gelduidsniveau

In het geval van geluidsgolven wordt de intensiteit I van de golf meestal omgerekend naar het geluidsniveau N, dat uitgedrukt wordt in decibel (dB).

Definitie 7.5.2. Als een geluidsgolf op een bepaalde plaats een intensiteit I heeft, is het geluidsniveau N op die bepaalde plaats

$$N = 10\ \text{dB} \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

met $I_0 = 10^{-12}\frac{W}{\text{m}^2}$

Het feit dat het geluidsniveau een logaritmische functie bevat, moet een aandachtspunt zijn: indien de intensiteit op een bepaalde plaats verdubbelt, neemt het geluidsniveau slechts toe met 3 dB:

CC BY-NC-SA 4.0

7.5 Energie en intensiteit van een golf

$$\begin{aligned} N &= 10\ \text{dB} \cdot \log \frac{2I}{I_0} \\ &= 10\ \text{dB} \cdot \left(\log \frac{I}{I_0} + \log 2 \right) \\ &= 10\ \text{dB} \cdot \log \frac{I}{I_0} + 3,0\ \text{dB} \end{aligned}$$

Voorbeeld 7.5.2.

Koop je een stofzuiger met een geluidsniveau van 60 dB op 1 m van de stofzuiger, dan is die maar half zo luid als een stofzuiger met een geluidsniveau van 63 dB. Van zodra het geluidsniveau groter wordt dan 100 dB, kan je best gehoorbeschermers dragen.

CC BY-NC-SA 4.0

7.6 Oefeningen Golven

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

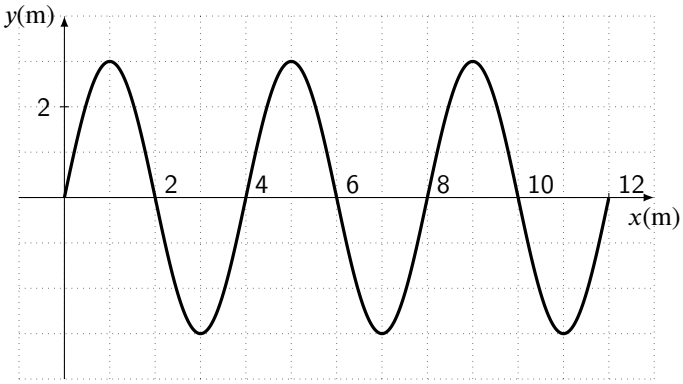
7.6.1 Instapoefeningen

1. Een golf met een amplitude van 4,50 cm en een frequentie van 2,00 Hz legt in 1,00 s 25,0 m af. Hoe groot is de golflengte van deze golf?

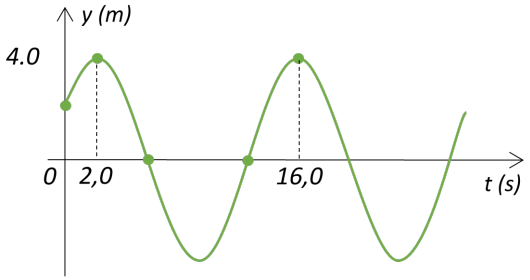
$$\lambda = \ldots\ldots \text{ m}$$

2. De grafiek stelt een momentopname voor van een lopende golf op tijdstip t. De golfsnelheid is 20,0 m/s. Wat is de frequentie van de bron die deze golf veroorzaakt?

$$f = \ldots\ldots \text{ Hz}$$



3. Onderstaande grafiek stelt de uitwijking voor van een punt op een afstand x van de bron. De tijd begon pas te lopen als de golf in het punt aankwam. De voortplantingssnelheid van de golf is $80,0$ m/s. Bepaal de golflengte van de door de bron uitgezonden golf.

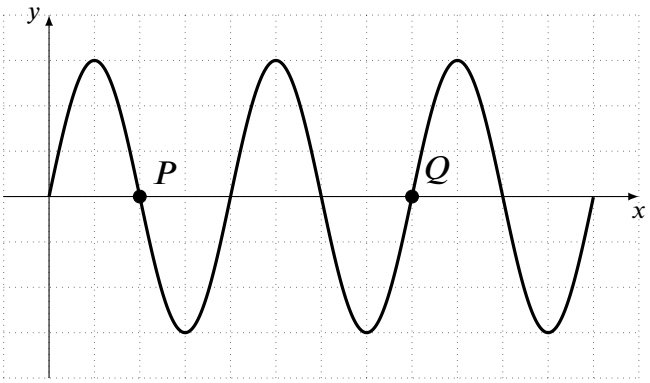


$$\lambda = \ldots\ldots \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.6.2 Standaardoefeningen

1. De grafiek stelt een momentopname voor van een lopende golf op tijdstip t. Hoe groot is het faseverschil tussen de punten P en Q? Druk dit uit in graden.



$\Delta\varphi = \ldots\ldots\ ^\circ$

2. De vergelijking van een rechtslopende golf wordt gegeven door:

$$y(x,t) = 5\ sin(2\pi(2t - \frac{x}{3}))$$

Wat is de frequentie van de bron die de golf uitzendt? Wat is de golflengte?

$f = \ldots\ldots$ Hz

$\lambda = \ldots\ldots$ m

3. Welke uitspraak is juist?

Meerkeuze:

(a) Bij een lopende golf wordt massa getransporteerd in de voortplantingsrichting.

(b) Als de frequentie van de trillende bron toeneemt, neemt ook de golflengte toe.

(c) Mechanische golven planten zich sneller voort in vaste stoffen dan in vloeistoffen.

(d) Bij een golf die zich met cirkelvormige golffronten over een wateroppervlak voortplant, is de afname van de amplitude in punten verder van de bron uitsluitend te wijten aan energieverlies door bijvoorbeeld wrijving.

4. De vergelijking van een rechtslopende golf wordt gegeven door:

$$y(x,t) = 15\ sin(2\pi(\frac{t}{0,30} - \frac{x}{1,5}))$$

Hoe lang duurt het vooraleer deze golf 40 m heeft afgelegd?

$t = \ldots\ldots$ s

CC BY-NC-SA 4.0

7.6.2 Standaardoefeningen

5. In de buurt van de luchthaven meet men bij het opstijgen van een passagiersvliegtuig op 300 m afstand een geluidsniveau van 88,0 dB. Bereken de intensiteit van de geluidsgolf op die plaats.

$$I = \ldots\ldots \; 10^{-4} \frac{W}{\mathrm{m}^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.6.3 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over golven via het Usolv-it oefenplatform.

2. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over geluid via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

8.1 Intro hydrostatica

In dit hoofdstuk beschouwen we een fluïdum in rust. We onderzoeken de druk op een bepaalde plaats in het fluïdum en gaan na waar deze druk van afhangt. Met een fluïdum bedoelen we een vloeistof of een gas.

We bespreken ook de Archimedeskracht die inwerkt op een ondergedompeld voorwerp.

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Hydrostatische druk

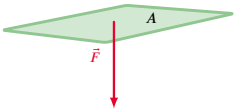
De dichtheid van een materiaal is gedefinieerd als de hoeveelheid massa, M, per eenheid volume V:

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

De SI-eenheid van dichtheid is: kg/m^3.

De druk op een oppervlak wordt gedefinieerd als de grootte van de normaalkracht (de kracht loodrecht op het oppervlak) per eenheid van oppervlakte:

$$p = \frac{F}{A}.$$



De SI-eenheid van druk is Pascal (1 Pa = 1 N/m^2).

De atmosferische druk $p_0 = 1.01 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 101\mathrm{kPa}$.

8.2.1 Hoogte-afhankelijkheid van de druk

We beschouwen vloeistoffen die weinig samendrukbaar zijn. Daarom mogen we aannemen dat de massadichtheid in de volledige vloeistof even groot is.

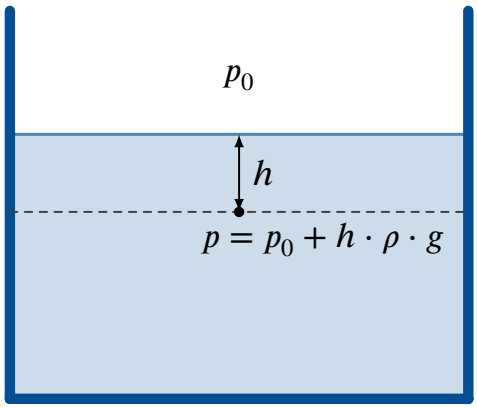
Als p_0 de atmosferische druk is net boven het vloeistofoppervlak (zie figuur 57), dan is op een diepte h in die vloeistof de druk gelijk aan

$$p = p_0 + h \cdot \rho \cdot g$$

De druk neemt dus lineair toe met de diepte. Merk op dat we hier veronderstellen dat de enige kracht die op de vloeistof werkt, de zwaartekracht is. De tweede term in de formule noemen we de hydrostatische druk, dit is de druk die door de vloeistof alleen wordt uitgeoefend:

$$p_H = h \cdot \rho \cdot g$$

In eenzelfde vloeistof in rust is de druk in een horizontaal vlak overal dezelfde.



Figuur 57 – De druk in een fluïdum neemt toe met de diepte.

CC BY-NC-SA 4.0

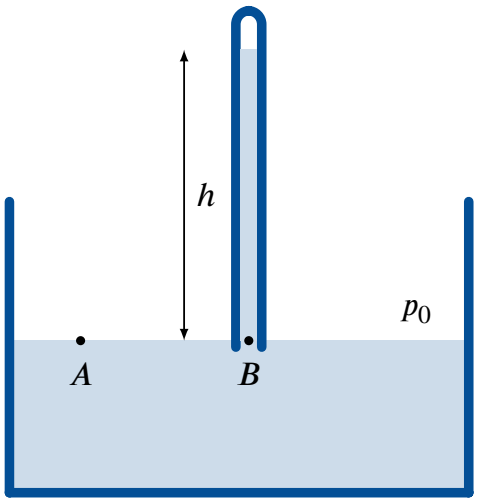
8.2 Hydrostatische druk

8.2.2 Drukmeting met de buis van Torricelli

Uit vergelijking (**??**) volgt dat we een drukverschil kunnen uitdrukken als een hoogteverschil. Dit laat toe om drukmetingen te herleiden tot lengtemetingen. Een fundamentele opstelling om de luchtdruk te meten, is de buis van Torricelli (zie figuur 58). Een lange verticale buis wordt gevuld met kwik (Hg) en omgekeerd verticaal in een kwikbad gezet. Zo ontstaat vacuüm boven het kwikoppervlak in de buis. De druk in A is gelijk aan de druk in B (in eenzelfde vloeistof is de druk op een horizontaal vlak overal gelijk).

$$p_0 = p_A = p_B = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h$$

Vermits p_A gelijk is aan de druk door de lucht op het kwikoppervlak buiten de buis, kunnen we dus de luchtdruk bepalen door de hoogte h te meten.



Figuur 58 – Drukmeting met de buis van Torricelli.

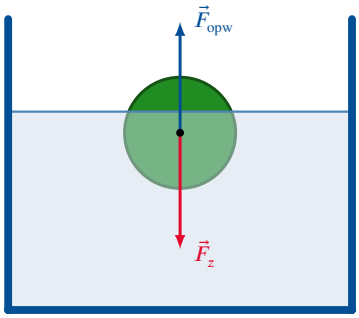
CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Wet van Archimedes

Als een deel V_0 van een voorwerp met volume V ondergedompeld is in een fluïdum, dan ondervindt dit voorwerp een opwaartse stuwkracht waarvan de grootte gelijk is aan de zwaartekracht die op een volume V_0 van het fluïdum inwerkt (= gewicht van de verplaatste vloeistof in rust).

$$F_{\text{opw}} = \rho_{\text{vl}} \cdot V_0 \cdot g$$

met ρ_{vl} de dichtheid van de vloeistof en V_0 het ondergedompelde volume van het voorwerp.



Een voorwerp drijft als de zwaartekracht op het voorwerp gelijk is aan de opwaartse stuwkracht, m.a.w. als het een hoeveelheid fluïdum verplaatst dat een gewicht heeft gelijk aan het gewicht van het voorwerp (geheel of gedeeltelijk ondergedompeld).

Voorbeeld 8.3.1. Een drijvend ijsblokje met volume V drijft in een glas water. Welke fractie van het ijsblokje bevindt zich boven het waterniveau ($\rho_{\text{ijs}} = 917 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\rho_{\text{water}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)?

Uitwerking: Het ijsblokje drijft, dit wil zeggen dat de opwaartse Archimedeskracht gelijk is aan de neerwaartse zwaartekracht op het ijsblokje (evenwicht).

$$\begin{aligned} F_z &= F_A \\ m_{ijs} \cdot g &= \rho_{water} \cdot V_0 \cdot g \\ \rho_{ijs} \cdot V \cdot g &= \rho_{water} \cdot V_0 \cdot g \\ \frac{\rho_{ijs}}{\rho_{water}} &= \frac{V_0}{V} \\ \frac{V_0}{V} &= 0,917 \end{aligned}$$

$91,7$ % van het ijsblokje bevindt zich onder het waterniveau en dus $8,3$ % boven het waterniveau.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Oefeningen Hydrostatica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.1 Instapoefeningen

1. Het diepste punt in de oceaan is gelegen in de Marianentrog in de Stille Oceaan op ongeveer 11,034 km diepte. Dit punt, ten oosten van de Filipijnen, is onderdeel van een diepe kloof die bekend staat als het diepste punt van de aardkorst, waar de druk meer dan 1000 keer hoger is dan aan de oppervlakte. Hoe groot is de druk daar precies? Er is nog gegeven dat de dichtheid van zeewater $1030\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ bedraagt.

$$p = \ldots\ldots \cdot 10^5 \text{Pa}$$

De druk in het diepst bekende punt van de oceaan is $1116 \cdot 10^5$ Pa.

2. Tussen het waterpeil in een watertoren en het water in jouw kraan bestaat een hoogteverschil van 55,0 m. Hoe groot is de hydrostatische druk in jouw kraan?

$$p = \ldots\ldots \cdot 10^5 \text{Pa}$$

De hydrostatische druk in het water van de kraan is $5,40 \cdot 10^5$ Pa.

3. Een zwembad van 4 m bij 8 m en een diepte die lineair toeneemt van 1 m tot 3 m, is tot de rand gevuld met zeewater. Hoe groot is de massa van het water in dit zwembad?

De dichtheid van zeewater bedraagt $1030\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

$$m = \ldots\ldots \cdot 10^4 \text{kg}$$

4. Je speelt in een zwembad met je vrienden met een opgeblazen strandbal met diameter 60 cm. Hoe groot moet de kracht op de bal zijn als je de bal volledig wilt onderdompelen?

$$F = \ldots\ldots \text{ kN}$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.2 Standaardoefeningen

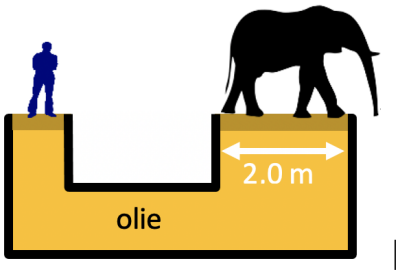
1. Een duikboot heeft een raam met diameter 20 cm. Het glas is $8,0$ cm dik. De fabrikant van de duikboot zegt dat het raam een kracht van maximaal $2 \cdot 10^6$ N kan verdragen. Wat is het diepste punt waarbij de boot nog veilig onder water kan blijven? De druk in de duikboot is gelijk aan de atmosferische druk.

$$d = \ldots\ldots \text{ km}$$

2. Hoe hoog moet een gesloten buis gevuld met water zijn opdat de druk onderaan gelijk zou zijn aan de atmosferische druk?

$$h = \ldots\ldots \text{ m}$$

3. Een student van 70 kg houdt een olifant van 5000 kg in evenwicht op een hydraulische pers. Als de olifant op een rond platform staat met diameter $2,0$ m, wat is dan de diameter van het platform waarop de student staat?



$$d = \ldots\ldots \text{ m}$$

4. Verklaar hoe een boot kan drijven wetende dat metaal (bv. roestvrij staal) een hogere dichtheid heeft dan water.

5. Een persoon zit in een bootje en drijft hiermee in een zwembad. In de boot liggen verschillende bakstenen. De persoon gooit de bakstenen overboord. Ze zinken naar de bodem. (a) Zal het waterniveau in het zwembad | toenemen | afnemen | hetzelfde blijven | (b)Welke van onderstaande uitdrukkingen is geldig? | *i* | *ii* | *iii* |

i. Wanneer de bakstenen zinken naar de bodem verplaatsen ze minder water dan wanneer ze drijven in de boot, dus zal het waterniveau afnemen.

ii. In beide gevallen is eenzelfde massa (boot + persoon + bakstenen) in het zwembad dus zal het waterniveau hetzelfde blijven.

iii. De bakstenen verplaatsen meer water als ze zinken naar de bodem van het zwembad dan wanneer ze in de boot drijven, daardoor zal het waterniveau stijgen.

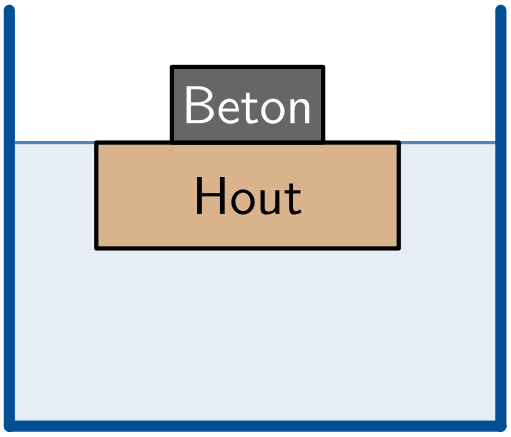
CC BY-NC-SA 4.0

8.4.3 Gevorderde oefeningen

1. Een sluis in een kanaal met lengte 50,0 m, breedte 40,0 m en diepte 2,50 m wordt afgesloten met een grote, zware deur. Hoe groot is de kracht die het water in de sluis op de deur uitoefent?

$$F = \ldots\ldots \cdot 10^5 \mathrm{N}$$

2. Een eikenhouten blok met een massa van 330 g drijft op water. Op dit blokje ligt een stuk beton, zodat de bovenkant van het hout gelijk komt met het wateroppervlak. Hoe groot is de massa van het stuk beton? Er is nog gegeven dat de dichtheid van het eikenhout gelijk is aan $\rho = 660 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.



$$m = \ldots\ldots \ \mathrm{g}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Intro elektrostatica

In ons dagelijks leven is elektriciteit overal aanwezig. De oorsprong van alle elektrische verschijnselen ligt in de materie zelf. Deze is nl. microscopisch opgebouwd uit positief geladen protonen, negatief geladen elektronen en neutronen. Deze laatste zijn elektrisch neutraal. In dit hoofdstuk bespreken we de basiseigenschappen van elektrische ladingen en hun onderlinge interacties. De grootte van de elektrische krachten tussen puntladingen wordt beschreven door de wet van Coulomb. In de omgeving van een lading of ladingsverdeling heerst een krachtveld, met name een elektrisch veld. Ten slotte bekijken we de potentiële energie van een puntlading in een homogeen elektrisch veld en definiëren het begrip potentiaal.

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Elektrische krachtwerking

9.2.1 Elektrische lading

In dit deel bekijken we de eigenschappen van statische elektrische ladingen. Men maakt een onderscheid tussen positieve en negatieve ladingen.

(a) Een elektron is de kleinste negatieve lading en heeft een elementaire lading van $-e = -1.60 \cdot 10^{-19}$C.

(b) Een proton is de kleinste positieve lading en heeft een elementaire lading van $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$C.

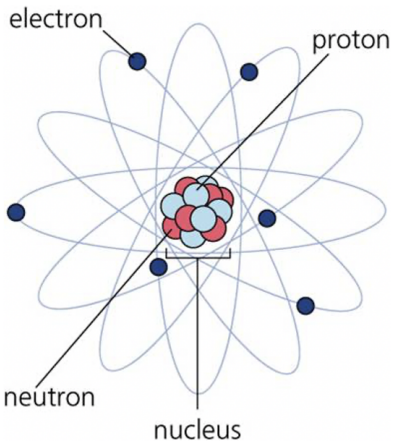
Hierin staat C voor Coulomb, de SI-eenheid van lading (1 Coulomb = 1 Ampère per seconde).

De elektrische lading Q is gekwantiseerd of komt enkel voor in discrete veelvouden van de elementaire lading.

$$Q = n \cdot e \qquad \text{met } n = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$$

Wanneer in een voorwerp het aantal positieve ladingen gelijk is aan het aantal negatieve ladingen, noemt men het voorwerp elektrisch neutraal. Een voorbeeld van een elektrisch neutraal object is een atoom. Dit bestaat uit een positieve kern omringd door een negatieve elektronenwolk (zie figuur 59). Omdat het aantal protonen in de kern gelijk is aan het aantal elektronen in de elektronenwolk, is een atoom elektrisch neutraal.

In de atoomkern zitten naast protonen ook neutronen, maar deze zijn elektrisch neutraal met lading nul.



Figuur 59 – De structuur van een atoom bestaande uit een positieve kern (nucleus) en een negatieve elektronenwolk waarin elektronen op cirkelvormige banen rond de kern bewegen.

Om een macroscopisch object elektrisch op te laden worden elektronen toegevoegd of weggenomen. Zo ontstaat er een netto- of excess-lading:

(a) Voeg je elektronen toe, dan wordt het een negatief geladen voorwerp: het aantal elektronen in het voorwerp is dan groter dan het aantal protonen in het voorwerp.

(b) Neem je elektronen weg, dan wordt het een positief geladen voorwerp: het aantal elektronen in het voorwerp is dan kleiner dan het aantal protonen in het voorwerp.

In een geïsoleerd systeem blijft de elektrische lading altijd behouden.

Sommige voorwerpen worden elektrisch geladen als je ze tegen elkaar wrijft. We wrijven een rubberen staaf met een wollen doekje, wordt de staaf negatief geladen: door het contact tussen het doekje en de staaf zijn

CC BY-NC-SA 4.0

er elektronen van het doekje naar de staaf gegaan. Het doekje is daardoor positief geladen. Wanneer we een tweede rubberen staaf wrijven en in de buurt brengen van de eerste, stellen we vast dat beide staven elkaar afstoten. Wrijven we nu een glazen staaf met een zijden doek en brengen we deze in de buurt van de rubberen staaf, dan trekken de glazen en rubberen staaf elkaar aan.

Tegengestelde ladingen trekken elkaar aan. Ladingen met hetzelfde teken stoten elkaar af.

9.2.2 Elektrische geleiders en isolatoren

Elektronen kunnen bewegen in materialen. Afhankelijk van het materiaal gebeurt deze verplaatsing makkelijker. **Geleiders** zijn stoffen waarin een groot deel van de elektronen (vrije elektronen) niet gebonden zijn aan de atomen en vrij kunnen bewegen. Hierdoor verplaatsen elektronen in geleiders zich gemakkelijk. Alle metalen (zilver, koper, goud, aluminium, ijzer, nikkel, enz.) zijn geleiders. Zilver is de beste geleider maar men gebruikt in elektrische toestellen echter vooral koper omdat het goedkoper is.

Isolatoren of niet-geleiders (glas, rubber, hout,...) zijn stoffen waarbij alle elektronen gebonden zijn aan de atomen en niet vrij door het materiaal kunnen bewegen.

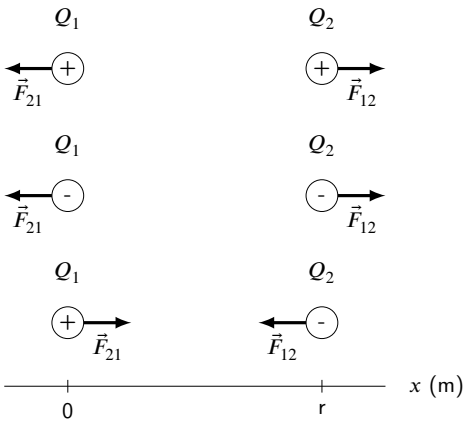
Bij **halfgeleiders** zijn elektronen minder sterk gebonden aan de atomen en kunnen vrij bewegen als ze extra energie krijgen (door bv. temperatuur, licht, ...). De geleiding is ook controleerbaar via dopering met andere atomen. Silicium en germanium zijn twee gekende voorbeelden van halfgeleiders die veelvuldig gebruikt worden in de fabricage van elektronische chips voor computers, mobiele telefoons,... .

9.2.3 Elektrische krachtwerking - wet van Coulomb

Een van de fundamentele vergelijkingen in de elektrostatica is de wet van Coulomb. Deze beschrijft de grootte van de kracht tussen twee puntladingen Q_1 en Q_2 op een afstand r van elkaar:

$$F = k \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2}$$

met evenredigheidsconstante de constante van Coulomb $k = 8,99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ voor vacuüm. De richting van deze kracht is volgens de rechte die de twee ladingen verbindt. Gelijke ladingen stoten elkaar af en tegengestelde ladingen trekken elkaar aan. Hieruit kan de zin van de Coulombkracht bepaald worden (zie figuur 60).

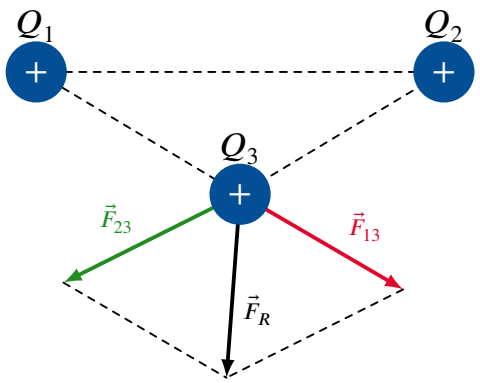


Figuur 60 – Krachtwerking tussen twee puntladingen.

Wanneer een lading Q_3 krachten ondervindt van twee (of meerdere) andere ladingen Q_1 en Q_2, is de resulterende kracht op deze lading de vectorsom van de individuele krachten (zie figuur 61): $\vec{F}_R = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$. Hierin is $\vec{F}_{13}$ de kracht die lading Q_1 op lading Q_3 uitoefent en $\vec{F}_{23}$ de kracht die lading Q_2 op lading Q_3 uitoefent.

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Elektrische krachtwerking



Figuur 61 – Resultante van Coulombkrachten van meerdere puntladingen.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Elektrische velden

9.3.1 Definitie

Net zoals de gravitatiekracht is de elektrische kracht een veldkracht die door de ruimte werkzaam is zonder contact tussen de interagerende objecten (ladingen). Elektrische ladingen trekken mekaar aan of stoten elkaar af. In de omgeving van een bronlading of een ladingsverdeling heerst bijgevolg een elektrisch krachtveld. Dit veld noemt men het elektrisch veld.

Als een positieve testlading Q_0 dit elektrisch veld binnentreedt op een bepaalde plaats in de ruimte, zal er een elektrische kracht $\vec{F}$ op werken. We definiëren dan de elektrische veldvector $\vec{E}$ op een plaats in de ruimte als de elektrische kracht $\vec{F}$ die inwerkt op de positieve testlading Q_0 die op dat punt geplaatst wordt, gedeeld door de testlading:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}.$$

De elektrische veldsterkte is dan gelijk aan $E = \frac{F}{|Q_0|}$. De SI-eenheid van elektrisch veldsterkte is 1 Newton per Coulomb (1 N/C).

Het elektrisch veld is dus de kracht per eenheid lading op een bepaalde plaats. Als we omgekeerd het elektrisch veld op een bepaalde plaats kennen, dan is de kracht die een lading Q op die plaats ondervindt

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}.$$

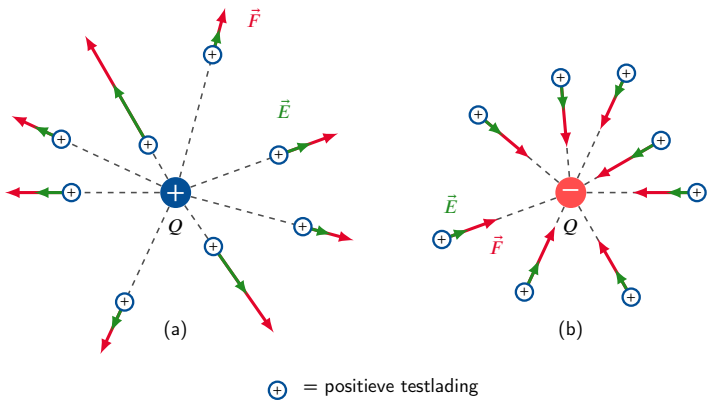
Merk op dat de zin van de kracht afhangt van het teken van de lading Q. Een positieve lading Q ondervindt een kracht met dezelfde richting en zin als het elektrisch veld. Een negatieve lading Q ondervindt een kracht met dezelfde richting, maar tegengestelde zin aan $\vec{E}$.

9.3.2 Soorten elektrische velden

Indien er slechts één bronlading verantwoordelijk is voor het veld, noemen we het veld een **radiaal veld**. Voor de grootte van het veld van één bronlading Q geldt:

$$E = \frac{F}{|Q_0|} = k \cdot \frac{|Q_0| \cdot |Q|}{r^2 \cdot |Q_0|} = k \cdot \frac{|Q|}{r^2}.$$

Hoe dichter bij de bronlading, hoe sterker het veld. In een radiaal elektrisch veld is het veld dus niet overal even sterk. Op een figuur worden de veldvectoren dus niet allemaal even lang getekend.



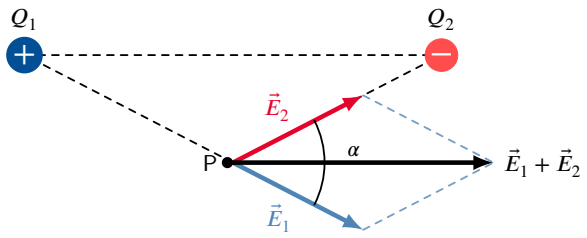
Figuur 62 – Radiaal elektrisch veld van (a) een positieve bronlading en (b) een negatieve bronlading.

Als het veld wel overal even sterk is, spreekt men van een **homogeen elektrisch veld**.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Elektrische velden

Indien je twee even sterke bronladingen neemt, een positieve en een negatieve, spreekt men van een **dipoolveld**. Het elektrisch veld in een punt van de omgeving is dan een som van twee elektrische velden.

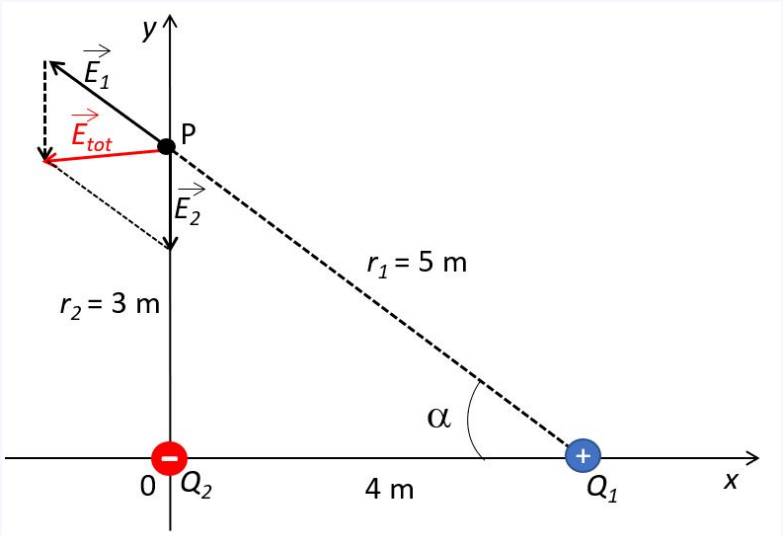


Figuur 63 – De som van twee veldvectoren in een punt P.

De formule voor de som van die twee vectoren is gegeven door

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \cos\alpha}.$$

Voorbeeld 9.3.1 (elektrisch veld)**.** Een lading Q_1 wordt op positie $x = 4,0$ m op de x-as geplaatst. Een tweede lading Q_2 wordt in de oorsprong geplaatst. Als $Q_1 = 75$ nC en $Q_2 = -8$ nC, wat is dan de grootte van het elektrisch veld op de y-as op $y = 3,0$ m?



Figuur 64 – voorbeeld: De som van twee veldvectoren op een bepaalde plaats.

Zoals weergegeven in de figuur zal de totale veldsterkte in het punt P gelijk zijn aan de vectoriële som $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ waarbij $\vec{E}_1$ het veld is veroorzaakt door de positieve lading Q_1 en $\vec{E}_2$ het veld veroorzaakt door de negatieve lading Q_2. De grootte van $\vec{E}_1$ en $\vec{E}_2$:

$$E_1 = \frac{k \cdot |Q_1|}{r_1^2} = \frac{8,99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2} \cdot 75 \cdot 10^{-9}\mathrm{C}}{5^2\mathrm{m}^2} = 27\ \mathrm{N/C}$$

$$E_2 = \frac{k \cdot |Q_2|}{r_2^2} = \frac{8,99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2} \cdot 8 \cdot 10^{-9}\mathrm{C}}{3^2\mathrm{m}^2} = 8\ \mathrm{N/C}$$

De vector $\vec{E}_2$ heeft enkel een y-component, de vector $\vec{E}_1$ heeft zowel een x- als een y-component.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Elektrische velden

Nu kunnen we de vectoriële som $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ maken.

$$E_{tot,x} = E_{1,x} + E_{2,x} = -27 \cdot \frac{4}{5} = -21,6 \text{ N/C}$$

$$E_{tot,y} = E_{1,y} + E_{2,y} = 27 \cdot \frac{3}{5} - 8 = 8,2 \text{ N/C}$$

$$E_{tot} = \sqrt{E_{tot,x}^2 + E_{tot,y}^2} = \sqrt{21,6^2 + 8,2^2} = 23 \text{ N/C}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Elektrische veldlijnen

Je kunt een elektrisch veld voorstellen door veldvectoren, maar meestal tekent men veldlijnen om een voorstelling te maken van het veld.

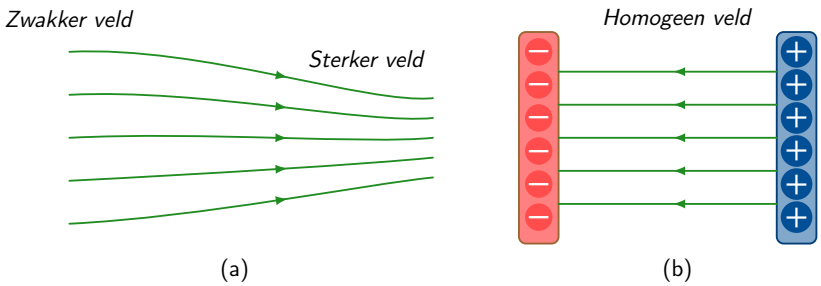
Definitie 9.4.1. Een elektrische veldlijn is een lijn die in elk punt ervan de richting en zin weergeeft van het elektrisch veld op die plaats.

De veldvector ligt in elk punt van de veldlijn op de raaklijn aan de veldlijn.

Als elektrische veldlijnen naar elkaar toekomen (convergeren), wordt het veld op die plaats sterker. Als elektrische veldlijnen zich van elkaar verwijderen (divergeren), wordt het veld op die plaats zwakker.

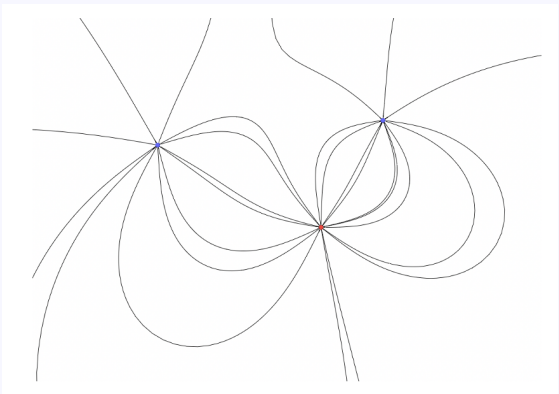
Als veldlijnen evenwijdig zijn, is de grootte van het veld daar hetzelfde.

Zo'n veld noemen we een homogeen veld. Tussen twee grote tegengesteld geladen platen zal het elektrisch veld homogeen zijn.



Figuur 65 – (a) Hoe korter de veldlijnen bij elkaar liggen, hoe sterker het veld. (b) Wanneer de veldlijnen evenwijdig zijn, noemen we het veld een homogeen veld.

Voorbeeld 9.4.1. Het veldlijnenpatroon veroorzaakt door drie puntladingen:



9.5 Elektrische potentiële energie

9.5.1 Potentiële energie van een lading in een homogeen veld

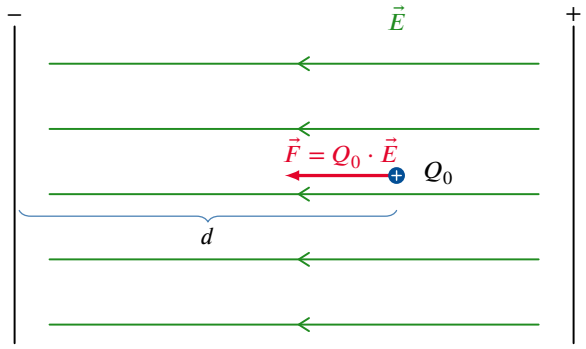
Gravitatiekrachten en elektrische krachten vertonen vele gelijkenissen. Het zijn beide conservatieve krachten. Er is dus een elektrische potentiële energie geassocieerd met de elektrische kracht net zoals er een gravitionele potentiële energie $E_p = mgh$ gerelateerd is aan de gravitatiekracht.

