KU LEUVEN

Humane Wetenschappen

Remediëring Datageletterdheid voor Humane Wetenschappen

(Versie 2026/09/09H.34)

Inhoudsopgave

1 Wat zijn data? 1.1

1.1 Wat zijn data? . . . 1.2

2 Hoe stel je data voor? 2.1

2.1 Hoe stel je data voor? . . . 2.2
2.2 De frequentietabel . . . 2.3
2.3 De kruistabel . . . 2.5
2.4 Het cirkeldiagram . . . 2.7
2.5 Het staafdiagram . . . 2.8
2.6 Het lijndiagram . . . 2.10
2.7 Laat je niet misleiden . . . 2.12
2.8 Het histogram . . . 2.20

3 Maatgetallen van data 3.1

3.1 Centrummaten: modus, mediaan en gemiddelde . . . 3.2
3.2 Spreidingsmaten: variatiebreedte en interkwartielafstand . . . 3.7
3.3 Spreidingsmaten: variantie en standaardafwijking . . . 3.9

4 Verbanden tussen data 4.1

4.1 Verbanden tussen data . . . 4.2

5 Rekenen met data 5.1

5.1 Logisch redeneren . . . 5.2
5.2 Volgorde van bewerkingen . . . 5.14
5.3 Rekenen met haakjes . . . 5.16
5.4 Breuken . . . 5.19
5.5 Percentages . . . 5.23
5.6 Machten . . . 5.27
5.7 Wortels . . . 5.29
5.8 Gelijkheden . . . 5.31
5.9 Ongelijkheden . . . 5.34
5.10 Faculteit $n!$ . . . 5.37
5.11 Het sommatieteken: De basis . . . 5.40
5.12 Het sommatieteken: Werken met data . . . 5.43

6 Steekkaarten 6.1
6.1 Overzicht data 6.2
6.3 Overzicht datarepresentaties 6.3
6.5 Overzicht maatgetallen 6.4
6.7 Overzicht verbanden 6.5
6.9 Overzicht rekenen 6.6

KU LEUVEN

Humane Wetenschappen

Module 1

Wat zijn data?

(Versie 2026/09/09H.34)

1.1 Wat zijn data?

1.1.1 Wat zijn data?

Een onderzoek start met het bepalen van welke kenmerken je precies wilt onderzoeken. Zo een kenmerk noemen we een *variabele*. Vervolgens verzamel je *data* door metingen van dat kenmerk uit te voeren.

Definitie 1.1.1. Een **variabele** is een kenmerk dat tijdens een onderzoek gemeten of geobserveerd wordt.

De **data** of **gegevens** zijn de resultaten van het meten of observeren van een variabele. We noteren deze vaak als:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

waarbij elke x_i een individuele meting is. De index i loopt van 1 tot en met n, waarbij n het totaal aantal metingen voor die variabele voorstelt.

Als je een variabele meet bij n verschillende eenheden, dan vormen alle x_i samen een **dataset** of **gegevensverzameling**.

Voorbeeld 1.1.1. We kunnen als variabele de leeftijd van studenten Humane Wetenschappen in de eerste bachelor onderzoeken. We bevragen de leeftijd van acht studenten en verkrijgen de volgende dataset:

$$x_1 = 18, \quad x_2 = 19, \quad x_3 = 17, \quad x_4 = 20, \quad x_5 = 18, \quad x_6 = 19, \quad x_7 = 18, \quad x_8 = 18$$

Dit is een dataset van $n = 8$ waarnemingen voor de variabele *leeftijd*.

1.1.2 Welke soorten data zijn er?

In een onderzoek verzamel je data, maar niet alle data zijn van hetzelfde type. Sommige gegevens zijn getallen waarmee je kunt rekenen, andere zijn categorieën die iets zeggen over voorkeuren, groepen of rangordes. Het is belangrijk om het verschil te kennen tussen deze soorten data, zodat je ze correct kunt analyseren.

Definitie 1.1.2. Data kunnen we onderverdelen in twee grote groepen:

- **Kwantitatieve data** zijn numerieke gegevens waarmee je zinvol kunt rekenen. Ze zijn
  - **continu** als elke waarde binnen een interval (of meerdere intervallen) mogelijk is;
  - **discreet** als in elk interval van eindige lengte slechts een eindig aantal waarden mogelijk zijn.
- **Kwalitatieve data** zijn gegevens die categorieën uitdrukken. Rekenen met deze data is meestal niet zinvol. Ze zijn
  - **ordinaal** als de categorieën een natuurlijke rangorde hebben;
  - **nominaal** indien niet.

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Wat zijn data?

Voorbeeld 1.1.2.

- **Continu kwantitatief:** Lengte van studenten (in cm): 172.3, 168.9, 174.1, 170.0, 169.7
- **Discreet kwantitatief:** Aantal huisdieren: 2, 0, 0, 3, 1
- **Ordinaal kwalitatief:** Tevredenheid over een cursus: goed, matig, uitstekend, slecht, goed
- **Nominaal kwalitatief:** Lievelingskleur: blauw, groen, rood, blauw, geel

Opmerking 1.1.1. Kwantitatieve data laten toe om verschillen zinvol te interpreteren. Denk bijvoorbeeld aan een lengteverschil van 3 cm tussen twee personen. Dit is een betekenisvol verschil dat iets zegt over hun fysieke eigenschappen. Voor kwalitatieve data is dit niet het geval.

Opmerking 1.1.2. Kwalitatieve data kunnen ook bestaan uit getallen. Denk maar aan postcodes: hoewel ze numeriek lijken, drukken ze een locatie uit en is het niet zinvol om ermee te rekenen.

Oefening 1.1.1. Wat is het datatype van de volgende variabelen?

1. Merk van smartphone

Continu kwantitatief	Discreet kwantitatief	Ordinaal kwalitatief	Nominaal kwalitatief

2. Beoordeling van een film (slecht, matig, goed, uitstekend)

Continu kwantitatief	Discreet kwantitatief	Ordinaal kwalitatief	Nominaal kwalitatief

3. Temperatuur in °C

Continu kwantitatief	Discreet kwantitatief	Ordinaal kwalitatief	Nominaal kwalitatief

4. Geboorteprovincie

Continu kwantitatief	Discreet kwantitatief	Ordinaal kwalitatief	Nominaal kwalitatief

5. Schoenmaat

Continu kwantitatief	Discreet kwantitatief	Ordinaal kwalitatief	Nominaal kwalitatief

6. Rugnummer op een voetbaltruitje

Continu kwantitatief	Discreet kwantitatief	Ordinaal kwalitatief	Nominaal kwalitatief

Oefening 1.1.2. Voor welke van de onderstaande variabelen is het zinvol om een gemiddelde te berekenen?

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) Lievelingskleur

(b) Lengte van personen

(c) Temperatuur in graden Celsius

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Wat zijn data?

(d) Postcode

(e) Aantal kinderen per gezin

(f) Rugnummers op voetbaltruitjes

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Humane Wetenschappen

Module 2

Hoe stel je data voor?

(Versie 2026/09/09H.34)

2.1 Hoe stel je data voor?

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 De frequentietabel

Voorbeeld 2.2.1 (Inschrijvingsaantallen per opleidingstype)**.**

Onderstaande frequentietabel toont het aantal inschrijvingen in het hoger onderwijs voor het academiejaar 2023–2024. De gegevens zijn opgesplitst per opleidingstype. We bekijken drie types opleidingen: graduaatsopleidingen (GRAD), bacheloropleidingen (BA) en masteropleidingen (MA). De opleidingstypes zijn geordend volgens de gebruikelijke studieduur in het hoger onderwijs: graduaat (2 jaar), bachelor (3 jaar) en master (5 jaar inclusief de bacheloropleiding).

Type	Aantal studenten
GRAD	24 580
BA	196 059
MA	54 720
Totaal	**275 359**

Een logische vraag die we hierbij kunnen stellen is: *"Welk opleidingstype telt het hoogste percentage studenten en hoe groot is dit aandeel?"* In deze tabel staan enkel de absolute aantallen. Om de verhoudingen beter te begrijpen, voegen we daarom ook de percentages toe.

Heb je moeite met het berekenen van percentages? Doorloop dan eerst de module over percentages.

Type	Aantal studenten	Percentage studenten
GRAD	24 580	8.9%
BA	196 059	71.2%
MA	54 720	19.9%
Totaal	**275 359**	**100%**

Nu wordt het meteen duidelijk: de bacheloropleiding telt het hoogste percentage studenten. Dat konden we ook al afleiden uit de absolute aantallen, maar de percentages geven ons extra inzicht. We zien dat ruim 7 op 10 studenten (71.2%) een bacheloropleiding volgt. Dat soort nuance is moeilijker te zien wanneer je enkel naar de absolute cijfers kijkt. Percentages helpen dus om verhoudingen beter te interpreteren en te communiceren.

Oefening 2.2.1. Zijn de volgende uitspraken waar of onwaar?

1. De graduaatsopleidingen vertegenwoordigen minder dan 10% van de studentenpopulatie. Waar✓

2. De masteropleiding telt meer studenten dan de bacheloropleiding. Onwaar✓

3. De masteropleiding vertegenwoordigt minder dan een kwart van de studenten. Waar✓

Definitie 2.2.1. Een **frequentietabel** is een tabel die toont hoe vaak bepaalde waarden of categorieën voorkomen in een dataset. Dit aantal noemen we de **absolute frequentie (AF)**. Naast de absolute frequentie kan een frequentietabel ook de **relatieve frequentie (RF)** weergeven. Dat is het aandeel van een bepaalde waarde ten opzichte van het totaal uitgedrukt als een percentage.

Frequentietabellen zijn vooral geschikt om gegevens overzichtelijk te structureren en om snel inzicht te krijgen in de aantallen en verhoudingen binnen een dataset.

In sommige gevallen is het nuttig om ook de **cumulatieve frequentie (CF)** en de **relatieve cumulatieve**

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 De frequentietabel

frequentie (RCF) toe te voegen aan een frequentietabel.

De **cumulatieve frequentie** geeft aan hoeveel studenten er in totaal zijn *tot en met* een bepaalde categorie. Je berekent dit door de aantallen van de huidige en alle voorgaande categorieën op te tellen. De **relatieve cumulatieve frequentie** drukt de cumulatieve frequentie uit als percentage van het geheel.

Deze informatie is vooral handig wanneer de categorieën een logische volgorde hebben. In deze tabel zijn de opleidingstypes geordend volgens hun gebruikelijke studieduur: graduaat (2 jaar), bachelor (3 jaar) en master (5 jaar). Daardoor krijgen cumulatieve frequenties een duidelijke betekenis. Zo zie je bij de cumulatieve frequentie van de bacheloropleidingen meteen hoeveel studenten een opleiding volgen met een gebruikelijke studieduur van maximaal 3 jaar. Je hoeft daarvoor de aantallen van graduaats- en bacheloropleidingen niet zelf op te tellen.

Type	AF	RF	CF	RCF
GRAD	24 580	8.9%	24 580	8.9%
BA	196 059	71.2%	220 639	80.1%
MA	54 720	19.9%	275 359	100%
Totaal	**275 359**	**100%**	**275 359**	**100%**

Oefening 2.2.2. Gebruik de bovenstaande frequentietabel om de vragen te beantwoorden.

1. Hoeveel studenten volgen een graduaats- of bacheloropleiding?

24 580	196 059	220 639	275 359

2. Hoeveel procent van de studenten volgt geen masteropleiding?

8.9%	42.6%	51.5%	80.1%

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 De kruistabel

We bekeken reeds de verdeling van studenten over de verschillende opleidingstypes aan de hand van een frequentietabel. Maar wat als we willen weten of er binnen elk opleidingstype verschillen zijn tussen mannen en vrouwen? Dan volstaat één variabele niet meer. We voegen een tweede variabele toe, namelijk geslacht. Een *kruistabel* laat ons toe om de samenhang tussen beide variabelen te analyseren.

Voorbeeld 2.3.1 (Inschrijvingsaantallen per opleidingstype en geslacht)**.**

Onderstaande kruistabel toont het aantal inschrijvingen in het hoger onderwijs voor het academiejaar 2023–2024. De gegevens zijn opgesplitst per opleidingstype en per geslacht. We bekijken drie types opleidingen: professioneel gerichte bachelor (PBA), academisch gerichte bachelor (ABA) en master (MA).

Aantal studenten per opleidingstype en geslacht (absolute frequenties)

Type	Aantal mannen	Aantal vrouwen	Totaal
PBA	47 923	69 314	**117 237**
ABA	35 681	43 141	**78 822**
MA	23 321	31 399	**54 720**
Totaal	**106 925**	**143 854**	**250 779**

We kunnen ook de relatieve frequenties berekenen. Hiervoor bepalen we voor elke combinatie van opleidingsniveau en geslacht welk percentage dit is van het totaal aantal studenten. Zo zijn er bijvoorbeeld 47 923 mannen in een professionele bachelor, wat overeenkomt met 19.1% van het totaal van 250 779 studenten.

