Faculteit $n!$

Tijdens deze module mag je een rekenmachine gebruiken.

Voorbeeld 1 (24 urenloop)**.** In Leuven nemen elk jaar 21 studentenverenigingen deel aan de 24 urenloop. Na afloop krijgen ze allemaal een plaats in het eindklassement.

1. Op hoeveel verschillende manieren kan het eindklassement eruitzien?

Meer dan 1 000 000 000 000 000 000✓

Laten we stap voor stap nadenken over hoe het eindklassement tot stand komt.

- Voor de eerste plaats zijn er 21 mogelijke verenigingen.
- Daarna blijven er nog 20 over voor de tweede plaats.
- Daarna nog 19 voor de derde plaats.
- En zo gaat het verder tot alle plaatsen ingevuld zijn.

Het totaal aantal mogelijkheden is dus:

$$21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

De puntjes stellen de ontbrekende factoren voor. Je blijft telkens met één minder vermenigvuldigen tot je bij 1 komt.

Dit product is erg lang en onoverzichtelijk. Om dit compacter te noteren, gebruiken we de **faculteit**.

$$21! = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

De faculteit is dus een verkorte manier om zulke producten te noteren.

Hoe groot is dit getal eigenlijk?

$$21! = 51\,090\,942\,171\,709\,440\,000$$

Dat zijn meer dan 51 triljoen of 51 miljard miljard mogelijke eindklassementen.

Om een idee te krijgen: als je elke seconde één mogelijk klassement zou bekijken, dag en nacht, dan zou je meer dan een miljoen jaar nodig hebben om alle mogelijkheden te overlopen.

Definitie 1 (Faculteit)**.** De **faculteit** van een natuurlijk getal n is het product van alle natuurlijke getallen van 1 tot en met n:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

We spreken dit uit als *n faculteit*.

Daarnaast spreken we af:

$$0! = 1.$$

Opmerking 1. Op je rekenmachine kan je zulke producten zelf ingeven, maar dat kan veel werk zijn. De meeste rekenmachines hebben ook een knop voor de faculteit, aangeduid met !. Vind je die niet meteen terug? Dan kan je online opzoeken hoe dit werkt voor jouw rekenmachine.

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 2.

1. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

2. $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

3. $1! = 1$

Oefening 1.

1. Bereken:

$$2! = \ldots\ldots$$

2. Bereken:

$$3! = \ldots\ldots$$

3. Bereken:

$$6! = \ldots\ldots$$

Oefening 2.

1. Tijdens een groepswerk moeten 5 studenten een presentatie geven. Ze spreken af dat ze na elkaar presenteren, elk precies één keer.

Op hoeveel verschillende manieren kan de volgorde van de sprekers bepaald worden? $\ldots\ldots$

2. Een museum maakt een nieuwe tentoonstelling met 7 verschillende schilderijen. De curator wil de werken naast elkaar ophangen aan één lange muur.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen de schilderijen opgehangen worden? $\ldots\ldots$

Voorbeeld 3. In de vorige oefening waren er 7 verschillende schilderijen die allemaal een plaats kregen aan de muur. Er waren dus 7! mogelijke opstellingen.

Stel nu dat de curator slechts 4 van de 7 schilderijen wil ophangen en dat de volgorde van belang is. Er kan dan voor de eerste plaats gekozen worden uit 7 schilderijen, voor de tweede nog 6, daarna 5 en ten slotte 4.

Het aantal mogelijkheden is dus

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

We kunnen dit ook schrijven met faculteiten. Er zijn drie schilderijen die niet gekozen worden. We delen daarom 7! door 3!:

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

We kunnen $\frac{7!}{3!}$ interpreteren als het aantal manieren om 4 schilderijen te kiezen uit 7, waarbij de volgorde van belang is.

We zien hier ook dat een breuk met faculteiten vaak sterk vereenvoudigd kan worden doordat veel factoren wegvallen.

Oefening 3.

CC BY-NC-SA 4.0

Faculteit $n!$

1. Gebruik je rekenmachine om onderstaande breuk te berekenen.

$$\frac{100!}{98!} = \ldots\ldots$$

Je rekenmachine kan de berekening in bovenstaande oefening waarschijnlijk niet uitvoeren, maar jij kan dat wel! Je hebt er zelfs geen rekenmachine voor nodig. Onderstaande video laat je zien hoe je een breuk met faculteiten kan vereenvoudigen.

Voorbeeld 4.

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Oefening 4. Bereken onderstaande breuken.

1.

$$\frac{8!}{6!} = \ldots\ldots$$

2.

$$\frac{205!}{202!} = \ldots\ldots$$

3.

$$\frac{1234!}{1233!} = \ldots\ldots$$

Oefening 5. Voor een onderzoek worden 200 personen geselecteerd. Uit deze groep worden 3 deelnemers gekozen voor een diepte-interview. Op hoeveel verschillende manieren kan deze groep van 3 personen samengesteld worden?

Je herinnert je hopelijk uit het secundair onderwijs dat het kiezen van 3 personen uit 200 overeenkomt met een *combinatie van 3 uit 200*. Daarvoor gebruiken we de formule:

$$C_3^{200} = \binom{200}{3} = \frac{200!}{3! \cdot 197!}.$$

Bereken dit aantal. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0