Beschouw een homogeen elektrisch veld $\vec{E}$ tussen twee tegengesteld geladen platen zoals getoond in figuur 66. Een positieve testlading Q_0 wordt geplaatst in dit veld en ondervindt een elektrische kracht $\vec{F} = Q_0 \cdot \vec{E}$ parallel aan en met dezelfde richting en zin als het elektrisch veld. Wanneer deze lading Q_0 verplaatst wordt over een afstand d in de richting van de negatieve plaat, zijn de verplaatsing en de elektrische kracht naar dezelfde kant gericht. De arbeid verricht door de elektrische kracht is bijgevolg positief.

$$W = Q_0 \cdot E \cdot d$$

Vermits $\Delta E_p = -W$ zal de potentiële energie van de lading veranderen met een waarde :

$$\Delta E_p = -W = -Q_0 \cdot E \cdot d$$



Figuur 66 – Kracht op een lading Q_0 in een homogeen elektrisch veld.

Eigenschap 9.5.1. De potentiële energie van een lading Q in een punt P op een afstand d van de negatieve plaat in een homogeen veld wordt gegeven door

$$E_p = Q \cdot E \cdot d.$$

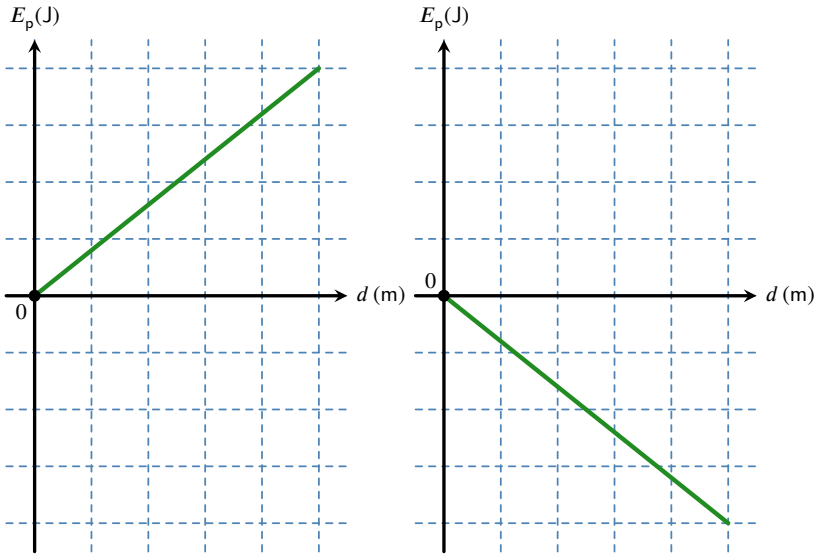
als het referentiepunt (RP) op de negatieve plaat gekozen wordt.

De elektrische potentiële energie is dus gelijk aan de arbeid die de elektrische kracht verricht tijdens de verplaatsing naar het referentiepunt. Merk op dat de elektrische potentiële energie van een positieve lading toeneemt met de afstand d net zoals de gravitationele potentiële energie van een massa toeneemt met de hoogte h.

De $E_p(d)$ - grafiek is een rechte door 0. Indien je het algemeen voorschrift van een rechte door de oorsprong $y = ax$ vergelijkt met de formule $E_p = Q \cdot E \cdot d$, dan zie je dat $Q \cdot E$ overeenkomt met de rico van de rechte. Afhankelijk van het teken van Q heb je dus een stijgende ($Q > 0$) of een dalende rechte ($Q < 0$).

CC BY-NC-SA 4.0

9.5 Elektrische potentiële energie



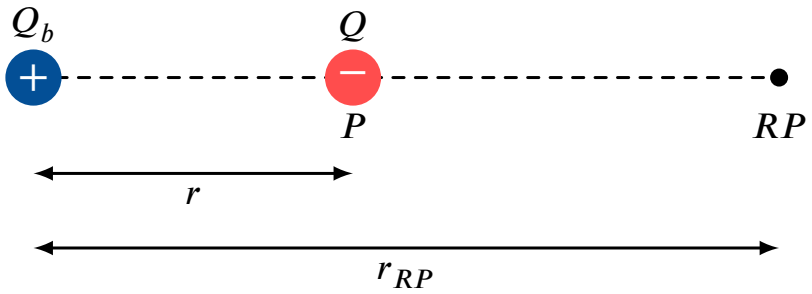
(a) $Q > 0$ (b) $Q < 0$

Figuur 67 – De potentiële energie van een (a) positieve lading Q of (b) een negatieve lading Q in een homogeen elektrisch veld.

9.5.2 Potentiële energie van een lading in een radiaal veld

Een bronlading Q_b creëert een radiaal veld.

Een lading Q in een punt P op een afstand r van lading Q_b bezit een hoeveelheid potentiële energie E_p.



Figuur 68 – Een lading Q bevindt zich op afstand r van een bronlading Q_b. De potentiële energie van lading Q wordt bepaald door het referentiepunt RP op oneindig te kiezen.

Men kan m.b.v. de arbeid geleverd door de Coulombkracht tijdens de verplaatsing van lading Q van P naar RP, aantonen dat:

$$E_p = k \cdot Q \cdot Q_b \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{RP}} \right).$$

Kies je het referentiepunt (RP) op oneindig dan wordt de formule $E_p = \dfrac{k \cdot Q \cdot Q_b}{r}$.

Eigenschap 9.5.2. De potentiële energie van een lading Q in een punt P op een afstand r van de bronlading Q_b wordt gegeven door

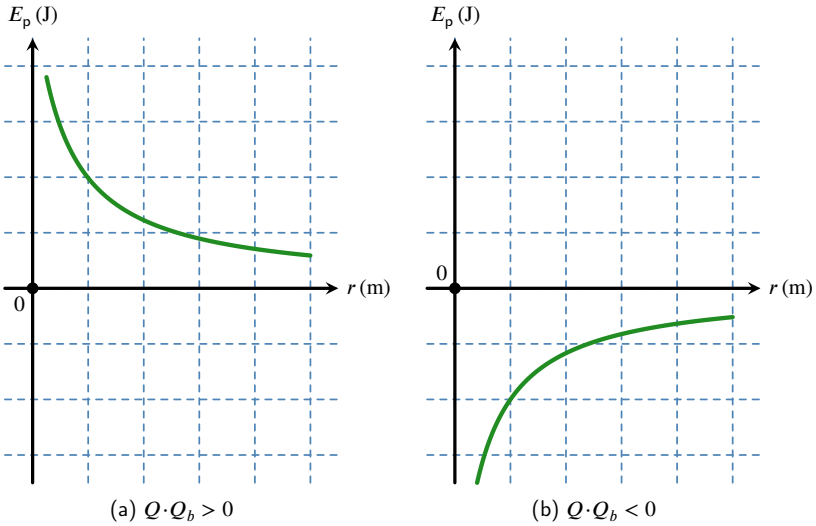
$$E_p = \frac{k \cdot Q \cdot Q_b}{r}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.5 Elektrische potentiële energie

als het referentiepunt (RP) op oneindig gekozen wordt.

De $E_p(r)$ - grafiek is een hyperbool.



(a) $Q \cdot Q_b > 0$ (b) $Q \cdot Q_b < 0$

Figuur 69 – De potentiële energie van een lading Q in de buurt van een lading Q_b in het geval dat (a) beide ladingen hetzelfde teken hebben of (b) beide ladingen een verschillend teken hebben.

CC BY-NC-SA 4.0

9.6 Potentiaal

De verhouding E_{pot}/Q is de **potentiële energie per coulomb**.

$$\frac{E_{pot}}{Q} = V.$$

Men noemt deze de potentiaal V in het punt P in het elektrisch veld. Het is een scalaire grootheid (een getal). Deze geeft aan hoeveel elektrische potentiële energie een lading van 1 coulomb krijgt als ze in dat punt P in het elektrisch veld wordt geplaatst.

Voor een homogeen veld is die verhouding

$$\frac{E_{pot}}{Q} = \frac{Q \cdot E \cdot d}{Q} = E \cdot d.$$

Voor een radiaal veld is die verhouding

$$\frac{E_{pot}}{Q} = \frac{k \cdot Q \cdot Q_b}{Q \cdot r} = \frac{k \cdot Q_b}{r}.$$

In beide gevallen hangt de verhouding enkel af van het elektrisch veld en van de ligging van het punt in het elektrisch veld. Dat geldt ook voor willekeurige velden.

Definitie 9.6.1. De potentiaal V in punt P in een elektrisch veld is

$$V = \frac{E_{pot}}{Q}.$$

Het is de *potentiële energie per coulomb*. Potentiaal wordt uitgedrukt in J/C.

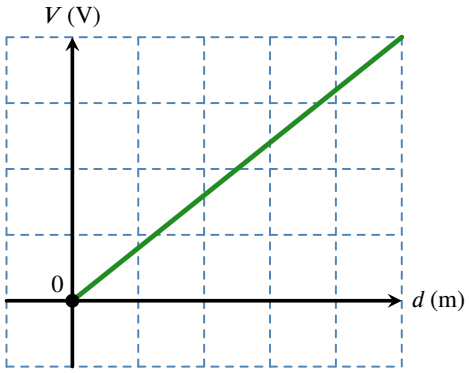
De eenheid 1 J/C noemt men de volt (V) naar Allesandro Volta

$$1\frac{\text{J}}{\text{C}} = 1\text{V}.$$

Voor een homogeen veld is de potentiaal in een punt P op een afstand d van de negatieve plaat:

$$V = E \cdot d.$$

De $V(d)$-grafiek is een rechte door de oorsprong. Hoe verder het punt van de negatieve plaat ligt, hoe groter de potentiaal.



Figuur 70 – De potentiaal in een homogeen elektrisch veld tussen twee tegengesteld geladen platen, gemeten op een afstand d van de negatieve plaat

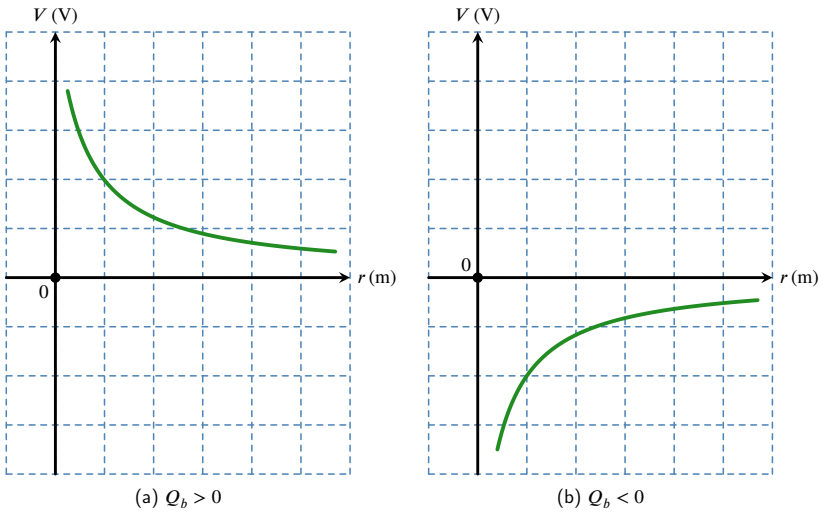
9.6 Potentiaal

Voor een radiaal veld is de potentiaal in een punt P op een afstand r van een bronlading Q_b:

$$V = \frac{k \cdot Q_b}{r}.$$

De $V(r)$-grafiek is een hyperbool.

Hoe verder het punt van de bronlading, hoe dichter de potentiaal bij nul ligt.



Figuur 71 – De potentiaal in het radiaal elektrisch veld van een bronlading Q_b, gemeten op een afstand r van de (a) positieve bronlading of (b) negatieve bronlading.

De potentiaal hangt - net zoals het elektrisch veld - niet af van de testlading in dat punt, maar enkel van het veld (de bronlading) en het punt P in kwestie.

9.6.1 Equipotentiaaloppervlakken

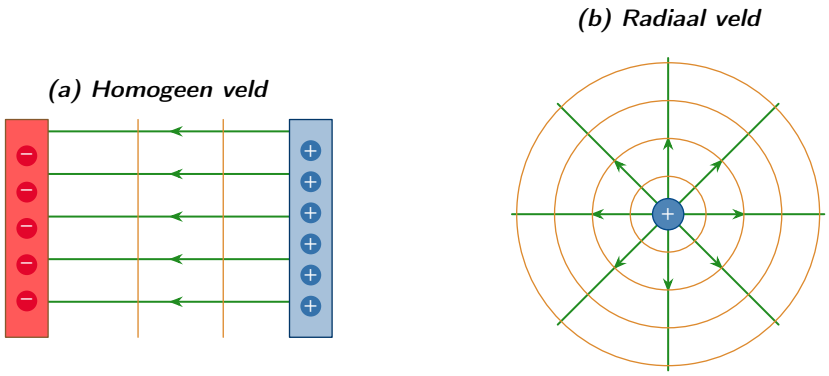
De potentiaal in een punt P in een homogeen veld is $V = E \cdot d$. Alle punten die op eenzelfde afstand d van de negatieve plaat liggen, hebben dezelfde potentiaal.

Definitie 9.6.2. Een oppervlak gevormd door punten met dezelfde potentiaal is een equipotentiaaloppervlak.

Bij een homogeen veld zijn de equipotentiaaloppervlakken vlakken die evenwijdig zijn met de platen.

CC BY-NC-SA 4.0

9.6 Potentiaal



Figuur 72 – Equipotentiaaloppervlakken (oranje) staan steeds loodrecht op de veldlijnen (groen) in een (a) homogeen veld of (b) radiaal veld.

De potentiaal in een punt in een radiaal veld is $V = \dfrac{k \cdot Q_b}{r}$. Alle punten die op eenzelfde afstand r van de bron lading liggen, hebben dezelfde potentiaal. De equipotentiaaloppervlakken zijn dus boloppervlakken die concentrisch rond de bron lading liggen. In een vlak tekenen we equipotentiaallijnen (zie figuur 72).

Eigenschap 9.6.1. Zowel bij een radiaal veld als bij een homogeen veld staan de veldlijnen loodrecht op de equipotentiaaloppervlakken. Dat geldt ook voor willekeurige velden.

CC BY-NC-SA 4.0

9.7 Oefeningen Elektrostatica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

9.7.1 Instapoefeningen

1. Twee ladingen van elk $5,0\ \mu C$ bevinden zich op $1,0$ m van elkaar. Hoe groot is de kracht die de ladingen op mekaar uitoefenen? Hoe is deze kracht gericht?

$$F = \ldots\ldots \text{ N}$$

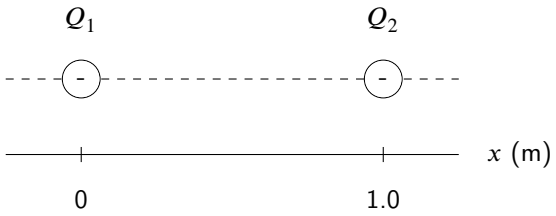
2. Een elektron cirkelt in een waterstofatoom rond een proton op een afstand van $r = 0,053$ nm. Hoe groot is de elektrische veldsterkte, veroorzaakt door het proton, ter hoogte van het elektron?

$$E(r) = \ldots\ldots \cdot 10^{11}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

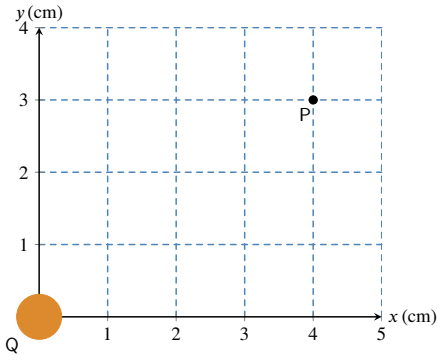
9.7.2 Standaardoefeningen

1. Twee negatieve ladingen Q_1 en Q_2 bevinden zich op vaste plaatsen op één meter van elkaar. Er geldt dat $Q_1 = -1{,}5$ C en $Q_2 = 4Q_1$. Op welke afstand van lading Q_1 kunnen we een positieve lading Q_3 op de stippellijn plaatsen zodat deze lading Q_3 in rust blijft?



$x =$ …… m

2. Bepaal de componenten van het elektrisch veld in punt P in de buurt van de bronlading Q van -10 nC.

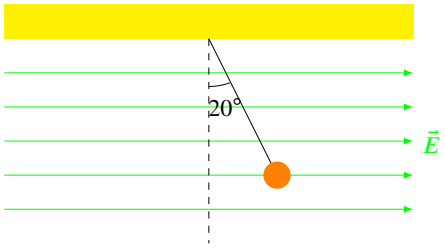


$$\vec{E} = \left(\ldots\ldots \cdot 10^4 \ \frac{\text{N}}{\text{C}}; \ \ldots\ldots \cdot 10^4 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.7.3 Gevorderde oefeningen

1. Een balletje met een massa van $5,0$ g hangt aan een touwtje in een homogeen elektrisch veld met veldsterkte $10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$, zoals weergegeven op de figuur. Het touwtje maakt een hoek van $20°$ met de verticale richting. Hoe groot is de lading op het balletje?



$$Q = \ldots\ldots\ \mu\text{C}$$

2. Bij een blikseminslag ontstaat er kortstondig een elektrisch veld rond een inslaande lading van 15,0 C. Bereken het potentiaalverschil tussen de voor- en achterpoten van een paard. De voorpoten staan op 100 m van de inslaande lading en de achterpoten staan op 101 m van de inslaande lading.

$$\Delta V = \ldots\ldots\ 10^9\ \text{V}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.7.4 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over elektrostatica via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Intro elektrodynamica

In vorig hoofdstuk leerde je hoe een elektrische veld een (aantrekkende of afstotende) elektrische kracht uitoefent op een elektrische lading. In dit hoofdstuk leer je hoe dit fenomeen tegelijkertijd kan plaatsvinden op massaal veel elementaire ladingen (elektronen) die aanwezig zijn in een materiaal. Als dit gebeurt, zeggen we dat er een elektrische stroom door het materiaal vloeit. Die elektrische stroom kunnen we gebruiken om elektrische apparaten te laten werken.

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Elektrische spanning

10.2.1 Definitie

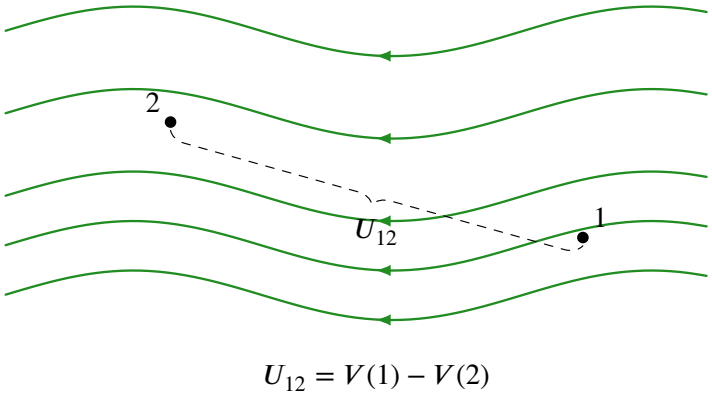
In tegenstelling tot elektrische veldsterkte of potentiaal is spanning een grootheid die je kent uit het dagelijks leven: bv. de batterij in je mobiele telefoon geeft een spanning van $3,7$ V, een autobatterij geeft een spanning van ongeveer 12 V, de netspanning is 230 V ...

Definitie 10.2.1. De spanning U_{12} tussen twee punten 1 en 2 in een elektrisch veld is het potentiaalverschil tussen die twee punten:

$$U_{12} = V(1) - V(2).$$

Spanning wordt uitgedrukt in volt (V).

Je kan dus maar van spanning spreken als er ook sprake is van een elektrisch veld, of dus als er ladingen in de buurt zijn.

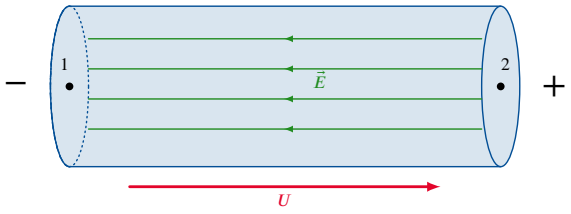


Figuur 73 – Spanning tussen twee punten van een elektrisch veld.

Spanning meet je altijd tussen twee punten. Om weer te geven welk punt op de hoogste potentiaal is, gebruiken we de spanningspijl.

Definitie 10.2.2. De spanningspijl wijst naar het punt met de hoogste potentiaal.

We bekijken als voorbeeld het homogeen veld in een geleidende draad. Punten in vlak 2 hebben de hoogste potentiaal. De spanningspijl U wijst dus naar 2. Merk op dat de spanningspijl steeds tegengesteld is aan de zin van de veldlijnen.



Figuur 74 – De spanningspijl wijst tegengesteld aan de veldlijnen.

10.2.2 Spanningsbronnen

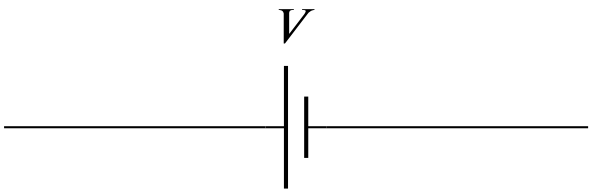
Een batterij, een labovoeding en een elektriciteitscentrale zijn voorbeelden van spanningsbronnen.

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Elektrische spanning

Definitie 10.2.3. Een spanningsbron is een toestel dat zorgt voor een potentiaalverschil tussen de twee polen van de bron.

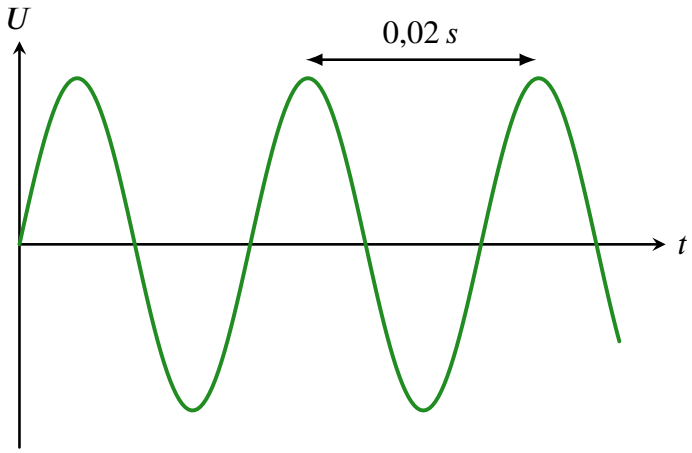
Als de spanning constant is, zoals bij een batterij, dan spreken we van gelijkspanning (DC = Direct Current). Een gelijkspanningsbron heeft een plus- en een minpool. De pluspool is de pool met de hoogste potentiaal.



Als de spanning sinusoïdaal verandert, zoals bij de netspanning, spreken we van een wisselspanning (AC = Alternating Current). De plus- en de minpool van een wisselspanningsbron wisselt voortdurend van kant.



De frequentie waarmee dat gebeurt bij de netspanning, bedraagt in Europa 50 Hz: d.w.z. er zijn 50 cycli per seconde, dus 100 keer per seconde bedraagt de spanning 0 V!



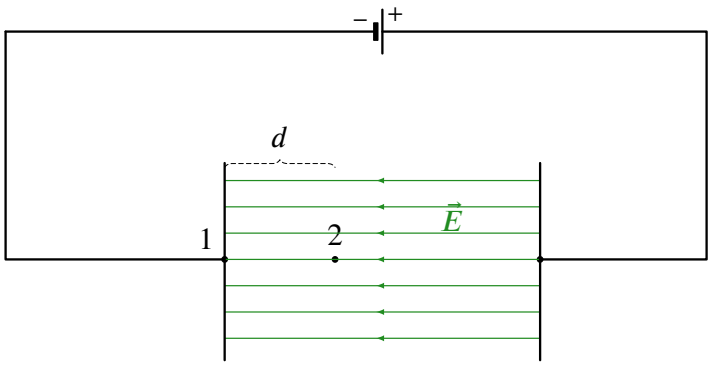
Figuur 75 – De spanning van het elektriciteitsnet heeft een frequentie van 50 cycli per seconde. Elke cyclus duurt dus $0,02$ s.

10.2.3 Spanning tussen twee punten in een homogeen veld

Beschouw twee grote verticale geleidende platen die je aansluit op een bron. Tussen de platen ontstaat een homogeen elektrisch veld. De bron houdt dit veld constant.

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Elektrische spanning



We nemen punt 1 op de plaat die aangesloten is op de minpool van de batterij. Punt 2 nemen we in het homogeen veld op een afstand d van punt 1. We gebruiken de formule voor de potentiaal van een punt in een homogeen veld en vinden dat

$$V(2) = E \cdot d.$$

De spanning U tussen punt 2 en de negatieve pool is

$$\begin{aligned} U &= V(2) - V(1) \\ &= E \cdot d - E \cdot 0 \\ &= E \cdot d \end{aligned}$$

Hoe groter d, hoe groter de spanning U.

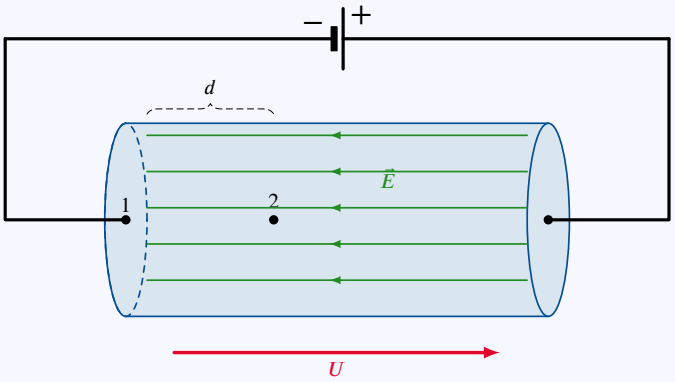
(a) De spanning neemt dus van de min-pool naar de plus-pool lineair toe.

(b) De spanning wordt maximaal $E \cdot \ell$ (met ℓ de afstand tussen de twee platen).

(c) Hoe sterker het veld, hoe groter de spanning (en omgekeerd: hoe sterker de spanning, hoe sterker het veld).

Voorbeeld 10.2.1. Als je een geleidende draad op een batterij aansluit, ontstaat er in die draad een homogeen elektrisch veld met grootte E.

Als de batterij een spanning geeft van 12 V en de lengte van de draad is 10 cm, hoe groot is dan de spanning tussen de minpool (punt 1) en een punt op 2,3 cm van de minpool?



CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Elektrische spanning

Uitwerking: De spanning tussen de twee punten is gelijk aan:

$$\begin{aligned} U &= V(2) - V(1) \\ &= E \cdot d - E \cdot 0 \\ &= E \cdot d \\ &= \frac{U_{bron}}{\ell} \cdot d \\ &= \frac{12V}{0,10\ m} \cdot 0,023\ m \\ &= 2,8\ V \end{aligned}$$

10.2.4 Spanning tussen punten in een radiaal veld

Beschouw twee punten in de buurt van een puntlading Q_b, die een radiaal elektrisch veld opwekt. Punt 1 bevindt zich op een afstand r_1 en punt 2 bevindt zich op een afstand r_2 van de bron.

De spanning tussen deze twee punten is dan

$$U_{12} = V(1) - V(2).$$

De potentiaal in een punt in een radiaal veld is

$$V = \frac{k \cdot Q_b}{r}.$$

Bijgevolg geldt dat

$$\begin{aligned} U_{12} &= \frac{k \cdot Q_b}{r_1} - \frac{k \cdot Q_b}{r_2} \\ &= k \cdot Q_b \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned}$$

Voorbeeld 10.2.2. Bij een blikseminslag ontstaat er kortstondig een elektrisch veld rond een inslaande lading van 15 C. Bereken de spanning U_{12} tussen punt 1 op 50 m en punt 2 op 52 m van de inslaande lading.

Uitwerking: De spanning wordt gegeven door

$$\begin{aligned} U_{12} &= k \cdot Q_b \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= 8,99 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot 15C \cdot \left(\frac{1}{50\ m} - \frac{1}{52\ m} \right) \\ &= 10 \cdot 10^7\ V \end{aligned}$$

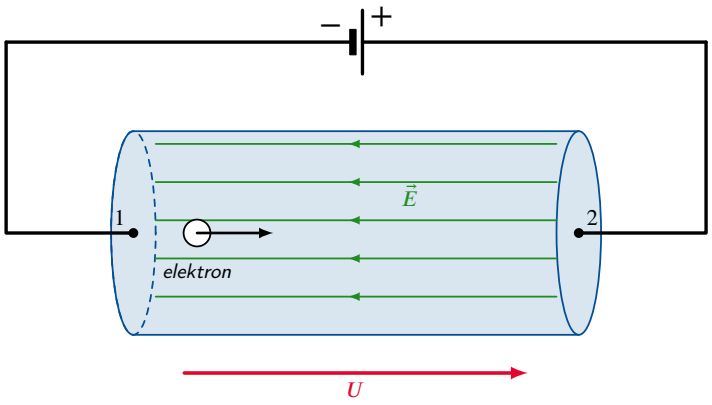
Merk op hoe extreem groot de spanning is tussen twee punten die zich kortbij de blikseminslag bevinden.

10.2.5 Betekenis van de elektrische spanning tussen twee punten

Beschouw een geleidende draad die aangesloten is op een spanningsbron.

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Elektrische spanning



De spanning tussen 1 en 2 is volgens de definitie van potentiaal

$$\begin{aligned} U_{12} &= V(1) - V(2) \\ &= \frac{E_{\text{pot}}(1)}{Q} - \frac{E_{\text{pot}}(2)}{Q} \\ &= -\frac{\Delta E_{\text{pot}}}{Q} \end{aligned}$$

Voor een lading Q die van 1 naar 2 beweegt, geldt de wet van behoud van mechanische energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(1) + E_{\text{kin}}(1) &= E_{\text{pot}}(2) + E_{\text{kin}}(2) \\ \Updownarrow & \\ E_{\text{pot}}(1) - E_{\text{pot}}(2) &= E_{\text{kin}}(2) - E_{\text{kin}}(1) \\ \Updownarrow & \\ -\Delta E_{\text{pot}} &= \Delta E_{\text{kin}} \end{aligned}$$

Je kan dus ook schrijven dat $U_{12} = \dfrac{\Delta E_{\text{kin}}}{Q}$.

Eigenschap 10.2.1. De spanning U_{12} tussen twee punten 1 en 2 geeft de verandering van de kinetische energie per eenheid van lading die van 1 naar 2 beweegt:

$$U_{12} = \frac{\Delta E_{\text{kin},1\to 2}}{Q}.$$

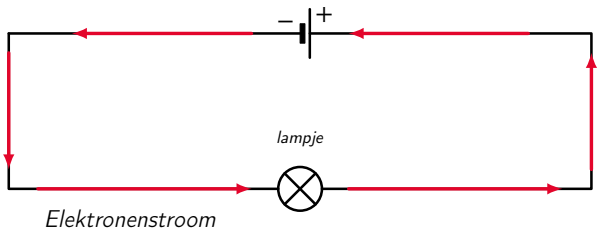
Voorbeeld 10.2.3. Je sluit een lampje aan op een batterij van $1,5$ V ($= 1,5$ J/C). Dit betekent dat de batterij aan een lading van 1 Coulomb die van de min- naar de pluspool beweegt een energie van $1,5$ J meegeeft.

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Elektrische stroom

10.3.1 Definitie van elektrische stroom

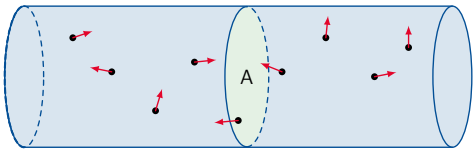
Als je een lampje aansluit op een batterij met behulp van geleidende draden ontstaat een elektrische schakeling. De elektronen bewegen van de minpool van de batterij via de geleidende draden naar het lampje en stromen door het lampje naar de pluspool toe.



Deze stroming van ladingen noemt men een elektrische stroom.

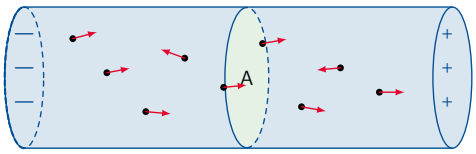
Definitie 10.3.1. Door een geleider loopt een elektrische stroom als de vrije elektronen zich *globaal* naar één kant verplaatsen.

Waarom *globaal*? In een geleider bewegen de vrije elektronen voortdurend in alle richtingen. De geleider zit dus vol bewegende ladingen en toch loopt er geen stroom. Dit komt omdat er door de doorsnede A per seconde gemiddeld evenveel elektronen van links naar rechts als van rechts naar links bewegen.



Geen stroom

Wel stroom



Van zodra er gemiddeld meer elektronen naar één kant gaan dan naar de andere kant, spreekt men van een elektrische stroom.

Om een stroom te hebben tussen twee punten, moet er aan twee voorwaarden voldaan zijn:

(a) er moet een elektrisch veld, dus een potentiaalverschil (spanning) zijn tussen die twee punten. Om de stroom in stand te houden, moet de spanning tussen de punten onderhouden worden en kun je bv. een bron gebruiken.

(b) in de ruimte tussen de twee punten moeten er vrije ladingen zijn. Hier zijn dat de vrije elektronen in de geleider.

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Elektrische stroom

Definitie 10.3.2. De stroomsterkte (of kortweg de stroom) I door een doorsnede A van een geleider is de hoeveelheid lading die per seconde door de doorsnede A stroomt

$$I = \frac{|Q|}{\Delta t}.$$

Stroom wordt uitgedrukt in C/s. De eenheid 1 C/s noemt men de ampère (A).

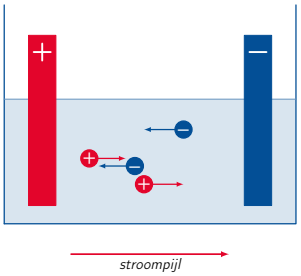
$$1\frac{C}{s} = 1A.$$

Hoe meer lading in een tijd Δt door de geleider stroomt, hoe groter de stroomsterkte I. Uit de definitie volgt ook dat de stroomsterkte altijd positief is.

Voorbeeld 10.3.1. Typische grootte van enkele stromen (in A)

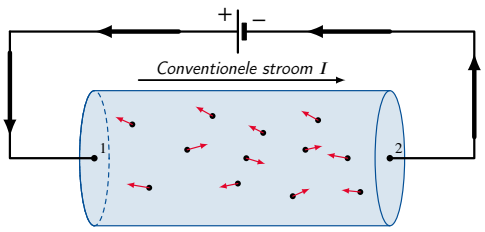
Gloeilamp	$0,1 - 0,5$ A
Strijkijzer	5 A
Wasmachine	10 A
Startmotor auto	60 A
Elektrische kraan	150 A
Trein	400 A

In een stroomvoerende geleider verplaatsen zich enkel vrije elektronen. Bij een stroom in een vloeistof, een gas of in een batterij verplaatsen zich zowel positieve als negatieve ladingen. Die ionen bewegen in tegengestelde zin t.o.v. elkaar. Om de stroomzin voor te stellen gebruikt men de stroompijl.



Definitie 10.3.3. De stroompijl geeft de zin waarin de positieve ladingen bewegen (of zouden bewegen). We noemen dat de conventionele stroomzin. In een stroomvoerende geleider bewegen de vrije elektronen in tegengestelde zin van de stroompijl.

De definitie van de conventionele stroomzin dateert van de tijd toen men dacht dat elektrische stroom een verplaatsing van positieve ladingen was.



CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Elektrische weerstand

10.4.1 Wat is elektrische weerstand?

Het woord *weerstand* heeft verschillende betekenissen:

(a) In een elektronicawinkel kan je weerstanden kopen.

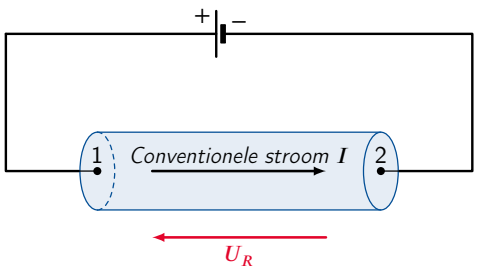
(b) In een broodrooster lichten weerstanden op en roosteren ze het brood.

(c) Als je een bad genomen hebt en je huid is nog vochtig, dan is de weerstand van je huid erg laag, waardoor je kwetsbaarder bent voor elektrocutie.

In deze voorbeelden wordt het begrip (elektrische) weerstand gebruikt in twee betekenissen: in de eerste twee voorbeelden wordt een voorwerp (een 'component') bedoeld, zoals die in vele elektrische toestellen gebruikt wordt in het laatste voorbeeld wordt de fysische grootheid weerstand, symbool R bedoeld.

Wat verstaan we onder de fysische grootheid 'weerstand'?

We bekijken onderstaande opstelling:



Figuur 76 – De stroompijl en spanningspijl wijzen bij een weerstand tegengesteld aan mekaar.

Tussen de punten 1 en 2 is een draad gespannen (een 'weerstand'). De spanning U_{12} is

$$U_{12} = V(1) - V(2).$$

De bron houdt die spanning constant. Punt 1 is met de pluspool van de bron verbonden en heeft de hoogste potentiaal. Bijgevolg is de spanning U_{12} positief. Die positieve spanning noemen we de spanning over de weerstand, symbool U_R. Als er geen verwarring mogelijk is, gebruiken we gewoon U.

Doordat de kring gesloten is, loopt er een stroom door de weerstandsdraad. Is de draad een goede geleider, dan stroomt een grote stroom door de draad. Bij andere draden is de stroom minder groot omdat de draad een slechte geleider is.

Meestal beschouwt men niet de geleiding G van een draad, maar de (elektrische) weerstand R. Dat is het omgekeerde van de geleiding.