Heb je moeite met het berekenen van percentages? Doorloop dan eerst de module over percentages.

Aantal studenten per opleidingstype en geslacht (relatieve frequenties)

Type	Percentage mannen	Percentage vrouwen	Totaal
PBA	19.1%	27.7%	**46.8%**
ABA	14.2%	17.2%	**31.4%**
MA	9.3%	12.5%	**21.8%**
Totaal	**42.6%**	**57.4%**	**100%**

Het is ook mogelijk om de relatieve frequenties per rij of per kolom te berekenen.

- **Per rij**
  Je berekent het percentage *binnen elke rij*. Dit toont hoe de verdeling tussen mannen en vrouwen binnen een bepaald opleidingstype is.

Verdeling per opleidingstype en per geslacht (relatieve frequenties per rij)

Type	Percentage mannen	Percentage vrouwen	Totaal
PBA	40.9%	59.1%	**100%**
ABA	45.3%	54.7%	**100%**
MA	42.6%	57.4%	**100%**

- **Per kolom**
  Je berekent het percentage *binnen elke kolom*. Dit toont hoe de verdeling binnen een geslacht is over de verschillende opleidingstypes.

Verdeling per geslacht en per opleidingstype (relatieve frequenties per kolom)

Type	Percentage mannen	Percentage vrouwen
PBA	44.8%	48.2%
ABA	33.4%	30.0%
MA	21.8%	21.8%
Totaal	**100%**	**100%**

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 De kruistabel

Ga na of je deze percentages zelf kan berekenen. Vind je dit moeilijk, overloop dan de module over percentages.

Oefening 2.3.1. Zijn de volgende uitspraken waar of onwaar? Bedenk in welke van bovenstaande kruistabellen je het antwoord vindt.

1. Binnen de groep vrouwen is het aandeel ABA-studenten groter dan het aandeel MA-studenten. Waar✓

2. Het aantal inschrijvingen voor een academisch gerichte bachelor heeft een gelijke verdeling tussen mannen en vrouwen. Onwaar✓

3. In alle drie de opleidingstypes zijn er meer vrouwen dan mannen. Waar✓

4. Binnen de groep mannen is de professioneel gerichte bachelor het populairste opleidingstype. Waar✓

5. Het totaal aantal studenten in de masteropleiding is groter dan in de academisch gerichte bachelor. Onwaar✓

Definitie 2.3.1. Een **kruistabel** is een tabel die het samengaan toont van twee of meer discrete variabelen door hun gezamenlijke aantallen of frequenties weer te geven. Elke cel in de tabel geeft aan hoe vaak een specifieke combinatie van categorieën voorkomt in de dataset.

Net als bij een frequentietabel kunnen in een kruistabel zowel **absolute frequenties** als **relatieve frequenties** worden weergegeven. Relatieve frequenties kunnen per rij, per kolom of ten opzichte van het totaal berekend worden.

Het verschil met een **frequentietabel** is dat een frequentietabel slechts één variabele beschrijft, terwijl een kruistabel de samenhang tussen meerdere variabelen inzichtelijk maakt. Kruistabellen zijn bijzonder nuttig bij het analyseren van verbanden of afhankelijkheden tussen categorieën.

CC BY-NC-SA 4.0

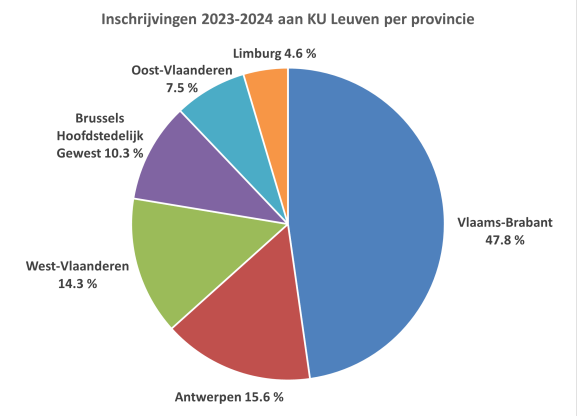
2.4 Het cirkeldiagram

Voorbeeld 2.4.1 (Inschrijvingsaantallen KU Leuven per regio)**.**

De onderstaande frequentietabel geeft een overzicht van het aantal studenten dat zich in het academiejaar 2023–2024 inschreef bij associatie KU Leuven, opgesplitst naar de regio waar de studenten wonen. Zowel de absolute frequenties als de relatieve frequenties worden getoond.

Regio	Aantal studenten	Percentage studenten
Antwerpen	19 412	15.6%
Brussels Hoofdstedelijk Gewest	12 797	10.3%
Limburg	5 771	4.6%
Oost-Vlaanderen	9 325	7.4%
Vlaams-Brabant	59 700	47.8%
West-Vlaanderen	17 819	14.3%
Totaal	**124 824**	**100%**

De relatieve frequenties kunnen we ook voorstellen met een *cirkeldiagram*.



Oefening 2.4.1. Zijn de volgende uitspraken waar of onwaar?

1. Bijna de helft van alle studenten komt uit Vlaams-Brabant. Waar✓

2. Limburg is de regio met het laagste aantal ingeschreven studenten. Waar✓

3. Meer dan een kwart van de studenten komt uit de provincies Antwerpen en West-Vlaanderen samen. Waar✓

Definitie 2.4.1. Een **cirkeldiagram** (of taartdiagram) is een grafische voorstelling van gegevens waarbij de verdeling van een geheel wordt weergegeven als sectoren van een cirkel. Elke sector stelt een categorie voor, en de grootte van de sector komt overeen met de relatieve frequentie van die categorie, uitgedrukt als een percentage van het totaal.

Cirkeldiagrammen zijn vooral geschikt om verhoudingen tussen een beperkt aantal categorieën visueel te vergelijken. Je ziet snel het deel van elke categorie ten opzichte van het geheel.

CC BY-NC-SA 4.0

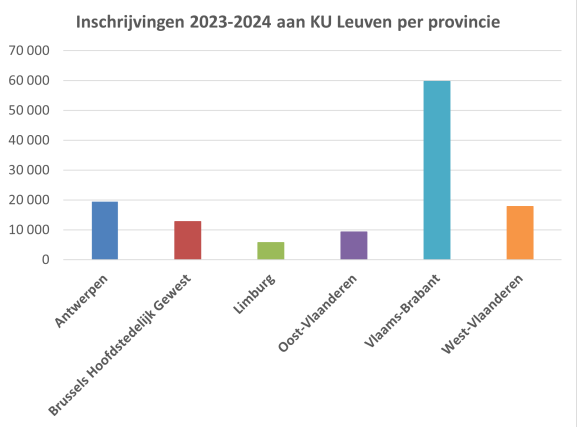
2.5 Het staafdiagram

Voorbeeld 2.5.1 (Inschrijvingsaantallen KU Leuven per regio)**.**

We hernemen hetzelfde voorbeeld als bij het cirkeldiagram. De onderstaande frequentietabel geeft een overzicht van het aantal studenten dat zich in het academiejaar 2023–2024 inschreef bij associatie KU Leuven, opgesplitst naar de regio waar de studenten wonen. Zowel de absolute frequenties als de relatieve frequenties worden getoond.

Regio	Aantal studenten	Percentage studenten
Antwerpen	19 412	15.6%
Brussels Hoofdstedelijk Gewest	12 797	10.3%
Limburg	5 771	4.6%
Oost-Vlaanderen	9 325	7.4%
Vlaams-Brabant	59 700	47.8%
West-Vlaanderen	17 819	14.3%
Totaal	**124 824**	**100%**

In een *staafdiagram* kunnen absolute en relatieve frequenties weergegeven worden. Onderstaande figuur toont de absolute inschrijfaantallen per regio.



Oefening 2.5.1. Zijn de volgende uitspraken waar of onwaar?

1. Het aantal studenten uit Antwerpen is groter dan dat uit West-Vlaanderen. Waar✓

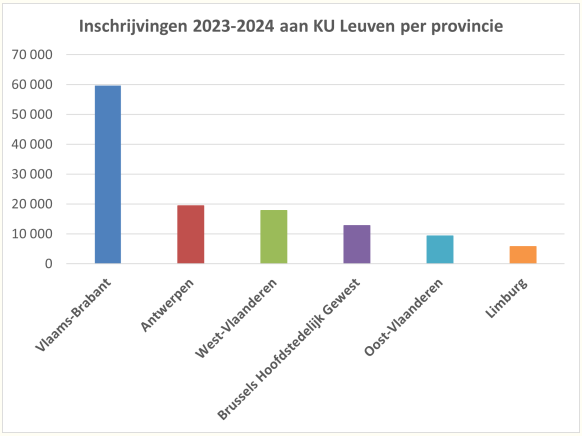
2. Het Brussels Hoofdstedelijk Gewest is de regio met het op één na laagste aantal ingeschreven studenten. Onwaar✓

3. Het aantal studenten uit Vlaams-Brabants is meer dan drie keer het aantal studenten uit West-Vlaanderen. Waar✓

Opmerking 2.5.1. In het staafdiagram hierboven stonden de staven in alfabetische volgorde, maar hieronder zijn ze gerangschikt van groot naar klein. Welke volgorde vind jij het handigst om de oefening op te lossen?

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Het staafdiagram



Definitie 2.5.1. Een **staafdiagram** is een grafische voorstelling van gegevens waarbij de frequentie van elke categorie wordt weergegeven met een afzonderlijke staaf. De lengte of hoogte van elke staaf komt overeen met de **absolute** of **relatieve frequentie** van die categorie.

Staafdiagrammen zijn vooral geschikt om de verschillen tussen categorieën onderling duidelijk en nauwkeurig te vergelijken.

CC BY-NC-SA 4.0

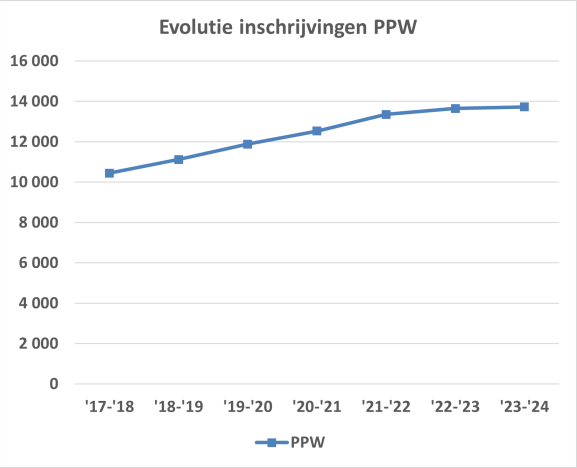
2.6 Het lijndiagram

Voorbeeld 2.6.1 (Evolutie van de inschrijvingen voor psychologie en pedagogische wetenschappen)**.**

De onderstaande tabel toont het aantal inschrijvingen voor het studiegebied psychologie en pedagogische wetenschappen (PPW) aan alle Vlaamse hogeronderwijsinstellingen, van academiejaar 2017-2018 tot en met 2023-2024.

	'17–'18	**'18–'19**	**'19–'20**	**'20–'21**	**'21–'22**	**'22–'23**	**'23–'24**
PPW	10 446	11 118	11 880	12 535	13 353	13 648	13 731

Deze data kunnen we ook voorstellen in een *lijndiagram*. Het voordeel van deze representatie is dat deze duidelijk de evolutie van de data toont.



Oefening 2.6.1. Is de volgende uitspraak waar of onwaar?

Het aantal studenten psychologie en pedagogische wetenschappen is elk academiejaar toegenomen. Waar✓

Definitie 2.6.1. Een **lijndiagram** is een grafische voorstelling van gegevens waarbij opeenvolgende meetpunten met een lijn verbonden worden.

Lijndiagrammen worden vooral gebruikt om de evolutie van gegevens over de tijd weer te geven. Ze zijn erg geschikt om trends, stijgingen of dalingen in een dataset te tonen.

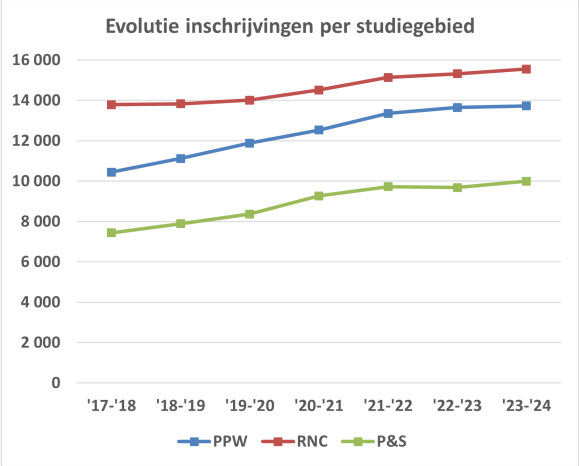
Het is mogelijk om meerdere lijndiagrammen op één figuur te plaatsen en zo de evolutie van verschillende datasets te vergelijken.

