Het sommatieteken: Werken met data

Voorbeeld 1. Geboortecijfers in de 21ste eeuw
We willen de geboortecijfers van het begin van de 21ste eeuw in een specifieke stad bestuderen. We beperken ons in eerste instantie tot de jaargangen 2000 tot en met 2003.

We hebben de volgende tabel met geboortecijfers:

Jaar	Jongens	Meisjes
2000	100	90
2001	111	81
2002	102	92
2003	123	93

Van 2000 tot en met 2003 zijn er dus $100 + 111 + 102 + 123$ jongens geboren en $90 + 81 + 92 + 93$ meisjes.

We kunnen dit nu korter noteren met behulp van een sommatieteken. Hiervoor noemen we het aantal geboortes van jongens in het jaar i de naam a_i en voor de meisjes gebruiken we b_i.

Jaar	Jongens	Meisjes
2000	a_{2000}	b_{2000}
2001	a_{2001}	b_{2001}
2002	a_{2002}	b_{2002}
2003	a_{2003}	b_{2003}

Het aantal jongens geboren van 2000 tot en met 2003 noteren we met

$$\sum_{i=2000}^{2003} a_i = a_{2000} + a_{2001} + a_{2002} + a_{2003} = 100 + 111 + 102 + 123,$$

en het aantal meisjes geboren van 2000 tot en met 2003 is

$$\sum_{i=2000}^{2003} b_i = b_{2000} + b_{2001} + b_{2002} + b_{2003} = 90 + 81 + 92 + 93.$$

Als we het gemiddeld aantal geboren jongens van 2000 tot en met 2003 willen kennen, moeten we deze som delen door 4 omdat het hier over een periode van 4 jaren gaat. Dit doen we door $\frac{1}{4}$ voor het sommatieteken te plaatsen

$$\frac{1}{4}\sum_{i=2000}^{2003} a_i = \frac{1}{4}(a_{2000} + a_{2001} + a_{2002} + a_{2003}) = \frac{1}{4}(100 + 111 + 102 + 123).$$

CC BY-NC-SA 4.0

Oefening 1. Veronderstel dat bovenstaande tabel is uitgebreid met de gegevens vanaf 1900. Wat betekenen volgende uitdrukkingen? Omschrijf telkens de *betekenis* in een Nederlandse zin.

1. $\sum_{i=1900}^{1999} a_i$ Het totaal aantal jongens geboren van 1900 tot en met 1999.✓

2. $\frac{1}{10}\sum_{i=1901}^{1910} b_i$ Het gemiddeld aantal meisjes geboren per jaar van 1901 tot en met 1910.✓

3. $\sum_{i=1900}^{1999} a_i + \sum_{i=1900}^{1999} b_i = \sum_{i=1900}^{1999} (a_i + b_i)$

Uitwerking: Deze som is $a_{1900} + b_{1900} + a_{1901} + b_{1901} + \ldots + a_{1999} + b_{1999}$. Dit is de som van het aantal geboortes van jongens en van meisjes van 1900 tot en met 1999. Deze sommatie betekent dus "Het totaal aantal geboorten (jongens en meisjes samen) van 1900 tot en met 1999."

4. $\sum_{i=1900}^{2000} i$

5. $\frac{1}{50}\sum_{i=1901}^{1950} (a_i + b_i)$

Opmerking 1. We hebben hier gekozen om het aantal geboortes van jongens in jaar i aan te duiden met a_i en de meisjes met b_i. Er zijn ook nog andere mogelijkheden.

In de plaats van het aantal jongens geboren in 2000 te noteren met a_{2000} kan je bijvoorbeeld ook kiezen voor x_1 omdat 2000 het eerste gegeven is. Nog een andere optie is om J_0 te gebruiken: als we bij 0 beginnen, is het jaartal gemakkelijker af te lezen uit de index, terwijl de indices toch niet erg groot worden. Jaar 2002 komt bijvoorbeeld overeen met index 2.

Jaar	Jongens	Meisjes
2000	x_1	y_1
2001	x_2	y_2
2002	x_3	y_3
2003	x_4	y_4

Jaar	Jongens	Meisjes
2000	J_0	M_0
2001	J_1	M_1
2002	J_2	M_2
2003	J_3	M_3

Voorbeeld 2 (Reisbudget omrekenen van dollar naar euro)**.**

Je maakt een rondreis door de Verenigde Staten en houdt je uitgaven per dag bij in dollar. Op een bepaalde dag heb je 5 uitgaven gedaan.We noteren deze met a_i.

- $a_1 = \$40$ voor eten
- $a_2 = \$55$ voor een museumbezoek
- $a_3 = \$35$ voor vervoer
- $a_4 = \$60$ voor een concert
- $a_5 = \$20$ voor souvenirs

CC BY-NC-SA 4.0

Je wil weten hoeveel je die dag hebt uitgegeven in euro. De wisselkoers is 0.90 euro per dollar. \$40 dollar komt dus overeen met $0.90 \cdot 40 = 36$ euro.