Eigenschap 10.4.1. De (elektrische) weerstand R van een draad is de verhouding van de spanning U, over de draad tot de stroomsterkte I:

$$R = \frac{U_R}{I} \qquad \text{of} \qquad R = \frac{1}{G}.$$

De weerstand R is altijd positief. Ze wordt uitgedrukt in V/A.

De eenheid 1 V/A noemt men de ohm (Ω) naar Georg Simon Ohm (1767-1854)

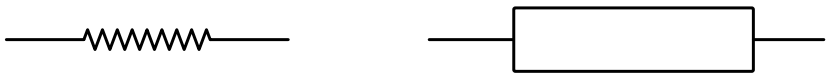
$$1\frac{V}{A} = 1\Omega.$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Elektrische weerstand

De weerstand van een draad is de spanning die nodig is per ampère stroomsterkte.

Symbool:



Voorbeeld 10.4.1. $R = 60\ \Omega = 60$ V/A: er is een spanning nodig van 60 V om een stroom van 1 A door de draad te laten lopen. Hoe groter de weerstand van een draad, hoe meer spanning nodig is om een bepaalde stroom te krijgen.

Uit de definitie volgt dat weerstand - net zoals spanning - altijd gemeten wordt tussen twee punten.

Voorbeeld 10.4.2. Typische waarde van de weerstand van enkele systemen:

(a) verwarmingselement wasmachine: $40\ \Omega$.

(b) verlengsnoer: $0,1$ à $0,3\ \Omega$.

(c) fietslampje: $2\ \Omega$.

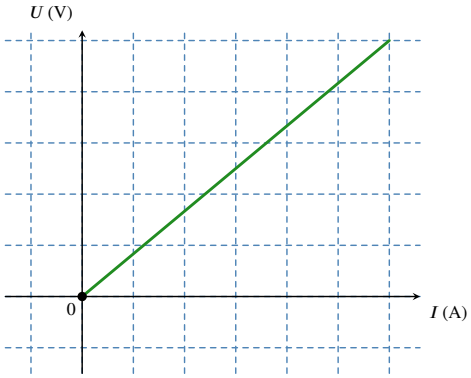
10.4.2 De wet van Ohm

We onderzoeken het verband tussen de stroom I door en de spanning U over een component. We gebruiken een regelbare bron.

Onderzoek van een weerstand of geleider

We meten bij verschillende waarden voor de stroom *door* de weerstand de waarde van de spanning *over* de weerstand.

I (A)	U (V)
0.00	0.00
0.04	4.92
0.09	10.80
0.14	16.4



Dit betekent dat

$$U \sim I \qquad \text{en dus} \qquad \frac{U}{I} = \text{cte.}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Elektrische weerstand

Vermits $U/I = R$ betekent dit

$$R = \text{cte}.$$

De geleiding of weerstand hangt niet af van de spanning die over de weerstand staat. Dit blijkt ook uit de grafiek: de helling is overal even groot. De helling van de $U(I)$-grafiek is een maat voor de weerstand.

Definitie 10.4.1. De relatie $I \sim U$ noemt men de **wet van Ohm**.

Materialen die hieraan voldoen, houden de weerstand constant terwijl er een stroom door loopt en een spanning over staat. Men noemt ze ohmse weerstanden of lineaire weerstanden.

Opmerking 10.4.1. (a) Halfgeleiders voldoen niet aan de wet van Ohm. Hun weerstand hangt af van de spanning die erover is aangelegd.

(b) Dikwijls vind je de wet van Ohm uitgedrukt als $U = R \cdot I$. Dat kan voor verwarring zorgen met de definitie van weerstand: $R = \dfrac{U}{I} \Leftrightarrow U = R \cdot I$.

(c) Voor de meeste geleiders geldt de wet van Ohm slechts als de temperatuur constant is. Het lijkt logisch te zijn dat bij een hogere temperatuur de weerstand toeneemt. Bij de meeste materialen is dat zo: de moleculen gaan harder trillen, waardoor de elektronen moeilijker doorheen het materiaal kunnen bewegen. Bij constante temperatuur gebeurt dit niet: als de spanning toeneemt, wordt het elektrisch veld sterker in de draad, waardoor de elektronen sneller naar de positieve pool bewegen. De stroom is dan recht evenredig met de spanning. De weerstand blijft constant.

10.4.3 De wet van Pouillet

Via de wet van Ohm kan je door stroom en spanning te meten een waarde voor de weerstand van een stukje materiaal bepalen. Indien je een evenredigheidsconstante kan bepalen die de rechte evenredigheid tussen stroom en spanning bepaalt, ken je ook de weerstand van het opgemeten materiaal.

Er bestaat nog een tweede techniek om voor een zuivere stof de weerstand te bepalen. Daarom vragen we ons af welke factoren de weerstand R van een draadvormige geleider bepalen.

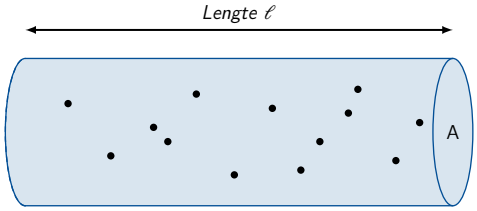
Experimenteel kan je afleiden dat

(a) de weerstand R recht evenredig is met de lengte ℓ van de draad:

$$R \sim \ell.$$

(b) de weerstand R omgekeerd evenredig is met de doorsnede A van de draad:

$$R \sim \frac{1}{A}.$$



Hieruit volgt

$$R \sim \frac{\ell}{A} \Rightarrow R = \text{cte} \cdot \frac{\ell}{A}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Elektrische weerstand

Als je die constante bepaalt, vind je dat ze afhangt van het materiaal waaruit de draad gemaakt is. Men noemt die constante de specifieke weerstand van het materiaal, symbool ρ.

De specifieke weerstand van een materiaal wordt uitgedrukt in $\Omega \cdot m$.

Hoe kleiner ρ, hoe beter geleidend het materiaal is.

Eigenschap 10.4.2. Voor een draad met lengte ℓ, doorsnede A en specifieke weerstand ρ wordt de weerstand R gegeven door

$$R = \rho \cdot \frac{\ell}{A}.$$

Dit is de **wet van Pouillet**.

Opmerking: verwar de diameter van de draad niet met de doorsnede. De diameter is een lengte, de doorsnede een oppervlakte!

Voorbeeld 10.4.3.

Specifieke weerstand bij kamertemperatuur ($\Omega \cdot m$)

Aluminium	$2,7 \cdot 10^{-8}$	Koolstof	$30 \cdot 10^{-8}$
Constantaan	$49 \cdot 10^{-8}$	Germanium	$0,46$
Goud	$2,4 \cdot 10^{-8}$	Silicium	650
Ijzer	$10 \cdot 10^{-8}$		
Koper	$1,7 \cdot 10^{-8}$	Eboniet	$10^{12} - 10^{13}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.5 Warmte en vermogen in een weerstand

10.5.1 Warmte-ontwikkeling in een weerstand

Als een elektrische stroom door een weerstand gaat, wordt in die weerstand warmte ontwikkeld. In het dagelijkse leven wordt daar veel gebruik van gemaakt: denk maar aan een haardroger, een broodrooster, een elektrische kookplaat, een strijkijzer ...

Eigenschap 10.5.1. De warmtehoeveelheid Q_w die ontwikkeld wordt in een weerstand R, waarover een spanning U staat en gedurende een tijd Δt een stroom I loopt, is

$$Q_w = U \cdot I \cdot \Delta t.$$

10.5.2 Vermogen ontwikkeld in een weerstand

Het vermogen P van een systeem is de hoeveelheid energie die door het systeem wordt omgezet per tijdseenheid:

$$P = \frac{E_{\text{omgezet}}}{\Delta t}.$$

Vermogen wordt uitgedrukt in J/s. De eenheid $1\frac{J}{s}$ is 1 watt:

Hier wordt elektrische energie omgezet in warmte en dus

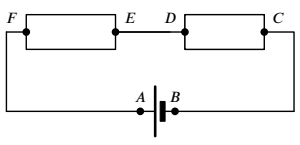
$$\begin{aligned} P &= \frac{Q_w}{\Delta t} \\ &= \frac{U \cdot I \cdot \Delta t}{\Delta t} = U \cdot I \end{aligned}$$

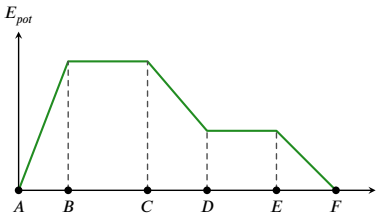
Eigenschap 10.5.2. Het vermogen ontwikkeld in een weerstand R waarover een spanning U staat en waar een stroom I doorloopt is

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}.$$

10.5.3 Energie-omzettingen in een kring met een weerstand

We bekijken de veranderingen van de potentiële energie voor een elektron dat de onderstaande kring doorloopt.





(a) Tussen A en B winnen de elektronen potentiële energie.

(b) De draad tussen B en C, D en E, F en A beschouwen als zonder weerstand: de elektronen behouden hun potentiële energie.

(c) Tussen C en D passeren de elektronen de weerstand en verliezen potentiële energie, net als tussen E en F.

CC BY-NC-SA 4.0

10.5 Warmte en vermogen in een weerstand

Eigenschap 10.5.3. In de weerstand verliezen de elektronen potentiële energie, ze zetten die om in kinetische energie en er ontstaat warmte. In de bron krijgen de elektronen potentiële energie. De arbeid die daarvoor nodig is, wordt door de bron geleverd.

CC BY-NC-SA 4.0

10.6 Oefeningen Elektrodynamica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

10.6.1 Instapoefeningen

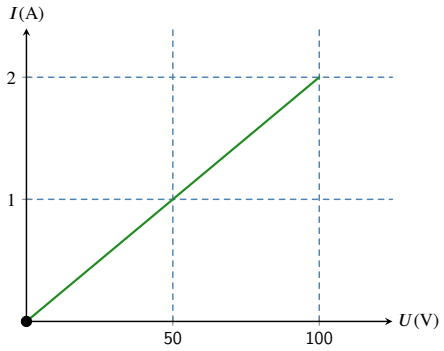
1. Twee punten liggen op dezelfde veldlijn in een homogeen veld met veldsterkte $2000\,\frac{N}{C}$ op $5,0$ cm van elkaar. Bepaal de spanning tussen die twee punten.

$$U_{21} = \ldots\ldots\ V$$

2. De stroom in een haardroger is $2,0$ A. Hoeveel elektronen stromen doorheen de haardroger in $10,0$ minuten?

$$N = \ldots\ldots \cdot 10^{21} \text{elektronen}$$

3. Na het opmeten van de stroom doorheen een materiaal bij verschillende waarden van de aangelegde spanning over het materiaal, bekom je onderstaande grafiek. Wat is de weerstand van dit materiaal?



$$R = \ldots\ldots\ \Omega$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.6.2 Standaardoefeningen

1. Twee draden zijn van hetzelfde materiaal gemaakt, maar de eerste draad is drie keer zo lang en de diameter is drie keer zo groot als de tweede draad. Wat is de verhouding $\frac{R_2}{R_1}$ van weerstanden van deze twee draden?

2. Een fietslampje dat bij $6,0$ V een vermogen heeft van 9 W wordt aangesloten op een batterij die slechts een spanning levert van $1,5$ V. Welk elektrisch vermogen wordt in het lampje ontwikkeld?

$$P = \ldots\ldots\ W$$

3. Schat de kostprijs om een lasagne op te warmen in een oven gedurende 20 minuten. De oven werkt op 230 V en de stroom bedraagt 16,0 A. De kostprijs van elektriciteit bedraagt 0,54 euro per kWh.

$$\text{Prijs} = \ldots\ldots\ euro$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.6.3 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over elektrodynamica via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

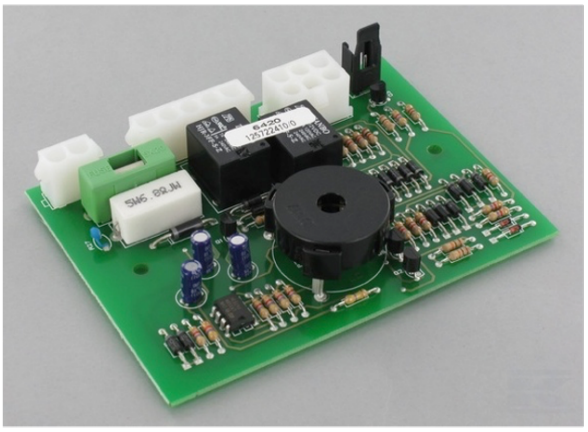
11.1 Intro elektrische schakelingen

In elk elektrisch apparaat is de elektrische schakeling het hart van het toestel. Denk hierbij aan een radio, een telefoon, een televisie, een boormachine, ... In vorige hoofdstukken heb je de basisprincipes van elektriciteit besproken: elektrische stroom, elektrische weerstand, spanning, ... Nu gaan we de verbanden tussen die grootheden bekijken voor een combinatie van verschillende weerstanden en batterijen. We maken daarbij een onderscheid tussen serieschakelingen, parallelschakelingen en gemengde schakelingen.

CC BY-NC-SA 4.0

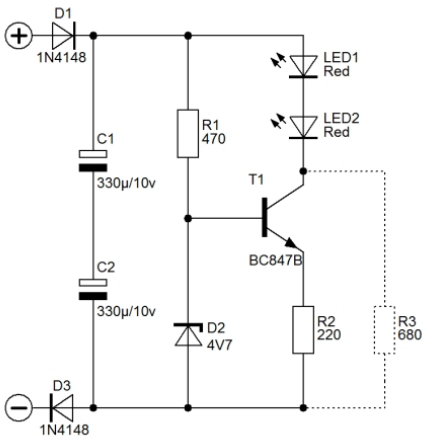
11.2 Begrippen

Elk elektrisch apparaat bevat een printplaat waarop de verschillende elektronische componenten (weerstanden, schakelaars, ...) op zijn aangesloten. Zo'n schakeling noemen we een elektrische schakeling of netwerk. In zo'n schakeling zijn de componenten met elkaar verbonden via draden of printbanen. De weerstand van die elektrische verbindingen is verwaarloosbaar klein.



Figuur 77 – Voorbeeld van een printplaat.

Onderstaande figuur geeft een schematische weergave van een schakeling. Je herkent misschien het symbool van een weerstand, diode, led, condensator, ...



Figuur 78 – Voorbeeld van een schema van een elektrische schakeling.

Definitie 11.2.1. Een plaats waar drie of meer geleiders samenkomen noemen we een knooppunt.

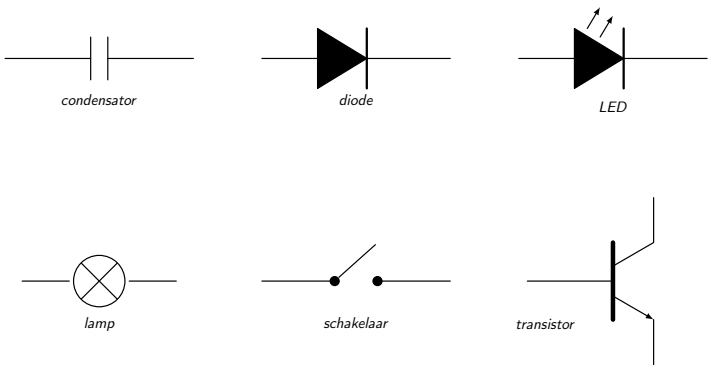
Een deel van een schakeling tussen twee naburige knooppunten is een tak.

Een lus is een gesloten omloop waarbij je vertrekt in een knooppunt en via geleiders en componenten in hetzelfde knoopunt terugkomt.

De verschillende symbolen die in schakelingen worden gebruikt, komen overeen met verschillende elektronische componenten met elk een eigen functie.

CC BY-NC-SA 4.0

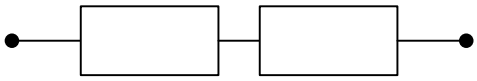
11.2 Begrippen



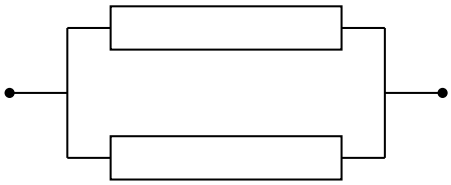
Figuur 79 – Symbolen van veel voorkomende elektronische componenten.

Componenten kunnen in serie of in parallel geschakeld zijn.

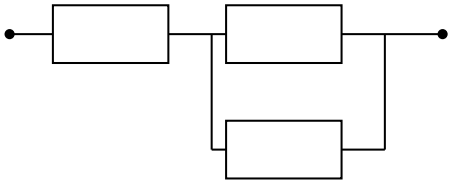
(a) Bij een serieschakeling staan de componenten in één tak achter elkaar.



(b) Bij een parallelschakeling staan de componenten naast elkaar.



Een gemengde schakeling bestaat uit serie- én parallelgeschakelde componenten.



In dit hoofdstuk beperken we ons tot schakelingen van weerstanden.

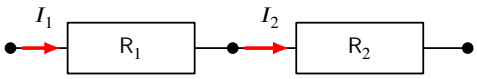
Definitie 11.2.2. De substitutie- of vervangingsweerstand van een schakeling van weerstanden is een weerstand die de schakeling kan vervangen waarbij de totale stroom die door de schakeling zou lopen dezelfde blijft.

CC BY-NC-SA 4.0

11.3 De serieschakeling

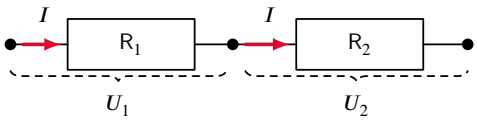
11.3.1 De wetten van de serieschakeling

We bekijken een tak met een serieschakeling van twee weerstanden.



I_1 is de stroom door de eerste weerstand, I_2 is de stroom door de tweede weerstand.

Als je de stromen I_1 en I_2 meet, zie je dat die gelijk zijn.



U is de spanning over de hele serieschakeling, U_1 over de eerste weerstand en U_2 over de tweede. Als je de spanningen U, U_1 en U_2 meet, zie je dat $U = U_1 + U_2$.

Dat geldt ook voor een serieschakeling die bestaat uit meerdere weerstanden.

Eigenschap 11.3.1. (a) De stroom door elke weerstand in een tak is dezelfde:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \ldots$$

(b) De spanning over een tak verdeelt zich over de verschillende weerstanden:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$$

Verklaring: De eerste wet voor de serieschakeling is een gevolg van het principe van behoud van lading: de lading die door de eerste weerstand stroomt, moet ook door de tweede weerstand stromen, ...

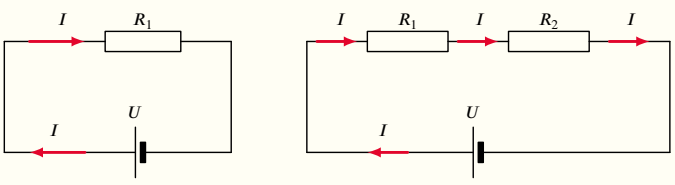
De tweede wet voor de serieschakeling is een gevolg van het principe van behoud van energie.

11.3.2 De substitutieweerstand

Eigenschap 11.3.2. De substitutieweerstand R$_s$ van een serieschakeling is gelijk aan de som van de weerstanden:

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

Opmerking 11.3.1. Het feit dat in een serieschakeling de stroom door elke weerstand even groot is, betekent niet dat als je een weerstand toevoegt aan een serieschakeling de stroom onveranderd blijft!



CC BY-NC-SA 4.0

11.3 De serieschakeling

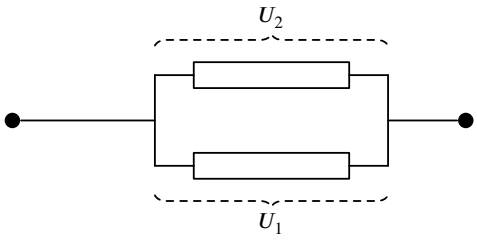
In de schakeling met één weerstand is de totale stroom gelijk aan $I = \frac{U}{R_1}$ terwijl in de schakeling met twee weerstanden de stroom gelijk is aan $I = \frac{U}{R_1 + R_2}$. Deze stroom is dus kleiner dan in de schakeling met één weerstand!

CC BY-NC-SA 4.0

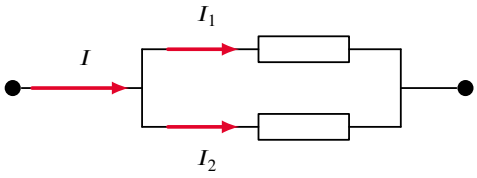
11.4 De parallelschakeling

11.4.1 De wetten van de parallelschakeling

We bekijken een parallelschakeling die bestaat uit twee takken: U_1 is de spanning over de eerste tak, U_2 over de tweede. Als je de spanning U_1 en U_2 meet, zie je dat die gelijk zijn.



I is de stroom voor het knooppunt, I_1 door tak 1 en I_2 door tak 2. Als je de stromen I, I_1 en I_2 meet, zie je dat $I = I_1 + I_2$.



Dat geldt ook voor een parallelschakeling die bestaat uit meerdere takken.

Eigenschap 11.4.1. (a) De spanning over elke tak van de parallelschakeling is dezelfde:

$$U_1 = U_2 = U_3 = \ldots$$

(b) Bij een parallelschakeling verdeelt de stroom zich over de verschillende takken:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots$$

Verklaring: De eerste wet is een gevolg van de wet van behoud van energie.

De tweede wet volgt uit behoud van lading.

11.4.2 De substitutieweerstand

Eigenschap 11.4.2. Voor de substitutieweerstand R_s van een parallelschakeling geldt:

$$\frac{1}{R_S} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots$$

Opmerking 11.4.1. (a) In de praktijk is het werken met de reciproke waarden van de weerstanden niet zo handig. Je kan de formule daarom omvormen. Voor twee weerstanden wordt dit bijvoorbeeld:

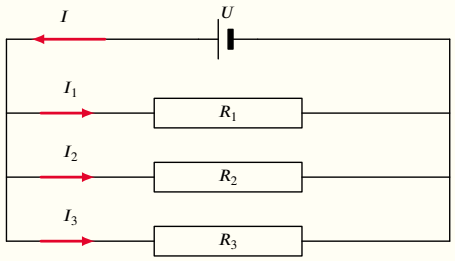
$$\frac{1}{R_S} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{R_S} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2} \quad \Leftrightarrow \quad R_S = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

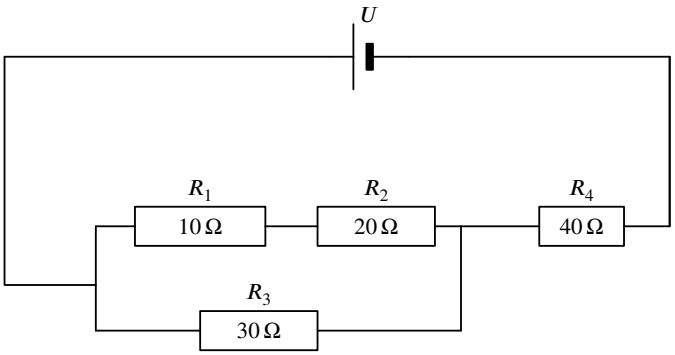
11.4 De parallelschakeling

(b) Elke keer je een weerstand aan een parallelschakeling toevoegt, verlaag je de totale weerstand en vergroot je de stroom in de kring.

$$R_s = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2 + I_3}.$$



1. Bereken de substitutieweerstand van onderstaande schakeling



CC BY-NC-SA 4.0

11.5 Oefeningen Schakelingen

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

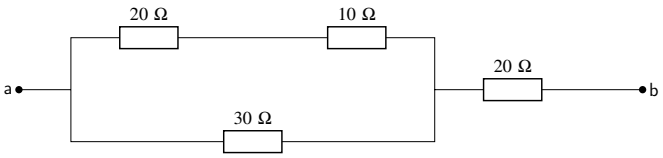
2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

11.5.1 Instapoefeningen

1. Zoek de vervangingsweerstand van de schakeling tussen a en b.

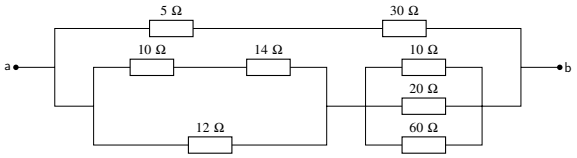


$R_s = \ldots\ldots\ \Omega$

CC BY-NC-SA 4.0

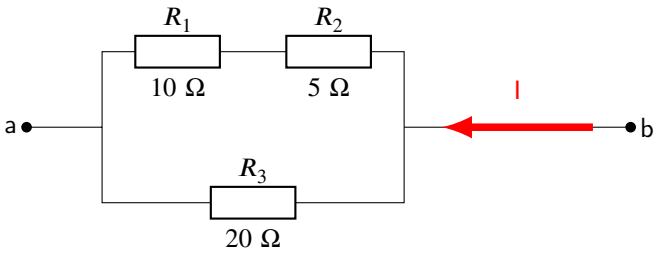
11.5.2 Standaardoefeningen

1. Zoek de vervangingsweerstand van de schakeling tussen a en b.



$$R_s = \ldots\ldots\ \Omega$$

2. De weerstand van 10 Ω ontwikkelt een vermogen van 40 W. Hoe groot is het vermogen van de andere twee weerstanden?



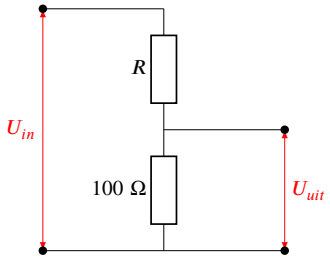
1. $P_2 = \ldots\ldots\ W$

2. $P_3 = \ldots\ldots\ W$

CC BY-NC-SA 4.0

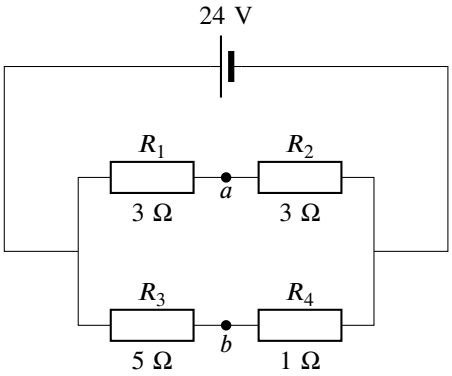
11.5.3 Gevorderde oefeningen

1. Hoe groot moet weerstand R zijn opdat $U_{\text{uit}} = \frac{1}{10} \cdot U_{\text{in}}$?



$R = \ldots\ldots\ \Omega$

2. Hoe groot is de spanning tussen a en b?



$U = \ldots\ldots\ V$

CC BY-NC-SA 4.0

11.5.4 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over schakelingen via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Intro permanente magneten

Hoewel in de oudheid de magnetische eigenschappen van sommige gesteenten (vb. magnetiet) al bekend waren, heeft het tot de negentiende eeuw geduurd vooraleer men de werkelijke oorzaak van magnetisme heeft kunnen bepalen. Men zag immers bij de studie van elektrische stromen dingen gebeuren die erg op de effecten van magneten lijken. In heel wat elektrische apparaten spelen magneten een belangrijke rol. Denk bijvoorbeeld aan de kleine luidsprekers die vandaag veel gebruikt worden. Ook in elke motor vind je een magneet terug. In dit hoofdstuk onderzoeken we de eigenschappen van magneten en leggen we een verband met de vorige hoofdstukken over elektrische stromen.

CC BY-NC-SA 4.0

12.2 Eigenschappen

12.2.1 Natuurlijke en kunstmatige magneten

In de natuur komen ertsen voor die ijzer aantrekken: magnetiet is een **natuurlijke magneet**. Ook de Aarde zelf gedraagt zich, door de aanwezigheid van dergelijke materialen, in feite als één grote magneet.

Sinds het einde van de 19de eeuw kunnen we ook **kunstmatige magneten** maken. Hiervoor gebruikt men een legering van ijzer en andere stoffen. Zo zijn bijvoorbeeld AlNiCo-magneten opgebouwd uit Fe, Al, Ni en Co. De sterkste magneten die men tegenwoordig maakt, zijn de neodymiummagneten (Nd, Fe en B).

12.2.2 Magnetiseren van magnetiseerbare stoffen

Als een stof magnetiseerbaar is, zoals ijzer, staal, ... dan worden ze magnetisch door ze in de buurt te houden van een magneet (dit kan vb ook gewoon de Aarde zijn). Dit proces noemen we magnetiseren.

Echter, sommige van deze stoffen verliezen hun magnetisatie onmiddellijk als ze van bij die magneet worden weggehaald. We noemen deze stoffen **zachte** magnetische materialen. Andere stoffen blijven hun magnetisatie daarna wel behouden. Deze stoffen noemen we **harde** magnetische materialen. Als de zo verkregen magnetisatie een heel lange tijd aanhoudt, noemen we deze stoffen **permanente magneten**.

12.2.3 Eigenschappen van permanente magneten

Permanente magneten hebben volgende eigenschappen:

(a) een magneet oefent een aantrekkingskracht uit op bepaalde materialen zoals ijzer, kobalt en nikkel.

(b) een magneet heeft steeds twee polen: een noordpool (N) en een zuidpool (Z). Een noordpool en een zuidpool trekken elkaar aan. Twee gelijknamige polen stoten mekaar af.

(c) als je een magneet in twee stukken breekt, heeft elk stuk een noord- en een zuidpool. Je krijgt zo dus twee magneten uit één.

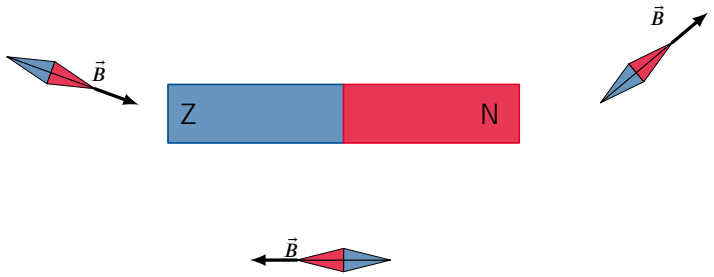
CC BY-NC-SA 4.0

12.3 Het magnetische veld

12.3.1 Definitie van het magnetische veld

Een magneet verandert de eigenschappen van de ruimte errond. De magneet creëert rond zich een **magnetisch veld**, dat op grotere afstand steeds zwakker wordt tot het verdwijnt.

Om de invloed van een magneet in een punt P, gelegen in zijn magnetisch veld, weer te geven, gebruiken we de grootheid $\vec{B}$. Met een kompasnaald kan je informatie bekomen over $\vec{B}$: in de buurt van een magneet geeft de kompasnaald de richting en zin aan van het magnetische veld: de noordpool van de kompasnaald wijst in de richting en zin van het magnetische veld op die plaats.



Figuur 80 – Een kompasnaald, meer bepaald zijn noordpool, geeft op een bepaalde plaats de richting en zin van het magnetische veld.

Definitie 12.3.1. Het magnetische veld $\vec{B}$ in een punt P, gelegen in het magnetisch veld van een magneet, is een vector met volgende kenmerken:

(a) het aangrijpingspunt is het punt P;

(b) de richting is die van een kompasnaald in dat punt;

(c) de zin is die waarin de **N-pool** van de kompasnaald wijst;

(d) de grootte geeft de sterkte van het magnetische veld aan in dat punt.

De grootte van het magnetische veld wordt uitgedrukt in tesla (T).

12.3.2 Samenstellen van magnetische veldvectoren

Ligt een punt P in de buurt van meer dan één magneet, dan krijgt het van elke magneet apart een eigen veldvector, waarna de eigenlijke veldvector in punt P gevonden kan worden als de samenstelling of dus de **vectorsom**, van de afzonderlijke veldvectoren.

12.3.3 Magnetische veldlijnen

Je kunt een magnetisch veld voorstellen door veldvectoren in allerlei punten van het veld te tekenen, maar meestal gebruikt men echter magnetische **veldlijnen** om in een oogopslag een beeld te vormen van het magnetische veld. Zo krijg je dus snel een idee te van hoe (en hoe sterk) een magneetje, zoals bijvoorbeeld een kompasnaaldje, zich zal richten als het op een bepaalde plaats in het veld komt te staan.

Magnetische veldlijnen zijn krommen waar de magnetische veldvectoren op alle plaatsen aan raken. We geven elke veldlijn een pijl die aanduidt in welke richting de veldvectoren, die aan die veldlijn raken, gericht staan. Uit de definitie van de veldvector (zie eerder) volgt onmiddellijk dat de veldlijnen buiten de magneet **van de noordpool naar de zuidpool van de magneet** lopen. Binnenin de magneet sluiten de veldlijnen zichzelf. Ook over de lokale sterkte van het magneetveld krijgen we op deze manier informatie : op plaatsen

CC BY-NC-SA 4.0

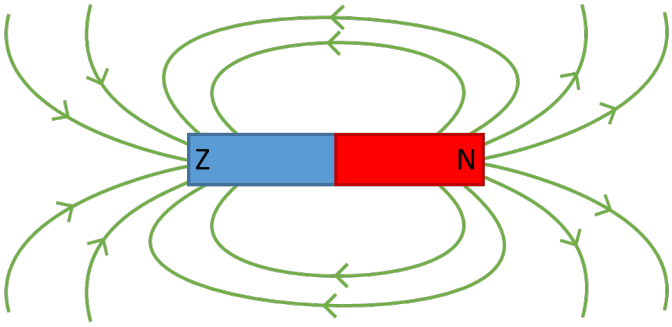
12.3 Het magnetische veld

waar de veldlijnen ver uiteen liggen, is er een zwakker magneetveld dan op plaatsen waar ze dicht opeen liggen.

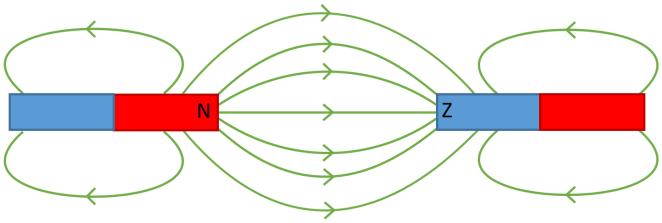
Je kunt het veldlijnenpatroon van een magnetisch veld ook echt zichtbaar maken door ijzervijlselkorreltjes te strooien op een glazen plaat boven de magneet: de korreltjes worden gemagnetiseerd en gedragen zich vervolgens als kleine kompasnaaldjes die zich schikken volgens de veldlijnen.

12.3.4 Enkele magnetische veldlijnenpatronen

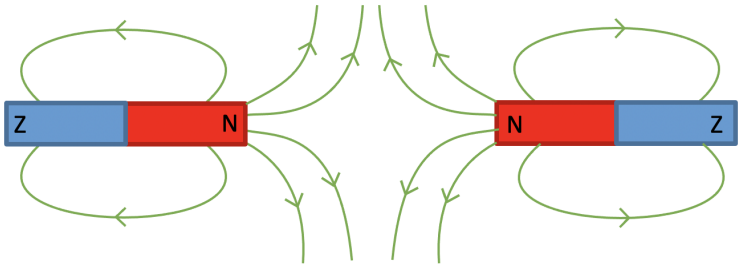
Veld van een staafmagneet



Veld tussen 2 ongelijknamige polen



Veld tussen 2 gelijknamige polen



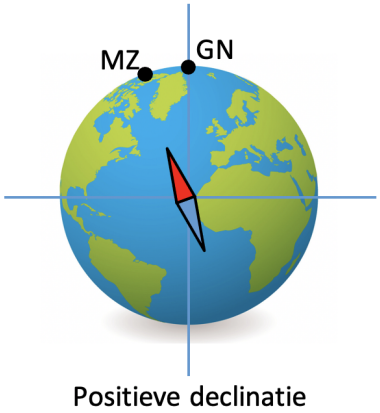
Merk op dat de bovenstaande figuren tweedimensionaal zijn, maar dat in werkelijkheid het veld zich in alle richtingen rond de magneet uitstrekt.

CC BY-NC-SA 4.0

12.4 Het magnetische veld van de aarde

Tegenwoordig gebruikt men steeds meer GPS-systemen om de positie op aarde nauwkeurig te bepalen, maar vroeger gebruikten o.a. de zeevaarders daar een kompas voor.

De aarde gedraagt zich in feite als één grote magneet. Bij het werken met een kompas maak je gebruik van het magnetische veld dat zich rond de aarde bevindt. In elk punt op het aardoppervlak kan je de richting en zin van de magnetische veldvector $\vec{B}$ bepalen met behulp van een kompas: een kompasnaald richt zich volgens de magnetische veldvector op die plaats. Dat betekent dat de Noordpool van de kompasnaald naar het magnetische zuiden (MZ) van de aarde wijst.



Figuur 81 – De kompasnaald geeft niet de exacte richting naar het geografische noorden.

Dit magnetische zuiden ligt in de buurt van de geografische Noordpool (GN) van de aarde. Daarom zegt men dat een kompas het noorden van de aarde aanwijst.

Echter, door het verschil tussen MZ en GN wijkt een kompasnaald altijd een beetje af. Die afwijking noemt men de **magnetische declinatie** d. De declinatie verschilt van plaats tot plaats op aarde. Aan de evenaar is ze ongeveer 30 microtesla sterk, aan de polen ongeveer het dubbele.

CC BY-NC-SA 4.0

12.5 Oefeningen Magneten

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

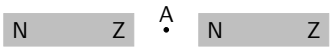
CC BY-NC-SA 4.0

12.5.1 Instapoefeningen

1. In een luidspreker zit een magneet die z'n magnetische eigenschappen lang behoudt. Is deze magneet van een hard of een zacht magnetisch materiaal gemaakt?

2. Iemand beweert dat magnetische veldlijnen binnenin een staafmagneet van de noordpool naar de zuidpool lopen. Heeft deze persoon gelijk?

3. De figuur toont twee staafmagneten. Het punt A ligt in het midden tussen twee even sterke polen. Wat kan je zeggen over het magnetisch veld in punt A?