Voorbeeld 2.6.2 (Evolutie van de inschrijvingen per studiegebied)**.**

De onderstaande figuur toont het aantal inschrijvingen voor het studiegebied psychologie en pedagogische wetenschappen (PPW), rechten, notariaat en criminologische wetenschappen (RNC) en politieke en sociale wetenschappen (P&S) aan alle Vlaamse hogeronderwijsinstellingen, van academiejaar 2017-2018 tot en met 2023-2024.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Het lijndiagram



Oefening 2.6.2. Zijn de volgende uitspraken waar of onwaar?

1. Het aantal inschrijvingen in het studiegebied politieke en sociale wetenschappen is elk academiejaar gestegen. Onwaar✓

2. PPW heeft elk academiejaar minder inschrijvingen dan RNC. Waar✓

3. Tussen 2019–2020 en 2020–2021 stijgt het aantal inschrijvingen in alle drie de studiegebieden. Waar✓

4. RNC kende een sterkere stijging tussen 2018–2019 en 2019–2020 dan PPW. Onwaar✓

5. Tussen 2017–2018 en 2023–2024 is het verschil in aantal inschrijvingen tussen PPW en RNC groter geworden. Onwaar✓

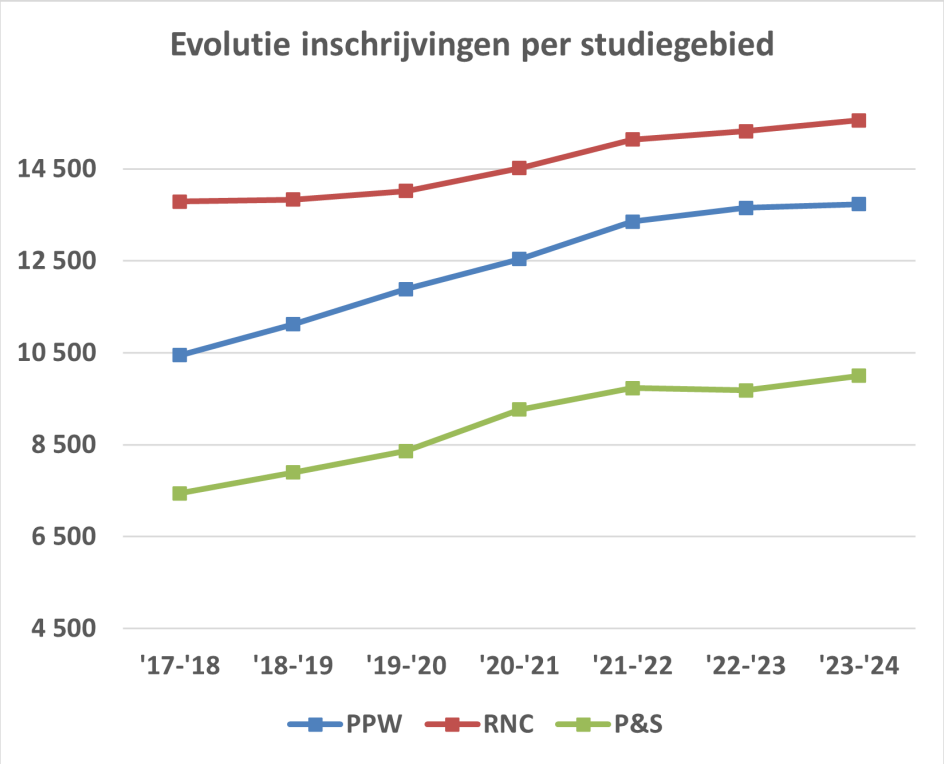
CC BY-NC-SA 4.0

2.7 Laat je niet misleiden

Een goede datarepresentatie helpt om complexe informatie helder en correct voor te stellen, maar helaas worden data niet altijd op een correcte manier voorgesteld. Soms gebeurt dat onbewust, soms doelbewust: om te overtuigen, te manipuleren of een bepaald standpunt kracht bij te zetten. Zulke *misleidende representaties* kunnen ons op het verkeerde been zetten en leiden tot foutieve conclusies. Het is daarom belangrijk dat je misleidende datarepresentaties leert te herkennen en leert om ze te vermijden of te doorprikken.

Voorbeeld 2.7.1 (Evolutie van de inschrijvingen per studiegebied)**.**

Onderstaand lijndiagram toont de evolutie van het aantal inschrijvingen van academiejaar 2017-2018 tot en met 2023-2024 voor het studiegebied psychologie en pedagogische wetenschappen (PPW), rechten, notariaat en criminologische wetenschappen (RNC) en politieke en sociale wetenschappen (P&S).



1. In het academiejaar '17-'18 schreven er zich dubbel zoveel studenten in voor PPW als voor P&S.

Onwaar✓

Dit voorbeeld toont hoe belangrijk het is om op de schaalverdeling van een grafiek te letten. Hier begint de verticale as niet bij nul, waardoor het verschil tussen de twee datapunten visueel groter lijkt dan het in werkelijkheid is. Dat is niet per se fout — het kan trends beter zichtbaar maken — maar je moet je er wel bewust van zijn om de grafiek correct te interpreteren.

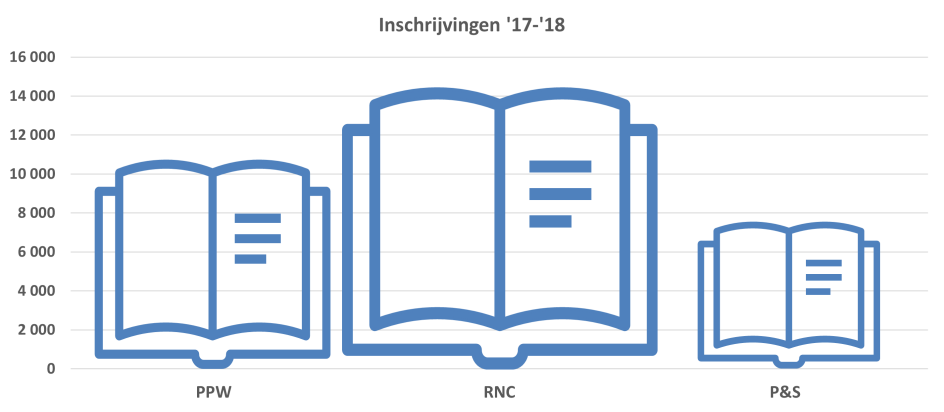
Tip: Controleer of de assen logisch en correct geschaald zijn.

Voorbeeld 2.7.2 (Evolutie van de inschrijvingen per studiegebied)**.**

Onderstaand diagram toont het aantal inschrijvingen in academiejaar 2017-2018 voor het studiegebied psychologie en pedagogische wetenschappen (PPW), rechten, notariaat en criminologische

2.7 Laat je niet misleiden

wetenschappen (RNC) en politieke en sociale wetenschappen (P&S). In plaats van het klassiek staafdiagram is er hier gekozen om de data voor te stellen met pictogrammen.



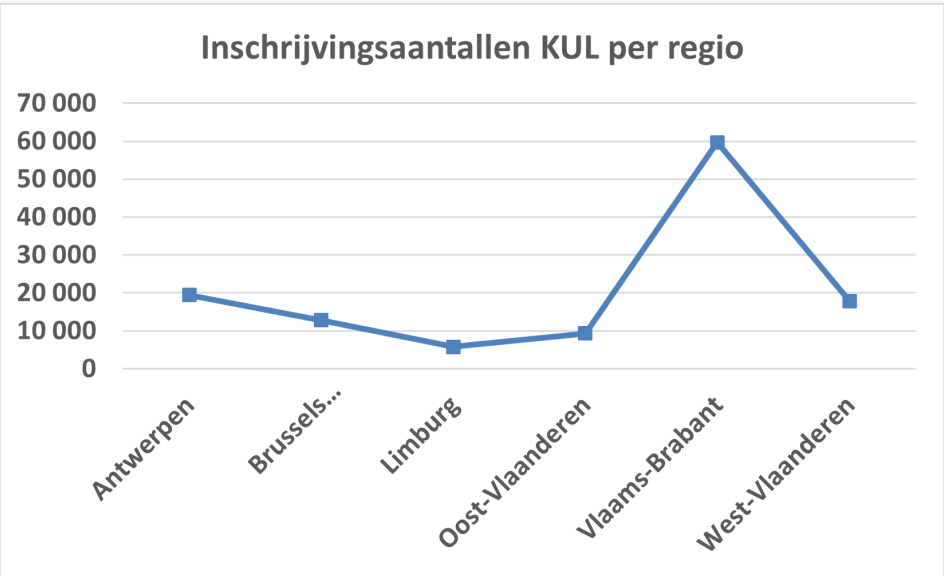
1. Voor RNC waren er in '17-'18 bijna dubbel zoveel inschrijvingen als voor P&S. Waar✓

Dit voorbeeld toont hoe visuele elementen zoals oppervlakte de interpretatie van data kunnen beïnvloeden. Als zowel de hoogte als de breedte van een figuur toenemen, groeit de oppervlakte sneller dan de waarde zelf. Daardoor lijkt een verdubbeling in aantal veel groter dan ze werkelijk is, omdat onze ogen reageren op de toename in oppervlakte in plaats van enkel op de hoogte.

Tip: Laat je niet misleiden door de grootte van figuren — kijk naar de schaal en de cijfers, niet naar de oppervlakte.

Voorbeeld 2.7.3 (Inschrijvingsaantallen KUL per regio)**.**

Onderstaand lijndiagram toont het aantal studenten dat zich in het academiejaar 2023–2024 inschreef bij associatie KU Leuven, opgesplitst naar de regio waar de studenten wonen.



1. Welke provincie telt het hoogste aantal inschrijvingen? Vlaams-Brabant✓

CC BY-NC-SA 4.0

2.7 Laat je niet misleiden

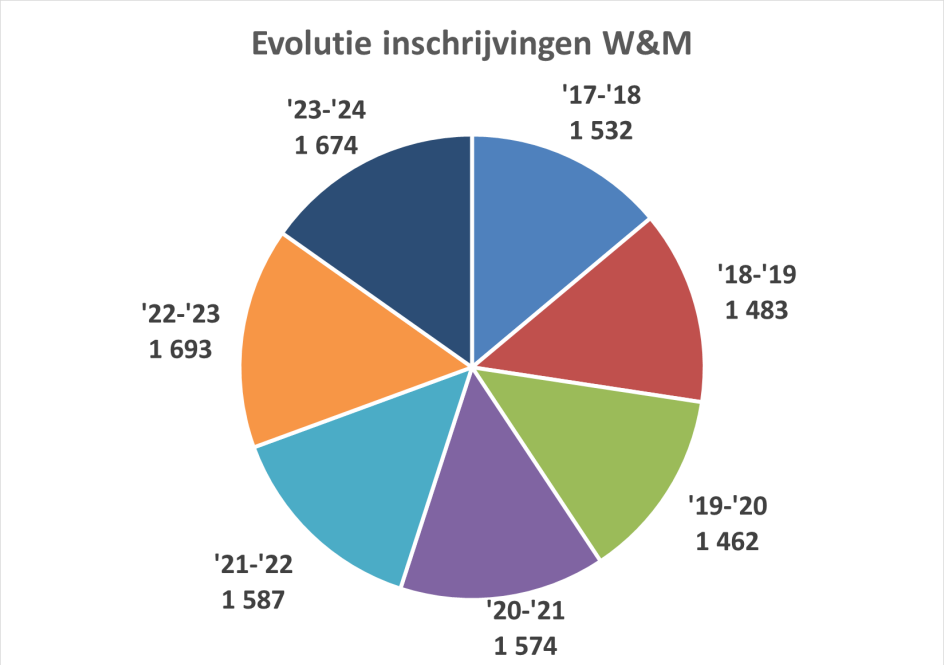
2. Hoeveel studenten uit Antwerpen schreven zich ongeveer in? Ongeveer 20 000✓

3. Het aantal inschrijvingen voor West-Vlaanderen is de laatste jaren gedaald. Niet van toepassing✓

In dit voorbeeld wordt een lijndiagram gebruikt om inschrijvingsaantallen per provincie weer te geven. Hoewel de data correct zijn is deze representatie minder geschikt aangezien provincies losse categorieën zijn zonder logische volgorde. Een lijndiagram suggereert een continu verband tussen de punten, wat hier niet klopt en waardoor trends gesuggereerd kunnen worden die er niet zijn.

Voorbeeld 2.7.4 (Evolutie van de inschrijvingen voor wijsbegeerte en moraalwetenschappen)**.**

Onderstaand cirkeldiagram toont het aantal inschrijvingen voor het studiegebied wijsbegeerte en moraalwetenschappen (W&M) aan alle Vlaamse hogeronderwijsinstellingen, van academiejaar 2017-2018 tot en met 2023-2024.