Je totaal uitgegeven budget in euro kan je op twee manieren berekenen:

- Eerst alle uitgaven in dollar omzetten naar euro en dan optellen:

$$0.90 \cdot 40 + 0.90 \cdot 55 + 0.90 \cdot 35 + 0.90 \cdot 60 + 0.90 \cdot 20 = \sum_{i=1}^{5} 0.90 \cdot a_i$$

- Eerst de totale uitgave in dollar berekenen en dan omzetten naar euro:

$$0.90 \cdot (40 + 55 + 35 + 60 + 20) = 0.90 \sum_{i=1}^{5} a_i$$

Beide manieren geven hetzelfde resultaat, dus:

$$\sum_{i=1}^{5} 0.90 \cdot a_i = 0.90 \cdot \sum_{i=1}^{5} a_i.$$

Deze eigenschap geldt niet enkel voor 0.90 maar voor elke constante c.

Eigenschap 1. Voor elke constante c (dus een getal dat niet afhangt van de sommatie-index), elk natuurlijk getal n en reële getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ geldt:

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Voorbeeld 3 (Totale kostprijs berekenen voor een eetstand)**.**

Je klas organiseert een eetstand op het schoolfestival. Jullie verkopen zelfgemaakte brownies en houden de kosten per ingrediënt bij. Voor elk ingrediënt noteer je:

- a_i: de prijs per kilogram (in euro)
- b_i: de hoeveelheid die je nodig hebt (in kilogram)

De gegevens staan in de volgende tabel:

Ingrediënt	a_i (euro/kg)	b_i (kg)	$a_i \cdot b_i$ (euro)
Bloem	1.20	5	6.00
Suiker	0.90	3	2.70
Boter	2.50	2	5.00
Chocolade	3.00	1	3.00
Noten	6.00	0.8	4.80
Totaal			21.50

Om de totale kostprijs te berekenen, vermenigvuldig je voor elk ingrediënt de prijs per kilogram met de hoeveelheid, en tel je alles op:

$$1.20 \cdot 5 + 0.90 \cdot 3 + 2.50 \cdot 2 + 3.00 \cdot 1 + 6.00 \cdot 0.8 = 21.50 \text{ euro}$$

CC BY-NC-SA 4.0

Je kan deze som korter schrijven als:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot b_i$$

om de totale kostprijs van alle ingrediënten samen te berekenen.

Deze vorm van sommatie komt vaak voor als we werken met data.

Uitweiding 1 (Dubbele sommatie: Geboortecijfers in verschillende gemeentes en jaren)**.**

We bestuderen het aantal geboortes in vier gemeentes (G_1, G_2, G_3 en G_4) van 2001 tot en met 2003. De gegevens staan in de volgende tabel:

Jaar\Gemeente	G_1	G_2	G_3	G_4
2001	118	132	105	142
2002	123	129	112	147
2003	127	131	117	144

We noteren het aantal geboortes in jaar i in gemeente j als a_{ij}. Bijvoorbeeld:

- $a_{21} = 123$ is het aantal geboortes in 2002 in gemeente G_1.
- $a_{33} = 117$ is het aantal geboortes in 2003 in gemeente G_3.

We berekenen het totaal aantal geboortes van 2001 tot en met 2003 in alle gemeentes samen. Dat doen we met een *dubbele sommatie*:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} a_{ij}$$

Deze dubbele som betekent:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} a_{ij} = \left(\sum_{j=1}^{4} a_{1j}\right) + \left(\sum_{j=1}^{4} a_{2j}\right) + \left(\sum_{j=1}^{4} a_{3j}\right)$$

Of uitgeschreven:

$$(118 + 132 + 105 + 142) + (123 + 129 + 112 + 147) + (127 + 131 + 117 + 144) = 1527$$

Er zijn in totaal dus 1527 geboortes geregistreerd in deze vier gemeentes over de periode van 2001 tot en met 2003.

Laten we nog wat extra oefenen op het uitrekenen van dubbele sommen.

1. Bereken: $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=3}^{4} a_{ij}$

Meerkeuze:

(a) 247

(b) 506

(c) 767

2. Bereken: $\sum_{i=2}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/03H.48)

Meerkeuze:

(a) 364

(b) 375

(c) 739

Uitweiding 2 (Extra oefenen)**.**

Oefening 2. Voor een schoolproject laat je in verschillende weken affiches drukken. Afhankelijk van het ontwerp kan de prijs per affiche verschillen per week, en ook het aantal affiches dat je bestelt varieert. Je noteert:

- a_i: de prijs per affiche in week i (in euro)
- b_i: het aantal affiches dat je in week i laat drukken

De totale kostprijs over meerdere weken bereken je dan met:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

Noteer de volgende situaties met behulp van een sommatieteken.

1. Je laat van week 1 tot en met week 6 telkens een verschillend aantal affiches drukken. De prijs per affiche verschilt per week. Hoe noteer je de totale kostprijs?

2. Je plaatst dezelfde bestelling als in de vraag hier boven maar je wilt elke week voor de zekerheid 2 twee affiches extra laten drukken.

Formuleer in woorden wat de volgende sommaties kunnen uitdrukken.

3. $\sum_{i=1}^{4} a_i \cdot b_i$

4. $\sum_{i=1}^{4} 2b_i$

5. $\sum_{i=1}^{4} b_i$

CC BY-NC-SA 4.0