1. Meerkeuze:

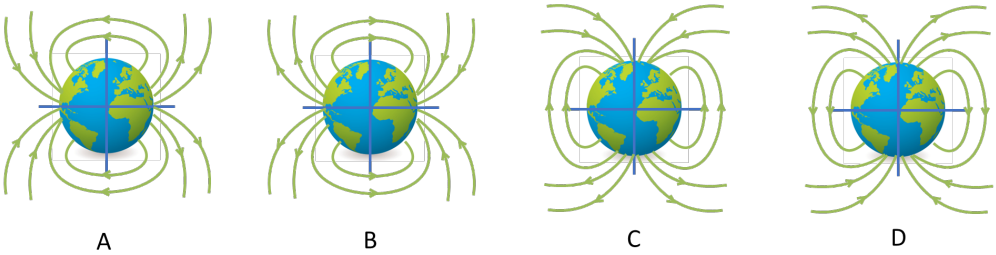
(a) De veldsterkte is gelijk aan nul.

(b) De magnetische veldvector wijst naar links.

(c) De magnetische veldvector wijst naar rechts.

(d) De veldsterkte neemt af als je vanuit A opschuift naar rechts.

4. Op welke figuur wordt het magnetisch veldlijnenpatroon van het magnetisch veld van de Aarde best voorgesteld?



1. Meerkeuze:

(a) A

(b) B

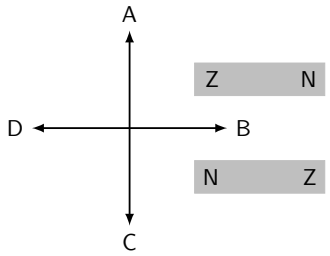
(c) C

(d) D

CC BY-NC-SA 4.0

12.5.2 Standaardoefeningen

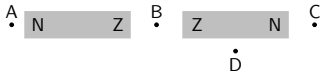
1. De figuur hieronder toont twee staafmagneten met dezelfde grootte en dezelfde sterkte. Welke pijl geeft de richting van het magnetisch veld weer in het punt waar de pijlen vertrekken? (Het punt bevindt zich op gelijke afstanden van de twee magneten)



1. Meerkeuze:

(a) A
(c) C
(b) B
(d) D

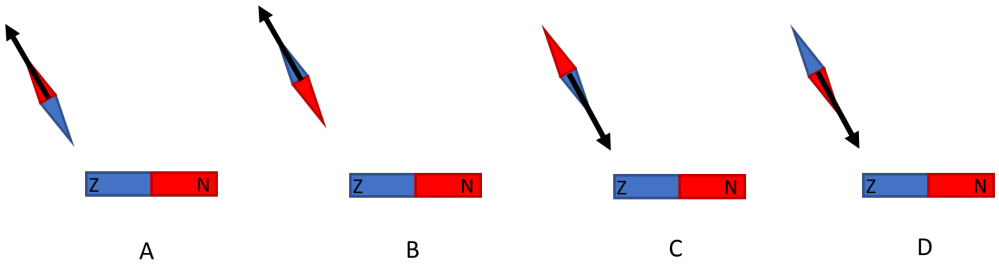
2. De figuur toont twee staafmagneten met dezelfde grootte en dezelfde sterkte. In welk van de aangeduide punten (A tot D) is het magnetisch veld het zwakst? (N=Noord en Z=Zuid)



1. Meerkeuze:

(a) A
(c) C
(b) B
(d) D

3. Op de figuur zie je een staafmagneet met in de buurt een kompasnaald. Op de kompasnaald is de magnetische veldvector weergegeven. Welke figuur zou juist kunnen zijn?



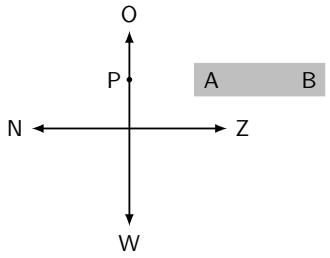
1. Meerkeuze:

(a) A
(c) C
(b) B
(d) D

CC BY-NC-SA 4.0

12.5.3 Gevorderde oefeningen

1. Een zwakke staafmagneet ligt op een tafel. De windroos geeft de windrichtingen aan. In punt P plaats je nu een kompasnaaldje om het veld op die plaats te testen, maar het naaldje geeft geen duidelijke richting aan. Aan welke kant zal de noordpool van de magneet zich dan bevinden, kant A of kant B?



CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Intro magnetisch veld van een elektrische stroom

In 1820 ontdekte de Deen Hans Christian Oersted dat een elektrische stroom een magnetisch veld rond zich creëert. Zijn experimenten wezen op een verband tussen elektriciteit en magnetisme.

CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Het magnetische veld van een rechte stroomvoerende geleider

Grootheden zoals snelheid, kracht en ook magnetisch veld zijn vectoriële grootheden. We stellen ze voor door een pijl. Ook de conventionele stroom stellen we vaak voor door een pijl, hoewel een stroom geen vectoriële grootheid is. Op een figuur gebruiken we de volgende afspraken:

(a) Een pijl die uit het blad komt, stellen we voor als:



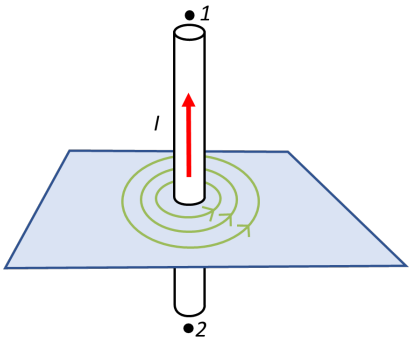
(b) Een pijl die in het blad gaat, stellen we voor als:



Je kan als geheugensteuntje denken aan een dartspijltje: vliegt dat naar je toe, dan zie je een puntje, vliegt dat van je weg, dan zie je een kruisje.



Oersted ontdekte in 1820 volgend magnetisch effect van elektricteit : Stuur je door een rechte draad een elektrische stroom, en plaats je in de buurt ervan enkele kompasnaalden, dan blijken deze kompasnaalden zich te richten. Er is blijkbaar een magnetisch veld aanwezig rond een elektrische stroom, en de gerichte kompasnaaldjes geven je een zicht op dit magnetische veld.



Figuur 82 – Magnetische veldlijnen rond een rechte geleider zijn cirkelvormig.

Bekijk je het veldlijnenpatroon vanuit de aangeduide punten 1 en 2, dan bekom je de volgende figuren:

CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Het magnetische veld van een rechte stroomvoerende geleider



(a) (b)

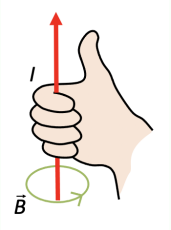
Figuur 83 – Veldlijnenpatroon rond een stroomvoerende geleider die (a) uit het blad of (b) in het blad gericht is.

Eigenschap 13.2.1. Voor het magnetisch veld van een rechte stroomvoerende geleider vind je volgende eigenschappen:

(a) De magnetische veldlijnen van een rechte stroomvoerende geleider zijn concentrische cirkels met de draad als middelpunt en gelegen in vlakken loodrecht op de draad.

(b) De magnetische veldlijnen liggen dichter bijeen naarmate ze dichter bij de draad liggen.

(c) De zin van de veldlijnen (wijzerzin of tegenwijzerzin) kun je onthouden met **de eerste regel van de rechterhand**: omknel je de geleider met je rechterhand zodat je duim in de conventionele stroomzin wijst, dan geeft de kromming van je vingers de zin van de veldlijnen aan.



De grootte van het magnetische veld $\vec{B}$ in een punt P op een afstand r van een draad met stroom I is

$$B = \mu \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r}.$$

Hoe groter I, hoe groter B in een bepaald punt. Een grotere stroom wekt dus een groter magneetveld op. Hoe groter r, of dus hoe verder punt P van de draad ligt, hoe kleiner B. Dit is de aanleiding om de veldlijnen dichter bijeen te tekenen dichterbij de draad, en verder uiteen ver weg van de draad.

De constante μ is de permeabiliteit van de zogenaamde 'middenstof', dit is de stof die zich rond de draad bevindt. Hoe groter μ, hoe sterker het magnetische veld.

De permeabiliteit voor vacuüm stelt men voor door μ_0 en is gelijk aan

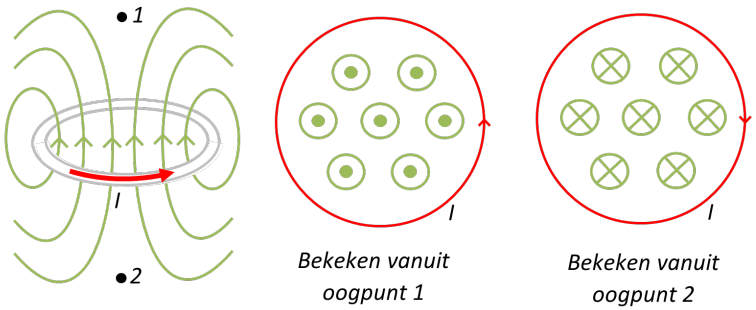
$$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Tm}{A}.$$

De waarde voor lucht verschilt hier maar heel weinig van. Daarom neemt men voor lucht vaak gewoon dezelfde waarde.

CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Het magnetische veld van één stroomvoerende winding

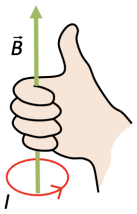
Als je met een geleider een lus vormt of hem éénmaal rond een cilinder wikkelt, spreken we van een winding. Experimenteel vind je dat een stroomvoerende winding een magnetisch veld creëert zoals in onderstaande figuur.



Figuur 84 – Veldlijnenpatroon rond een stroomvoerende winding.

Het magneetveld is buiten de winding zwakker dan binnen de winding. Met andere woorden : de veldlijnen liggen buiten de winding verder uiteen dan binnen de winding. Daarom wordt het magneetveld buiten de winding vaak verwaarloosd. De magnetische veldlijnen van een stroomvoerende winding bevinden zich dus binnen de winding en staan loodrecht op de winding.

De zin van de veldlijnen kun je onthouden met de **tweede regel van de rechterhand**: krom je de vingers van je rechterhand volgens de stroomzin, dan wijst je duim in de zin van de veldlijnen.



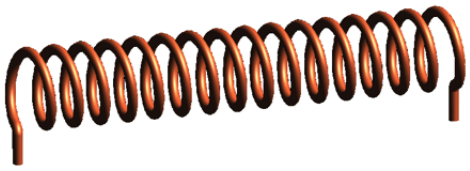
Eigenschap 13.3.1. De grootte van het magnetische veld $\vec{B}$ in het middelpunt van één winding met straal r en stroom I is

$$B = \mu \cdot \frac{I}{2r}.$$

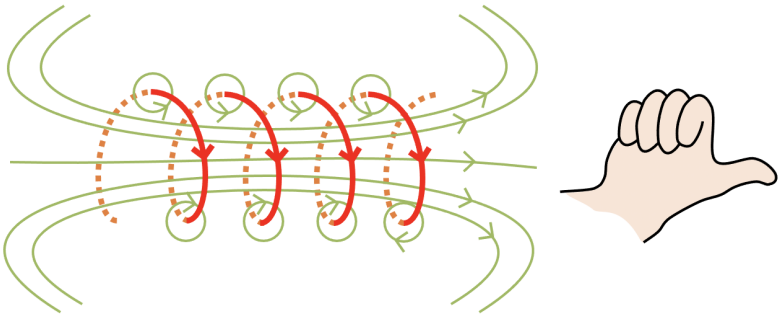
CC BY-NC-SA 4.0

13.4 Het magnetische veld van een stroomvoerende spoel

Als je een geleider een aantal keer rond een cilinder of balk wikkelt, bekom je een spoel, ook wel solenoïde genoemd.



Experimenteel blijkt dat een stroomvoerende spoel een magnetisch veld creëert zoals in onderstaande figuur. In de spoel zijn de veldlijnen nagenoeg evenwijdig en liggen volgens de lengterichting van de spoel. Het veld in de spoel is dus homogeen. Dat komt omdat elke winding een elementair magnetisch veld vormt loodrecht op die winding: alle windingen samen geven het magnetische veld van de spoel.



Figuur 85 – Veldlijnenpatroon in en rond een stroomvoerende spoel.

Buiten de spoel wordt is het magnetisch veld zwak en wordt het dus vaak verwaarloosd. Binnenin een stroomvoerende spoel is het magnetische veld homogeen. De zin van de veldlijnen kun je ook hier vinden met de tweede regel van de rechterhand.

Eigenschap 13.4.1. De grootte B van het magnetische veld hangt af van de stroomsterkte I, het aantal windingen N en de lengte ℓ waarover de koperdraad gewikkeld is. Experimenteel blijkt dat de grootte van het veld in het centrum van de spoel gegeven wordt door:

$$B = \mu \cdot \frac{I \cdot N}{\ell}.$$

Hoe groter de stroom I, hoe groter het magnetisch veld in de spoel.

$\frac{N}{\ell}$ is het aantal windingen per lengte-eenheid van de spoel, ook wel de windingdichtheid van de spoel genoemd. Hoe groter $\frac{N}{\ell}$, hoe groter B.

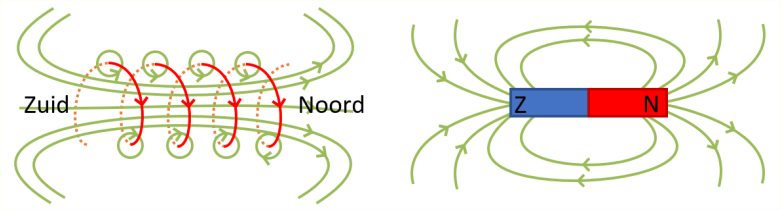
Hoe groter μ, hoe groter B. Is de ruimte binnen de spoel vacuüm gemaakt, of is er lucht, dan gebruiken we hiervoor de waarde μ_0. Voor ijzer is μ echter veel groter dan voor lucht. Dus door een ijzeren kern in een spoel te schuiven, wordt het magnetisch veld van een spoel veel sterker.

1. Een $1{,}0$ m lange MRI-spoel wekt een magnetisch veld op van $1{,}2$ T. Om zo een groot veld te kunnen opwekken is de spoel gemaakt van een supergeleidend materiaal waardoor een stroom van 100 A kan vloeien. Hoeveel windingen zijn er nodig om dit veld op te wekken?

CC BY-NC-SA 4.0

13.4 Het magnetische veld van een stroomvoerende spoel

Opmerking 13.4.1. Het veldlijnenpatroon dat een spoel opwekt, lijkt heel erg op het veldlijnenpatroon van een staafmagneet. Hoewel de spoel elektrische stroom voert, gedraagt ze zich magnetisch. Er ontstaat aan elke kant van de spoel een noordpool of een zuidpool, de spoel is in zekere zin een staafmagneet geworden. Men noemt een stroomvoerende spoel ook wel een **elektromagneet**.



Dat elektriciteit magnetisme kan opwekken is zeer bijzonder. Het was reeds aanwezig bij de rechte geleider en de winding, maar het effect wordt pas heel sterk bij een spoel met grote windingsdichtheid. Elektriciteit en magnetisme zijn zeer nauw verwant, want ook het omgekeerde effect zal bestaan : magnetisme zal elektriciteit kunnen opwekken. We noemen elektriciteit en magnetisme daarom samen **elektromagnetisme**.

CC BY-NC-SA 4.0

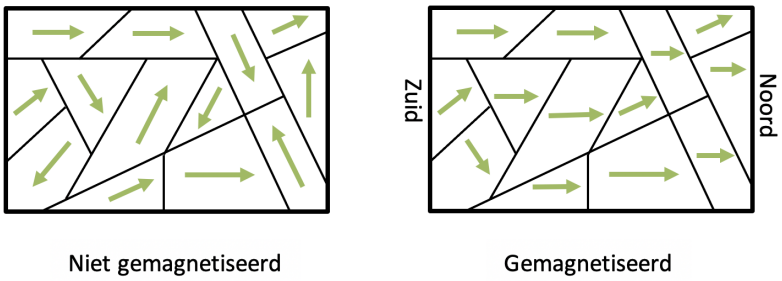
13.5 Verklaring van magnetisme

13.5.1 Ferromagnetische materialen

Een elektrische stroom is een verschuiving van ladingen en creëert rond zich een magnetisch veld. Men neemt aan dat ook bij permanente magneten het magnetisme veroorzaakt wordt door bewegende ladingen. Doordat in elk atoom elektronen rond de kern bewegen, zorgt dat voor ontelbaar veel kleine stroompjes met een bijhorend magnetisch veldje. Bovendien heeft elk elektron een elektronspin, die ook bijdraagt tot de magnetische eigenschappen van het materiaal.

De beweging van de elektronen rond de kern en de elektronenspins zorgen voor een magnetisch veldje bij elk atoom. Voor de meeste soorten atomen is het netto-magnetisch veldje van elk atoom echter praktisch nul. Deze materialen zijn niet magnetiseerbaar. Bij andere atoomsoorten is het netto magnetisch veld van elk atoom echter niet-nul, en is het materiaal dus wel magnetiseerbaar.

Slechts bij enkele van al deze magnetiseerbare materialen, **ferromagnetische materialen** genaamd (zoals bv. ijzer), vormen zich spontaan gebiedjes van $0,01$ à $0,1$ mm breed, **gebieden van Weiss** of magneculen genoemd, waarin de veldjes van de atomen zich telkens collectief gelijkrichten. Deze gebiedjes zijn vrij goed bestand tegen het stoppen van het magnetisatieproces, en blijven dus achteraf lange tijd bestaan. Dit fenomeen vormt de verklaring voor het ferromagnetisme in deze materialen. De bekendste ferromagneten zijn ijzer en nikkel.



Figuur 86 – Gebieden van Weiss in een ferromagnetisch materiaal.

In een nog niet (of niet meer) gemagnetiseerd stuk ijzer zijn de gebieden van Weiss willekeurig geordend, zodat er praktisch geen netto-magnetisch veld is (zie figuur links). Als je een magneet nabij brengt oriënteren die gebieden van Weiss zich meer in één bepaalde richting: het stuk ijzer wordt magnetisch. Het stuk ijzer krijgt dus een noordpool en een zuidpool. Bij een hard magnetisch materiaal blijven de gebieden van Weiss hun oriëntatie behouden nadat de magneet verwijderd is, bij zacht magnetisch materiaal verdwijnt dan die oriëntatie.

Door een gemagnetiseerd materiaal sterk op te warmen (boven de zogenaamde **Curie-temperatuur**) verstoor je de gebieden van Weiss totdat ze verdwijnen. Het ijzer is dan niet langer ferromagnetisch.

CC BY-NC-SA 4.0

13.6 Oefeningen Magnetisch veld

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

13.6.1 Instapoefeningen

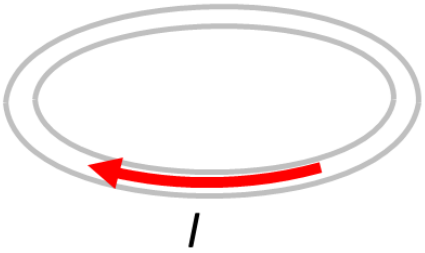
1. Hoewel wetenschappers het er niet over eens zijn, houdt men de laatste jaren rekening met het feit dat hoogspanningslijnen misschien een negatief effect hebben op de gezondheid. Een typische hoogspanningslijn loopt 20 m boven de grond en vervoert een stroom van 200 A. Hoe groot is het magnetische veld op een plaats recht onder de hoogspanningslijn als gevolg van de stroom door deze hoogspanningslijn?

$$B = \ldots\ldots\ \mu T$$

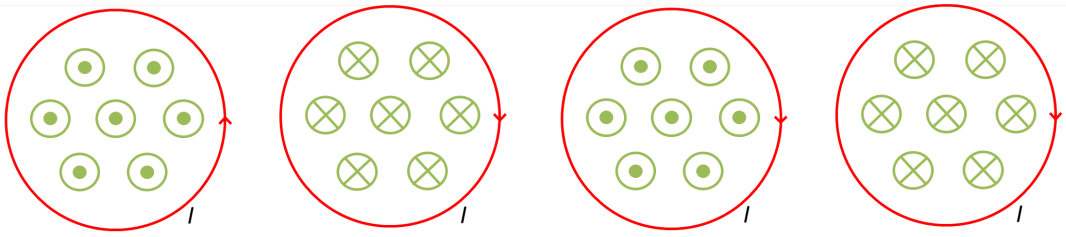
2. Een spoel met 1000 windingen heeft een lengte van 6,0 cm. Hoe groot is het magnetisch veld in het midden van de spoel als je er een stroom van 1,5 A door laat lopen?

$$B = \ldots\ldots\ \text{mT}$$

3. Door een cirkelvormige winding loopt een stroom zoals weergegeven op de figuur



Indien je langs boven of langs onder naar de winding kijkt, welke figuur kan dan juist zijn?



A B C D

1. Meerkeuze:

(a) A
(b) B
(c) C
(d) D

CC BY-NC-SA 4.0

13.6.1 Instapoefeningen

4. Iemand beweert dat het patroon van magnetisch veldlijnen rond een stroomvoerende spoel sterk gelijkt op dat van een staafmagneet. Ga je hiermee akkoord? Waarom (niet)?

CC BY-NC-SA 4.0

13.6.2 Standaardoefeningen

1. Een spoel met 1200 windingen heeft een lengte van 8,0 cm. Je wilt er een elektromagneet van maken met een veldsterkte van 1,0 T in het binnenste van de spoel. Hoe groot moet de stroom door de spoel zijn om dat mogelijk te maken?

$$I = \ldots\ldots \text{ A}$$

2. Een enkele lus moet een magnetisch veld creëren van $5,0\ \mu$T. De maximale stroom die door de draad mag lopen is 4,5 A. Welke diameter moet de lus hebben?

$$breedte = \ldots\ldots \text{ m}$$

3. Gegeven zijn twee stromen waarvoor geldt dat $I_1 = I_2 = 5,0$ A. Teken de magnetische veldvector in het punt P



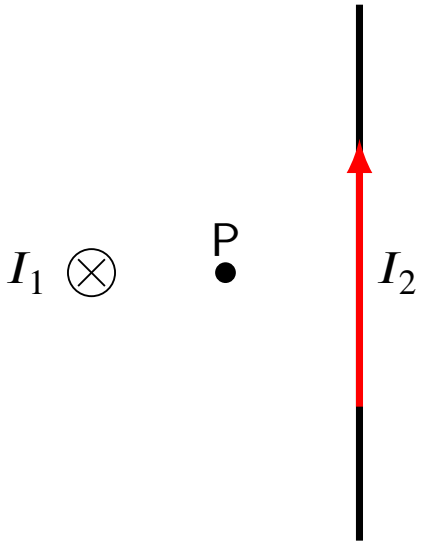
CC BY-NC-SA 4.0

13.6.3 Gevorderde oefeningen

1. Een metalen bol hangt op aan een verticaal touw. Als je de noordpool van een magneet dichterbij de bol brengt, wordt de bol sterk aangetrokken door de magneet. Verwijder je nu de noordpool en breng je de zuidpool van de magneet dichterbij de bol, wat verwacht je dat er zal gebeuren?

2. Gegeven zijn twee stromen waarvoor geldt dat $I_1 = 20$ A en $I_2 = 10$ A. De stromen lopen in lange rechte draden. Tussen de draden is een afstand van 10,0 cm. Bereken de magnetische veldsterkte in het punt P, dat precies in het midden tussen de draden ligt.

$$B = \ldots\ldots \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$



CC BY-NC-SA 4.0

13.6.4 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over het magnetisch veld via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Intro elektromagnetische kracht

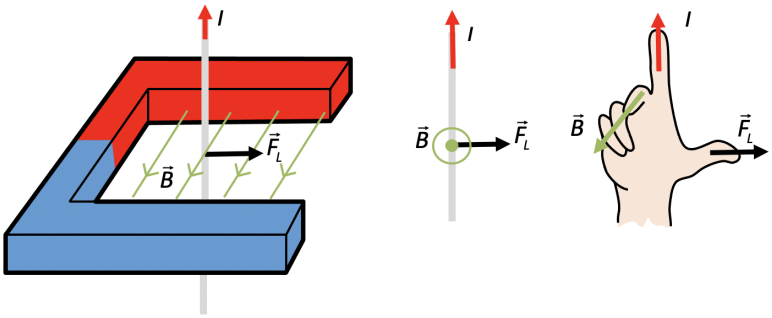
In de vorige hoofdstukken heb je geleerd dat een elektrische stroom een magnetisch veld rond zich opwekt. In dit hoofdstuk leer je dat ook het omgekeerde geldt : een magnetisch veld oefent een 'Lorentz'-kracht uit op een bewegende elektrische lading. Het gevolg hiervan is dat een magnetisch veld ook een 'Laplace'-kracht uitoefent op een elektrische stroom, die immers uit massaal veel bewegende elektrische ladingen bestaat.

CC BY-NC-SA 4.0

14.2 De elektromagnetische krachtwerking

14.2.1 De Laplacekracht

De proef van Oersted, met de kompasnaaldjes in de buurt van de rechte stroomdraad, toonde ons hoe een elektrische stroom een kracht kan uitoefenen op een magneet. Maar ook het omgekeerde is waar: een magnetisch veld van een magneet oefent ook een kracht uit op bewegende elektrische ladingen en dus ook op een stroomdraad. Die kracht noemt men soms de Laplacekracht.



Figuur 87 – Kracht op een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld. De kracht staat loodrecht op de stroomdraad en ook loodrecht op de veldlijnen.

Experimenteel vind je volgend resultaten:

(a) het aangrijpingspunt van de kracht is de draad.

(b) de richting: de kracht staat loodrecht op het vlak gevormd door de draad en het magnetische veld op die plaats.

(c) de zin van de Laplacekracht kun je onthouden met de regel van de Laplace (RVL): als je de wijsvinger (Index) van je rechterhand volgens de conventionele stroomzin I houdt en je Middenvinger in de zin van het Magnetische veld, geeft je duim de zin van de kracht aan.

(d) de grootte van de kracht hangt o.a. af van de sterkte van de stroom en de sterkte van het veld op de plaats van de stroomdraad. (We bekijken enkel gevallen waarin de sterkte van het magneetveld gelijk is over de hele draad.)

Eigenschap 14.2.1. Met een gedetailleerd onderzoek, kan je nagaan dat de grootte van de Laplacekracht F_L op een stroomdraad met stroom I en lengte ℓ, die zich in een magnetisch veld $\vec{B}$ bevindt, gelijk is aan

$$F_L = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin(\vec{B}, I)$$

. N.B. Hierbij kunnen we voor de sterkte B van het magneetveld eventueel gebruik maken van uitdrukkingen uit een vorig hoofdstuk.

Opmerking 14.2.1. Via deze wet kunnen we de eenheid tesla van magnetisch veld, schrijven in termen van gekende eenheden. De grootte van het magnetisch veld $\vec{B}$ dat een kracht $\vec{F}_L$ veroorzaakt op een stroomdraad met lengte ℓ waardoor een stroom I vloeit, is gelijk aan

$$B = \frac{F_L}{I \cdot \ell \cdot \sin(\vec{B}, I)}.$$

Dus de eenheid van B, de tesla, is gedefinieerd als : $1\ \mathrm{T} = 1\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

14.2 De elektromagnetische krachtwerking

14.2.2 De Lorentzkracht

De kracht van een magnetisch veld op één afzonderlijke bewegende elekrische lading noemt men de Lorentzkracht $\vec{F}_L$.

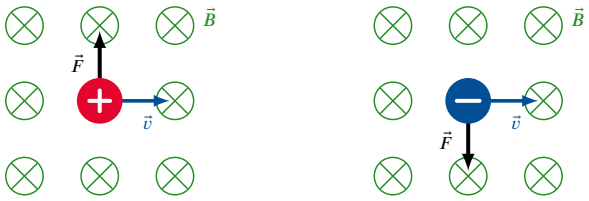
Experimenteel blijkt dat die kracht volgende kenmerken heeft:

(a) het aangrijpingspunt van de kracht is de bewegende lading;

(b) de richting: de kracht staat loodrecht op het vlak gevormd door bewegingsrichting van de lading en de magnetische veldlijnen op die plaats;

(c) de zin van de kracht op een positieve lading vind je ook hier met de RVL. Voor een negatieve lading moet je de zin van de kracht omkeren.

Opmerking 14.2.2. Merk op dat, in gelijke omstandigheden, de magnetische kracht op een negatieve lading dus even groot maar omgekeerd gericht is aan de kracht op een positieve lading. Hetzelfde fenomeen hebben we in een vorig hoofdstuk ook al vastgesteld bij de elektrische coulombkracht.



Figuur 88 – Kracht op een bewegende lading in een magnetisch veld. Deze magnetische kracht staat loodrecht op de bewegingsrichting en op de veldlijnen.

Definitie 14.2.1. Op een lading Q die met snelheid v in een magnetisch veld met grootte B beweegt, werkt de Lorentzkracht. Deze heeft als grootte:

$$F_L = B \cdot |Q| \cdot v \cdot \sin(\vec{B}, \vec{v}).$$

N.B. Ook hierbij kunnen we voor de sterkte B van het magneetveld eventueel gebruik maken van uitdrukkingen uit het vorig hoofdstuk.

Opmerking 14.2.3. De Lorentzkracht op elke afzonderlijke elektrische lading vormt de microscopische verklaring van de Laplacekracht op de hele stroomdraad.

1. Een magnetisch veld oefent een kracht naar links uit van $8,5 \cdot 10^{-14}\ N$ op een proton dat verticaal omhoog beweegt met een snelheid van $6,0 \cdot 10^{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Het veld is horizontaal gericht en maakt een hoek van $90°$ met de bewegingsrichting van het proton. Bereken de magnetische veldsterkte.

Opmerking 14.2.4. In het algemeen, als een bewegende lading zich in een 'elektromagnetisch veld' bevindt, d.w.z. een gebied waar een elektrisch veld $\vec{E}$ en/of een magnetisch veld $\vec{B}$ heerst, dan wordt de Lorentzkracht gedefinieerd als de resulterende kracht van beide velden op die lading :

$$\vec{F}_L = Q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Ze bestaat dus uit twee stukken: een elektrische kracht en een magnetische kracht. In dit hoofdstuk hebben we enkel de magnetische kracht beschouwd. De elektrische kracht kennen we uit een vorig

CC BY-NC-SA 4.0

14.2 De elektromagnetische krachtwerking

hoofdstuk.

CC BY-NC-SA 4.0

14.3 Oefeningen Magnetische kracht

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

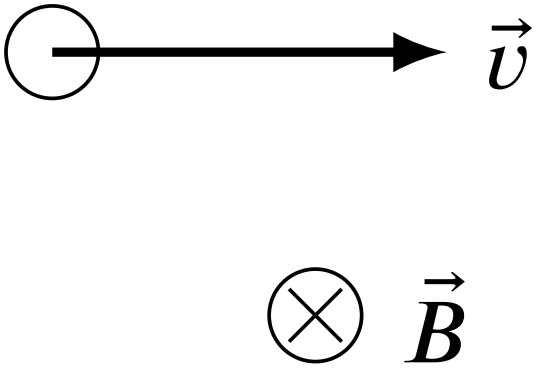
14.3.1 Instapoefeningen

1. Door een kabel in een railsysteem voor lampen loopt een stroom van 10 A. De kabel maakt een hoek van 30° met het magnetisch veld van de Aarde. De sterkte van dit veld is $4,5 \cdot 10^{-5}$T. Hoe groot is de kracht op een stuk van 100 m van deze kabel?

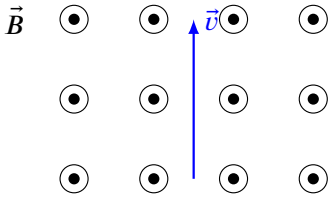
$$F = \ldots\ldots \ N$$

2. Een lading $Q = -10\ \mu$C beweegt door een magnetisch veld waarvoor geldt dat $B = 120$ mT (zie figuur). Hoe groot is de magnetische kracht op deze lading als deze aan een snelheid van 3000 km/h voortbeweegt.

$$F = \ldots\ldots \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$



3. Bepaal de richting van de kracht op een elektron dat beweegt door een magnetisch veld, zoals weergegeven op de figuur.

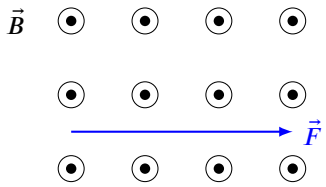


4. In een experiment zien deeltjesfysici een onbekend deeltje dat niet afgebogen wordt wanneer het een magnetisch veld binnendringt. Geef een aantal mogelijke oorzaken.

CC BY-NC-SA 4.0

14.3.2 Standaardoefeningen

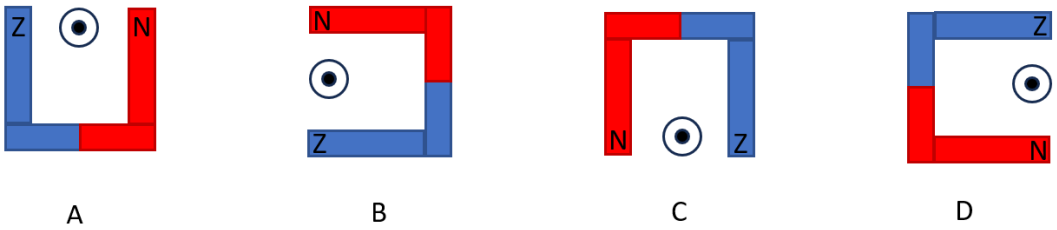
1. Bepaal de richting van de snelheid van een proton dat beweegt door een magnetisch veld, waarop een magnetische kracht werkt zoals weergegeven op de figuur.



2. De invloed van het magnetisch veld van de Aarde zie je maar zelden in het dagelijkse leven, met uitzondering van het gebruik van een kompas. Maar we kunnen in principe het magneetveld van de Aarde ook aantonen met behulp van een elektrisch geladen bol die we opladen door over de bol te wrijven met een zijden doekje. De bol krijgt daardoor een lading van 25 nC. Welke magnetische kracht zou de bol ervaren als we ze weggooien in westelijke richting met een snelheid van 15 m/s. Je mag aannemen dat het magnetisch veld van de Aarde precies naar het noorden wijst en op die plaats $4,5 \cdot 10^{-5}$T groot is.

$$F = \ldots\ldots\ 10^{-11}\text{N}$$

3. Op de figuur zie je een elektron dat naar jou toe beweegt tussen de polen van een hoefijzermagneet. In welke opstelling zal het elektron omlaag geduwd worden?



A B C D

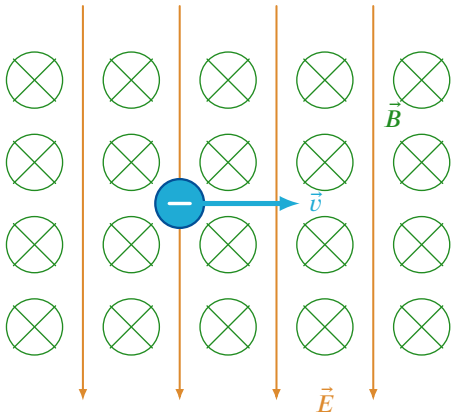
1. **Meerkeuze:**

(a) A
(b) B
(c) C
(d) D

CC BY-NC-SA 4.0

14.3.3 Gevorderde oefeningen

1. Een elektron beweegt doorheen een combinatie van een elektrisch en een magnetisch veld, zoals weergegeven op de figuur. De snelheid van het elektron is 500 m/s. Als het elektrisch veld 1000 V/m bedraagt, hoe groot moet het magnetisch veld dan zijn opdat het elektron niet afgebogen wordt?



$$B = \ldots\ldots\ T$$

2. Twee stroomdraden zijn verticaal naast elkaar gespannen op een afstand van 25 cm. De stroom doorheen beide draden is $I = 10$ A en loopt in beide draden verticaal omhoog. Hoe groot is de kracht per meter die de linkerdraad op de rechterdraad uitoefent?

$$F = \ldots\ldots \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$$

3. Een vliegtuig met een vleugelspanwijdte van 50,0 m vliegt aan een snelheid van 720 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ horizontaal over de Noordpool. We nemen aan dat de veldlijnen van het magnetisch veld van de Aarde verticaal lopen op die plaats. De magnetische veldsterkte is $4,90 \cdot 10^{-5}$ T. Welke elektrische spanning ontstaat er over de uiteinden van de vleugels van het vliegtuig?

$$U = \ldots\ldots\ \mathrm{V}$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.3.4 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over magnetisme via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

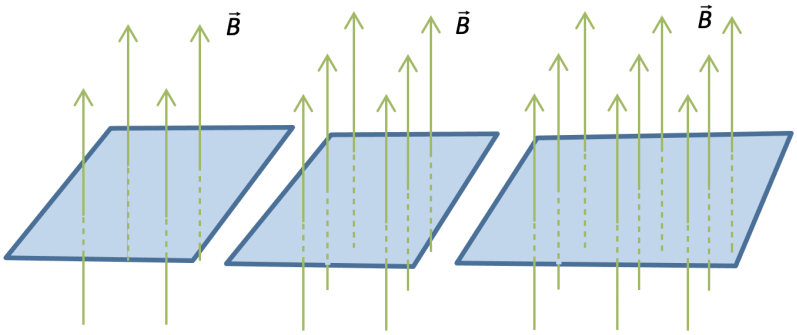
15.1 Intro elektromagnetische inductie

In de vorige hoofdstukken heb je geleerd dat een elektrische stroom een magnetisch veld opwekt en dat een magnetisch veld een kracht uitoefent op een bewegende lading. Je zou je dan ook kunnen afvragen of een magnetisch veld eventueel in staat is om een stroom op te wekken. In dit hoofdstuk zullen we leren dat dit inderdaad mogelijk is. We zullen zien dat dit heel interessante mogelijkheden biedt en heel wat toepassingen kent in ons dagelijks leven.