1. Het aantal inschrijvingen voor W&M is elk academiejaar toegenomen. Onwaar✓

Aangezien het optellen van de studentenaantallen over de jaren heen hier geen betekenis heeft, is een cirkeldiagram geen zinvolle representatie. Een lijndiagram was hier duidelijk geschikter geweest. Dit voorbeeld toont hoe belangrijk het is om de juiste datarepresentatie te kiezen. Een cirkeldiagram is bedoeld om verhoudingen op één moment weer te geven, niet om evoluties over tijd te tonen. Bovendien maakt het grote aantal categorieën het diagram moeilijk leesbaar.

Tip: Controleer altijd of de gekozen voorstelling past bij het soort data dat getoond wordt. Zo is een cirkeldiagram bijvoorbeeld nuttig voor nominale en ordinale data terwijl je continue kwantitatieve data best voorstelt met een lijndiagram.

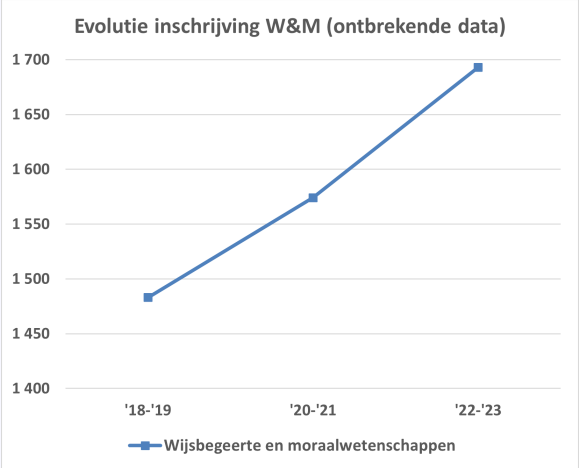
Voorbeeld 2.7.5 (Evolutie van de inschrijvingen voor wijsbegeerte en moraalwetenschappen)**.**

Opnieuw wordt de evolutie van het aantal inschrijvingen voor het studiegebied wijsbegeerte en mo-

CC BY-NC-SA 4.0

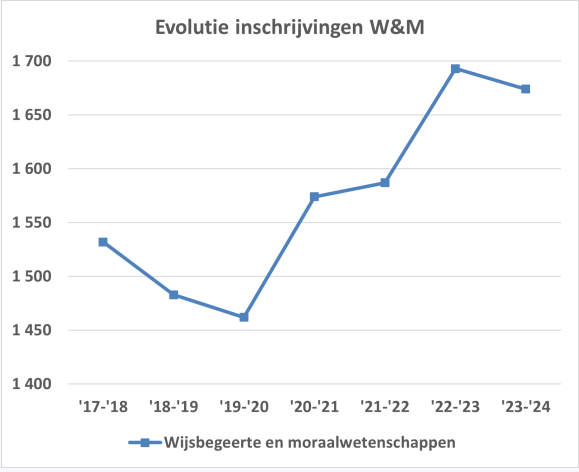
2.7 Laat je niet misleiden

raalwetenschappen (W&M) aan alle Vlaamse hogeronderwijsinstellingen getoond, maar nu met een lijndiagram.



1. Het aantal inschrijvingen voor W&M is elk academiejaar toegenomen. Onwaar✓

Bovenstaande representatie geeft niet alle data weer. Onderstaand lijndiagram toont de volledige data van '17-'18 tot en met '23-'24.



Dit voorbeeld toont hoe belangrijk het is om te controleren of de data volledig zijn. Door enkel om het jaar data te tonen, lijkt het alsof er een constante stijging is, terwijl dat niet klopt. Onvolledige data kunnen een vertekend beeld geven, zelfs als de voorstelling op zich correct lijkt.

Tip: Vraag je af: Wordt hier alles getoond?

Houd deze tips in je achterhoofd om je niet te laten misleiden door datarepresentaties

- Controleer of de assen logisch en correct geschaald zijn.
- Laat je niet misleiden door de grootte van figuren — kijk naar de schaal en de cijfers, niet naar de oppervlakte.
- Controleer altijd of de gekozen voorstelling past bij het soort data dat getoond wordt.
- Vraag je af: Wordt hier alles getoond?

CC BY-NC-SA 4.0

2.7.A Representaties interpreteren

Oefening 2.7.1 (Huishoudens naar aantal kinderen)**.**

De onderstaande frequentietabel toont het aantal *private huishoudens* in het Vlaams Gewest in 2024, opgesplitst naar het aantal kinderen en per provincie. Met een privaat huishouden wordt een groep mensen bedoeld die samen onder één dak wonen en samenwonen als gezin of alleenstaande — dus geen collectieve woonvormen zoals woonzorgcentra of studentenkoten.

Aantal kinderen	Antwerpen	Vlaams-Brabant	West-Vlaanderen	Oost-Vlaanderen	Limburg	Vlaams Gewest
0	534 217	297 327	371 525	436 210	240 112	1 879 391
1	125 972	83 114	81 292	110 352	66 924	467 654
2	114 610	79 709	72 939	96 609	56 850	420 717
3+	58 157	36 552	27 446	40 303	21 154	183 612
Totaal	832 956	496 702	553 202	683 474	385 040	2 951 374

Bron: Statistiek Vlaanderen: Huishoudens
https://app.powerbi.com/view?r=eyJrIjoiZjYxYTcwNDMtNjVlNC00NzM5LWJkZWEtNGJmYTM3OWRmMmMwIiwidCI6IjB

Zijn onderstaande stellingen waar of onwaar?

1. In Limburg zijn er meer huishoudens met 2 kinderen dan met 1 kind.

Waar	Onwaar

2. In Antwerpen zijn er minder huishoudens met kinderen dan zonder kinderen.

Waar	Onwaar

3. Er is een provincie waar er meer huishoudens zijn met 3 of meer kinderen dan met 2 kinderen.

Waar	Onwaar

4. In Limburg is het aandeel huishoudens met 1 kind ten opzichte van het totaal aantal huishoudens kleiner dan in Oost-Vlaanderen.

Waar	Onwaar

5. Meer dan een kwart van alle Vlaamse huishoudens zonder kinderen woont in Antwerpen.

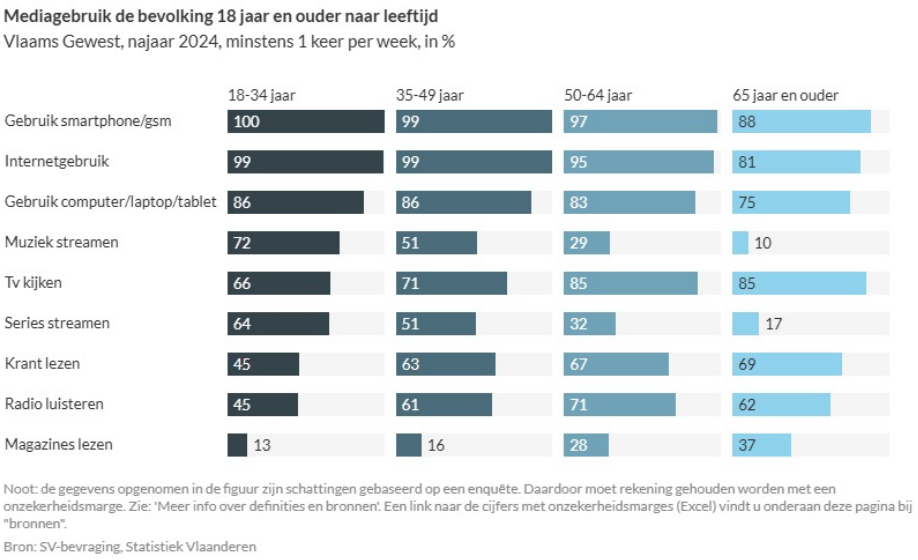
Waar	Onwaar

Oefening 2.7.2 (Mediagebruik per leeftijd)**.**

Onderstaande gegevens zijn afkomstig uit een onderzoek in het Vlaams Gewest uit najaar 2024 en tonen het percentage mensen per leeftijdsgroep dat minstens één keer per week gebruik maakt van verschillende media.

CC BY-NC-SA 4.0

2.7.A Representaties interpreteren



Bron: Statistiek Vlaanderen: Mediagebruik
https://www.vlaanderen.be/statistiek-vlaanderen/media-en-mediagebruik/mediagebruik

1. Welke leeftijdsgroep heeft het laagste percentage internetgebruikers?

18–34 jaar	35–49 jaar	50–64 jaar	65 jaar en ouder

2. Voor welke leeftijdsgroep(en) geldt de eigenschap *"Meer dan 80% van de mensen kijkt minstens één keer per week tv."*?

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) 18–34 jaar

(b) 35–49 jaar

(c) 50–64 jaar

(d) 65 jaar en ouder

3. Duid de correcte stelling(en) aan.

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) A. Een groter deel van de 65-plussers lezen de krant dan van de 18–34-jarigen.

(b) B. De jongste leeftijdsgroep kijkt vaker tv dan de oudste leeftijdsgroep.

(c) C. Het gebruik van computer/laptop/tablet is het hoogst bij 18–49-jarigen.

(d) D. Muziek streamen is populairder dan series streamen bij alle leeftijdsgroepen.

(e) E. Een groter deel van de 65-plussers luisteren naar de radio dan van de andere leeftijdsgroepen.

4. Voor welke mediavorm is het verschil in gebruik tussen de jongste en oudste leeftijdsgroep het grootst?

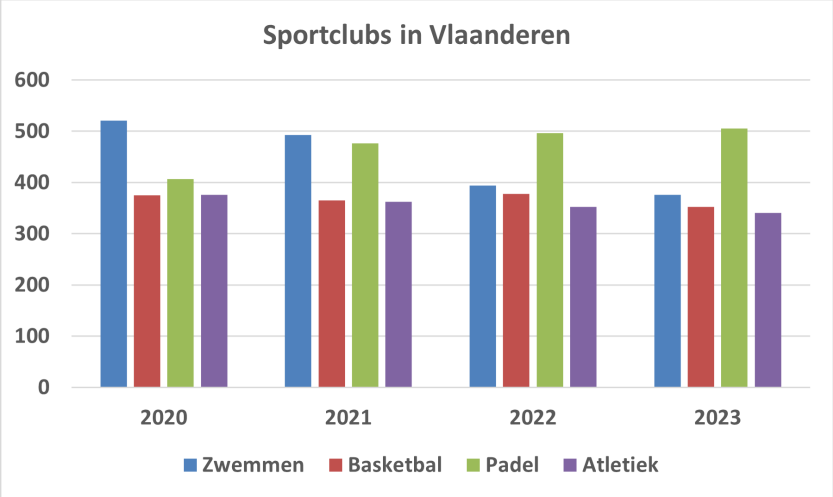
Internetgebruik	Muziek streamen	Tv kijken	Krant lezen

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/09H.34)

2.7.A Representaties interpreteren

Oefening 2.7.3 (Aantal sportclubs in Vlaanderen).

Onderstaand staafdiagram toont het aantal sportclubs in Vlaanderen voor vier sporten (zwemmen, basketbal, padel en atletiek) van 2020 tot en met 2023.



Bron: Sport Vlaanderen
https://www.sport.vlaanderen/kennisplatform/themas/thema-sportclubs/db-sportclubs/

1. Welke sport kende de sterkste groei in aantal clubs tussen 2020 en 2023?

Zwemmen	Basketbal	Padel	Atletiek

2. Welke sporten kenden een daling in aantal clubs tussen 2022 en 2023?

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) Zwemmen

(b) Basketbal

(c) Padel

(d) Atletiek

3. Is deze stelling waar of onwaar? "Het aantal zwemclubs ligt elk jaar hoger dan het aantal padelclubs."

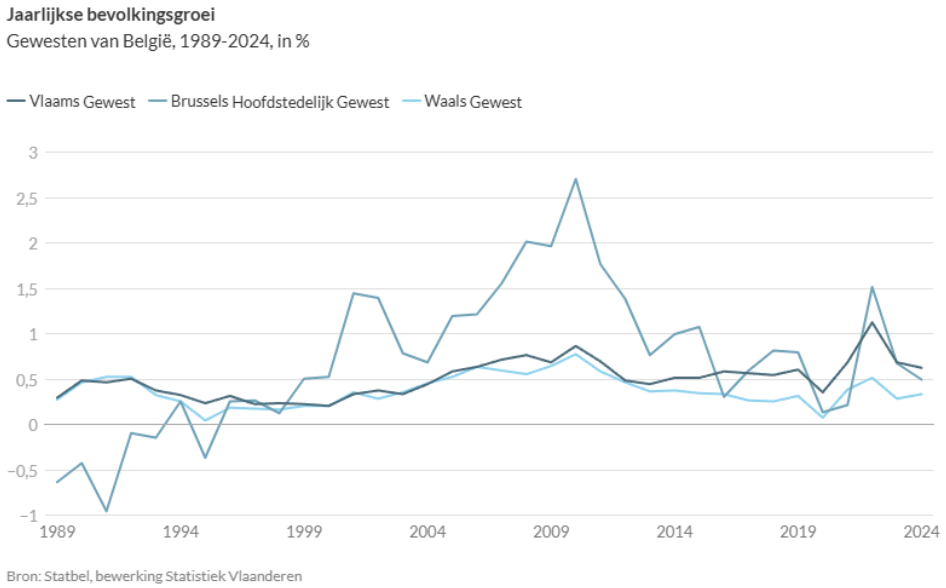
Waar	Onwaar

Oefening 2.7.4 (Jaarlijkse bevolkingsgroei in de Belgische gewesten).

Onderstaand lijndiagram toont de jaarlijkse bevolkingsgroei (in procent) in het Vlaams Gewest, het Brussels Hoofdstedelijk Gewest en het Waals Gewest van 1989 tot en 2024.

CC BY-NC-SA 4.0

2.7.A Representaties interpreteren



Bron: Statistiek Vlaanderen: Bevolkingsgroei
https://www.vlaanderen.be/statistiek-vlaanderen/bevolking/bevolking-omvang-en-groei

1. In welk jaar kende het Brussels Hoofdstedelijk Gewest de sterkste bevolkingsgroei?

2000	2005	2010	2022

2. Welke gewest kende in het begin van de jaren 1990 een bevolkingskrimp?

Vlaams Gewest	Brussels Hoofdstedelijk Gewest	Waals Gewest

3. Duid de correcte stelling(en) aan.

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) A. De bevolkingsgroei in het Waals Gewest ligt sinds 2014 lager dan in het Vlaams Gewest.

(b) B. De bevolkingsgroei in het Vlaams Gewest is sinds 1989 elk jaar gestegen.

(c) C. In 2024 is de bevolkingsgroei in het Vlaams Gewest hoger dan 0.5%.

(d) D. De bevolkingsgroei in het Waals Gewest was in 2010 hoger dan in het Brussels Hoofdstedelijk Gewest.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/09H.34)

2.8 Het histogram

Voorbeeld 2.8.1 (Dagelijkse schermtijd op de smartphone van leerlingen)**.**

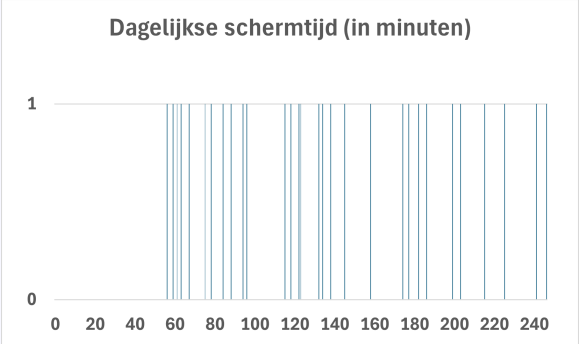
In een klas werd een bevraging gedaan naar de dagelijkse schermtijd op de smartphone van de leerlingen. Elke leerling noteerde hoeveel minuten hij of zij gemiddeld per dag op de smartphone kijkt. De resultaten staan in de frequentietabel hieronder.

Leerling	Minuten
1	59
2	241
3	132
4	78
5	115
6	63
7	186
8	94
9	122
10	177

Leerling	Minuten
11	88
12	203
13	145
14	56
15	67
16	215
17	138
18	174
19	84
20	199

Leerling	Minuten
21	123
22	134
23	61
24	182
25	246
26	158
27	96
28	118
29	75
30	225

We proberen deze gegevens eerst te visualiseren met een staafdiagram. Omdat elke waarde slechts één keer voorkomt, krijgt elke staaf een hoogte van 1.



1. Hoeveel leerlingen hebben tussen de 2 en 3 uur schermtijd per dag? 10✓

Opmerking 2.8.1. Een staafdiagram is geschikt voor *discrete data* met een beperkt aantal mogelijke waarden. Hier hebben we echter te maken met *continue data*: alle waarden tussen 0 en 300 minuten zijn in theorie mogelijk. Elke waarde komt slechts één keer voor waardoor het staafdiagram onoverzichtelijk en moeilijk te interpreteren is.

Om dit probleem op te lossen, groeperen we de gegevens in *klassen*. Een klasse is een interval van waarden, bijvoorbeeld van 0 tot 60 minuten. We tellen hoeveel leerlingen binnen elk interval vallen.

Definitie 2.8.1. Een **klasse** is een interval waarin we meerdere waarnemingen samenbrengen. Klassen worden gebruikt om continue data overzichtelijk te structureren. Elke klasse heeft een **klassebreedte** (de breedte van het interval) en een **klassemidden** (het gemiddelde van de onder- en bovengrens).

De eerste klasse komt overeen met een schermtijd van minder dan een uur en noteren we met [0, 60[. Het open haakje [bij 60 wijst er op dat 60 niet tot het interval behoort. De klassebreedte van

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Het histogram

dit interval is bovengrens - ondergrens, dus 60 - 0 = 60. Het klassemidden is het gemiddelde van ondergrens 0 en bovengrens 60 van de klasse:

$$\frac{0+60}{2} = 30.$$

We berekenen op dezelfde manier het klassemidden voor elke klasse. Zo ontstaat de volgende frequentietabel:

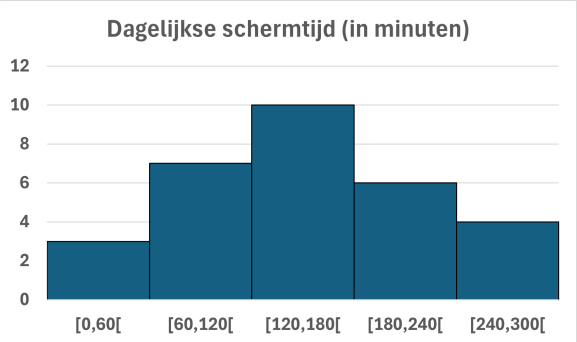
Schermtijd (in minuten)	Klassemidden	Aantal leerlingen
[0, 60[	30	3
[60, 120[	90	7
[120, 180[	150	10
[180, 240[	210	6
[240, 300[	270	4

Op basis van deze tabel maken we een *histogram*. In een histogram worden de klassen op de horizontale as geplaatst en de frequenties op de verticale as. Elke klasse wordt voorgesteld door een rechthoek waarvan de hoogte overeenkomt met het aantal waarnemingen in die klasse.

Definitie 2.8.2. Een **histogram** is een grafische voorstelling van kwantitatieve gegevens gegroepeerd in klassen. Deze klassen worden op de horizontale as geplaatst en de frequenties op de verticale as. Elke klasse wordt voorgesteld door een rechthoek waarvan de hoogte overeenkomt met de absolute frequentie.

Histogrammen zijn vooral geschikt voor het visualiseren van continue numerieke data met veel mogelijke waarden. In tegenstelling tot een staafdiagram staan de balken in een histogram tegen elkaar, omdat de klassen aaneensluitend zijn.

De dataset over schermtijd kan worden voorgesteld door onderstaand histogram.



Dit histogram maakt het eenvoudiger om de data te interpreteren. Beantwoord de volgende vragen.

Oefening 2.8.1.

1. Hoeveel leerlingen hebben tussen de 2 en 3 uur schermtijd per dag? 10✓

2. Welke klasse bevat de meeste leerlingen? [120–180[✓

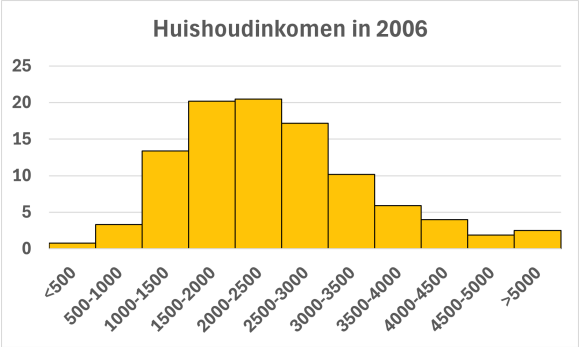
3. Hoeveel procent van de leerlingen heeft minstens 180 minuten schermtijd? 33.3%✓

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Het histogram

Oefening 2.8.2. In het Vlaams Gewest werd in 2006 een onderzoek uitgevoerd naar het beschikbaar huishoudinkomen. Dat is het totale inkomen waar een gezin over beschikt, afkomstig uit werk, vermogen, eigendom en sociale uitkeringen zoals pensioenen of werkloosheidssteun.

De resultaten van dit onderzoek worden voorgesteld in onderstaand histogram. Op de horizontale as zie je de verschillende inkomensklassen (in euro per maand), van minder dan 500 euro tot meer dan 5000 euro. Op de verticale as staat het percentage gezinnen dat binnen elke inkomensklasse valt. Let op: dit percentage is niet hetzelfde als de absolute frequentie zoals gedefinieerd in Definitie 2.



Beantwoord de volgende waar/onwaar-vragen op basis van dit histogram.

1. Van alle beschouwde inkomensklassen bevat [2000,2500[de meeste gezinnen.

Waar	Onwaar

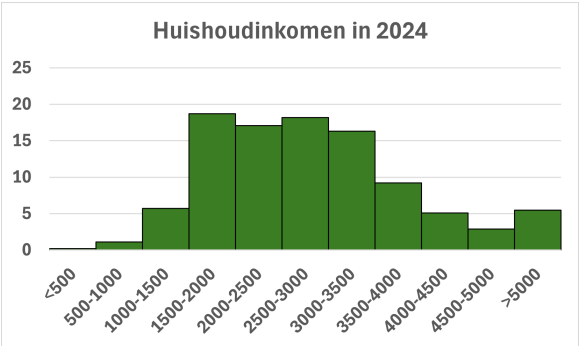
2. Een kwart van de Vlaamse gezinnen heeft een huishoudinkomen hoger dan €3500.

Waar	Onwaar

3. Er zijn evenveel huishoudens met een inkomen tussen €3000 en €4000 als tussen €1000 en €2000.

Waar	Onwaar

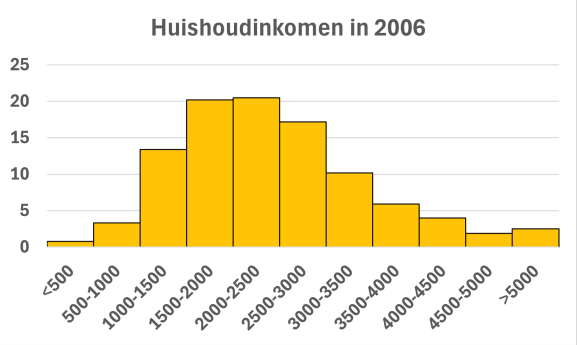
In 2024 werd opnieuw een onderzoek uitgevoerd naar het beschikbaar huishoudinkomen in het Vlaams Gewest. De resultaten worden voorgesteld in onderstaand histogram. Net zoals in 2006 zie je op de horizontale as de inkomensklassen (in euro per maand) en op de verticale as het percentage gezinnen dat binnen elke klasse valt.



Vergelijk dit histogram met het vorige met de data uit 2006.

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Het histogram



Beantwoord de volgende waar/onwaar-vragen op basis van beide histogrammen.

4. De inkomensklasse [3000,3500[bevat in 2024 een groter aandeel huishoudens dan in 2006.

Waar	Onwaar

5. In 2024 hebben meer huishoudens een inkomen hoger dan 4000€ dan in 2006.

Waar	Onwaar

6. Het aandeel huishoudens met een inkomen lager dan €1000 is in 2024 gestegen ten opzichte van 2006.

Waar	Onwaar

7. De inkomensverdeling in 2024 is meer naar rechts verschoven dan in 2006.

Waar	Onwaar

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Humane Wetenschappen

Module 3
Maatgetallen van data

(Versie 2026/09/09H.34)

3.1 Centrummaten: modus, mediaan en gemiddelde

Modus

Definitie 3.1.1. De **modus** van een dataset is de waarde die het vaakst voorkomt.

Opmerking 3.1.1. De modus is zinvol voor verschillende soorten data, zowel kwalitatief als kwantitatief. Bij *nominale* en *ordinale* variabelen geeft de modus aan welke categorie het populairst is. Bij *discrete kwantitatieve* data toont de modus de meest voorkomende waarde. Voor *continue data* is de modus minder bruikbaar, omdat er vaak veel verschillende waarden zijn die slechts één keer voorkomen.

Voorbeeld 3.1.1. Een onderzoeker bestudeert het studiegedrag van studenten.

De onderzoeker noteert hoeveel uren per week 9 studenten studeren:

8, 10, 10, 12, 14, 12, 10, 16, 18.

De modus is 10, want die waarde komt het vaakst voor, namelijk drie keer.

De onderzoeker vraagt ook naar de studenten hun favoriete studeerplek. De antwoorden zijn:

bibliotheek, bibliotheek, thuis, thuis, thuis, koffiezaak, bibliotheek, thuis, park.

De modus is *thuis*, want die studeerplek werd het vaakst genoemd.

Opmerking 3.1.2. Soms heeft een dataset meer dan één modus. Dit gebeurt wanneer meerdere waarden even vaak voorkomen en die frequentie het hoogst is. In dat geval spreken we van een *multimodale* verdeling.