CC BY-NC-SA 4.0

15.2 Magnetische flux

In onderstaande figuren staan drie oppervlakken loodrecht op een magnetisch veld, dat getoond wordt via zijn veldlijnen. Door elk 'stroomt' een hoeveelheid magnetische veldlijnen. Die 'magnetische stroom' noemen we de **magnetische flux**. We kunnen de grootte van die flux inschatten via het aantal veldlijnen te tellen dat door het oppervlak 'stroomt'. Het meest rechtse oppervlak in de figuur heeft dus de grootste magnetische flux.



Figuur 89 – De magnetische flux doorheen een oppervlak.

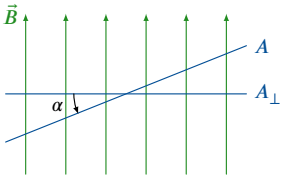
Hoe groter B, hoe groter de magnetische flux ϕ. Immers, bij een sterker veld horen dichter bijeen gelegen veldlijnen.

Hoe groter het oppervlak A, hoe groter de magnetische flux ϕ.

Hoe 'loodrechter' het oppervlak staat tegenover de veldlijnen, hoe groter de magnetische flux.

- Als het oppervlak evenwijdig is met de veldlijnen, is de magnetische flux gelijk aan 0. Immers, er stromen dan geen veldlijnen door het oppervlak.

- Als het oppervlak A schuin staat t.o.v. de veldlijnen, moet je de hoek α tussen oppervlak A en de stand $A_\perp$ in rekening brengen.



Vandaar de definitie:

Definitie 15.2.1. De magnetische flux ϕ door een oppervlak A is

$$\phi = B \cdot A \cdot \cos\alpha.$$

α is de hoek tussen A en haar 'loodrechte projectie' $A_\perp$.

Magnetische flux ϕ, wordt uitgedrukt in $T \cdot m^2$. Die eenheid noemt men de weber:

$$1\ Wb = 1\ T \cdot m^2.$$

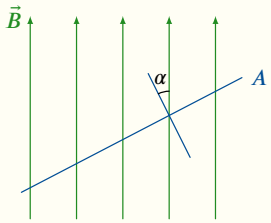
- Als het oppervlak A loodrecht op de veldlijnen staat is $\alpha = 0°$ en is $\phi = B \cdot A \cdot \cos 0° = B \cdot A$.

- Als het oppervlak A evenwijdig is met de veldlijnen is $\alpha = 90°$ en is $\phi = B \cdot A \cdot \cos 90° = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

15.2 Magnetische flux

Opmerking 15.2.1. De hoek α tussen oppervlak A en $A_\perp$ is ook gelijk aan de hoek tussen de veldlijnen en een loodlijn op het oppervlak A. Deze is dus NIET gelijk aan de hoek tussen het oppervlak en de veldlijnen.



CC BY-NC-SA 4.0

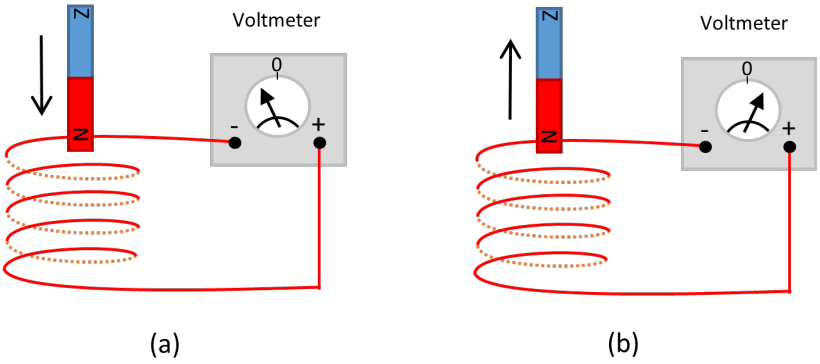
15.3 Elektromagnetische inductie

15.3.1 Het fenomeen magnetische inductie

In 1831 ontdekten Michael Faraday en Joseph Henry onafhankelijk van elkaar dat langsheen een (niet-stroomvoerende) winding een elektrische spanning wordt opgewekt als de magnetische flux door die winding verandert. Dat fenomeen noemt men **elektromagnetische inductie**. De opgewekte spanning langsheen de winding noemen we de inductiespanning, symbool U_i.

De magnetische flux door de winding kunnen we bijvoorbeeld veranderen door in de buurt van de winding een staafmagneet te bewegen.

Dit effect is voor één winding vaak vrij klein, maar als we overstappen van een winding op een spoel met N windingen, dan gebeurt de inductie in feite N keer, zodat de totale inductiespanning over de spoel dus N keer groter zal zijn dan in het geval van één enkele winding.



Figuur 90 – Als je de magneet in of uit de spoel schuift, meet je een inductiespanning. Houd je de magneet stil, dan meet je geen spanning.

Eigenschap 15.3.1. Als en zolang de magnetische flux ϕ in een winding **verandert**, ontstaat er langsheen die winding een inductiespanning U_i.

Als bovendien de winding gesloten is, loopt als gevolg daarvan door de winding ook een stroom, de inductiestroom I_i.

Als er een inductiestroom vloeit, ontstaat er als gevolg daarvan rond die stroom een eigen geïnduceerd magnetisch veld $\vec{B}_i$, met eigen geïnduceerde veldlijnen.

15.3.2 De grootte van de gemiddelde inductiespanning

Eigenschap 15.3.2. Experimenteel blijkt dat de grootte van de gemiddelde inductiespanning die opgewekt wordt in een spoel met N windingen door een fluxverandering $\Delta\phi$ in een tijdsinterval Δt, wordt gegeven door

$$\left|U_{i,g}\right| = N \cdot \left|\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right|.$$

Voor het geval van een winding kunnen we hierin $N = 1$ stellen.

Hoe groter $\Delta\phi$, in een bepaalde tijdsduur Δt, hoe groter $\left|U_{i,g}\right|$.

Hoe groter N, hoe groter $\left|U_{i,g}\right|$.

CC BY-NC-SA 4.0

15.3 Elektromagnetische inductie

15.3.3 De zin van de inductiespanning

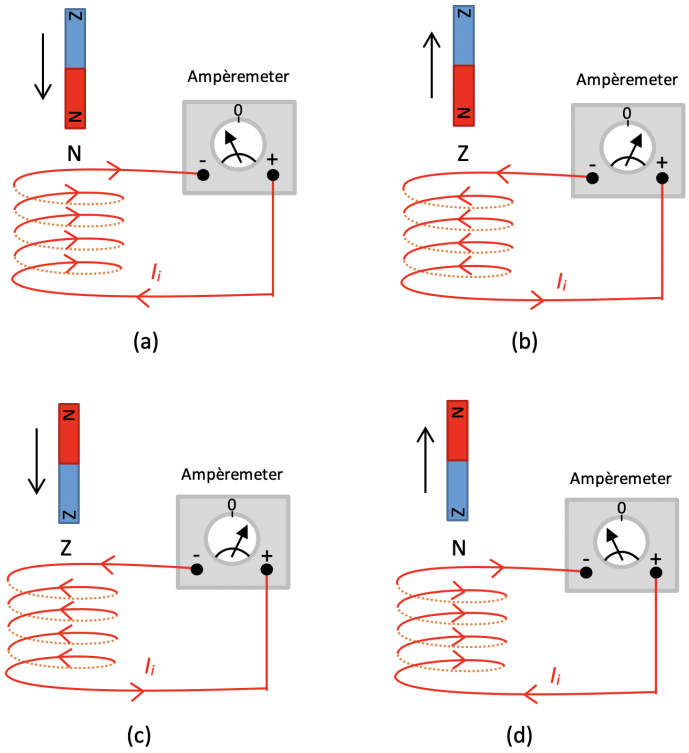
De beweging van de magneet in de buurt van de spoel zorgt voor een fluxverandering in de spoel, waardoor over de uiteinden van de spoel een geïnduceerde spanning ontstaat.

Deze spanning is een gevolg van het feit dat ten gevolge van de fluxverandering een elektrisch veld in de draad ontstaat.

Verbind je nu de uiteinden van de spoel met een Ampèremeter, dan kan je ook een stroom meten. Dat is de inductiestroom.

Bij onderzoek van de inductiestroom, zie je de naald van de Ampèremeter soms naar de ene en soms naar de andere kant uitwijken. Als je vaststelt dat de zin van de stroom verandert, moet dus ook de zin van de inductiespanning veranderd zijn. Die zin onderzoeken we nu.

De onderstaande figuur toont verschillende situaties waarbij telkens een inductiestroom loopt.



Figuur 91 – Als je de magneet in of uit de spoel schuift, meet je een inductiestroom, waarvan de zin afhangt van hoe je de magneet in of uit de spoel schuift.

In figuur a naderen we de spoel met de N-pool van een magneet. Uit de uitwijking van de naald kun je de zin van de inductiestroom bepalen. Die inductiestroom creëert zelf ook een magnetisch veld, het geïnduceerde veld. De veldlijnen van het geïnduceerde veld zijn **tegengesteld** aan het **toenemende aantal** veldlijnen die de magneet in de spoel brengt. Het verhogen van de flux wordt op die manier dus tegengewerkt.

In figuur b verwijderen we de magneet terug. Als je de zin van de veldlijnen van dit geïnduceerde veld bepaalt, vind je dat ze **gelijkgericht** staan aan het **afnemend aantal** veldlijnen dat de magneet in de spoel brengt. De spoel heeft een aantal van de veldlijnen die uit de spoel verdwijnen als de magneet zich verwijdert, weer aangemaakt om het verlies te compenseren.

In figuur c naderen we de spoel met de Z-pool van de magneet. Als je veldlijnen van dit geïnduceerde veld bepaalt, zie je dat ze tegengesteld zijn aan het toenemend aantal veldlijnen dat de magneet in de spoel

CC BY-NC-SA 4.0

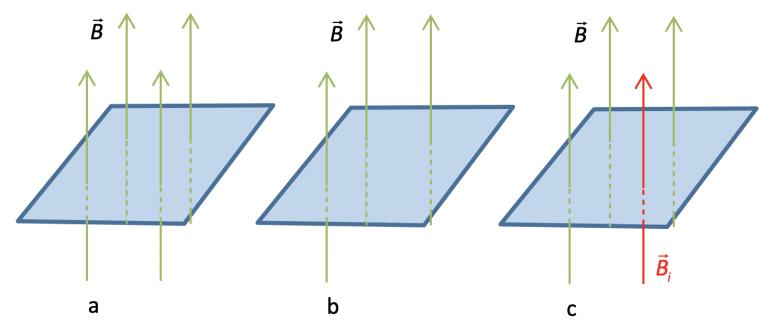
15.3 Elektromagnetische inductie

brengt. Het effect van het naderen van de magneet wordt tegengewerkt.

In figuur d verwijderen we de magneet terug. Als je veldlijnen van het geïnduceerde veld bepaalt, zie je dat ze gelijkgericht staan aan het afnemend aantal veldlijnen dat de magneet in de spoel brengt. Het effect van het verwijderen van de magneet wordt tegengewerkt.

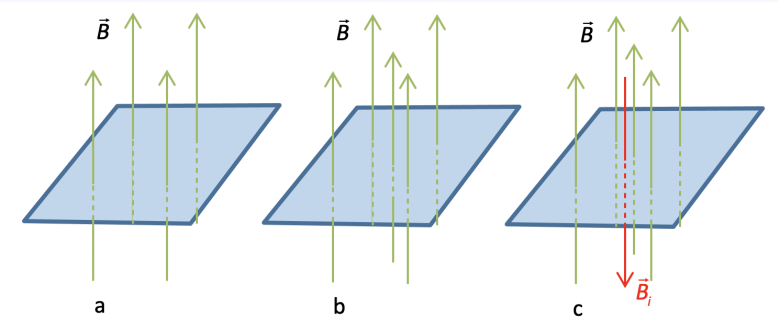
Eigenschap 15.3.3 (De wet van Lenz)**.** De zin van de inductiespanning in een winding die ontstaat door de verandering van de flux door die winding, is steeds zodanig dat die verandering wordt tegenwerkt.

Voorbeeld 15.3.1.



De flux doorheen een kader (a) vermindert (b): deze fluxvermindering wordt tegengewerkt door een geïnduceerd veld op te wekken dat de oorspronkelijke situatie enigszins herstelt (c).

Voorbeeld 15.3.2.



De flux doorheen een kader (a) neemt toe (b): deze fluxvermeerdering wordt tegengewerkt door een geïnduceerd veld op te wekken dat de oorspronkelijke situatie enigszins herstelt (c).

15.3.4 De wet van Faraday

Het feit dat de geïnduceerde spanning steeds de fluxverandering tegenwerkt, vertaalt zich in een minteken in de formule voor de gemiddelde inductiespanning:

$$U_{i,g} = -N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Deze formule noemt men de inductiewet van Faraday.

Opmerking 15.3.1. De inductiewet van Faraday wordt in het algemeen geformuleerd voor de geïn-

CC BY-NC-SA 4.0

15.3 Elektromagnetische inductie

duceerde spanning op een tijdstip t:

$$U_i(t) = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

CC BY-NC-SA 4.0

15.4 De transformator

Dikwijls is het nodig een wisselspanning te verhogen of te verlagen. Hiervoor gebruikt men een transformator. Bv. in een elektriciteitscentrale is de opgewekte spanning 6000 V. Die spanning wordt opgetransformeerd tot 380 000 V en dan getransporteerd via hoogspanningslijnen. Door transport onder hoogspanning is het energieverlies veel kleiner. Vooraleer bij de gebruiker te worden binnengebracht, verlaagt men die spanning in verschillende stappen terug tot 380 V of 230 V.

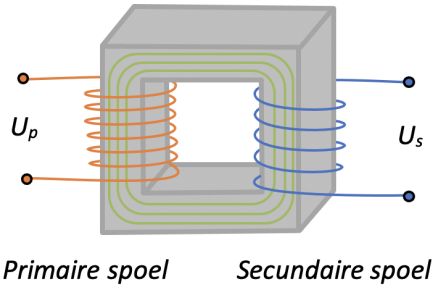


Om bijvoorbeeld een gsm op te laden wordt de netspanning via een adapter nog verder verlaagd tot de gewenste laagspanning (vb. 6 V).

Een transformator bestaat uit een weekijzeren kern waarrond twee spoelen gewikkeld zijn.

(a) De eerste spoel vormt de primaire spoel en heeft N_p windingen.

(b) De tweede spoel is de secundaire spoel en heeft N_s windingen.



Figuur 92 – Schematische voorstelling van een transformator.

De primaire spoel wordt aangesloten op een sinusoïdale wisselspanning U_p. Die wisselspanning veroorzaakt een wisselend magnetisch veld. Dat wisselend veld (lichtgroene veldlijnen op de figuur) loopt door de weekijzeren kern (lichtgrijs op de figuur), en zo dus ook door de secundaire spoel. Door de fluxverandering ontstaat in de secundaire spoel een sinusoïdale inductiespanning U_s.

Experimenteel kan men vaststellen dat

$$\frac{\Delta\phi_P}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi_S}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U_P}{N_P} = \frac{U_s}{N_s}$$

Hieruit volgt dat

$$U_S = \frac{N_S}{N_P} \cdot U_P$$

CC BY-NC-SA 4.0

15.4 De transformator

De wisselspanning U_s over de secundaire spoel hangt dus enkel af van de wisselspanning U_p over de primaire spoel en de verhouding van het aantal windingen.

Voorbeeld 15.4.1. Als de primaire spoel 600 windingen telt, de secundaire 200 en de netspanning 230 V bedraagt, geldt voor de secundaire spanning dat

$$U_S = \frac{200}{600} \cdot 230\ V = 76,7\ V$$

Opmerking 15.4.1. Het is belangrijk even stil te staan bij het feit dat deze techniek van transformeren van spanning op flux**veranderingen** in de spoelen berust, en dus enkel werkt voor wisselspanning.

CC BY-NC-SA 4.0

15.5 Oefeningen Magnetische flux

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

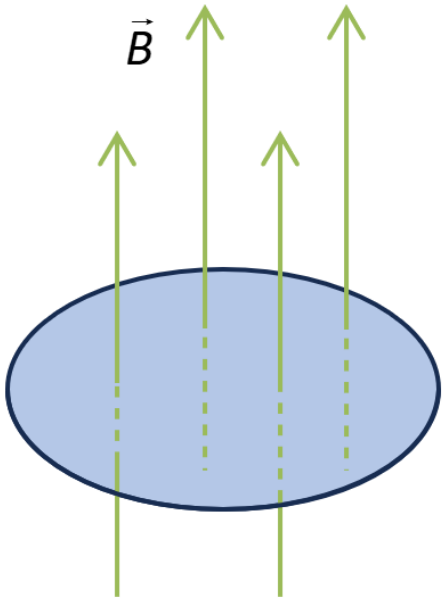
2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

15.5.1 Instapoefeningen

1. Op de figuur zie je een cirkelvormig oppervlak dat zich in een magnetisch veld bevindt. De straal van de cirkel is 15,0 cm en $B = 0,20$ T. Hoe groot is de magnetische flux doorheen dit oppervlak?



$$\phi = \ldots\ldots \text{ Wb}$$

2. Een gelijkzijdige driehoek met een zijde van 6 cm bevindt zich in een homogeen magnetisch veld van $6,0$ mT. De magnetische flux doorheen de driehoek bedraagt $8,0$ μWb. Hoe groot is de hoek tussen de magnetische veldlijnen en een loodlijn op het oppervlak van de driehoek?

$$\theta = \ldots\ldots \ ^\circ$$

3. Een magneet wordt in een spoel geduwd met 1200 windingen waarvan de straal van één winding 5,00 cm bedraagt. Hierdoor varieert de waarde van $B \cdot \cos\alpha$ van 0 T tot 0,250 T in 0,55 s. Hoe groot is de gemiddelde geïnduceerde spanning?

$$U = \ldots\ldots \ V$$

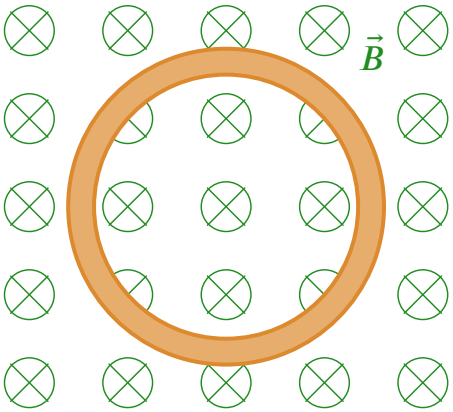
4. Een draagbaar röntgentoestel heeft een step-up transformator waarvan de 230 V -ingang wordt getransformeerd naar de 100 kV - uitgang die de röntgenbuis nodig heeft. De primaire spoel heeft 50 windingen en trekt een stroom van 10,00 A als hij in gebruik is. Wat is het aantal windingen in de secundaire spoel?

$$N = \ldots\ldots \cdot 10^3$$

CC BY-NC-SA 4.0

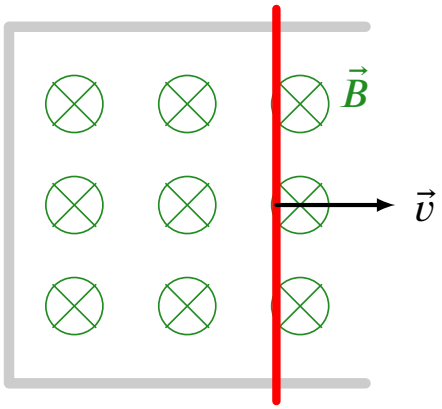
15.5.2 Standaardoefeningen

1. Een koperen lus met diameter 10 cm bevindt zich in een veranderend magnetisch veld. Veronderstel dat het veld toeneemt met $0,50$ T per seconde. De weerstand van de koperen lus is $0,20\ \Omega$. Hoe groot is de geïnduceerde stroom? Loopt deze stroom in wijzerzin of tegenwijzerzin?



..... mA in | wijzerzin | tegenwijzerzin |.

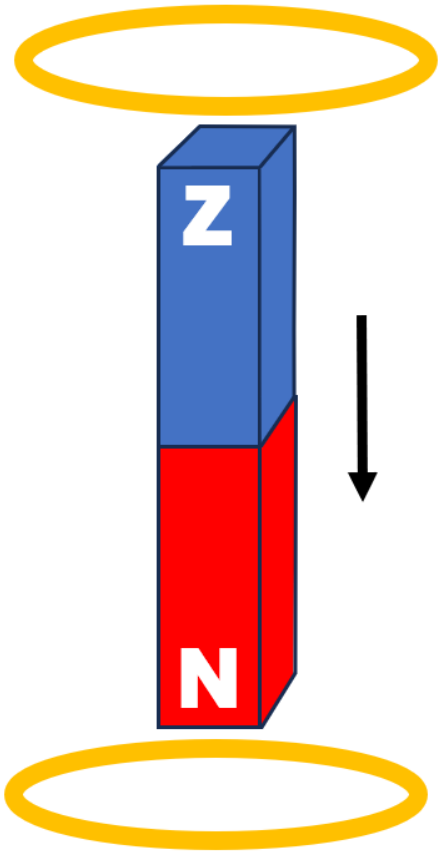
2. Op de figuur zie je een metalen kader waarop een koperen buis verschoven wordt. Het geheel bevindt zich in een magnetisch veld. Teken de geïnduceerde stroom in de winding.



3. Op de figuur zie je een staafmagneet met daarboven en daaronder een koperen ring. Hoe vloeien de geïnduceerde stromen in deze ringen als je de magneet omlaag beweegt?

CC BY-NC-SA 4.0

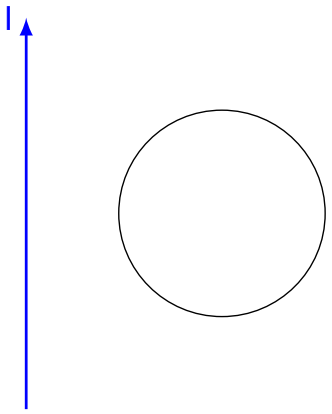
15.5.2 Standaardoefeningen



CC BY-NC-SA 4.0

15.5.3 Gevorderde oefeningen

1. Op de figuur wordt een rechte stroomdraad getoond met daarnaast een koperen lus.



1. Als de stroom in de rechte draad afneemt, in welke zin zal de geïnduceerde stroom in de lus dan vloeien?

2. Als de lus naar links, naar de draad toe beweegt, in welke zin zal de geïnduceerde stroom in de lus dan vloeien?

CC BY-NC-SA 4.0

15.5.4 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over inductiespanning via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Intro kernfysica

In de eerste helft van de twintigste eeuw toonde Rutherford met experimenten aan dat in elk atoom een massieve kern aanwezig was. In dit hoofdstuk bestuderen we de eigenschappen van die atoomkern. We bespreken verschillende vormen van radioactiviteit en gaan na hoe radioactief verval in veel verschillende takken van de wetenschap (vb. geneeskunde, archeologie, ...) een rol speelt.

CC BY-NC-SA 4.0

16.2 Begrippen

In de kernfysica bestudeert men processen die zich afspelen op niveau van de kern van een atoom. De bouwstenen van een atoomkern zijn protonen en neutronen. We noemen die deeltjes ook nucleonen.

Het aantal protonen in de kern van een atoom noemt men het protonental of **atoomnummer** Z. Dat nummer is specifiek voor een atoomsoort of (chemisch) element. Er bestaan meer dan 100 elementen. Bv. $Z(\mathrm{Fe}) = 26$: elk ijzeratoom heeft 26 protonen.

Het aantal neutronen in de kern van een atoom noemt men het **neutronental** N. Deze waarde is niet specifiek voor een element. Bv. een ijzeratoom kan 28, 29, 30 ... neutronen bevatten.

Het aantal kerndeeltjes van de kern noemt men het **massagetal** A van het atoom. Het massagetal is gelijk aan de som van het aantal protonen en neutronen: $A = Z + N$.

Met een **nuclide** bedoelen we een soort atomen met eenzelfde atoomnummer en eenzelfde neutronengetal en dus met eenzelfde massagetal. Er bestaan meer dan 2500 verschillende soorten nucliden.

Een nuclide X met protonental Z en massagetal A stellen we voor als ${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}$.

Bv. ${}^{18}_{8}\mathrm{O}$. Deze nuclide heeft 8 protonen, 18 kerndeeltjes en dus 10 neutronen.

De verschillende nucliden van een chemisch element noemt men de **isotopen** van dat element.

Bv. het element zuurstof heeft 15 isotopen: ${}^{12}_{8}\mathrm{O}$, ${}^{14}_{8}\mathrm{O}$, ..., ${}^{26}_{8}\mathrm{O}$

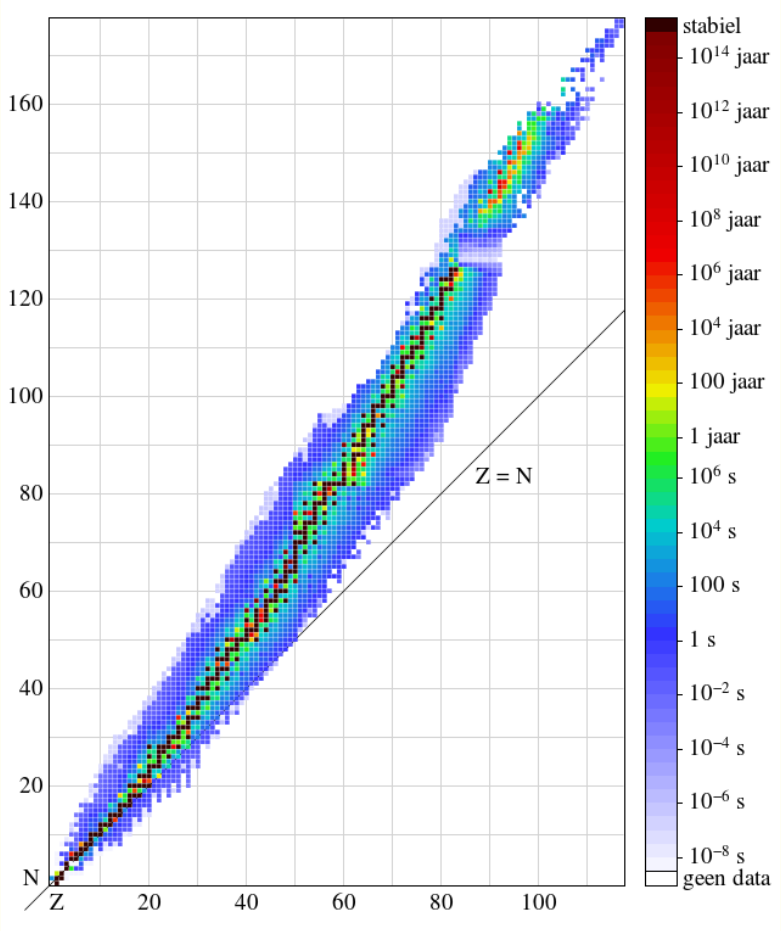
We noteren die nucliden ook als $\mathrm{O}-12$, $\mathrm{O}-13$ ...

Opmerking 16.2.1. Op de zogenaamde nuclidenkaart worden alle gekende nucliden weergegeven in een $N(Z)$-grafiek. Een nuclide die op de bissectrice ligt, heeft evenveel protonen als neutronen.

De meeste nucliden liggen boven de bissectrice: voor deze nucliden is de **kernverhouding** N/Z groter dan één en het **neutronenoverschot** $N - Z$ is positief.

CC BY-NC-SA 4.0

16.2 Begrippen



Figuur 93 – Nuclidenkaart (Bron: https://www.wikiwand.com/nl/Atoomkern)

Op de online IAEA live chart of nuclides (Source: https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html), vind je gedetailleerde info van alle nuclides.

16.2.1 Massa en energie

De massa van atomen en nucleonen is heel klein. Daarom drukt men de massa daarvan uit in u (unit):

$$\begin{aligned} 1\text{ u} &= 1/12 \text{ of the mass of a carbon-12 atom} \\ &= 1\text{ g/mol} \\ &= 1\text{ g}/(6,022 \cdot 10^{23}) \\ &= 1,661 \cdot 10^{-27}\text{kg} \end{aligned}$$

	Proton	**Neutron**	**Elektron**
Massa (u)	$1,007276$	$1,008665$	$0,000549$
Lading (C)	$1,60 \cdot 10^{-19}$		$-1,60 \cdot 10^{-19}$

Opmerking 16.2.2. Een elektron heeft een veel kleinere massa dan een proton, is ook een veel kleiner deeltje, maar heeft toch in absolute waarde dezelfde lading als het proton.

In 1905 publiceerde Einstein zijn 'speciale relativiteitstheorie'. Uit die theorie volgt dat massa en energie equivalent zijn. Massa kan worden omgezet in een energie en omgekeerd.

CC BY-NC-SA 4.0

16.2 Begrippen

Eigenschap 16.2.1. Een massa m komt overeen met een hoeveelheid energie gelijk aan $E = m \cdot c^2$. Dit noemen we de rustenergie van de massa m.

Hierin is c de lichtsnelheid in vacuüm (ongeveer gelijk aan 300 000 km/s).

Voorbeeld 16.2.1. De hoeveelheid energie die kan vrijkomen als $1,00$ g materie in energie wordt omgezet, is gelijk aan

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \\ &= 0,00100 \text{ kg} \cdot (300000 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2 \\ &= 9,00 \cdot 10^{13} \text{ J} \end{aligned}$$

De enorme hoeveelheid energie die vrijkomt bij bv. een kernexplosie of de energie die gebruikt wordt in kerncentrales om elektriciteit te produceren, kan hierdoor verklaard worden.

Eigenschap 16.2.2. Met de formule van Einstein kun je de lichtsnelheid ook schrijven als

$$c^2 = 931 \frac{\text{MeV}}{\text{u}}$$

Bewijs De energie die overeenkomt met een massa van $1u$, is

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \\ &= 1\text{u} \cdot (300000 \cdot 10^3 \text{m/s})^2 \\ &= 1,661 \cdot 10^{-27} \text{kg} \cdot (300000 \cdot 10^3 \text{m/s})^2 \\ &= 1,49 \cdot 10^{-10} \text{J} \end{aligned}$$

Vermits

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{J} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \text{ J} = \frac{1\text{eV}}{1,60 \cdot 10^{-19}}$$

is

$$\begin{aligned} E &= 1,49 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,60 \cdot 10^{-19}} \\ &= 931 \cdot 10^6 1 \text{ eV} \\ &= 931 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$931 \text{ MeV} = 1 \text{ u} \cdot c^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad c^2 = 931 \frac{\text{MeV}}{\text{u}}.$$

■

CC BY-NC-SA 4.0

16.3 Bindingsenergie

Een $^2_1$H-kern bestaat uit 1 proton en uit 1 neutron. We berekenen de massa van de onderdelen van de kern:

massa van een proton:	$1,007276$ u
massa van een neutron:	$1,008665$ u
massa kern (som):	$2,015941$ u

Experimenteel vindt men dat de werkelijke massa van een $^2_1$H-atoom gelijk is aan $2,01410$ u. Hierin zijn de elektronen meegerekend in de atoommassa. De massa van de kern is dus:

massa van het atoom:	$2,01410$ u
massa van het elektron:	$0,000549$ u
massa kern (verschil):	$2,01355$ u

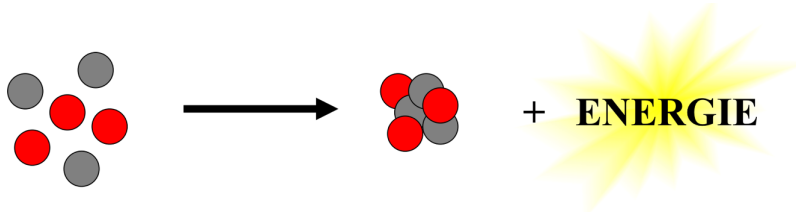
Besluit: De experimentele waarde is niet gelijk aan de verwachte waarde, die we berekend hebben. We moeten hieruit besluiten dat als protonen en neutronen samen een atoomkern vormen, er sprake is van een massaverlies of massadeficit. Soms noemt dit ook het massadefect.

Voor de $^2_1$H-kern is dit massaverlies $2,015941 \text{ u} - 2,01355 \text{ u} = 0,00239 \text{ u}$.

Daarmee komt een hoeveelheid energie overeen die gelijk is aan

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \\ &= 0,00239 \text{ u} \cdot \frac{931 \text{ MeV}}{\text{u}} \\ &= 2,23 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Bij vorming van een $^2_1$H-kern met een proton en een neutron is er massaverlies en komt $2,23$ MeV energie vrij.



Wil je een $^2_1$H-kern splitsen in zijn proton en neutron, dan moet er 2,23 MeV energie toegevoegd worden om de bindingen te verbreken. Daarom noemt deze energie de bindingsenergie van de kern. Na de splitsing is de massa van de losse deeltjes (proton en neutron) samen groter dan het oorspronkelijke deeltje (atoomkern).



CC BY-NC-SA 4.0

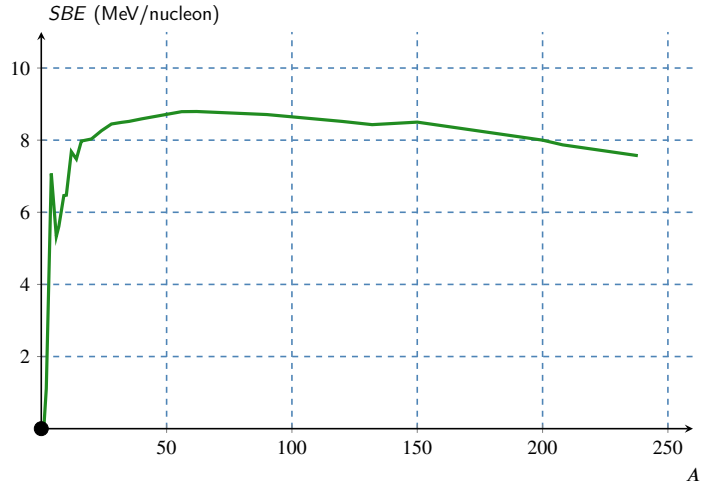
16.3 Bindingsenergie

Definitie 16.3.1. De energie die overeen komt met het massadeficit is de bindingsenergie (BE) van de kern. Dit is de energie die je zou moeten toevoegen om de bindingen tussen de nucleonen te verbreken.

De bindingsenergie per nucleon noemt met de specifieke bindingsenergie (SBE).

Voor ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ bedraagt de specifieke bindingsenergie $2,23$ MeV$/2 = 1,12$ MeV

Hoe groter de specifieke bindingsenergie van een nuclide, hoe meer energie nodig is om de kern te splitsen in afzonderlijke kerndeeltjes en hoe stabieler de kern.



Bovenstaande grafiek toont de specifieke bindingsenergie als functie van het massagetal. De kromme vertoont een maximum bij $A = 62$ ($\mathrm{Ni} - 62$ met $Z = 28$). De kernen in de buurt van deze top zijn het meest stabiel. De kernen van lichtere en zwaardere nucliden zijn minder stabiel.

Uit die grafiek volgt dat uit kernen op twee manieren energie kan worden gewonnen:

(a) Lichte kernen kan je samenvoegen zodat een massadefect optreedt, waardoor er energie wordt uitgestraald. (kernfusie)

(b) Zware kernen kan je splitsen zodat een massadefect optreedt, waardoor er energie wordt uitgestraald. (kernsplijting)

We bekijken dit telkens met een voorbeeld.

Voorbeeld 16.3.1. De fusie van een ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$-kern en een ${}^{19}_{9}\mathrm{F}$-kern.

Er ontstaat een nieuwe kern met $8 + 9 = 17$ protonen en $16 + 19 = 35$ kerndeeltjes.

Dit is een ${}^{35}_{17}\mathrm{Cl}$-kern.

Massa vóór de fusie		**Massa na de fusie**	
O-atoom	$15,9949$ u	Cl-atoom	$34,9689$ u
F-atoom	$18,9984$ u		
Totale massa	$34,9933$ u	Totale massa	$34,9689$ u
Massadefect: $34,9933$ u $- 34,9689$ u $= 0,0244$ u			

CC BY-NC-SA 4.0

16.3 Bindingsenergie

De energie die vrijkomt bij de fusie is

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \\ &= 0,0244 \text{ u} \cdot \frac{931 \text{ MeV}}{\text{u}} \\ &= 22,7 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Voorbeeld 16.3.2. De splijting van een $^{210}_{82}$Pb-kern in een $^{96}_{36}$Kr-kern en een $^{114}_{46}$Pd-kern.

massa vóór de splijting		**massa na de splijting**	
Pb-atoom	209,9842 u	Kr-atoom	95,9431 u
		Pd-atoom	113,9104 u
totale massa	209,9842 u	totale massa	209,8535 u
Massadefect: 209,9842 u − 209,8535 u = 0,1307 u			

De energie die vrijkomt bij de splitsing is

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \\ &= 0,1307 \text{ u} \cdot \frac{931 \text{ MeV}}{\text{u}} \\ &= 121,7 \text{ MeV} \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

16.4 Natuurlijke radioactiviteit

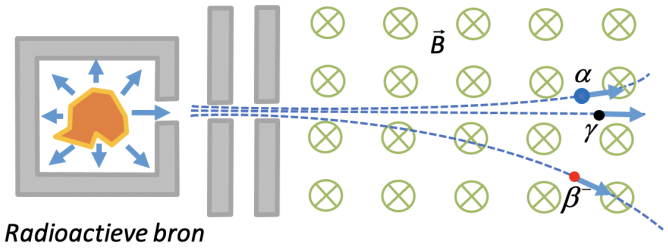
16.4.1 Soorten straling

Een niet-stabiele kern die vervalt, zendt straling uit. De Franse natuurkundige Henri Becquerel ontdekte dat toevallig in 1898 tijdens het werken met uraanerts. Verder onderzoek door o.a. Pierre en Marie Curie, Ernest Rutherford en Frederick Soddy leerde dat die straling een sterk **doordringend** vermogen heeft en zelfs op een afgeschermde fotografische plaat zwarting veroorzaakt. Die straling heeft ook een sterk **ioniserend** vermogen: dat betekent dat elektronen uit bv. luchtmoleculen gestoten kunnen worden, waardoor lucht geleidend wordt.

Definitie 16.4.1. Materialen die ioniserende straling uitzenden, noemt men radioactief.

Opmerking 16.4.1. De ioniserende straling die radioactief materiaal uitzendt noemt men soms radioactieve straling. Dat is een verwarrende benaming omdat de straling zelf niet radioactief is. We gebruiken daarom liever de term ioniserende straling.

Door die straling te onderzoeken met elektrische en magnetische velden, heeft men kunnen besluiten dat er drie soorten ioniserende straling bestaan: α, β en γ-straling.



Figuur 94 – Een radioactieve bron straalt verschillende types ioniserende straling uit.

Verder onderzoek leerde:

(a) Ioniserende straling ontstaat als een niet-stabiele nuclide 'vervalt'.

(b) Zo'n nuclide noemt men daarom ook een radionuclide.

(c) Bij radioactief verval verandert de kern van het atoom en ontstaat er een ander atoom: er gebeurt een kernreactie of transmutatie.

16.4.2 α-straling

Bij α-straling wordt een deeltje uit de kern van het atoom gestoten. Dit deeltje bestaat uit twee protonen en twee neutronen: het is dus een ${}^4_2\mathrm{He}$-kern en men noemt het een α-deeltje. De snelheid van α-deeltjes ligt tussen 15 000 en 20 000 km/s.

De α-deeltjes hebben een relatief grote massa en lading en veroorzaken daardoor veel ionisaties in materie per cm. Omdat ze zo hun energie snel kwijt geraken is hun doordringingsvermogen erg klein; in een gas zoals lucht is hun dracht slechts enkele cm. In materie in vaste vorm is dit nog veel minder, zodat bv. één blad papier al volstaat om de meeste α - deeltjes tot rust te brengen en de straling zo tegen te houden.

Deze soort straling treedt vooral op bij zwaardere nucliden. Vermits het α-deeltje bestaat uit twee protonen en twee neutronen, daalt het aantal protonen met 2 en het massagetal met 4. Bij α-verval ontstaat dus een ander element!

CC BY-NC-SA 4.0

16.4 Natuurlijke radioactiviteit

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X + {}^{4}_{2}He$$

Voorbeeld: radium−226 is een α-straler: $^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He$

16.4.3 β- straling

Bij β-straling wordt er een deeltje uit de kern gestoten met de massa van een elektron.

Als dat deeltje negatief is spreken we van β^--verval. Als het deeltje positief is, spreken we van β^+-verval. De snelheid van β-deeltjes ligt rond 250 000 km/s.

Door hun kleine massa hebben de β-deeltjes een klein ioniserend vermogen. Daardoor en omwille van hun grote snelheid hebben ze een groot doordringingsvermogen. Om β-straling tegen te houden, heb je bv. een aluminiumplaat nodig met een dikte van enkele mm.

Deze straling treedt zowel bij lichtere als bij zwaardere elementen op.

16.4.3.1 β^--straling

Hoe kan het dat een negatief deeltje uit de kern gestoten wordt, want de kern bestaat toch enkel uit positieve en neutrale deeltjes? Men neemt aan dat in de kern een neutron wordt omgezet in een proton en een elektron:

$$^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e$$

Dat elektron wordt uit de kern gestoten.

Bij β^--straling blijft het aantal kerndeeltjes gelijk: het aantal protonen neemt met 1 toe en het aantal neutronen neemt met 1 af.

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}X' + {}^{0}_{-1}e$$

Voorbeeld: thorium−234 is een β^--straler: $^{234}_{90}Th \rightarrow {}^{234}_{91}Pa + {}^{0}_{-1}e$

16.4.3.2 β^+-straling

Bij β^+-straling wordt in de kern een proton omgezet in een neutron en een positief elektron (een positron):

$$^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}e$$

Dat positron wordt uit de kern gestoten. Een positron is een deeltje met de eigenschappen van een elektron, maar met een positieve lading. Zo'n deeltje met tegengestelde eigenschappen noemt men een antideeltje.

Bij β^+-straling blijft het aantal kerndeeltjes gelijk: het aantal protonen daalt met 1 en het aantal neutronen stijgt met 1.

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X' + {}^{0}_{+1}e$$

Voorbeeld: stikstof−12 is een β^+-straler: $^{12}_{7}N \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{0}_{+1}e$.

16.4.3.3 Elektronvangst

Sommige nucliden vervallen door elektronvangst (EV). Hierbij wordt een elektron van de K-schil door de kern gevangen en met een proton omgezet in een neutron.

$$^{0}_{-1}e + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n \qquad \text{en} \qquad {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X'$$

De kern muteert dus zoals bij β^+-straling: het aantal kerndeeltjes blijft gelijk, het aantal protonen daalt met 1 en het aantal neutronen stijgt met 1. EV gaat meestal gepaard met X-straling.

Voorbeeld: Argon−37 vervalt door EV: $^{37}_{18}Ar + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{37}_{17}Cl$.

CC BY-NC-SA 4.0

16.4 Natuurlijke radioactiviteit

Opmerking 16.4.2. Uit nauwkeurige experimenten bleek dat de wet van behoud van energie niet klopte voor β-verval. In 1930 formuleerde Pauli de hypothese dat er een (nog onbekend) deeltje zou vrijkomen bij β-verval. Dat deeltje zou ongeladen zijn, een zeer kleine massa hebben en bewegen met de lichtsnelheid. Men noemde het een neutrino (= een 'klein neutron'). In 1956 werd het bestaan van dat deeltje experimenteel bevestigd.

16.4.4 γ-straling

Zoals voor de elektronen bestaan er ook voor de kern verschillende energieniveaus. Dikwijls bevindt de kern zich na α- of β-verval nog in een aangeslagen toestand, d.w.z. boven zijn laagste energieniveau (de grondtoestand). Een aangeslagen kern noteren we als X^*. Als de kern vervalt naar de grondtoestand, wordt de overtollige energie uitgestoten als γ-straling. Die straling is van dezelfde aard als licht, radiogolven, IR-straling, microgolven, X-stralen: het zijn allemaal golven van het elektromagnetisch spectrum. Met die golven worden deeltjes geassocieerd, fotonen genaamd, die bewegen met de lichtsnelheid en elk een pakketje energie vertegenwoordigen. Bij γ-straling bevatten de fotonen heel veel energie.

Omdat γ-straling bestaat uit ongeladen deeltjes met heel veel energie is het ionisatievermogen ervan beperkt en heeft γ-straling een heel groot doordringingsvermogen: om die straling tegen te houden is bv. een muur nodig van enkele meters dik of een loden plaat met een dikte van enkele cm. Vermits bij γ-straling slechts energie uit de kern wordt gestoten, blijven het atoomnummer en het massagetal van de kern hetzelfde.

$$ {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}^* \rightarrow {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}' + {}^{0}_{0}\gamma $$

Voorbeeld 16.4.1. Na β^--verval van ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$ ontstaat een aangeslagen ${}^{60}_{28}\mathrm{Ni}$-kern. Die vervalt naar de grondtoestand door het uitzenden van twee γ-fotonen met resp. $1,17$ MeV en $1,33$ MeV energie.

16.4.5 Behoudswetten

Bij de verschillende vervalvormen is steeds voldaan aan een aantal behoudswetten:

(a) Behoud van **energie en massa**: de som van energie en massa voor het verval is gelijk aan de som van energie en massa na het verval.

(b) Het **aantal kerndeeltjes** voor het verval is gelijk aan het aantal kerndeeltjes na het verval.

(c) De **lading** van het totaal aantal deeltjes voor het verval is gelijk aan de lading van het totaal aantal deeltjes na het verval.

16.4.6 Detectie van ioniserende straling

Ioniserende straling is niet rechtstreeks waar te nemen. Daarom werden verschillende soorten detectoren ontwikkeld om die straling te detecteren of te meten. Die detectie steunt op het principe dat de straling in staat is materie te ioniseren.

De Geiger-Müllerteller werd in 1928 ontworpen door Hans Geiger en Walther Müller. Deze detector bestaat uit een gesloten metalen buis, gevuld met gas, en aan één zijde afgesloten door een dun doorzichtig venster. Wanneer een α- of β- of γ-deeltje door het venster invalt, wordt het gas geïoniseerd. Door de ontstane ionen wordt het gas even geleidend en loopt er even een stroom door het gas. Deze stroom wordt gemeten: de stroom wordt versterkt en gaat naar een teller of een luidspreker. Door zijn eenvoud is dat een van de meest gebruikte en goedkoopste detectoren.

CC BY-NC-SA 4.0

16.4 Natuurlijke radioactiviteit

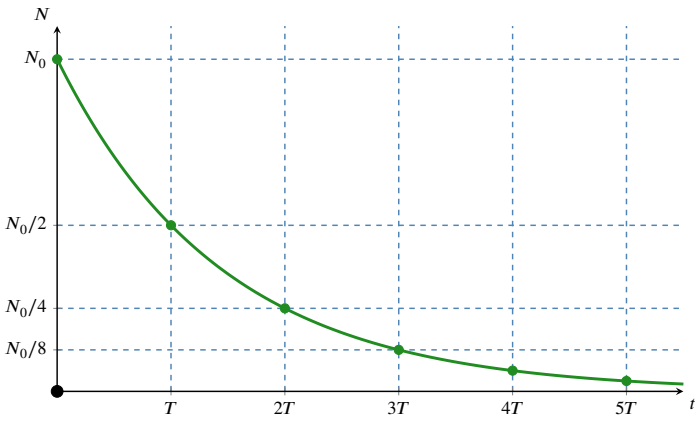


Figuur 95 – Voorbeeld van een Geiger-Müllerteller voor didactisch gebruik

CC BY-NC-SA 4.0

16.5 De vervalwet

Radioactief verval is een spontaan, maar toevallig proces. Je kunt dus niet voorspellen wanneer één bepaalde kern zal vervallen. Toch geldt ook voor radioactief verval een wetmatigheid. Het gebeurt dus niet willekeurig. Veronderstel dat op het ogenblik t een hoeveelheid materie N niet-stabiele kernen bevat. Vermits deze kernen vervallen, zal N afnemen met de tijd. Experimenteel vind je het volgende verloop:



Figuur 96 – Het radioactief verval van een bron: het aantal nog niet vervallen kernen verloopt volgens een dalende exponentiële functie.

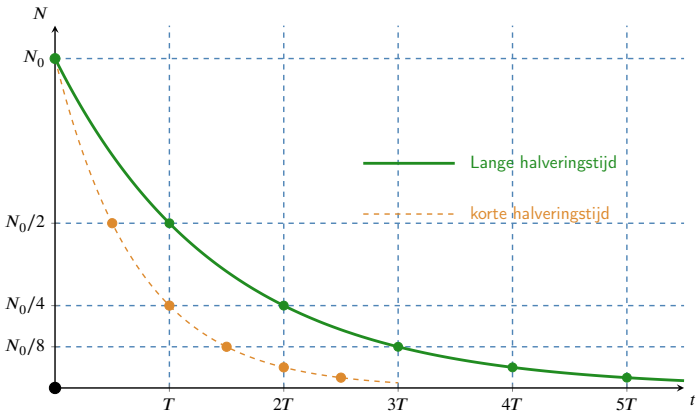
Wat opvalt, is het bestaan van een halveringstijd T: telkens de tijd met T toeneemt, is het aantal kernen gehalveerd.

Definitie 16.5.1. De halveringstijd T is het tijdsverloop waarin de helft van het aantal kernen vervalt.

De halveringstijd verschilt van nuclide tot nuclide.

Voorbeeld 16.5.1.

- voor $\mathrm{B}-12$ is T gelijk aan $0,020$ s.
- voor $\mathrm{K}-40$ is T gelijk aan $1,3 \cdot 10^9$ jaar



Figuur 97 – Hoe korter de halveringstijd hoe sterker de exponentiële functie daalt.

16.5 De vervalwet

Hoe minder stabiel een nuclide, hoe sneller die vervalt en hoe korter de halveringstijd.

Zo'n nuclide is dus "kortlevend", maar omdat het verval gebeurt in een korte tijd en bij ieder verval een α- of β^- -deeltje vrijkomt, is een hoeveelheid stof opgebouwd uit zulke nucliden wel erg radioactief! Nucliden met een lange levensduur vervallen traag en zijn dus minder radioactief. Sommige van die nucliden, zoals $\mathrm{Pu}-241$, zijn wel erg giftig! Een lange levensduur is in dat geval geen voordeel!

Eigenschap 16.5.1 (Vervalwet)**.** De functie $N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T}}$ beschrijft het radioactief verval.

De tijd t neemt dezelfde eenheid aan van de halveringstijd T, die je afleest uit een tabel.

Omdat $2 = e^{\ln 2} = e^{0{,}693}$, kan je de vervalwet ook schrijven als

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}693\frac{t}{T}}.$$

De verhouding $\dfrac{0{,}693}{T}$ noemt men de **desintegratieconstante** λ:

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T}$$

en dus

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Hoe groter de desintegratieconstante λ, hoe sneller de stof vervalt.

1 (Verval van $\mathrm{I}-131$)**.** Het $\mathrm{I}-131$ isotoop dat een halfwaardetijd heeft van 8 dagen wordt gebruikt bij nucleaire geneeskunde. In een kernreactor wordt bijvoorbeeld een sample $\mathrm{I}-131$ gemaakt met $3{,}0 \cdot 10^{12}$ atomen.

1. Als dit sample 36 uur later wordt afgeleverd in een ziekenhuis, hoeveel atomen $\mathrm{I}-131$ kan je dan nog in het sample aantreffen?

2. Dit sample neemt voortdurend af in sterkte, maar het blijft bruikbaar zolang het aantal $\mathrm{I}-131$ atomen boven de $5{,}0 \cdot 10^{11}$ blijft. Na hoeveel dagen wordt het sample onbruikbaar?

Opmerking 16.5.1. In bovenstaande oefening staat u voor de eenheid uur en niet voor unit.

CC BY-NC-SA 4.0

16.6 Activiteit

Telkens een kern in een hoeveelheid radioactief materiaal vervalt, wordt een α- of β-deeltje uitgezonden. Hoe meer kernen per seconde vervallen, hoe meer straling het materiaal dus uitzendt. De grootheid die dat weergeeft, is 'de activiteit'.

Als het aantal kernen op tijdstip t_1 gelijk is aan N_1 en op een later tijdstip t_2 gelijk is aan N_2 is het aantal kernen die vervallen zijn in het tijdsverloop Δt

$$N_1 - N_2 = -\left(N_2 - N_1\right) = -\Delta N.$$

Definitie 16.6.1. De gemiddelde activiteit A_g van een hoeveelheid radioactief materiaal in een tijdsverloop Δt is de verhouding van het aantal kernen die vervallen tot de tijdsduur Δt:

$$A_g = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$$

De eenheid van activiteit is 'aantal atomen die vervallen per s' (= aantal desintegraties per s). De eenheid noemt men de becquerel (Bq)

1 Bq = 1 desintegratie/s

Naast de gemiddelde activiteit A_g kunnen we ook de ogenblikkelijke activiteit A beschouwen.

Een ogenblik is een oneindig kort tijdsinterval. Vandaar de definitie:

Definitie 16.6.2. De activiteit A op een ogenblik t is

$$A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(-\frac{\Delta N}{\Delta t}\right).$$

Men kan aantonen dat dit betekent dat

$$A(t) = 0,693 \cdot \frac{N(t)}{T}.$$

De activiteit hangt af van het aantal kernen en van de halveringstijd. Hoe meer kernen er zijn en hoe korter de halveringstijd, hoe groter de activiteit van het materiaal. Vermits het aantal kernen daalt met de tijd volgens de vervalwet neemt de activiteit van een hoeveelheid radioactief materiaal af met de tijd.

Opmerking 16.6.1. De activiteit is een maat voor de helling van de grafiek van $N(t)$: hoe steiler de grafiek op een bepaald ogenblik, hoe groter de activiteit op dat ogenblik.

Eigenschap 16.6.1. Door de definitie van activiteit te combineren met de definitie van de vervalwet, bekom je een interessante formule die het verband legt tussen de huidige activiteit van een radioactieve stof en de oorspronkelijke activiteit.

$$A(t) = 0,693 \cdot \frac{N(t)}{T} = 0,693 \cdot \frac{N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T}}}{T}$$
$$\Rightarrow A(0) = 0,693 \cdot \frac{N(0)}{T} = 0,693 \frac{N_0}{T}$$
$$\Rightarrow A(t) = A(0) \cdot 2^{\frac{-t}{T}}$$

1 (Koolstofdatering)**.** Archeologen die opgravingen doen in een oud jagerskamp hebben op een plaats van een kampvuur een stukje houtskool van $5,0$ g ontdekt. De $C-14$ activiteit van dit stukje

CC BY-NC-SA 4.0

16.6 Activiteit

bedraagt $0,06$ Bq. Als je mag veronderstellen dat de oorspronkelijke natuurlijke activiteit van het hout $0,23$ Bq bedroeg, hoe oud is het kamp dan ongeveer? (Hint: de halfwaardetijd T van $\mathrm{C}-14$ is 5730 jaar).

CC BY-NC-SA 4.0

16.7 Dosis en dosisequivalent

16.7.1 De opgenomen dosis

Radioactieve straling is slechts schadelijk als ze door het lichaam wordt opgenomen.

Definitie 16.7.1. De ontvangen dosis of kortweg de dosis D is de verhouding van de hoeveelheid opgenomen stralingsenergie E tot de massa m die die straling opneemt:

$$D = \frac{E}{m}.$$

De eenheid hiervan is de gray (Gy):

1 Gy = 1 J/kg

1 Gy is een heel grote waarde.

Een dosis gammastraling van 3 Gy (= 3 J/kg) die in één keer door het lichaam wordt opgenomen heeft in 50 % van de gevallen na enkele weken de dood tot gevolg.

Bij bestraling van tumoren is plaatselijk een dosis van 60 Gy of meer nodig.

16.7.2 Het dosisequivalent

De schade die 1 Gy geabsorbeerde dosis aan het lichaam toebrengt, is niet altijd gelijk. Dat hangt af van de tijd waarin die dosis wordt opgenomen, het soort geabsorbeerde straling en de gevoeligheid van het bestraalde orgaan of weefsel.

α-straling die wordt opgenomen, veroorzaakt ongeveer 20 maal meer schade dan eenzelfde dosis β- of γ-straling. Daarom definieert men de RBE-factor (het Relatief Biologisch Effect): voor α-straling is RBE dan bijvoorbeeld gelijk aan 20 terwijl voor eenzelfde weefsel voor β- of γ-straling RBE = 1.

De RBE-factor heeft geen eenheid.

Definitie 16.7.2. Het dosisequivalent H is het product van de opgenomen dosis D en het relatief biologisch effect (RBE):

$$H = D \cdot RBE = \frac{E \cdot RBE}{m}.$$

De eenheid van het dosisequivalent is de sievert (Sv).

1 Sv = 1 J/kg

Het dosisequivalent H wordt dus, net zoals de dosis D, uitgedrukt in J/kg. Omdat het twee verschillende grootheden zijn, geeft men de eenheden ervan een verschillende naam.

1 Sv is een grote waarde: het gemiddelde dosisequivalent dat de bewoners in België jaarlijks ontvangen, bedraagt ongeveer 2,5 mSv. Voor werknemers in de nucleaire sector mag het dosisequivalent maximaal 20 mSv per jaar bedragen.

CC BY-NC-SA 4.0

16.8 Oefeningen Kernfysica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

16.8.1 Instapoefeningen

1. Beschouw de volgende nucliden: ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$, ${}^{18}_{9}\mathrm{F}$ en ${}^{18}_{10}\mathrm{Ne}$. Welke hebben hetzelfde massagetal? Welke hebben hetzelfde aantal neutronen?

2. De drie isotopen ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{137}_{55}\mathrm{Cs}$ en ${}^{218}_{84}\mathrm{Po}$ vervallen als

$$ {}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + \alpha, $$

$$ {}^{137}_{55}\mathrm{Cs} \rightarrow {}^{137}_{56}\mathrm{Ba} + \beta^- + \gamma, $$

en

$$ {}^{218}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{218}_{85}\mathrm{At} + \beta^-. $$

Welke van deze isotopen zou je in biologisch onderzoek als tracer kunnen gebruiken? Waarom?

${}^{238}_{92}\mathrm{U}$	${}^{137}_{55}\mathrm{Cs}$	${}^{218}_{84}\mathrm{Po}$

3. Ga voor elk van de onderstaande vervalwijzen na welke het onbekende isotoop X is:

1.

$$ X \rightarrow {}^{224}_{88}\mathrm{Ra} + \alpha $$

2.

$$ X \rightarrow {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + \beta^- $$

3.

$$ X \rightarrow {}^{60}_{28}\mathrm{Ni} + \gamma $$

CC BY-NC-SA 4.0

16.8.2 Standaardoefeningen

1. De radionuclide $^{215}_{83}\mathrm{Bi}$ vervalt achtereenvolgens door het uitsturen van twee β^-deeltjes, één α-deeltje en één γ-deeltje. Welke kern blijft dan over?

Meerkeuze:

(a) $^{209}_{79}\mathrm{Au}$

(b) $^{211}_{82}\mathrm{Pb}$

(c) $^{211}_{83}\mathrm{Bi}$

(d) $^{215}_{84}\mathrm{Po}$

2. Een $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$-kern vervalt naar een $^{210}_{82}\mathrm{Pb}$ kern. Dit kan door

Meerkeuze:

(a) 6 α-vervallen en 0 β^--vervallen

(b) 6 α-vervallen en 4 β^--vervallen

(c) 3 α-vervallen en 2 β^--vervallen

(d) 3 α-vervallen en 4 β^+-vervallen

3. Hoe groot is de energie (uitgedrukt in MeV) die vrijkomt bij het alfa-verval van $^{233}_{92}\mathrm{U}$?

$$E = \ldots\ldots \text{ MeV}$$

4. Het barium isotoop $^{131}_{56}\mathrm{Ba}$ heeft een halfwaardetijd van 12 dagen. Je beschikt over een sample van 250 μg. Wat is de massa $^{131}_{56}\mathrm{Ba}$ na 10 dagen?

$$m = \ldots\ldots \ \mu\text{g}$$

5. Het Cobalt isotoop $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ heeft een halfwaardetijd van $5,27$ jaar. Je beschikt over een sample $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ met een activiteit van $3,50 \cdot 10^9$ Bq. Wat is de massa van dit sample?

$$m = \ldots\ldots \ \mu\text{g}$$

CC BY-NC-SA 4.0

16.8.3 Gevorderde oefeningen

1. De radionuclide $^{55}\mathrm{Co}$ heeft een activiteit die $4,0$ % per uur afneemt. Het vervalproduct is stabiel. Wat is de halfwaardetijd van $^{55}\mathrm{Co}$, uitgedrukt in uur?

De halfwaardetijd is: …… uur

2. Bepaal de ouderdom van de lijkwade van Turijn als je weet dat momenteel de hoeveelheid C-14 in de stof van de lijkwade 92 % bedraagt van wat je in levende materie zou aantreffen. Er is gegeven dat de halveringstijd van C-14 gelijk is aan $T = 5730$ j.

De ouderdom van de lijkwade is: …… jaar

CC BY-NC-SA 4.0

16.8.4 Oefeningen Usolv-it



1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over inleidende begrippen uit de kernfysica via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

17.1 Intro thermodynamica

In dit hoofdstuk bespreken we de macroscopische eigenschap temperatuur en voeren de absolute of thermodynamische temperatuurschaal in. Vervolgens bekijken we de macroscopische eigenschappen van gassen met zeer lage dichtheid om zo tot de ideale gaswet te komen. Tot slot komt het verband tussen warmte en temperatuur aan bod. Welke fysische effecten zien we als een systeem wordt opgewarmd? De opgenomen warmte zorgt voor een temperatuursverhoging van het systeem met behoud van de aggregatietoestand of voor een verandering van aggregatietoestand.

CC BY-NC-SA 4.0

17.2 Temperatuur en warmte

In het dagelijkse leven zegt men soms dat de temperatuur van een voorwerp een maat is voor hoe warm of koud het voorwerp is. Omdat warm en koud subjectieve begrippen zijn, hanteren we in de natuurkunde een meer nauwkeurige definitie.

Definitie 17.2.1. De temperatuur van een object is een maat voor de gemiddelde microscopische snelheid van de deeltjes in dat object.

Bij een hogere temperatuur zullen de moleculen van een hoeveelheid stof gemiddeld sneller bewegen. Deze hogere microscopische snelheid leidt dan tot een toename van de kinetische energie van de deeltjes. M.a.w de temperatuur is ook een maat voor de microscopische kinetische energie van de deeltjes, en omgekeerd. Als twee voorwerpen zich op dezelfde temperatuur bevinden, hebben hun deeltjes dezelfde gemiddelde microscopische kinetische energie.

Wanneer je twee objecten op een verschillende temperatuur in thermisch contact brengt met elkaar zullen ze beide naar een evenwichtstemperatuur evolueren. Tijdens dit proces stroomt **warmte** van het object op hoge temperatuur naar het object op lage temperatuur.

Definitie 17.2.2. Warmte is een overdracht van energie van het ene naar het andere voorwerp ten gevolge van een verschil in temperatuur. De warmte stroomt van het voorwerp op hoge naar het voorwerp op lage temperatuur, tot de temperaturen aan elkaar gelijk zijn geworden. Het symbool voor een hoeveelheid warmte is Q en de eenheid waarin ze wordt uitgedrukt is joule (J).

Opmerking 17.2.1. Let op want het symbool Q wordt ook gebruikt voor de grootheid elektrische lading.

Twee systemen zijn in **thermisch evenwicht** als deze energieuitwisseling ophoudt. We zullen het begrip temperatuur gebruiken om thermisch evenwicht tussen twee voorwerpen die energie kunnen uitwisselen, vast te leggen: twee voorwerpen met dezelfde temperatuur zijn in thermisch evenwicht.

Temperatuursveranderingen kunnen bijvoorbeeld gemeten worden met vloeistofthermometers. Stijgt de temperatuur rondom de thermometer, dan zal de vloeistofkolom langer worden, en omgekeerd.

Om de temperatuur op te meten zijn verschillende **temperatuurschalen** mogelijk:

(a) Kelvinschaal of absolute temperatuurschaal: het nulpunt van deze schaal valt samen met het absolute nulpunt van temperatuur. De absolute temperatuur wordt genoteerd met T en wordt aangegeven in kelvin (K).

(b) Celsiusschaal: het nulpunt van deze schaal valt samen met het vriespunt van water. Het kookpunt van water valt samen met 100 °C. De temperatuur wordt genoteerd met θ en wordt aangegeven in graden celsius (°C). Het absolute nulpunt stemt overeen met $-273,15$ °C. De intervallen zijn hetzelfde als bij de Kelvinschaal, waaruit volgt dat $T(\mathrm{K}) = \theta(^\circ\mathrm{C}) + 273,15$.

(c) Fahrenheitschaal: het vriespunt van water wordt gedefinieerd als 32 °F en het kookpunt wordt bereikt bij 212 °F.

CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Gaswetten

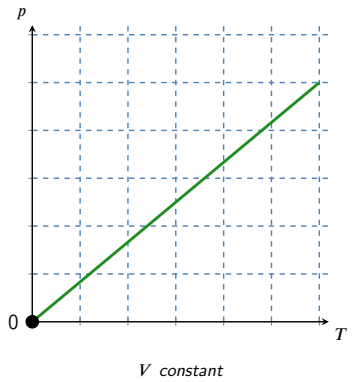
We kunnen met gassen verschillende experimenten uitvoeren. Naargelang de omstandigheden van het experiment (constant volume, of constante temperatuur, of constante druk) kunnen we uit de experimentele resultaten andere wetten afleiden.

Opmerking 17.3.1. Let op, alle gaswetten werken met de absolute temperatuur T die in Kelvin wordt uitgedrukt !

Definitie 17.3.1. Een thermodynamisch proces waarbij het volume constant wordt gehouden, noemen we een **isochoor** proces.

Voor een gegeven hoeveelheid gas met lage dichtheid dat opgesloten zit in een afgesloten ruimte zal de temperatuur van het gas evenredig zijn met de druk van het gas *bij een constant volume*. Deze wetmatigheid is gekend als de wet van Gay-Lussac:

$$p \sim T \qquad \text{of} \qquad \frac{p}{T} = \text{constant}$$

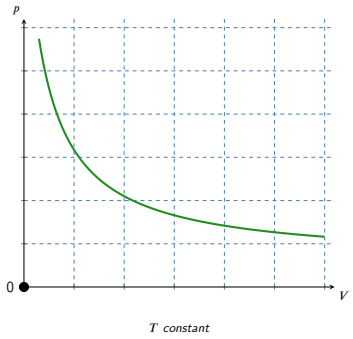


Figuur 98 – (p,T)-diagramma voor een opgesloten ideaal gas bij constant volume.

Definitie 17.3.2. Een thermodynamisch proces waarbij de temperatuur constant wordt gehouden, noemen we een **isotherm** proces.

De wet van Boyle-Mariotte beschrijft het gedrag van ideale gassen *bij constante temperatuur*:

$$p \sim \frac{1}{V} \qquad \text{of} \qquad p \cdot V = \text{constant}$$



Figuur 99 – (p,V)-diagramma voor een opgesloten ideaal gas bij constante temperatuur.

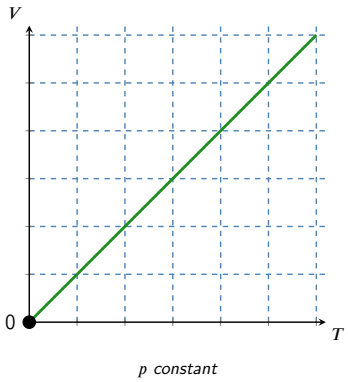
CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Gaswetten

Definitie 17.3.3. Een thermodynamisch proces waarbij de druk constant wordt gehouden, noemen we een **isobaar** proces.

De wet van Charles beschrijft het gedrag van ideale gassen *bij constante druk*:

$$V \sim T \qquad \text{of} \qquad \frac{V}{T} = \text{constant}$$



Figuur 100 – (V,T)-diagramma voor een opgesloten ideaal gas bij constante druk.

17.3.1 Algemene of 'ideale' gaswet

We kunnen de wet van Gay-Lussac, de wet van Boyle-Mariotte en de wet van Charles samenvatten in één **algemene gaswet** waarbij nu in principe geen grootheid meer constant moet worden gehouden:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

met n het aantal mol van het opgesloten gas en $R = 8,314 \frac{J}{mol \cdot K}$ de universele gasconstante.

Deze wet is in principe enkel geldig voor zogenaamd **ideale gassen**, waarvan je gasdeeltjes als punten kan voorstellen die zo ver van elkaar zitten dat ze elkaar niet beïnvloeden. In de praktijk geldt deze wet voor sterk verdunde reële gassen.

17.3.2 Wet van Dalton

Wanneer een gas met druk p_1 en een gas met druk p_2 gemengd worden in een volume gelijk aan de som van beide volumes, en dit bij dezelfde omgevingstemperatuur, wat is dan de waarde van de einddruk van het gemengde gas?

(a) Als de afzonderlijke drukken p_1 en p_2 van beide gassen voor de menging gelijk zijn dan zal de einddruk $p_e = p_1 = p_2$.

(b) Stel nu dat de twee afzonderlijke drukken niet aan elkaar gelijk zijn: $p_1 \neq p_2$. In de eerste gasfles bevinden zich n_1 mol moleculen in een volume V_1. Ze oefenen een druk p_1 uit. De tweede gasfles bevat n_2 mol moleculen in een volume V_2, zij oefenen een druk p_2 uit. De temperatuur is gelijk voor beide gassen. Wanneer de twee gasflessen met elkaar verbonden worden, ontstaat er een nieuw gasvolume V met n mol moleculen die een druk p uitoefenen. Hiervoor geldt dat $n = n_1 + n_2$ en $V = V_1 + V_2$. De druk p kan berekend worden m.b.v. de ideale gaswet:

$$p = \frac{R \cdot n \cdot T}{V} = \frac{R \cdot \left(n_1 + n_2\right) \cdot T}{V_1 + V_2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Gaswetten

Dit kan herwerkt worden als:

$$\begin{aligned} p &= \frac{R \cdot n_1 \cdot T}{V_1 + V_2} + \frac{R \cdot n_2 \cdot T}{V_1 + V_2} \\ &= p_1' + p_2' \end{aligned}$$

Hierbij worden p_1' en p_2' de partieeldrukken genoemd:

(a) p_1' is de druk die de eerste gashoeveelheid met n_1 mol deeltjes uitoefent als die zich alleen in het volume $V_1 + V_2$ zou bevinden;

(b) p_2' is de druk die de tweede gashoeveelheid met n_2 mol deeltjes uitoefent als die zich alleen in het volume $V_1 + V_2$ zou bevinden.

Passen we nu de gaswet van Boyle toe, dan vinden we dat:

$$p_1 \cdot V_1 = p_1' \cdot (V_1 + V_2) \qquad \text{en} \qquad p_2 \cdot V_2 = p_2' \cdot (V_1 + V_2)\,.$$

Hieruit volgt dat

$$p_1' = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_1 + V_2} \qquad \text{en} \qquad p_2' = \frac{p_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2}.$$

Omdat de einddruk gelijk is aan de som van de partieeldrukken volgt dat:

$$p = p_1' + p_2' = \frac{p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2}.$$

Deze laatste uitdrukking staat bekend als de **wet van Dalton**.

CC BY-NC-SA 4.0

17.4 Warmte

Wanneer een systeem warmte opneemt uit een ander systeem op hogere temperatuur, kan deze instromende warmte zorgen voor een temperatuursverhoging van het systeem met behoud van de aggregatietoestand, of voor een verandering van aggregatietoestand.

17.4.1 Warmteuitwisseling bij een temperatuursverandering

Wanneer een systeem warmte opneemt en daarbij niet van aggregatietoestand verandert, zal de warmte-opname aanleiding geven tot een temperatuursstijging van het systeem. Als Q de opgenomen warmte is en ΔT de resulterende temperatuursstijging, dan is

$$Q = C \cdot \Delta T.$$

Deze vergelijking kan ook worden gebruikt bij het geval van warmte-afgave van het systeem aan een ander systeem op lagere temperatuur. In dat geval rekenen we Q negatief, en volgt hieruit dat de temperatuur van het systeem afneemt.

Hierin is C is de **warmtecapaciteit** van het systeem: deze geeft de warmte weer die opgenomen of afgegeven wordt door het systeem per eenheid van temperatuurverandering. De S.I.-eenheid van warmtecapaciteit is J/K. Om bijvoorbeeld de temperatuur van een systeem met warmteacapaciteit van 150 J/K te laten toenemen met 1 K is 150 J nodig.

De warmtecapaciteit van een systeem hangt af van het soort materiaal en de massa van (eventueel de verschillende onderdelen van) het systeem. Hoe groter de hoeveelheid materie, hoe meer warmte moet onttrokken of toegevoegd worden om een bepaalde temperatuursverandering ΔT te realiseren. De hoeveelheid stof wordt bepaald door de massa m of door het aantal mol n te specifiëren.

Voor een systeem dat bestaat uit één soort stof kunnen we de warmtecapaciteit C schrijven als

$$C = m \cdot c$$

waarbij c de **soortelijke warmte** van het materiaal is, met S.I.-eenheid $\frac{J}{kg \cdot K}$ en m de massa van het systeem; of als

$$C = n \cdot C_m$$

waarbij C_m de **molaire warmtecapaciteit** van het materiaal is, met S.I.-eenheid $\frac{J}{mol \cdot K}$, en n de molhoeveelheid van het systeem.

> **Opmerking 17.4.1.** Omdat $\Delta T = \Delta\theta$ kan je ook schrijven dat $Q = C \cdot \Delta\theta$ en kan de soortelijke warmte c ook uitgedrukt worden in $\frac{J}{kg \cdot °C}$ en de molaire warmtecapaciteit ook in $\frac{J}{mol \cdot °C}$.

Als we twee voorwerpen A en B die een verschillende temperatuur hebben, in thermisch contact met elkaar brengen, zodat ze warmte kunnen uitwisselen, dan veronderstellen we dat het geheel géén warmte met de omgeving uitwisselt. De warmte die door het systeem A met de hoge temeperatuur wordt afgegeven, wordt volledig door het systeem B met de lage temperatuur opgenomen, zonder verlies. Dit principe noemen we ook wel de **warmtebalans** :

$$Q_{afgegeven,A} = -Q_{opgenomen,B}$$

> **Opmerking 17.4.2.** Let op het minteken, dat nodig is omdat we de opgenomen warmte positief definiëren, en de afgegeven warmte negatief.

> **Voorbeeld 17.4.1.** Beschouw een bad dat gevuld is met 90 ℓ water dat een temperatuur heeft van 20 °C. Hoeveel liter water van 80 °C moet ik toevoegen om een eindtemperatuur te realiseren van $\theta_e = 38\ °C$ ($C_{\text{bad}} = 30\frac{kJ}{°C}$; $C_{water} = 4186\frac{J}{kg \cdot °C}$)?