Oefening 3.1.1.

1. Wat is de modus van de dataset: 15, 15, 16, 17, 17, 17, 18?

15	17	16	18

Mediaan

Definitie 3.1.2. De **mediaan** is de middelste waarde van een geordende dataset. Bij een even aantal waarden neem je het gemiddelde van de twee middelste waarden.

Opmerking 3.1.3. De mediaan is enkel zinvol bij soorten data die geordend kunnen worden, dus bij *ordinale* en *kwantitatieve* data.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Centrummaten: modus, mediaan en gemiddelde

Voorbeeld 3.1.2. Geordende dataset met 5 elementen: 12, 12, 16, 17, 18. De mediaan is 16.

Geordende dataset met 6 elementen: 12, 12, 16, 17, 18, 20. De mediaan is $\frac{16+17}{2} = 16.5$.

Merk op dat de mediaan niet noodzakelijk een waarde is die voorkomt in de dataset.

Opmerking 3.1.4. Bij het bepalen van de mediaan is het belangrijk om *alle* waarden uit de dataset op te nemen in de geordende lijst, ook wanneer bepaalde waarden meerdere keren voorkomen. Deze herhalingen beïnvloeden de positie van het middelste element en dus de berekening van de mediaan.

Oefening 3.1.2. Wat is de mediaan van deze datasets? Orden eerst de gegevens.

1.

12, 9, 15, 10, 11

……

2.

14, 16, 10, 20, 12, 16

……

Kwartielen als verfijning van de mediaan

Definitie 3.1.3. Kwartielen verdelen een geordende dataset in vier gelijke delen:

- Het **eerste kwartiel** (Q_1) is de mediaan van de onderste helft van de data.
- Het **tweede kwartiel** (Q_2) is de mediaan van de volledige dataset.
- Het **derde kwartiel** (Q_3) is de mediaan van de bovenste helft van de data.

Voorbeeld 3.1.3. Deze dataset bevat 8 waarden: 1, 2, 4, 6, 10, 11, 14, 16. We bepalen de kwartielen als volgt:

- Q_2 is de mediaan van de volledige dataset. Omdat het aantal waarden even is, nemen we het gemiddelde van de middelste twee: $Q_2 = \frac{6+10}{2} = 8$.
- Voor Q_1 bekijken we de onderste helft van de data: 1, 2, 4, 6

  De mediaan hiervan is: $Q_1 = \frac{2+4}{2} = 3$.
- Voor Q_3 bekijken we de bovenste helft van de data: 10, 11, 14, 16

  De mediaan hiervan is: $Q_3 = \frac{11+14}{2} = 12.5$.

Samengevat: $Q_1 = 3$, $Q_2 = 8$, $Q_3 = 12.5$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Centrummaten: modus, mediaan en gemiddelde

Opmerking 3.1.5. Bij een oneven aantal gegevens is de middelste waarde de mediaan Q_2. Deze waarde wordt uitgesloten bij het bepalen van de andere kwartielen. We berekenen Q_1 en Q_3 dan op basis van de waarden vóór en na deze mediaan.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/s7jmprwt

Oefening 3.1.3. Je kan de blauwe punten in de app hierboven verslepen of erop klikken en ze met de pijltjestoetsen verplaatsen.

1. Versleep de punten zodat $Q_1 = 5$, $Q_2 = 8$ en $Q_3 = 13$.

2. Versleep de punten zodat Q_2 precies tussen Q_1 en Q_3 ligt.

3. Versleep de punten zodat $Q_1 = Q_2 = Q_3$.

Oefening 3.1.4.

1. Bepaal de kwartielen van de geordende dataset: 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 16, 17.

Wat zijn Q_1, Q_2 en Q_3?

- $Q_1 =$ ... ...
- $Q_2 =$ ... ...
- $Q_3 =$ ... ...

Gemiddelde

Definitie 3.1.4. Het **gemiddelde** van een dataset is de som van alle datawaarden x_i gedeeld door het aantal waarden. Het gemiddelde wordt typisch genoteerd met $\bar{x}$. In formulevorm kan je dit noteren als:

$$\text{Gemiddelde} = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Heb je moeite met het interpreteren van het symbool Σ? Doorloop dan de module over het sommatieteken.

Opmerking 3.1.6. Het gemiddelde is enkel zinvol bij kwantitatieve data, omdat je bij deze soort data op een betekenisvolle manier kunt rekenen met de waarden.

Voorbeeld 3.1.4. Dataset: 10, 12, 14, 16. De som van alle waarden is $10 + 12 + 14 + 16 = 52$.

Er zijn 4 waarden dus het gemiddelde is $\bar{x} = \frac{52}{4} = 13$.

Oefening 3.1.5.

1. Wat is het gemiddelde van: 3, 10, 12, 14, 16? ... ...

Alvorens onderstaande oefening te maken, kan het nuttig zijn om de verschillende soorten data op te frissen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Centrummaten: modus, mediaan en gemiddelde

Oefening 3.1.6. Welke van de centrummaten kan je bepalen bij de volgende datasets?

1. Dataset: favoriete muziekgenres van studenten te kiezen uit pop, rock, hiphop, klassiek en jazz.

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) Modus

(b) Mediaan

(c) Gemiddelde

2. Dataset: aantal leerlingen per klas in een middelbare school.

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) Modus

(b) Mediaan

(c) Gemiddelde

3. Dataset: energielabels van koelkasten: A++, A+, A, B, C, D, E, F.

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) Modus

(b) Mediaan

(c) Gemiddelde

Oefening 3.1.7.

1. Een bevraging bij 11 studenten over hoeveel slaap ze gemiddeld per nacht kregen tijdens de examenperiode gaf deze resultaten:

6.5, 7, 5, 6, 6, 7.5, 6, 5.5, 6, 8, 5

Bereken de volgende centrummaten:

- **Modus:** ... ...
- **Mediaan:** ... ...
- **Gemiddelde:** (2 decimalen) ... ...

2. Er wordt nog een 12de student bevraagd. Hij denkt echter dat hij moet aangeven hoeveel uur hij per week slaapt en zegt **54 uur**. Deze waarde wordt toegevoegd aan de dataset. Welke van de centrummaten veranderen hierdoor?

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) Modus

(b) Mediaan

(c) Gemiddelde

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Centrummaten: modus, mediaan en gemiddelde

Opmerking 3.1.7. Bij datasets met uitschieters, zoals de foutieve waarde van 54 in de vorige oefening, verandert het gemiddelde sterk, maar de modus en mediaan blijven meestal stabiel.

Centrummaten vertellen je iets over het typische gedrag in een dataset maar ze zeggen niets over de variatie tussen de gegevens. Hiervoor kan je spreidingsmaten gebruiken.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Spreidingsmaten: variatiebreedte en interkwartielafstand

Twee klassen hebben een gemiddeld examenresultaat van 60 op 100 voor het vak gedragswetenschappen. Maar als je naar de individuele scores kijkt, zie je dat de verdeling heel anders is:

Klas A: 57, 70, 55, 67, 68, 54, 63, 58, 57, 63, 65, 68, 53, 58, 56, 64, 56, 55, 54, 59

Klas B: 68, 59, 31, 40, 71, 56, 25, 55, 64, 49, 68, 52, 64, 69, 71, 68, 50, 85, 65, 90

Laten we samen ontdekken wat deze cijfers ons vertellen over de prestaties van de leerlingen.

1. Hoeveel leerlingen van **klas A** hebben een onvoldoende behaald, dus minder dan 50 op 100? ... ...

2. Hoeveel leerlingen van **klas B** hebben een onvoldoende behaald, dus minder dan 50 op 100? ... ...

3. Hoeveel leerlingen van **klas A** hebben een grote onderscheiding behaald, dus minstens 77 op 100? ... ...

4. Hoeveel leerlingen van **klas B** hebben een grote onderscheiding behaald, dus minstens 77 op 100? ... ...

Je merkt dat centrummaten zoals het gemiddelde je iets vertellen over het typische gedrag in een dataset. Maar ze zeggen niets over de variatie tussen de gegevens. Daarom gebruiken we **spreidingsmaten**:

- **Variatiebreedte**
- **Interkwartielafstand**

Variatiebreedte

Definitie 3.2.1. De **variatiebreedte**, ook wel bereik genoemd of *range* in het Engels, afgekort R, van een dataset $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is het verschil tussen de grootste en de kleinste waarde in de dataset. Je berekent ze door het minimum van de data af te trekken van het maximum.

$$\mathrm{R} = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Voorbeeld 3.2.1. We bekijken de dataset 1, 2, 4, 6, 10, 11, 14, 16.

We willen de variatiebreedte berekenen. Het maximum van deze dataset is 16 en het minimum is 1. De variatiebreedte is het verschil tussen beide dus $\mathrm{R} = 16 - 1 = 15$.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/bcjrhmqw

Oefening 3.2.1. Je kan de blauwe punten in de app hierboven verslepen of erop klikken en ze met de pijltjestoetsen verplaatsen.

1. Versleep één van de middelste punten helemaal naar links of rechts. Wat gebeurt er met variatiebreedte R?

2. Versleep de punten zodat de variatiebreedte R zo klein mogelijk is. Wat is de minimale waarde van R die je kunt bereiken?

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Spreidingsmaten: variatiebreedte en interkwartielafstand

Oefening 3.2.2.

1. Wat is de variatiebreedte R van: 5, 5, 8, 12, 14, 20? ... ...

Interkwartielafstand

Definitie 3.2.2. De **interkwartielafstand**, in het Engels *interquartile range* afgekort IQR, is het verschil tussen het derde kwartiel Q_3 en het eerste kwartiel Q_1:

$$\text{IQR} = Q_3 - Q_1.$$

Voorbeeld 3.2.2. We kennen de kwartielen al van de dataset 1, 2, 4, 6, 10, 11, 14, 16.

$Q_1 = 3$ en $Q_3 = 12.5$ dus de interkwartielafstand IQR $= 12.5 - 3 = 9.5$.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/g66kmgjx

Oefening 3.2.3. Je kan de blauwe punten in de app hierboven verslepen of erop klikken en ze met de pijltjestoetsen verplaatsen.

1. Versleep het meest linkse punt met waarde 1 naar 8. Doe dit ook met met het meest rechtse punt met waarde 16. Wat gebeurt er dan met de interkwartielafstand IQR? Waarom?

2. Versleep de punten zodat de interkwartielafstand IQR zo groot mogelijk is. Wat is de maximale waarde van IQR die je kunt bereiken?

Oefening 3.2.4.

1. Wat is de interkwartielafstand van: 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 19? ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Spreidingsmaten: variantie en standaardafwijking

Voorbeeld 3.3.1 (Examenscores gedragswetenschappen)**.** Op het examen van gedragswetenschappen scoorden de leerlingen van klas A gemiddeld 60 op 100, dus $\bar{x} = 60$.

Scores klas A: 57, 70, 55, 67, 68, 54, 63, 58, 57, 63, 65, 68, 53, 58, 56, 64, 56, 55, 54, 59

Zijn alle leerlingen ongeveer even goed, of zitten er grote verschillen tussen? We willen nagaan hoe sterk de scores rond het gemiddelde verspreid liggen. In vier stappen bouwen we twee veelgebruikte maten voor spreiding op: de *variantie* en de *standaardafwijking*.

Stap 1: Afwijkingen ten opzichte van het gemiddelde

We berekenen voor de score van elke leerling de afwijking van het gemiddelde. Dit doen we door van de score x_i van leerling met klasnummer i het gemiddelde $\bar{x}$ af te trekken:

$$x_i - \bar{x}.$$

Dit vertelt ons hoeveel punten een leerling boven of onder het gemiddelde scoorde. De eerste leerling scoorde 57. Als we daar het gemiddelde $\bar{x} = 60$ van aftrekken, krijgen we $57 - 60 = -3$.

Deze berekening maken we voor alle leerlingen.

Leerling i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯	20
Score x_i	57	70	55	67	68	54	63	58	57	⋯	59
$x_i - \bar{x}$	-3	10	-5	7	8	-6	3	-2	-3	⋯	-1

Stap 2: Negatieve tekens wegwerken

Om de totale spreiding ten opzichte van het gemiddelde te bepalen, lijkt het logisch om alle afwijkingen op te tellen. Dit heeft echter geen zin. Als we alle afwijkingen optellen, krijgen we altijd 0 omdat de positieve en negatieve afwijkingen elkaar opheffen. Dat helpt ons dus niet om de spreiding te meten.

Om dat probleem op te lossen, nemen we het kwadraat van elke afwijking.

Leerling i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯	20
Score x_i	57	70	55	67	68	54	63	58	57	⋯	59
$x_i - \bar{x}$	-3	10	-5	7	8	-6	3	-2	-3	⋯	-1
$(x_i - \bar{x})^2$	9	100	25	49	64	36	9	4	9	⋯	1

Nu zijn alle waarden positief en wegen grote afwijkingen zwaarder door.

Stap 3: Gemiddelde van de gekwadrateerde afwijkingen nemen

We nemen nu het gemiddelde van alle gekwadrateerde afwijkingen door hun som te nemen en te delen door het aantal waarnemingen. Er zitten 20 leerlingen in de klas, dus hier delen we door 20.

$$\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{20}(9 + 100 + 25 + 49 + 64 + 36 + 9 + 4 + 9 + \ldots + 1) = 28.3$$

Op deze manier hebben we de *variantie* berekend.

Definitie 3.3.1. De **variantie** meet hoe sterk de waarden afwijken van het gemiddelde. Voor n

3.3 Spreidingsmaten: variantie en standaardafwijking

waarden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ met gemiddelde $\bar{x}$ bereken je de variantie door:

$$\text{Variantie} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Stap 4: Terug naar de oorspronkelijke eenheid

De variantie heeft als eenheid het *kwadraat* van de oorspronkelijke eenheid. In ons voorbeeld is de eenheid van de variantie dus punten^2. Dat is niet zo intuïtief. We nemen de vierkantswortel om terug te keren naar de oorspronkelijke eenheid. We hebben dan de *standaardafwijking* berekend.

Definitie 3.3.2. De **standaardafwijking** is de vierkantswortel van de variantie:

$$\text{Standaardafwijking} = \sqrt{\text{Variantie}}$$

In ons voorbeeld is de variantie 28.3. Om de standaardafwijking te berekenen, nemen we de vierkantswortel.

$$\text{Standaardafwijking} = \sqrt{28.3} \approx 5.32$$

Deze standaardafwijking van 5.32 betekent dat de scores doorgaans ongeveer 5 punten van het gemiddelde van 60 verwijderd liggen.

Voorbeeld 3.3.2. Dataset: 2, 4, 6.

Het gemiddelde van deze dataset is $\bar{x} = 4$.

$$\text{Variantie} = \frac{1}{3}\left[(2-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2\right] = \frac{1}{3}(4+0+4) = \frac{8}{3} \approx 2.67$$

$$\text{Standaardafwijking} = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1.63$$

Dit betekent dat de waarden in deze dataset rond het gemiddelde van 4 verspreid liggen met een standaardafwijking van ongeveer 1.63.

Oefening 3.3.1. In klas C scoren de leerlingen als volgt op het examen:

Scores klas C: 32, 23, 95, 45, 51, 21.5, 85, 100, 68, 79.5

1. Bereken het gemiddelde $\bar{x}$ van deze dataset. ……

We willen van deze dataset de variantie en standaardafwijking berekenen. Vul de ontbrekende getallen aan.

Leerling i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Score x_i	32	23	95	45	51	21.5	85	100	68	79.5
$x_i - \bar{x}$	-28	-37	35	A	-9	C	25	40	8	19.5
$(x_i - \bar{x})^2$	784	1369	1225	B	81	D	625	1600	64	380.25

2. A = ……

3. B = ……

4. C = ……

5. D = ……

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Spreidingsmaten: variantie en standaardafwijking

6. Bereken de variantie van deze dataset.

Variantie = ...

7. Bereken de standaardafwijking van deze dataset. Rond af op twee decimalen.

Standaardafwijking = ...

8. Wat vertellen het gemiddelde en standaardafwijking over de scores in klas C?

9. In klas A was de gemiddelde score ook 60, maar was de standaardafwijking 5.32. Wat betekent dit?

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Humane Wetenschappen

Module 4
Verbanden tussen data

(Versie 2026/09/09H.34)

4.1 Verbanden tussen data

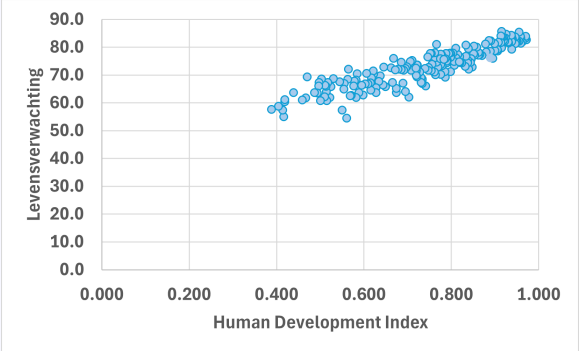
Voorbeeld 4.1.1 (Het verband tussen levensverwachting en levensomstandigheden)**.**

Er is een duidelijk verband tussen hoe lang mensen gemiddeld leven en de omstandigheden waarin ze leven. In landen waar mensen toegang hebben tot goede gezondheidszorg, degelijk onderwijs en een stabiel inkomen, leven ze vaak langer.

Die drie factoren, gezondheid, onderwijs en inkomen, worden samengebracht in één maat: de **Human Development Index (HDI)**. Deze index geeft aan hoe ontwikkeld een land is, en ligt tussen 0 (zeer lage ontwikkeling) en 1 (zeer hoge ontwikkeling).

De **levensverwachting** is het gemiddeld aantal jaren dat een persoon verwacht te leven vanaf de geboorte. Die verwachting wordt berekend op basis van sterftecijfers in een land.

Door levensverwachting te vergelijken met de Human Development Index, kunnen we onderzoeken hoe menselijke ontwikkeling samenhangt met hoe lang mensen leven. Dat zie je in de volgende figuur. Elk punt stelt een land voor.



Los onderstaande vragen op met behulp van de figuur.

1. Wat kun je zeggen over landen met een HDI van ongeveer 0.9?

Meerkeuze:

(a) Ze hebben een levensverwachting van minder dan 60 jaar.

(b) Ze hebben een levensverwachting van meer dan 75 jaar. ✓

(c) Ze zijn gelijkmatig verspreid over alle levensverwachtingen.

(d) Ze hebben een HDI lager dan gemiddeld.

2. Wat valt je op als je kijkt naar landen met een HDI lager dan 0.5?

Meerkeuze:

(a) Ze zijn gelijkmatig verspreid over alle levensverwachtingen.

(b) Ze hebben een hogere levensverwachting dan landen met een hoge HDI.

(c) Ze hebben meestal een levensverwachting boven de 80 jaar.

(d) Ze hebben een levensverwachting onder de 70 jaar. ✓

3. Welk verband zie je in de grafiek tussen HDI en levensverwachting?

Meerkeuze:

CC BY-NC-SA 4.0

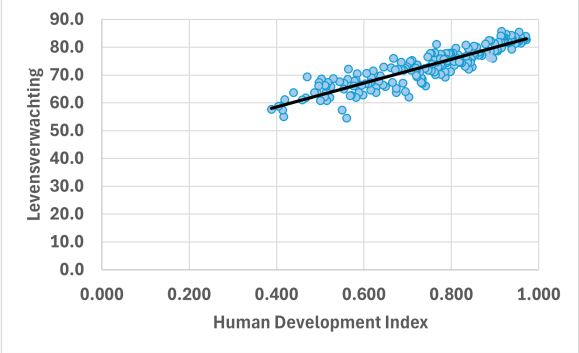
4.1 Verbanden tussen data

(a) Geen verband: de punten liggen willekeurig verspreid.

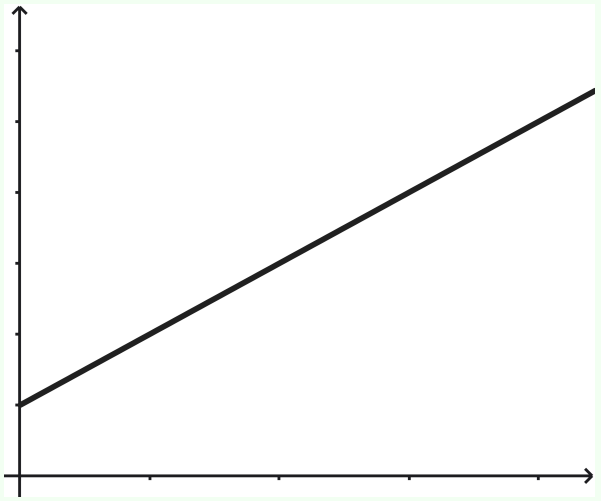
(b) Positief verband: als HDI stijgt, stijgt de levensverwachting. ✓

(c) Negatief verband: als HDI stijgt, daalt de levensverwachting.

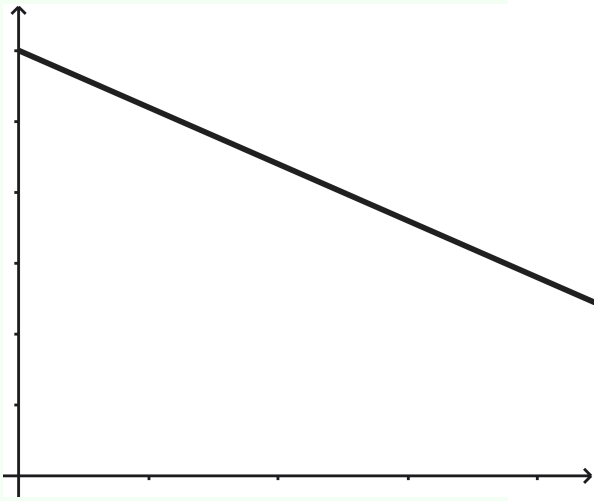
Het verband tussen de levensverwachting en de HDI kan ook weergegeven worden met een trendlijn. Die lijn volgt zo goed mogelijk de vorm van de puntenwolk en geeft het algemene patroon weer.



Definitie 4.1.1. Een grafiek die een rechte lijn vormt, stelt een **lineair verband** voor tussen twee variabelen. Als de lijn stijgt, spreken we van een **positief lineair verband**; daalt ze, dan is er sprake van een **negatief lineair verband**. Gaat de lijn bovendien door de oorsprong, dan noemen we dit een **recht evenredig verband**.



Positief lineair verband



Negatief lineair verband

Oefening 4.1.1. Geef voor elk scenario aan of het verband tussen de twee variabelen een **positief lineair** of een **negatief lineair** verband is.

1. Hoe meer uren je werkt op je studentenjob, hoe meer loon je krijgt.

Meerkeuze:

(a) Positief lineair verband

(b) Negatief lineair verband

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Verbanden tussen data

2. Hoe langer je wandelt aan een constant tempo, hoe meer afstand je aflegt.

Meerkeuze:

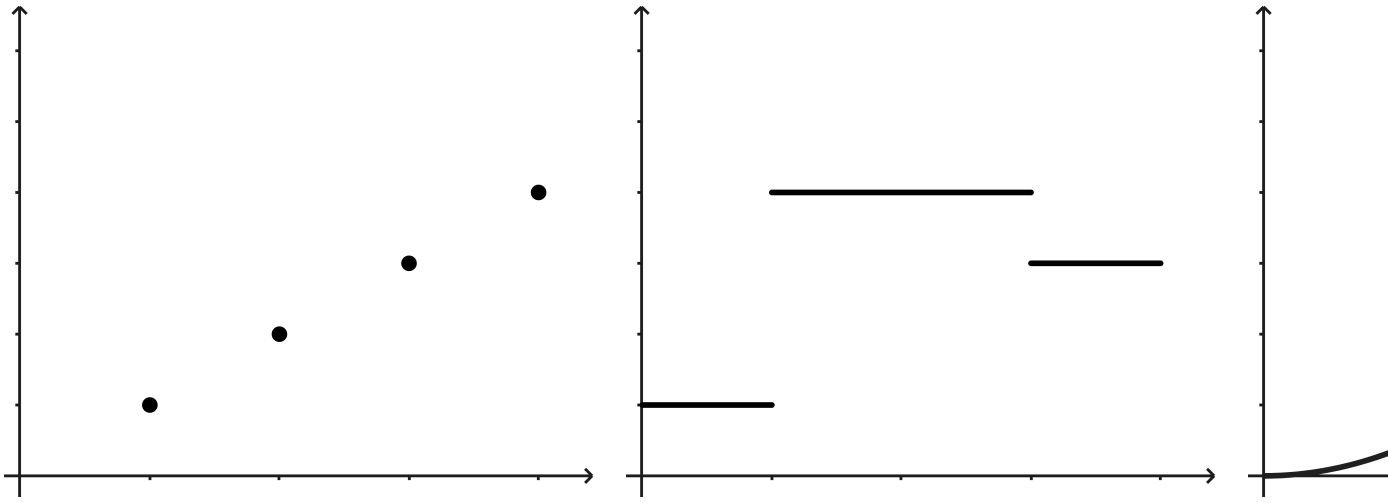
(a) Positief lineair verband (b) Negatief lineair verband

3. Hoe meer kilometers je rijdt met je auto, hoe minder benzine er nog in de tank zit.

Meerkeuze:

(a) Positief lineair verband (b) Negatief lineair verband

Er zijn ook andere verbanden mogelijk dan lineaire verbanden. Hieronder zie je enkele voorbeelden.



Grafiek A *Grafiek B*

Oefening 4.1.2. Geef voor elk scenario aan welke grafiek (A, B, C of D) het verband tussen de twee variabelen het best weergeeft.