CC BY-NC-SA 4.0

Uitwerking: We maken gebruik van de warmtebalans en het feit dat het toevoegen van warm water de temperatuur van het water in het bad zal doen stijgen:

$$\begin{aligned}
Q_{\text{opgenomen}} + Q_{\text{afgegeven}} &= 0 \\
C_{\text{bad}} \cdot (\theta_e - \theta_i) + C_{\text{water}} \cdot m \cdot (\theta_e - \theta_i) + C_{\text{water}} \cdot m_{\text{toegevoegd}} \cdot (\theta_e - \theta_{\text{toegevoegd},i}) &= 0 \\
C_{\text{bad}} \cdot (\theta_e - \theta_i) + C_{\text{water}} \cdot \rho_{\text{water}} \cdot V_{\text{bad}} \cdot (\theta_e - \theta_i) + C_{\text{water}} \cdot \rho_{\text{water}} \cdot V_{\text{toegevoegd}} \cdot (\theta_e - \theta_{\text{toegevoegd},i}) &= 0 \\
\frac{\left[C_{\text{bad}} + C_{\text{water}} \cdot \rho_{\text{water}} \cdot V_{\text{bad}}\right] \cdot (\theta_e - \theta_i)}{-C_{\text{water}} \cdot \rho_{\text{water}} \cdot (\theta_e - \theta_{\text{toegevoegd},i})} &= V_{\text{toegevoegd}} \\
\frac{\left[30 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} + 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 90 \cdot 10^{-3} m^3\right] \cdot (38^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})}{-4186 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (38^\circ\text{C} - 80^\circ\text{C})} &= V_{\text{toegevoegd}} \\
0,0416\ \text{m}^3 &= V_{\text{toegevoegd}}
\end{aligned}$$

Er moet dus $41,6$ liter warm water aan het bad toegevoegd worden.

17.4.2 Warmteuitwisseling bij een verandering van aggregatietoestand

Bij de bespreking van de mogelijke aggregatietoestanden van een materiaal maakt men vaak een onderscheid tussen vast, vloeibaar en gas. Bij de overgang van de ene aggregatietoestand naar de andere wordt de uitgewisselde warmte gebruikt om deze toestandsverandering te realiseren. **De temperatuur blijft hierbij constant.**

Bekijken we eerst de overgang van de vloeibare naar de gasfase, **verdamping** genoemd. De warmte L_V nodig om vloeistofmoleculen naar de gasfase te brengen is evenredig met de massa vloeistof m die verdampt en hangt af van het soort vloeistof die verdampt. Deze warmte noemen we de verdampingswarmte:

$$L_V = \ell_v \cdot m.$$

Hierin is ℓ_v de soortelijke verdampingswarmte van de stof, die uitgedrukt wordt in $\frac{J}{kg}$.

Het omgekeerde proces van de damp- naar de vloeibare fase wordt **condensatie** genoemd. Bij het omzetten van damp naar vloeistof geeft het systeem warmte af aan de omgeving.

De overgangen tussen de vaste - naar de vloeibare fase (**smelt- en stolproces**) gebeuren op gelijkaardige manier. Bij een gegeven druk zal de opgenomen warmte leiden tot een temperatuurstijging van de vaste stof totdat de smelttemperatuur is bereikt. Dan begint de vaste stof te smelten en bestaan de vloeibare - en vaste fase samen. Het verder toevoegen van warmte dient enkel om de toestandsverandering te realiseren en niet om de temperatuur te veranderen. Wanneer de vaste stof volledig gesmolten is, zal extra toegevoegde warmte de temperatuur van de vloeistof doen stijgen.

De smeltwarmte L_s die nodig is om een vaste stof te smelten is evenredig met de massa m van deze vaste stof en van de soortelijke smeltwarmte ℓ_s van het materiaal. Er geldt dan dat:

$$L_s = \ell_s \cdot m.$$

Bij stollen geeft het systeem warmte af aan de omgeving.

De laatste overgang is deze van de vaste - naar de gasfase (**sublimatie** genaamd) of omgekeerd. Bij een gegeven druk gebeuren deze overgangen bij een bepaalde temperatuur, de sublimatietemperatuur. L_{subl} is de sublimatiewarmte om een vaste stof met massa m te sublimeren en wordt mee bepaald door de soortelijke sublimatiewarmte ℓ_{subl}:

$$L_{subl} = \ell_{subl} \cdot m.$$

17.4.3 Fasediagram van een stof

Als we werken met een stof bij constant volume V, kunnen we een (p,T)-diagramma opstellen waarin we de verschillende gebieden onderscheiden die met een bepaalde aggregatietoestand overeenstemmen : gasvormig, vloeibaar, vast. We noemen dit (p,T)-diagramma dan een **fasediagram**.

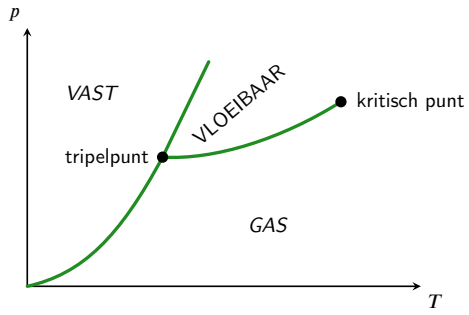
CC BY-NC-SA 4.0

17.4 Warmte

Bij de grenslijnen tussen deze gebieden kunnen fase-overgangen optreden als het systeem warmte opneemt of afgeeft. We noemen deze lijnen de smeltlijn, kooklijn, en sublimatielijn.

Als we deze grenslijnen in figuur 101 bekijken, zien we dat, bij constant volume, bijvoorbeeld de smelttemperatuur afhangt van de druk : de smelttemperatuur verhoogt bij hogere drukken.

Bovendien zien we dat de drie grenslijnen snijden in één punt. We noemen dit punt het **tripelpunt** van die stof. In dit punt zijn de drie aggregatietoestanten van de stof alledrie in thermisch evenwicht: ze kunnen er dus samen bestaan.



Figuur 101 – fasediagram met smeltlijn, dampspanningslijn en sublimatielijn voor een stof verschillend van water.

CC BY-NC-SA 4.0

17.5 Oefeningen Thermodynamica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

1) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

2) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

3) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.1 Instapoefeningen

1. Bepaal het volume van een hoeveelheid gas bij 67°C als het volume bij 21°C 150 cm^3 bedraagt. Tijdens de temperatuursverandering blijft de druk constant.

$$V = \ldots\ldots \ \mathrm{cm}^3$$

2. Een afgesloten meetspuit bevat lucht en is ingesteld op een volume van $2,0\ \ell$. We trekken aan de zuiger van de spuit en houden de temperatuur constant. De druk neemt hierdoor af en zakt tot één vierde van de oorspronkelijke waarde. Tot welk volume is de spuit uitgetrokken?

$$V = \ldots\ldots \ \ell$$

3. $3,0$ mol van een gas op een temperatuur van -120°C vult een fles met een volume van $2,0$ liter. Hoe groot is de druk van het gas?

$$P = \ldots\ldots \cdot 10^6 \ \mathrm{Pa}$$

4. Hoe groot is de warmtecapaciteit C van een blok koper met een massa van $\mathrm{m} = 375\ \mathrm{g}$. De soortelijke warmte van het koper is $382\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$.

$$C = \ldots\ldots \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

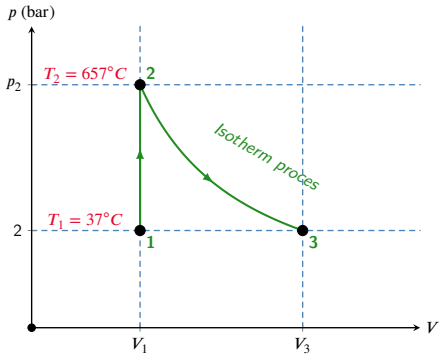
5. Hoeveel warmte moet je toevoegen aan een koperen bol met diameter 8,0 cm opdat de temperatuur ervan zou kunnen stijgen van -20 °C tot 180 °C? Gegeven is dat voor koper geldt dat $\rho = 8920\ \mathrm{kg/m}^3$ en $c = 385\ \mathrm{J/(kg\cdot K)}$.

$$Q = \ldots\ldots \ \mathrm{kJ}$$

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.2 Standaardoefeningen

1. $8,0$ gram heliumgas volgt een proces van 1 naar 2 naar 3, zoals weergegeven op de figuur. Zoek de waarden van V_1, V_3, p_2 en T_3.



1. $V_1 = \ldots\ldots\ m^3$

2. $V_3 = \ldots\ldots\ m^3$

3. $p_2 = \ldots\ldots$ bar

4. $T_3 = \ldots\ldots\ °C$

2. Een aluminium kookpot met een massa van 450 g staat op het fornuis. Er zit $0,255$ l water in de kookpot. Hoeveel warmte is er nodig om het water op te warmen van 21°C tot 81°C? Er is gegeven dat de soortelijke warmtecapaciteit van aluminium gelijk is aan $c = 900\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot °\text{C}}$.

De nodige warmte is: $\ldots\ldots$ kJ

3. Een aluminium braadpan met een massa van 750 gram wordt van het fornuis genomen en in de afwasbak met 10 liter water ondergedompeld. Daardoor stijgt de temperatuur van het water van 20 °C tot 24 °C. Wat is de oorspronkelijke temperatuur van de braadpan?

$$T = \ldots\ldots\ °\text{C}$$

4. Een blokje ijzer met een volume van 55 cm^3 wordt uit een oven van 850 °C gehaald en meteen in een beker met 240 ml water op 25 °C ondergedompeld. Welke hoeveelheid water kookt weg uit de beker?

$$m = \ldots\ldots\ \text{kg}$$

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.3 Gevorderde oefeningen

1. Een geïsoleerde thermosfles bevat 250 g water met een temperatuur van 20°C. We voegen hieraan een onbekende hoeveelheid water toe met een temperatuur van 50°C. De temperatuur van het water in de thermosfles wordt daardoor 40°C.

We nemen nu een blokje ijzer met onbekende massa en een temperatuur van 750°C. We voegen dit blokje toe aan het water in de thermosfles. Daardoor stijgt de temperatuur tot 60°C.

Bepaal de massa van het blokje ijzer. Gegeven is dat $c_{Fe} = 449 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot^{\circ} \text{C}}$

De massa van het blokje ijzer is: …… kg

2. Een stukje van een onbekend metaal met een massa van 190 g wordt opgewarmd tot 100°C. Daarna wordt het in een messing calorimeter met een massa van 124 g gegooid waarin 245 g water zit met een temperatuur van 9,5°C. De temperatuur van het water stijgt hierdoor tot 22,0°C. Bereken de soortelijke warmtecapaciteit van het onbekend metaal en probeer daarmee te bepalen over welk metaal het gaat. Gebruik een handboek of bron op het internet om dit opzoekwerk te doen. Er is gegeven dat de soortelijke warmtecapaciteit van messing gelijk is aan $c = 394 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$.

De soortelijke warmtecapaciteit is: …… $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$

3. Je klopt een stalen nagel van 40 gram in een houten balk. Daarvoor moet je met een hamer 20 keer kloppen op de nagel. De hamer heeft een massa van 0,50 kg en de snelheid van de hamer waarmee die de nagel telkens raakt is 12 m/s. De hamer komt na elke tik volledig tot rust. Hoe sterk is de temperatuur van de nagel dan op het einde toegenomen als je mag aannemen dat de nagel 75 % van de omgezette energie absorbeert ? Er is gegeven dat de soortelijke warmtecapaciteit van staal gelijk is aan $c = 482 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$.

De temperatuurstoename van de nagel is: …… °C

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.4 Oefeningen Usolv-it

1. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over gaswetten via het Usolv-it oefenplatform.

2. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over warmte via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

1. De grootte van een vector is 1 m. Wat zijn de x- en y-componenten indien de hoek die de vector maakt met de x-as (in tegenuurwerkzin gemeten) gelijk is aan:

1. Als de hoek $0°$ is, dan zijn $x = \ldots\ldots$ m en $y = \ldots\ldots$ m

2. Als de hoek $45°$ is, dan zijn $x \approx \ldots\ldots$ m en $y \approx \ldots\ldots$ m

3. Als de hoek $90°$ is, dan zijn $x = \ldots\ldots$ m en $y = \ldots\ldots$ m

2. Bereken de grootte van de vector $\vec{a} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y$. $\|\vec{a}\| = \ldots\ldots$

3. Een vector $\vec{a}$ met lengte 10 maakt een hoek van $225°$ met de x-as. Bereken de scalaire componenten volgens de x- en y-as. $a_x = \ldots\ldots, a_y = \ldots\ldots$

4. Een vogel vliegt vanuit een boom 100 meter naar het oosten. Daarna vliegt hij 50 m naar het noordwesten. Bepaal de lengte van de vector tussen de begin- en eindpositie.

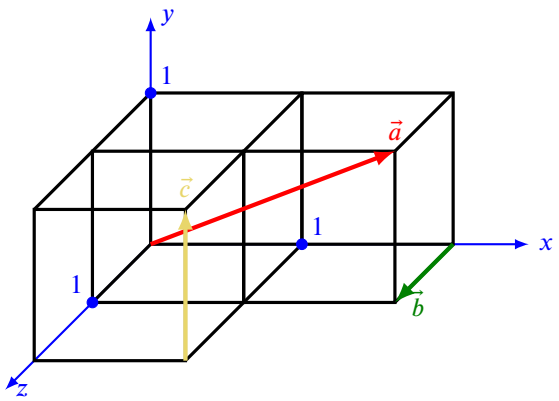
$$\|\vec{a}\| = \ldots\ldots \; m$$

5. Teken de vector $\vec{a} = -4 \cdot \vec{e}_x + 5 \cdot \vec{e}_y$. Bepaal de hoek die deze vector maakt met de positieve x-as.

$$\theta = \ldots\ldots \; °$$

6. Erica verplaatst zich vanuit een plaats P en gaat 3 km oostwaarts en daarna 5 km zuidwaarts. Welke verplaatsing heeft Erica gemaakt?

7. Lees op de figuur de componenten af van de drie vectoren in een driedimensionaal assenstelsel.



$$\vec{a} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$$

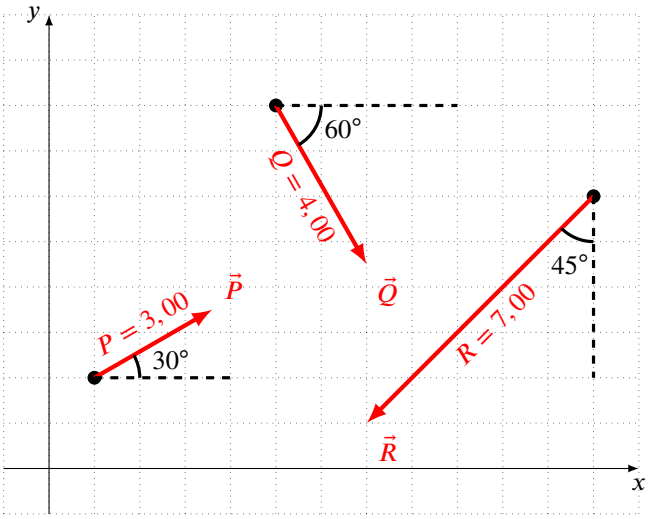
$$\vec{b} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$$

$$\vec{c} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

8. Bepaal de componenten van de drie vectoren ten opzichte van de weergegeven x-as en y-as.



$\vec{P} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

$\vec{Q} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

$\vec{R} = (\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ )$

9. Een boot vaart een meer op met een snelheid $\vec{v} = 2{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x + 3{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_y$. Veronderstel dat de gekozen x-as samenvalt met de oever. Onder welk hoek vaart de boot ten opzichte van de oever?

$\theta = \ldots\ldots\ ^\circ$

10. Bepaal de hoek tussen de twee vectoren $\vec{a} = 4\ \vec{e}_x + 2\ \vec{e}_y$ en $\vec{b} = 1\ \vec{e}_x + 4\ \vec{e}_y$.

$\theta = \ldots\ldots\ ^\circ$

11. Gegeven twee vectoren $\vec{a} = 3\ \vec{e}_x + 2\ \vec{e}_y$ en $\vec{b} = m\ \cdot \vec{e}_x + 3\ \vec{e}_y$. Bepaal m zodat de twee vectoren loodrecht op elkaar staan

$m = \ldots\ldots$

12. Een vector $\vec{a}$ met lengte 5 maakt een hoek van -135° met de x-as. Bereken de vectorcomponenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. $a_x = \ldots\ldots, a_y = \ldots\ldots$

13. Wat is de grootte van de vector $\vec{c} = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$ en welke hoek maakt deze vector met de x-as?

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

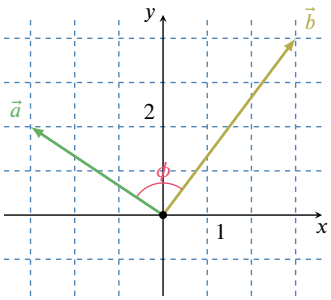
14. Een vector $\vec{v}$ maakt een hoek van 150° met de positieve x-as en heeft een y-component van 10 m/s. Wat is de waarde van v?

$$v = \ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

15. Teken de vector $\vec{a} = -3 \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot \vec{e}_y$. Bepaal de hoek die deze vector maakt met de positieve y-as.

$$\theta = \ldots\ldots \ ^\circ$$

16. Bepaal de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals weergegeven op de figuur.



$$\varphi = \ldots\ldots \ ^\circ$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging

1. Een fietser rijdt gedurende 20 minuten 8,0 km naar het oosten, dan keert hij terug en rijdt 3,2 km gedurende 8 minuten naar het westen. Daarna rijdt hij 16,0 km gedurende 40 minuten weer naar het oosten. Wat was zijn gemiddelde snelheid? Geef je antwoord in m/s.

$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$

2. Een deeltje beweegt langs de x-as volgens de vergelijking $x(t) = 10t - 2t^2$. Bereken de snelheid op $t = 2$ s en $t = 3$ s. Wat is de gemiddelde snelheid tussen $t = 2$ s en $t = 3$ s? De positie wordt bepaald in m en de tijd in s.

$$v_{x,1} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$
$$v_{x,2} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$
$$v_{x,g} = \ldots\ldots \text{ m/s}$$

3. Een auto verlaat de garage vanuit rust met een constante versnelling van $1,3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Welke afstand legt de auto af alvorens een snelheid van $10,4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ te hebben?

$$\Delta \text{x} = \ldots\ldots \text{ m}$$

4. Een trein van 130 m lang rijdt het station binnen aan een snelheid van 22,0 m/s en een vertraging van 0,150 m/s². Het station is 210 m lang. Aan welke snelheid verlaat de achterkant van de trein het station?

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5. Een reddingshelikopter hangt boven een persoon wiens boot is gezonken. Eén van de hulpverleners gooit een zwemvest naar beneden met een beginsnelheid van 1,40 m/s. Het duurt 1,8 s alvorens die in het water valt. Hoe hoog bevindt de helicopter zich boven het slachtoffer? Je mag de weerstand van de lucht verwaarlozen.

$$h = \ldots\ldots \text{ m}$$

6. Een wagen rijdt over een rechte weg. De snelheid van de wagen wordt ten opzichte van een x-as die samenvalt met de weg, beschreven als

$$v_x(t) = 4t^3 - 3t^2 + 6t - 2$$

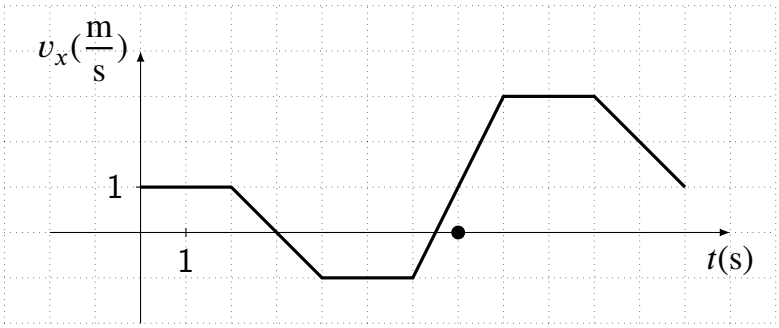
De startpositie van de wagen is $x_0 = 20$ m. De positie wordt uitgedrukt in m en de tijd in s. Bepaal de positie van de wagen op $t = 2$ s

$$x = \ldots\ldots \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

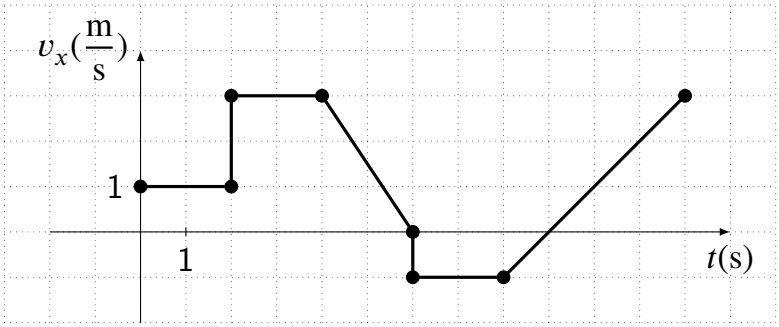
18.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging

7. Onderstaande grafiek geeft het verloop van de snelheid van een wandelaar weer ten opzichte van een gekozen x-as. Als je weet dat bij $t = 0$ de positie gelijk is aan $x_0 = 5$ m, wat is dan de positie, de snelheid en de versnelling van de wandelaar op $t = 7$ s?



$$x = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$v_x = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$a_x = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

8. Onderstaande grafiek geeft het verloop van de snelheid van een voorwerp weer ten opzichte van een gekozen x-as. Als je weet dat bij $t = 0$ de positie gelijk is aan $x_0 = 0$ m, schets dan de bijhorende $x(t)$- en $a_x(t)$-grafiek.



9. Twee treinen rijden in tegenovergestelde zin aan een constante snelheid naar elkaar toe. De ene trein rijdt 108 km/h en de andere trein 144 km/h. Op een bepaald ogenblik zijn ze 1400 m van elkaar verwijderd. Hoeveel seconden later zullen ze elkaar kruisen?

$$\Delta t = \ldots\ldots \text{ s}$$

10. Een fietser vertrekt vanuit rust met een constante versnelling zodat dat hij tussen de vierde en de vijfde seconde 9 meter aflegt. Bepaal de versnelling van de fietser.

$$a_x = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

1. De positie van een deeltje varieert van $\vec{r}_1 = -2,0 \cdot \vec{e}_x + 4,0 \cdot \vec{e}_y$ naar $\vec{r}_2 = 5,0 \cdot \vec{e}_x + 7,0 \cdot \vec{e}_y$. Wat is de verplaatsing van dit deeltje ten opzichte van de x-as en de y-as? De eenheid wordt uitgedrukt in m.

$$\Delta x = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$\Delta y = \ldots\ldots \text{ m}$$

2. Een golfer klopt een balletje in een eerste shot zodat de verplaatsing van het balletje kan beschreven worden door een verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}_1 = 250 \cdot \vec{e}_x$. Zijn tweede shot wordt beschreven door $\Delta\vec{r}_2 = 175 \cdot \vec{e}_x + 66 \cdot \vec{e}_y$. Wat is de afstand dat het balletje aflegt in elk shot en wat is de lengte van de totale verplaatsingsvector? De positie wordt uitgedrukt in meter.

$$\|\Delta\vec{r}_1\| = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$\|\Delta\vec{r}_1\| = \ldots\ldots \text{ m}$$
$$\|\Delta\vec{r}\| = \ldots\ldots \text{ m}$$

3. Een boot vertrekt vanuit rust uit de haven op $t = 0$ en vaart een meer op met een versnelling $\vec{a} = 2,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \vec{e}_x$. Een sterke wind blaast de boot vooruit waardoor de boot een extra snelheid krijgt $\vec{v} = 2,0\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x + 3,5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_y$. Hoe groot is de snelheid van de boot na 5 seconden?

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4. Een dartspijltje wordt met een snelheid van $12\frac{\text{m}}{\text{s}}$ horizontaal weggegooid in de richting van de roos van het dartsbord, dat $2,6$ m verder staat opgesteld. Hoever onder de roos raakt het dartspijltje het bord?

$$\Delta y = \ldots\ldots \text{ cm}$$

5. Een vliegtuig vliegt met een snelheid van 360 km/h op een hoogte van 750 m. Een pallet met voedsel wordt uit het vliegtuig geduwd. Veronderstel dat de parachute niet open gaat, hoe ver van het punt waar de pallet het vliegtuig verlaat komt dit neer op de grond?

$$\Delta x = \ldots\ldots \cdot 10 \text{ m}$$

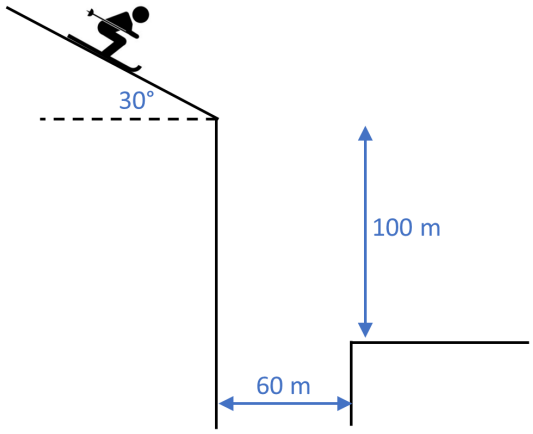
6. Op een bepaald ogenblik zakt een warmeluchtballon op 75 m hoogte verticaal naar beneden met een snelheid van $1,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Op dit ogenblik gooit een meisje een bal horizontaal weg met een snelheid van $15\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wanneer het meisje op de grond landt, hoe ver van de landingsplaats zal ze haar bal terugvinden?

$$\Delta x = \ldots\ldots \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

7. Een skiër skiet langs een helling die 30° maakt met de horizontale richting aan een snelheid van 54 km/h naar beneden. Plots verschijnt er een kloof van 60 m breed. De overkant van de kloof ligt 100 m lager. Zal de skier over de kloof geraken? Hoeveel meter legt de skiër in horizontale richting af als hij 100 m zakt?



$$\Delta x = \ldots\ldots \text{ m}$$

8. Een vliegwiel draait 35 toeren per seconde aan een constante snelheid. Over welke hoek, uitgedrukt in radialen, draait een punt op het vliegwiel in 20 seconden?

$$\Delta\theta = \ldots\ldots \cdot 10^2 \text{ rad}$$

9. Een loopster die deelneemt aan de 200 m wedstrijd moet aan het einde van de piste omkeren. De bocht van de piste heeft een straal van 40,0 m. De loopster loopt de volledige wedstrijd aan eenzelfde snelheid. Ze loopt de wedstrijd uit in 25,0 s. Hoe groot is haar centripetale versnelling als ze bocht neemt?

$$a = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

10. Een ventilator draait met een constane snelheid 350 toeren per minuut. Hoe groot is de snelheid van een punt dat zich op 15 cm van de draaias bevindt?

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

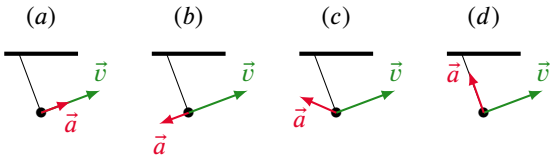
1. Een hockeypuck glijdt op ijs met een constante snelheid. Hoeveel bedraagt de nettokracht die op de puck inwerkt?

- Een kracht gelijk aan de zwaartekracht van de puck.
- Een kracht kleiner dan de zwaartekracht, maar groter dan nul.
- Hangt af van de snelheid van de puck.
- De kracht is nul.

2. Je knijpt een boek tussen duim en wijsvinger vast waardoor het niet valt. Elk van de twee vingers knijpt met een kracht van $6,0$ N loodrecht op de kaft van het boek. Hoe groot mag de zwaartekracht van het boek maximaal zijn opdat het niet tussen je vingers weg zou glippen? De statische wrijvingscoëfficiënt tussen je vingers en de kaft van het boek bedraagt $0,80$.

$$G_w = \ldots\ldots \text{ N}$$

3. Een balletje slingert in een verticaal vlak. In welk van de onderstaande figuren is de versnelling correct getekend, op het tijdstip van de getoonde snelheidsvector $\vec{v}$?

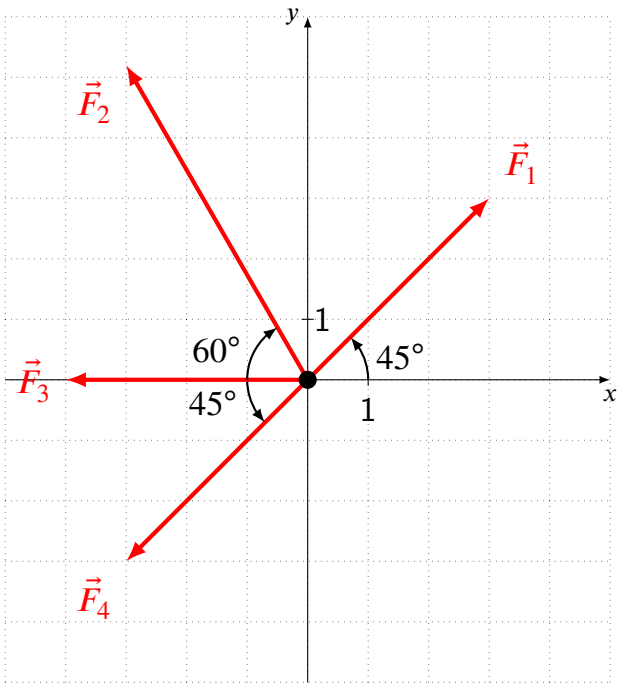


De juiste figuur is (a) | (b) | (c) | (d).

4. Op een voorwerp met $m = 5,0$ kg werken vier krachten, zoals weergegeven op de figuur. Er is gegeven dat $F_1 = 4,2$ N, $F_2 = 6,0$ N, $F_3 = 4,0$ N, $F_4 = 4,2$ N. Bepaal de grootte van de versnelling van het voorwerp.

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica



$a = \ldots\ldots$ m/s^2

5. Bepaal de verhouding van de zwaarteveldsterkte op Mars tot de zwaarteveldsterkte op Aarde. Er is gegeven dat $m_{Mars} = 6,42 \cdot 10^{23}$ kg en $r_{Mars} = 3,38 \cdot 10^{6}$ m.

$$\frac{g_{Mars}}{g_{Aarde}} = \ldots\ldots$$

6. Een auto met een gewicht van 15000 N vertrekt op een horizontale weg vanuit rust en versnelt tot 90 km/h in 5,0 s. De totale wrijvingskracht op de auto is 1250 N. Bepaal de kracht die de motor op de auto uitoefent.

$$F = \ldots\ldots \cdot 10 \text{ N}$$

7. Een proton met een mass van $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg beweegt op een cirkel met een straal $r = 1,5$ m door een magneetveld met sterkte $B = 0,085$ T. Het proton heeft een lading van $Q = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C. Hoe groot is de snelheid van het proton op zijn cirkelbaan?

$$v = \ldots\ldots \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8. Een vrachtwagen met een massa van $m = 3800$ kg rijdt aan een snelheid van 50,4 km/h als hij plots moet remmen. De vrachtwagen staat stil na 14 s. Hoe groot is de remkracht?

$$F = \ldots\ldots \cdot 10^2 \text{ N}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

9. Een slee met een massa van $m = 40\,\text{kg}$ glijdt vanuit rust een besneeuwde helling af. De helling heeft een lengte van $5,0\,\text{m}$ en maakt een hoek van $30°$ met de horizontale. De dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen de slee en de sneeuw bedraagt $\mu_d = 0,15$. Bereken de versnelling van de slee langs de helling. Bepaal hoe lang het duurt voordat de slee de voet van de helling bereikt.

$$a = \ldots\ldots \text{ m/s}^2$$

$$\Delta t = \ldots\ldots \text{ s}$$

10. Een skiër met massa $m = 65$ kg glijdt langs een wrijvingsloze helling naar beneden. De helling maakt een hoek θ van $22°$ met de horizontale.

1. Bepaal de richting en grootte van de resulterende kracht op de skiër (rond af zonder komma).

$$\vec{F}_{\text{net}} = (\ldots\ldots \ ; \ \ldots\ldots) \ N$$

$$F_{\text{net}} = \ldots\ldots \ N$$

2. Als de helling steiler wordt, dan wordt de resulterende kracht | groter | kleiner | hetzelfde | . . Verklaar.

11. Een zeeleeuw schuift vanuit rust langs een helling naar beneden. De helling is 3.0 m lang en maakt een hoek van $23°$ boven de horizontale. Als de dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen de zeeleeuw en de helling $0,26$ is, hoe lang duurt het dan tot de zeeleeuw in het water belandt?
$\Delta t = \ldots\ldots$ s

12. Een kleine bal met een massa van $m = 0,50\,\text{kg}$ is bevestigd aan het uiteinde van een licht, onrekbaar touw met een lengte van $r = 1,2\,\text{m}$. Het andere uiteinde van het touw is vastgemaakt aan een vast punt op een wrijvingsloze horizontale tafel. De bal wordt in een horizontale cirkelbaan gebracht met een constante snelheid van $v = 3,0\,\text{m/s}$. Bereken de grootte van de spankracht in het touw.

$$F_T = \ldots\ldots \text{ N}$$

13. Een massa $m = 0,25\,\text{kg}$ draait aan het uiteinde van een massaloos touwtje in een cirkel over een horizontale tafel. De wrijving kan verwaarloosd worden. De lengte van het touw is $L = 0,50\,\text{m}$. Het touwtje kan in verticale positie en in rust maximaal een massa van $M = 50\,\text{kg}$ dragen zonder te breken. Wat is de maximale snelheid waarmee m kan draaien zonder dat het touwtje breekt?

$$v = \ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

14. Je schuift een zoutvat naar de andere kant van de tafel en geeft het een initïele snelheid van 1.15 m/s . Het zoutvat vertraagt en komt tot rust na 0.840 m. Wat is de dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen het zoutvat en de tafel?

15. Een verkeerslicht met een gewicht van $G = 120\,\text{N}$ hangt boven een kruispunt aan twee lichte kabels. De eerste kabel maakt een hoek van $\alpha = 30°$ met de horizontale, en de tweede kabel maakt een hoek van $\beta = 45°$ met de horizontale. Beide kabels zijn aan een vast punt bevestigd. Bereken

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

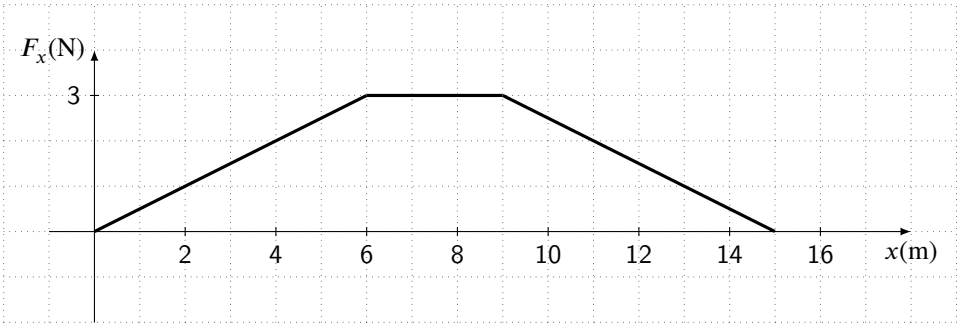
de grootte van de beide spankrachten.

$$F_{T,1} = \ldots\ldots \text{ N}$$
$$F_{T,2} = \ldots\ldots \text{ N}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

1. Een deeltje is onderworpen aan een kracht $\vec{F}$ die varieert met de positie x. De figuur geeft aan hoe F_x afhangt van x. Bereken de arbeid die de kracht verricht tijdens de verplaatsig van $x = 4$ m tot $x = 8$ m.



$$W = \ldots\ldots \text{ J}$$

2. Een blok van 7,0 kg wordt vanuit rust over een wrijvingsloos oppervlak geduwd door een constante horizontale kracht van 10 N. Bepaal de snelheid van het blok nadat het een afstand van 5,6 m heeft afgelegd.

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3. Een kracht $\vec{F} = 5x \cdot \vec{e}_x + 3y \cdot \vec{e}_y$ werkt in op een deeltje terwijl dit deeltje beweegt langs de x-as van de oorsprong naar $x = 4,0$ m. Hoe groot is de arbeid die deze kracht op het deeltje verricht tijdens deze verplaatsing?

$$W = \ldots\ldots \text{ J}$$

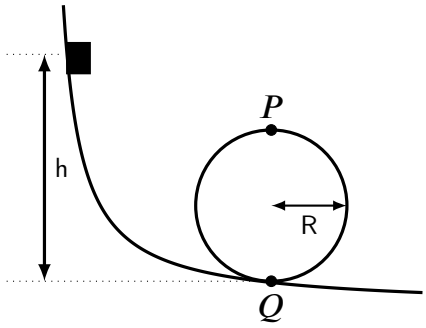
4. Een voorwerp met een massa van $1,50$ kg hangt aan een lichte veer, die voldoet aan de wet van Hooke. De veer is $2,50$ cm uitgerekt. Je neemt het voorwerp nu weg van de veer en hangt er een nieuw voorwerp aan met een massa van $4,50$ kg. Hoe ver rekt de veer nu uit? Hoeveel arbeid moet je verrichten om de veer nog $4,0$ cm extra uit te rekken?

$$\Delta\ell = \ldots\ldots \text{ cm}$$
$$W = \ldots\ldots \text{ J}$$

5. Een voorwerp met massa $m = 5,00$ g glijdt over een wrijvingsloze baan naar beneden en komt in een 'loop' terecht, zoals weergegeven op de figuur. Het voorwerp wordt losgelaten van een hoogte $h = 3,0R$. Wat is de snelheid van het voorwerp in het punt P? Er is gegeven dat $R = 15,0$ cm.

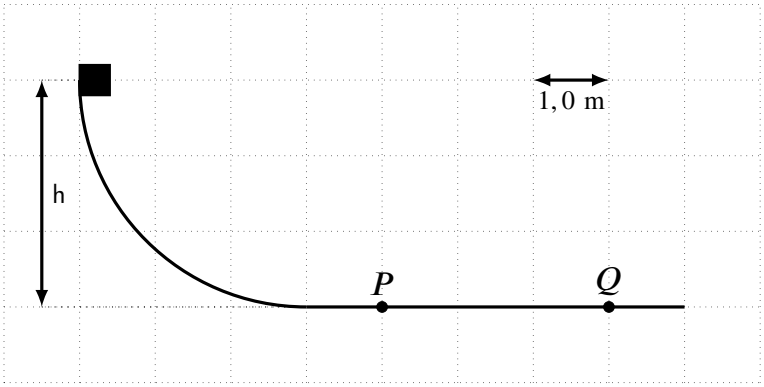
CC BY-NC-SA 4.0

18.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie



$v = \ldots\ldots\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

6. Een blok met een massa van 10,0 kg wordt vanuit rust van op hoogte h losgelaten. Het pad is wrijvingsloos behalve tussen de punten P en Q. De snelheid van het blok in punt Q is $6,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Bepaal de dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen het blok en het oppervlak tussen P en Q.



$\mu_d = \ldots\ldots$

7. Een massa van $1,5$ kg hangt aan een veer op een horizontale tafel. De veer heeft in rust een lengte van $0,30$ m en een veerconstante van $75\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Je duwt nu tegen de massa zodat de veer 10 cm is ingedukt. Je laat dan de massa los, zodat die begint te trillen. Hoe groot is de snelheid van de massa wanneer die het evenwichtspunt passeert? De wrijving mag verwaarloosd worden.

$v = \ldots\ldots\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

8. In een eerste situatie heeft een bal met massa m die naar beneden valt op hoogte h een snelheid v. Op dat ogenblik is de kinetische energie van de bal gelijk aan de potentiële energie van de bal. Wanneer diezelfde bal in een tweede situatie op hoogte h/2 een snelheid 2v heeft, wat kan je dan zeggen over de mechanische energie van de bal in die twee situaties?

Meerkeuze:

CC BY-NC-SA 4.0

18.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

(a) $E_{mech}(1) = E_{mech}(2)$

(b) $E_{mech}(1) < E_{mech}(2)$

(c) $E_{mech}(1) > E_{mech}(2)$

(d) Er zijn te weinig gegevens om een uitspraak te kunnen doen.

9. Een deeltje met een massa van $2,5$ kg beweegt volgens de x-as. Zijn positie verandert in de tijd volgens $x = t + 3,0 \cdot t^2$. Bepaal de arbeid die uitgeoefend wordt op het deeltje tussen $t = 1,00$ s en $t = 2,00$ s.

$$W = \ldots\ldots \cdot 10 \text{ J}$$

10. Een massa m trilt aan een veer met veerconstante k met een amplitude A. Welke percentage van de mechanische energie van de massa is kinetische energie op het ogenblik dat de uitwijking gelijk is aan $A/2$?

$$percentage = \ldots\ldots \%$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.6 Herhalingsoefeningen: trillingen

1. Een lange stalen bladveer is onderaan vast gemaakt aan een tafel. Bovenaan is een bol bevestigd van 7,50 kg. Om de bol 15,0 cm naar rechts te trekken is een kracht van 4,50 N nodig. Bepaal de periode waarmee de bol zal trillen als je er een duwtje tegen geeft.

$$T = \ldots\ldots \text{ s}$$

2. Als je bij een harmonische trilling de amplitude verdubbelt, wat zal er dan gebeuren? Welke uitspraak is juist?

Meerkeuze:

(a) De maximale potentiële energie van het systeem niet veranderen.

(b) De maximale potentiële energie van het systeem verdubbelen.

(c) De maximale kinetische energie van het systeem verdubbelen.

(d) De maximale kinetische energie van het systeem verviervoudigen.

3. Een voorwerp met een massa van 1,50 kg hangt aan een veer. Je rekt de veer nu 4,50 cm uit en laat het voorwerp dan vrij trillen. Het schommelt dan 1 keer heen en weer per seconde. Hoe groot is de veerconstante van de veer?

$$k = \ldots\ldots \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

4. De trillingsvergelijking van een harmonische trilling is

$$x(t) = 15\ sin(6\pi\ t + 4)$$

Wat is de frequentie van deze trilling?

$$f = \ldots\ldots \text{ Hz}$$

5. Aan een verticaal opgehangen veer hangt een massa van 300 g. Men hangt nu nog 500 g extra bij aan deze veer. Daardoor rekt de veer 12,0 cm langer uit. Nu laat men de massa's op en neer trillen. Hoe groot is de frequentie van deze trilling?

$$f = \ldots\ldots \text{ Hz}$$

6. Een stemvork trilt met een frequentie van 440 Hz. De amplitude van de uiteinden van de stemvork is 0,4 mm. Hoe groot is de snelheid van zo'n uiteinde wanneer die door zijn evenwichtsstand gaat?

$$v = \ldots\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

7. Een lichte veer rekt 12,0 cm uit als je er een massa van 100 g aan hangt. Je trekt nu aan de massa zodat ze 15,0 cm uit de evenwichtsstand is verwijderd en laat ze dan los. Met welke snelheid gaat de massa door de evenwichtsstand?

CC BY-NC-SA 4.0

18.6 Herhalingsoefeningen: trillingen

$$v = \ldots\ldots \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8. Een massa m voert een harmonische trilling uit met periode T, terwijl de massa aan een veer hangt. Je maakt de massa nu vier keer zo zwaar en je trekt de veer dubbel zo ver uit haar evenwichtsstand. Hoe verandert de periode?

Meerkeuze:

(a) De periode halveert.

(b) De periode verdubbelt.

(c) De periode verviervoudigt.

(d) De periode wordt acht keer groter.

9. Een bol met een massa van 150 g wordt opgehangen aan een dun touw met een lengte van 1,25 m. Je geeft een duw tegen de bol waardoor die heen en weer slingert met een maximale uitwijkingshoek van 0,25 rad. We verwaarlozen de wrijving. Hoe groot is de frequentie van deze slingerbeweging?

$$f = \ldots\ldots \ \text{Hz}$$

10. Een slinger met massa m en lengte ℓ beweegt heen en weer met een periode T. Als je de slinger vier keer korter maakt en de massa dubbel zo zwaar, wat kan je dan zeggen over de periode van de aangepaste slinger?

Meerkeuze:

(a) De periode is $\frac{T}{2}$.

(b) De periode is $2T$.

(c) De periode is $4T$.

(d) De periode blijft gelijk.

CC BY-NC-SA 4.0

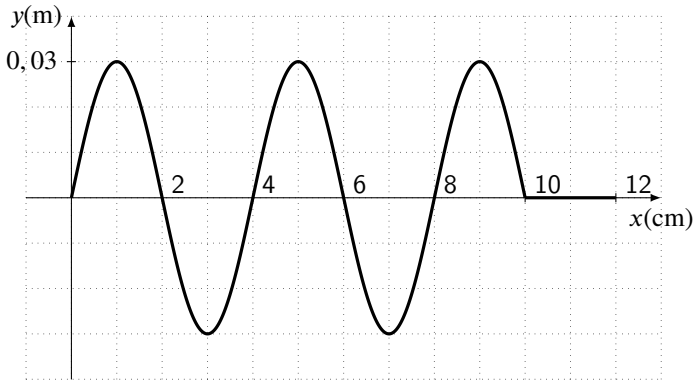
18.7 Herhalingsoefeningen: golven

1. Hoeveel keer gaat een boot per minuut op en neer op golven op zee met een golflengte van 45,0 m en een golfsnelheid van 4,00 m/s?

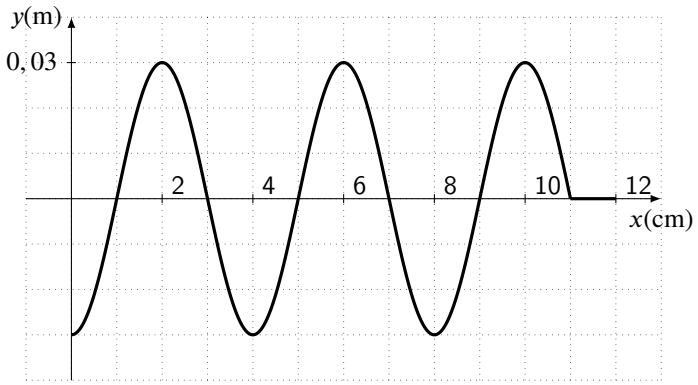
$$N = \ldots\ldots$$

2. Op tijdstip $t = 0$ s kan een golf beschreven worden door een functie die enkel afhangt van de positie: $y(x) = 0,45 \text{ m } \sin\left(\frac{6,28}{\text{m}}x\right)$. De golf legt per seconde een afstand van 5,00 m af in de richting van de positieve x-as. Schrijf de golfvergelijking als functie van x en t.

3. De figuren geven een momentopname van een golf y(x,t) weer op twee verschillende tijdstippen. De eerste grafiek geeft een momentopname op $t = 5,0$ s en de tweede grafiek geeft een momentopname op $t = 5,5$ s



Tijdstip $t = 5,0$ s



Tijdstip $t = 5,5$ s

Welke golfvergelijking hoort bij deze grafieken?

Meerkeuze:

CC BY-NC-SA 4.0

18.7 Herhalingsoefeningen: golven

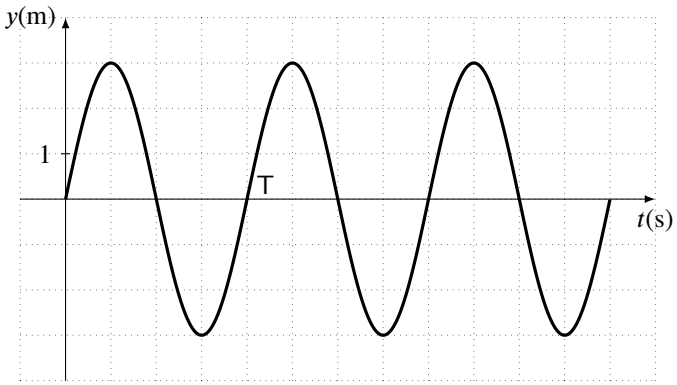
(a) $y(x,t) = 0,01\ sin(2\pi(\frac{t}{0,5} - \frac{x}{4}))$

(b) $y(x,t) = 0,03\ sin(2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}))$

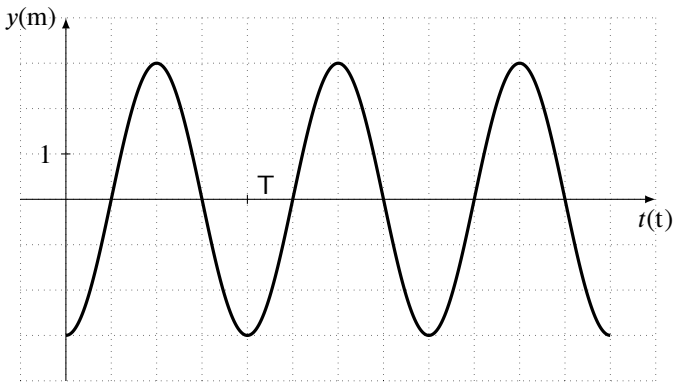
(c) $y(x,t) = 0,01\ sin(2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{0,04}))$

(d) $y(x,t) = 0,03\ sin(2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{0,04}))$

4. De figuren geven de grafiek van de trilling weer van twee verschillende punten P en Q. Deze punten bevinden zich op een touw waarop een naar rechts lopende golf zich voortplant.



Punt P



Punt Q

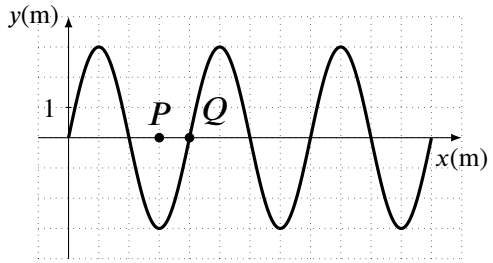
Welke grafiek geeft een juiste voorstelling van de golfvergelijking y(x,t) op tijdstip $t = \frac{3T}{4}$?

Meerkeuze:

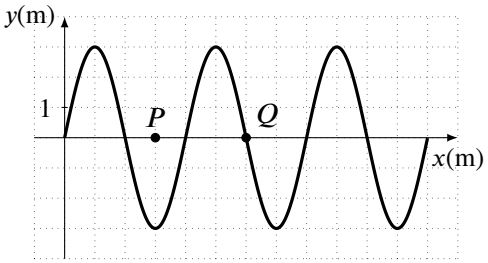
CC BY-NC-SA 4.0

18.7 Herhalingsoefeningen: golven

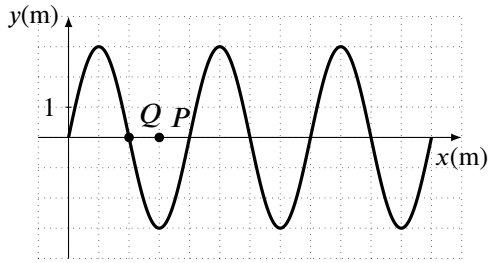
(a)



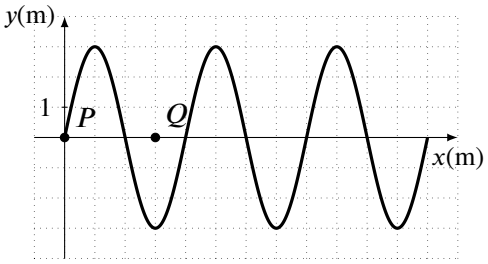
(c)



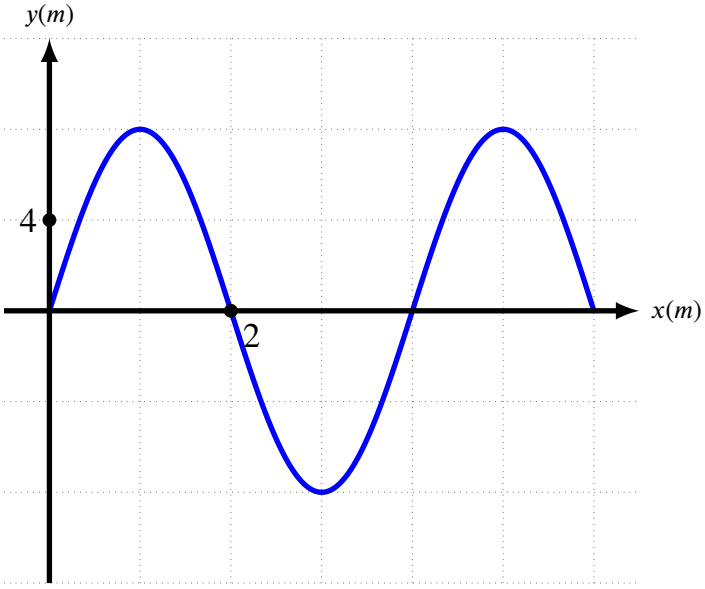
(b)



(d)



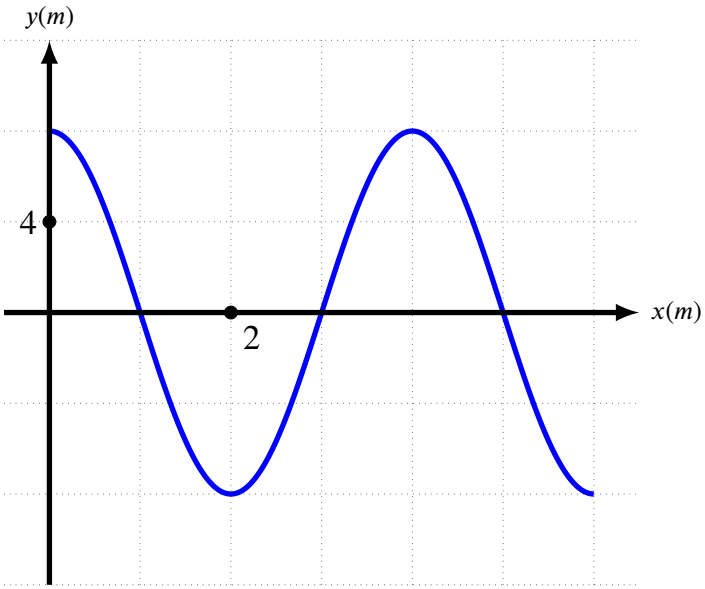
5. De figuren geven een momentopname van een rechtslopende golf y(x,t) weer op twee verschillende tijdstippen. De eerste grafiek geeft een momentopname op $t = 1,0$ s en de tweede grafiek geeft een momentopname op $t = 1,5$ s



Tijdstip $t = 1,0$ s

CC BY-NC-SA 4.0

18.7 Herhalingsoefeningen: golven



Tijdstip $t = 1,5$ s

Wat is de pulsatie en het golfgetal van deze golf?

$$\omega = \ldots\ldots \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$k = \ldots\ldots \ \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

6. Een zonnepaneel heeft een efficiëntie van 10 % bij het omzetten van zonlicht in elektriciteit. Als de gemiddelde intensiteit van het zonlicht op één dag overeenkomt met $70,0$ W/m^2, welke oppervlakte aan zonnepanelen heb je nodig om een gemiddeld elektrisch vermogen van 140 W te kunnen produceren?

$$Oppervlakte = \ldots\ldots \ \text{m}^2$$

7. Mensen met een goed gehoor kunnen een toon met een frequentie van 3000 Hz nog horen als het geluidsniveau -7,50 dB bedraagt. Wat is de intensiteit van dit geluid?

$$I = \ldots\ldots \cdot 10^{-13} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.8 Herhalingsoefeningen: elektrostatica

1. Een elektron beweegt in een waterstofatoom rond een proton op een cirkelbaan met straal $0,53 \cdot 10^{-10}$ m. Hoe groot is de kracht die het proton op het elektron uitoefent?

$$F = \ldots\ldots \text{ nN}$$

2. Een lading van $6,00\ \mu$C bevindt zich tussen twee ladingen op $0,500$ m afstand van een lading van $10,0\ \mu$C en op $0,600$ m afstand van een lading van $12,0\ \mu$C. Hoe groot is de resulterende kracht op die middelste lading?

$$F = \ldots\ldots \text{ N}$$

3. Twee geïsoleerde puntladingen bevinden zich op 0,025 m van elkaar. Ze trekken elkaar aan met een kracht van $F = 60\ \mu$N. Als je de afstand tussen de puntladingen vergroot tot 0,050 m, hoe groot is dan de kracht F' die de ladingen op elkaar uitoefenen?

$$F' = \ldots\ldots\ \mu\text{N}$$

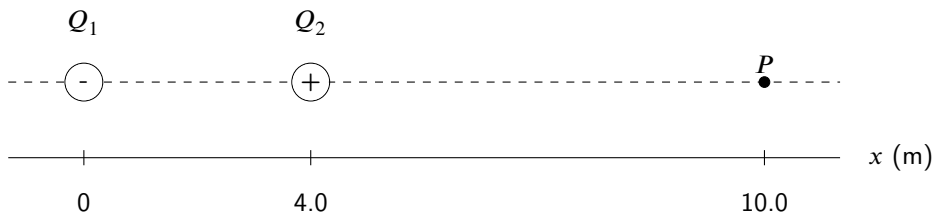
4. Op welke afstand moeten twee bolvormige geleiders van elkaar verwijderd zijn opdat ze mekaar zouden afstoten met een kracht van 9,60 kN? De eerste bol heeft een lading van $Q_1 = 0,588$ C en de tweede bol heeft een lading van $Q_2 = 0,0735$ C.

$$r = \ldots\ldots \text{ m}$$

5. Twee puntladingen op 5,00 m van elkaar stoten elkaar af met een kracht van 0,072 N. Nadat ze met elkaar in contact zijn geweest, brengt men ze weer op dezelfde afstand van elkaar. De afstotingskracht is nu toegenomen tot 0,081 N. Hoe groot waren de ladingen vooraleer ze met elkaar in aanraking kwamen?

$$|Q_1| = \ldots\ldots \cdot 10^{-5} \text{ C}$$
$$|Q_2| = \ldots\ldots \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

6. Een lading $Q_1 = -25,0$ nC bevindt zich op 4,0 m van een lading $Q_2 = 8,0$ nC. Een punt P ligt op 6,0 m van lading Q_2 zoals weergegeven op de figuur. Hoe groot is de elektrische veldsterkte in punt P?

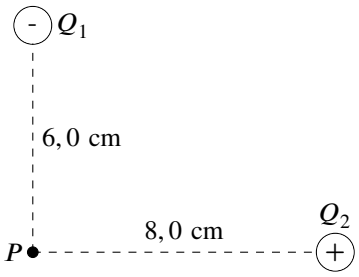


$$E = \ldots\ldots \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

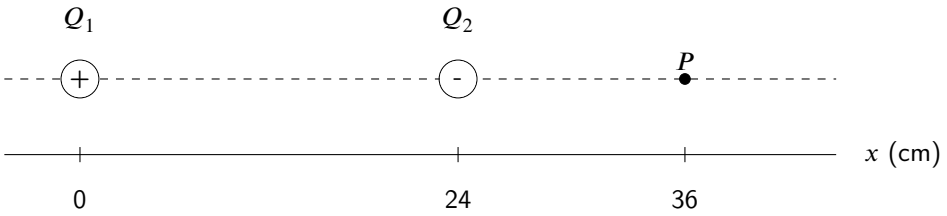
18.8 Herhalingsoefeningen: elektrostatica

7. Een lading $Q_1 = -10,0$ nC bevindt zich op 6,0 cm van een punt P, zoals weergegeven op de figuur. Een lading $Q_2 = 8,0$ nC bevndt zich op 8,0 cm van P. Hoe groot is de elektrische veldsterkte in punt P?



$$E = \ldots\ldots \ \frac{\text{kN}}{\text{C}}$$

8. Twee puntladingen $Q_1 = 0,040\ \mu$C en $Q_2 = -0,030\ \mu$C zijn 24,0 cm van elkaar verwijderd. Bereken de potentiaal in een punt P op 12,0 cm van de lading Q_2, zoals weergegeven op de figuur.



$$V = \ldots\ldots \cdot 10^2 \text{ V}$$

9. Op welke afstand moeten twee puntladingen $Q_1 = 0,56\ \mu$C en $Q_2 = 0,28\ \mu$C van elkaar verwijderd zijn opdat ze in een punt P, precies tussen de twee ladingen, een potentiaal van 100 V veroorzaken?

$$r = \ldots\ldots \text{ m}$$

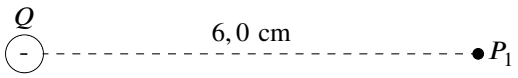
CC BY-NC-SA 4.0

18.9 Herhalingsoefeningen: elektrodynamica

1. Wat is de afstand tussen twee evenwijdige vlakke geleiders als een spanning van 200 V een veldsterkte creëert van 100 kN/C tussen deze geleiders?.

$$d = \ldots\ldots \text{ mm}$$

2. Een lading $Q = -10,0$ nC bevindt zich op 6,0 cm van een punt P_1, zoals weergegeven op de figuur. Zoek een punt P_2 tussen de lading en punt P_1 zodat tussen de twee punten een spanning bestaat van 750 V. Op welke afstand van de bronlading ligt dit punt?



$$r = \ldots\ldots \text{ cm}$$

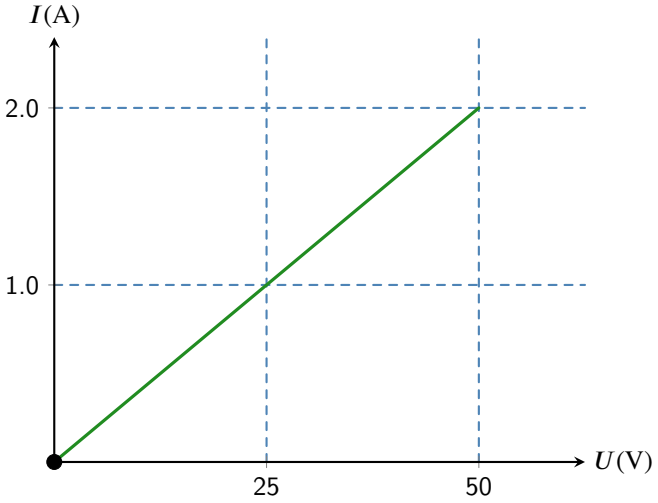
3. Bereken de stroomsterkte in een bliksemflits die 5,0 C lading transporteert in $1,2\ \mu$s.

$$I = \ldots\ldots \text{ MA}$$

4. Bereken hoeveel elektronen er per seconde netto een doorsnede van een geleider passeren als er door die geleider een stroom van 500 mA vloeit.

$$N = \ldots\ldots \cdot 10^{18}$$

5. Je meet bij een weerstand de spanning over en de stroom door de weerstand. Je bekomt de onderstaande grafiek. Hoe groot is de weerstand?



$$R = \ldots\ldots \ \Omega$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.9 Herhalingsoefeningen: elektrodynamica

6. Een aluminium staaf heeft een lengte van 2,0 m, een dikte van $2,5$ mm en een breedte van $1,0$ mm. De specifieke weerstand van aluminium is $0,0265 \cdot 10^{-6}$ Ωm. Hoe groot is de weerstand van deze staaf?

$$R = \ldots\ldots\ \Omega$$

7. Hoe groot is de weerstand van een kookplaat van 200 W als de stroom door de plaat 2,5 A bedraagt?

$$R = \ldots\ldots\ \Omega$$

8. Je laat je wekkerradio gedurende 3,5 uur op het maximale vermogen van 7,5 W spelen. De batterijen leveren een spanning van 6,0 V. Bereken de stroom die de batterijen moeten leveren.

$$I = \ldots\ldots\ \text{A}$$

9. Hoeveel kost het aan elektriciteit als je twee uur strijkt met een strijkijzer van 900 W? Je betaalt 0,30 euro per kWh.

$$Prijs = \ldots\ldots\ \text{euro}$$

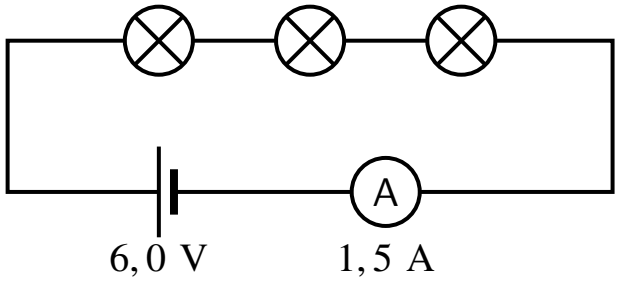
10. Je bent druk bezig in de keuken en gebruikt tegelijkertijd een frietketel van 900 W, een oven van 2000 W en een fornuis van 1600 W. Als je mag veronderstellen dat de toestellen alle elektrische energie omzetten in warmte, hoeveel warmte produceren ze dan in 30 minuten?

$$Q = \ldots\ldots\ \text{MJ}$$

CC BY-NC-SA 4.0

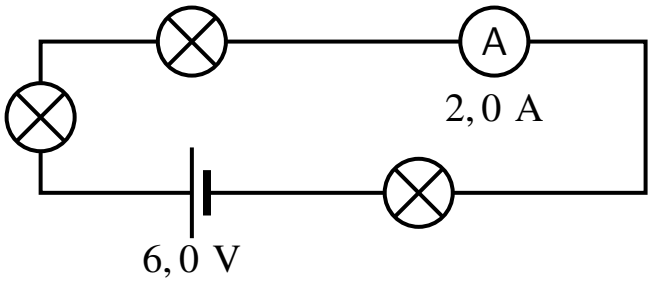
18.10 Herhalingsoefeningen: schakelingen

1. Je beschikt over drie identieke lampjes die geschakeld worden zoals weergegeven op de figuur. Hoe groot is de spanning over elk lampje?



$U = \ldots\ldots$ V

2. Je beschikt over drie identieke lampjes die geschakeld worden zoals weergegeven op de figuur. Hoe groot is de weerstand van elk lampje?

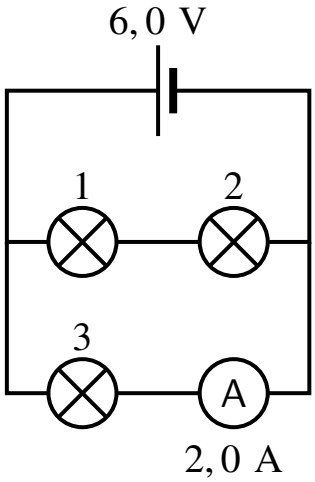


$R = \ldots\ldots$ Ω

3. Je beschikt over drie identieke lampjes die geschakeld worden zoals weergegeven op de figuur. Hoe groot is de stroom door lampje 1?

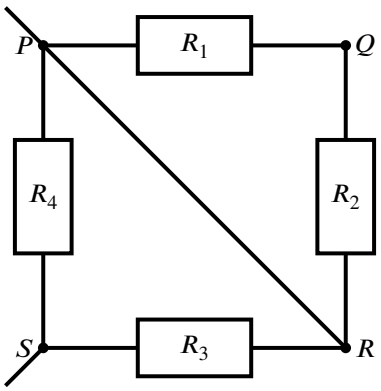
CC BY-NC-SA 4.0

18.10 Herhalingsoefeningen: schakelingen



$I =$ …… A

4. Bereken de weerstand tussen P en S. Elke weerstand heeft een waarde van $1,0\ \Omega$.

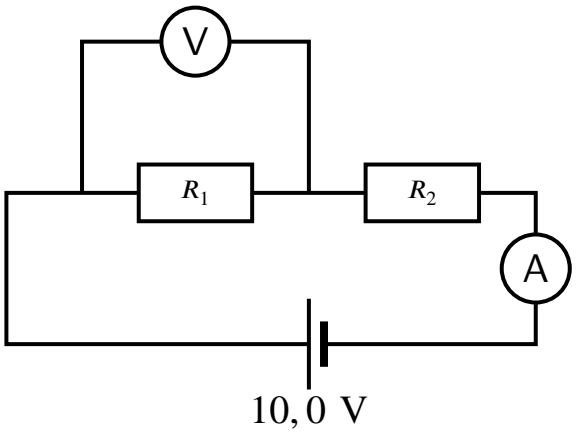


$R =$ …… Ω

5. Twee weerstanden staan in serie geschakeld over een spanningsbron van 10,0 V, met daarbij een spanningsmeter en ampèremeter, zoals weergegeven op de figuur. Op de meters lees je 150 mA en 7,5 V af. Hoe groot zijn de twee weerstanden?

CC BY-NC-SA 4.0

18.10 Herhalingsoefeningen: schakelingen



$R_1 = \ldots\ldots\ \Omega$

$R_2 = \ldots\ldots\ \Omega$

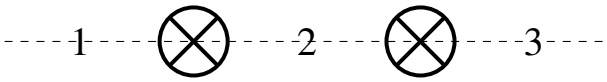
CC BY-NC-SA 4.0

18.11 Herhalingsoefeningen: magnetisme

1. Op een afstand d van een verticale rechte draad waardoor een stroom I vloeit, meet je de sterkte van het magnetisch veld. Je meet een waarde van 20 μT. Indien je de afstand verdubbelt en de stroomsterkte halveert welke waarde zou je dan meten?

$$B = \ldots\ldots\ \mu\mathrm{T}$$

2. Twee even grote stromen lopen in evenwijdige draden van jou weg. Beide stromen wekken een magnetisch veld op. In welk gebied kan de resulterende magnetische veldsterkte gelijk zijn aan nul?



Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) 1

(b) 2

(c) 3

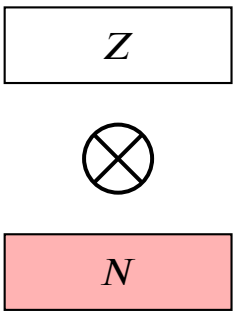
(d) 1 en 3

(e) 1, 2 en 3

3. In het midden van een stroomvoerende spoel meet je een magnetische veldsterkte van 15 μT. Als je het aantal windingen verdubbelt en de lengte van de spoel halveert, welke veldsterkte meet je dan?

$$B = \ldots\ldots\ \mu\mathrm{T}$$

4. Een rechte stroomvoerende draad loopt door een magnetisch veld zoals weergegeven op de figuur. Wat is de richting en zin van de kracht op de stroomdraad?



Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) horizontaal naar rechts

(b) horizontaal naar links

CC BY-NC-SA 4.0

18.11 Herhalingsoefeningen: magnetisme

(c) verticaal omhoog

(d) verticaal omlaag

5. Een spoel is 10,0 cm lang en telt 2400 windingen. In de spoel is een metalen kern geschoven. In het midden van de spoel is de veldsterkte 0,50 T als er een stroom van 0,45 A doorloopt. Hoe groot is de permeabliteit van het metaal waaruit de kern gemaakt is?

$$\mu = \ldots\ldots \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}$$

6. Een geleider met een lengte van 50,0 cm hangt schuin in een homogeen magnetisch veld. De hoek tussen de geleider en de magnetische veldvector is 50°. Als door de geleider een stroom van 1,60 A vloeit, is de kracht op de geleider $3,2 \cdot 10^{-5}$ N. Hoe groot is B?

$$B = \ldots\ldots \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

7. Een winding heeft een oppervlakte van $80\ \mathrm{cm}^2$ en staat loodrecht op de veldlijnen van een homogeen magnetisch veld waarvoor B = 1,50 T. De winding wordt gedraaid over een hoek van 60° in een tijdspanne van 0,15 s. Wat is de grootte van de gemiddelde spanning die in de winding geïnduceerd wordt?

$$\left|\mathrm{U}_{i,g}\right| = \ldots\ldots\ \mathrm{V}$$

8. Door een spoel met lengte 8,0 cm en met 1200 windingen loopt een stroom van 10 A. De diameter van de spoel is 6,0 cm. Hoe groot is de flux in de spoel?

$$\left|\mathrm{U}_{i,g}\right| = \ldots\ldots \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Wb}$$

9. Een inductie lastoestel verhit een metaal door middel van een magnetisch veld. Hoeveel windingen moet de spoel in dit apparaat hebben als de fluxverandering 1,5 Wb per seconde en de gemiddelde spanning over de spoel 90 V bedraagt.

$$N = \ldots\ldots$$

10. Een oplader van een mobiele telefoon verlaagt de netspanning van 230 V naar 9,0 V. De secundair spoel bevat 50 windingen. Hoeveel windingen bevat de primaire spoel?

$$N = \ldots\ldots$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.12 Herhalingsoefeningen: kernfysica

1. De massa van een C-14 atoom is 14,02540 u. Bereken de massa van een C-14 kern.

$$m = \ldots\ldots \text{ u}$$

2. De massa van een Be-8 atoom is 8,00531 u. De massa van een Po-211 atoom is 210,98664 u. In welk van de twee atomen zijn de kerndeeltjes het sterkst gebonden?

Meerkeuze:

(a) Be-8 (b) Po-211

3. U-235 is een alfa-straler. Noteer de transmutatieregel.

4. Pa-234 is een β^--straler. Bij het verval ontstaat een β^--deeltje en een neutrino. Naar welke kern vervalt Pa-234?

5. Technetium-99m is een radioactieve stof die kan gebruikt worden bij onderzoek naar de werking van organen. Deze radionuclide is een gamma-straler en heeft een halveringstijd van 6,0 uur. Hoe lang moet je wachten opdat 2/3 van de ingespoten stof vervallen zou zijn?

$$t = \ldots\ldots \text{ h}$$

6. Fosfor-32 heeft een halveringstijd van 14 dagen. Welk percentage van het oorspronkelijke aantal Fosfor-32 kernen is nog radioactief na 50 dagen?

$$percentage = \ldots\ldots \%$$

7. Een tumor met een massa van 55 g wordt bestraald met $1,7 \cdot 10^{10}$ alfadeeltjes per seconde. Elk alfadeeltje heeft een energie van 4,1 MeV. Bepaal het dosisequivalent dat de tumor ontvangt in 5,0 seconden als je weet dat de RBE-factor gelijk is aan 20.

$$H = \ldots\ldots \text{ Sv}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.13 Herhalingsoefeningen: Usolvit



18.13.1 Usolv-it oefeningen

Klik om een losse oefenreeks samen te stellen met meerkeuzevragen van het Usolv-it oefeningenplatform. Je kan per thema aangeven hoeveel oefeningen je wenst toe te voegen aan de losse oefeningenreeks. Druk onderaan de Usolv-it pagina op START om met de oefeningenreeks te beginnen.

CC BY-NC-SA 4.0

19.1 Bibliografie

- Pearson International Edition, *Physics Technology Update*, James S. Walker.
- Pearson International Edition, *Physics for scientists and engineers with Modern Physics*, Douglas Giancoli.
- Pearson Global Edition, *Physics for Scientists and Engineers: A strategic approach with modern physics*, Randall D. Knight.
- Jos Rogiers, *Van fysica naar biofysica, cursustekst KU Leuven*, 2010.
- Roger Silverans, *Algemene natuurkunde, cursustekst KU Leuven*, 2007.
- Enkele handboeken fysica voor het secundair onderwijs 2de en 3de graad 2u fysica :
  - Interactie, Die Keure
  - Focus Fysica, Pelckmans
  - Quark, Van Inn
  - Fysica Vandaag, Pelckmans
  - ...

CC BY-NC-SA 4.0