1. Op basis van je leeftijd wordt de inkomprijs bepaald die je betaalt voor toegang tot een museum. Kinderen, volwassenen en senioren betalen elk een ander tarief.

Meerkeuze:

(a) Grafiek A (c) Grafiek C

(b) Grafiek B (d) Grafiek D

2. De verandering van de buitentemperatuur doorheen de dag.

Meerkeuze:

(a) Grafiek A (c) Grafiek C

(b) Grafiek B (d) Grafiek D

3. De lengte van de zijde van een vierkant terras bepaalt hoeveel het kost om het aan te leggen.

CC BY-NC-SA 4.0

Meerkeuze:

(a) Grafiek A
(c) Grafiek C
(b) Grafiek B
(d) Grafiek D

4. Voor je verjaardag trakteer je je vrienden op een cinemabezoek. Je betaalt voor elk ticket afzonderlijk. Hoe meer vrienden er meegaan, hoe hoger de totale kost.

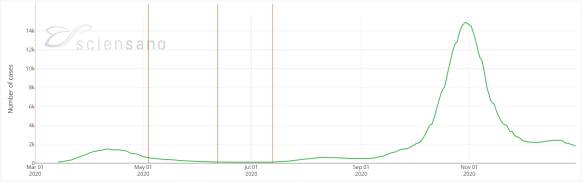
Meerkeuze:

(a) Grafiek A
(c) Grafiek C
(b) Grafiek B
(d) Grafiek D

Groei: lineair versus exponentieel

Voorbeeld 4.1.2 (Groei van coronacijfers in 2020)**.**

Tijdens de coronapandemie zagen we hoe het aantal besmettingen in België veranderde doorheen het jaar 2020. De onderstaande grafiek toont het gemiddeld aantal nieuwe besmettingen per dag, berekend over de voorafgaande 14 dagen. Zo worden schommelingen door weekends en feestdagen afgevlakt.



Bron: Sciensano https://epidata.sciensano.be/epistat/dashboard

Wat valt op?

- In maart en april is er een eerste stijging, gevolgd door een daling.
- Tussen mei en augustus blijft het aantal besmettingen relatief laag en stijgt het langzaam.
- Vanaf september stijgt het aantal besmettingen veel sneller, met een scherpe piek eind oktober.

We spreken van **groei** wanneer cijfers toenemen. Die groei kan op verschillende manieren verlopen. We bestuderen het verschil tussen **lineaire** en **exponentiële** groei.

Definitie 4.1.2.

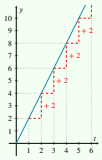
CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Verbanden tussen data

Lineaire groei betekent dat een hoeveelheid toeneemt met een vast verschil per tijdseenheid.

Tijd t	0	1	2	3	4	5	6
Waarde y	0	2	4	6	8	10	12

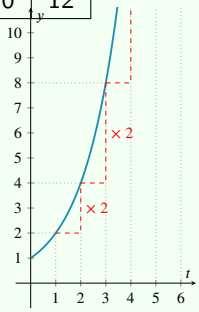
Grafiek: rechte lijn.



Exponentiële groei betekent dat een hoeveelheid toeneemt met een vaste *vermenigvuldigingsfactor* per tijdseenheid.

Tijd t	0	1	2	3	4	5	6
Waarde y	1	2	4	8	16	32	64

Grafiek: kromme die steeds steiler wordt.



Oefening 4.1.3. Vergelijk de tabellen en grafieken uit de definitie.

1. Wat valt je op als je de eerste drie tijdstippen vergelijkt?

Meerkeuze:

(a) Exponentiële groei is meteen veel groter dan lineaire groei.

(b) De waarden liggen dicht bij elkaar.

(c) Lineaire groei stijgt sneller dan exponentiële groei.

2. Wat gebeurt er vanaf $t = 4$?

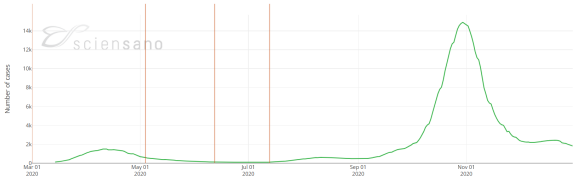
Meerkeuze:

(a) De lineaire groei haalt de exponentiële groei in.

(b) Beide groeivormen blijven ongeveer gelijk.

(c) Exponentiële groei stijgt veel sneller dan lineaire groei.

3. Op basis van de grafiek met het verloop van COVID-19-besmettingen in België in 2020, in welke periode was er duidelijk sprake van een exponentiële stijging?



Meerkeuze:

(a) Van mei tot augustus

(b) Van maart tot april

(c) Van september tot eind oktober

(d) Van november tot december

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Verbanden tussen data

4. Waarom vormt exponentiële groei een bijzonder risico bij de verspreiding van een virus?

Meerkeuze:

(a) Omdat het aantal besmettingen toeneemt met een vast verschil per tijdseenheid, waardoor het verloop voorspelbaar blijft.

(b) Omdat het aantal besmettingen in het begin snel daalt, maar daarna opnieuw stijgt.

(c) Omdat een aanvankelijk trage toename bij exponentiële groei snel omslaat in een explosieve stijging.

(d) Omdat exponentiële groei enkel optreedt bij virussen met een sterftegraad boven 10%.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Humane Wetenschappen

Module 5
Rekenen met data

(Versie 2026/09/09H.34)

5.1 Logisch redeneren

Datageletterdheid gaat niet alleen over het lezen van grafieken of het uitvoeren van berekeningen. Even belangrijk is het correct interpreteren van uitspraken en conclusies op basis van gegevens.

In onderzoeksrapporten, nieuwsartikelen en beleidsdocumenten kom je voortdurend uitspraken tegen over groepen mensen, verbanden tussen variabelen en mogelijke verklaringen voor wat we waarnemen. Zo lees je bijvoorbeeld dat alle jongeren sociale media gebruiken, dat er een verband bestaat tussen stress en slaaptekort of dat betere studieresultaten volgen wanneer studenten meer studeren.

Om zulke uitspraken kritisch te beoordelen, moet je weten wat ze precies betekenen en welke conclusies er logisch uit volgen. Soms volgt een conclusie wel uit de beschikbare informatie, soms niet. Een kleine wijziging in de formulering van een uitspraak kan daarbij een groot verschil maken.

5.1.1 Wat is een uitspraak?

Oefening 5.1.1. Duid alle zinnen aan waarvan kan worden bepaald of ze waar of onwaar zijn.

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) Waarom gebruiken jongeren sociale media?

(b) Mexico is deel van Europa.

(c) Alle studenten hebben een smartphone.

(d) Vul de enquête in.

(e) De werkloosheid is gedaald ten opzichte van vorig jaar.

(f) Hopelijk slaag ik voor het examen.

(g) Regent het?

(h) Sommige studenten combineren werk en studie.

Definitie 5.1.1. Een **(logische) uitspraak** is een zin waarvan je kan bepalen of ze waar of onwaar is.

Voorbeeld 5.1.1. Wel uitspraken

- Sommige jongeren gebruiken meer dan vier uur per dag sociale media.
- Leuven is de hoofdstad van België.
- Alle studenten lezen elke dag een krant.
- België heeft een leerplicht.

Merk op dat een uitspraak niet noodzakelijk waar hoeft te zijn. Het volstaat dat we kunnen bepalen of de uitspraak waar of onwaar is. Zo is "Leuven is de hoofdstad van België" onwaar en is "Alle studenten lezen elke dag een krant" waarschijnlijk ook onwaar, maar beide zinnen blijven wel uitspraken.

Geen uitspraken

- Hoe tevreden ben jij met je opleiding?
- Denk kritisch na over deze grafiek.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Logisch redeneren

- Ik hoop dat het morgen mooi weer wordt.
- Zou je deze enquête willen invullen?

Oefening 5.1.2. Geef voor elke zin aan of het een uitspraak is.

1. Een dolfijn is een zoogdier.

Ja	Nee

2. Waar is Wally?

Ja	Nee

3. Alle studenten wonen op kot.

Ja	Nee

4. De aarde heeft twee manen.

Ja	Nee

5. Appels zijn lekker.

Ja	Nee

5.1.2 Uitspraken verbinden

Uitspraken komen vaak niet afzonderlijk voor. In teksten, argumentaties en onderzoeksrapporten worden meerdere uitspraken met elkaar verbonden. Zo ontstaan nieuwe uitspraken waarvan we opnieuw kunnen bepalen of ze waar of onwaar zijn.

5.1.2.1 En

Oefening 5.1.3. Voor één van je vakken geldt de volgende regel:

Je slaagt voor het vak als je slaagt voor het practicum en het examen.

Duid voor elke situatie aan of de student volgens deze regel geslaagd is voor het vak.

1. De student slaagt voor het practicum **en** voor het examen.

Geslaagd	Niet geslaagd

2. De student slaagt voor het practicum, maar niet voor het examen.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Logisch redeneren

Geslaagd	Niet geslaagd

3. De student slaagt niet voor het practicum, maar wel voor het examen.

Geslaagd	Niet geslaagd

4. De student slaagt noch voor het practicum, noch voor het examen.

Geslaagd	Niet geslaagd

Definitie 5.1.2. Twee uitspraken kunnen verbonden worden met het woord **en**.
Een uitspraak met het woord **en** is enkel waar wanneer *beide* delen van de uitspraak waar zijn.

Voorbeeld 5.1.2. Beschouw de uitspraken:

- De student volgt de les.
- De student maakt de opdrachten.

De samengestelde uitspraak

De student volgt de les en maakt de opdrachten.

is enkel waar wanneer beide uitspraken waar zijn.

5.1.2.2 Of

Oefening 5.1.4. In een pretpark geldt de volgende regel:

Een kind mag op de attractie als het groter is dan 1m20 **of** begeleid wordt door een volwassene.

Duid voor elke situatie aan of het kind op de attractie mag.

1. Het kind is groter dan 1m20 en wordt begeleid door een volwassene.

Mag op de attractie	Mag niet op de attractie

2. Het kind is groter dan 1m20, maar wordt niet begeleid door een volwassene.

Mag op de attractie	Mag niet op de attractie

3. Het kind is niet groter dan 1m20, maar wordt wel begeleid door een volwassene.

Mag op de attractie	Mag niet op de attractie

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Logisch redeneren

4. Het kind is niet groter dan 1m20 en wordt niet begeleid door een volwassene.

Mag op de attractie	Mag niet op de attractie

Definitie 5.1.3. Twee uitspraken kunnen verbonden worden met het woord **of**.

Een uitspraak met het woord **of** is waar wanneer *minstens* één van beide delen van de uitspraak waar is. Beide uitspraken mogen ook tegelijk waar zijn.

Voorbeeld 5.1.3. Beschouw de uitspraken:

- De student heeft een studentenjob.
- De student doet vrijwilligerswerk.

De samengestelde uitspraak

De student heeft een studentenjob of doet vrijwilligerswerk.

is waar wanneer minstens één van beide uitspraken waar is. Beide uitspraken mogen ook tegelijk waar zijn.

Opmerking 5.1.1. In de logica betekent **of** dat minstens één van beide uitspraken waar is. Beide uitspraken mogen dus ook tegelijk waar zijn. In de spreektaal wordt of vaak anders gebruikt. Als iemand vraagt "Wil je koffie of thee?" dan bedoelt die meestal dat je één van beide kiest. In de logica zou ook "koffie én thee" mogelijk zijn. In deze cursus gebruiken we steeds de logische betekenis van of. Deze wordt ook wel de *inclusieve of* genoemd.

5.1.2.3 Als ..., dan ...

Oefening 5.1.5. Een onderwijsinstelling hanteert de volgende regel:

Als een student alle opdrachten indient, dan mag de student deelnemen aan het examen.

Duid voor elke situatie aan of deze in overeenstemming is met de regel.

1. De student dient alle opdrachten in en mag deelnemen aan het examen.

In overeenstemming met de regel	Niet in overeenstemming met de regel

2. De student dient alle opdrachten in, maar mag niet deelnemen aan het examen.

In overeenstemming met de regel	Niet in overeenstemming met de regel

3. De student dient niet alle opdrachten in en mag niet deelnemen aan het examen.

In overeenstemming met de regel	Niet in overeenstemming met de regel

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Logisch redeneren

4. De student dient niet alle opdrachten in en mag toch deelnemen aan het examen.

In overeenstemming met de regel	Niet in overeenstemming met de regel

Definitie 5.1.4. Uitspraken kunnen verbonden worden met de woorden **als ..., dan ...**. In de spreektaal wordt dit ook vaak geformuleerd als **wanneer ...**, **van zodra ...** of **telkens als ...**. Een uitspraak van de vorm **als ..., dan ...** legt een voorwaarde op: wanneer het eerste deel van de uitspraak waar is, moet ook het tweede deel waar zijn.

Zo'n uitspraak is enkel onwaar wanneer het eerste deel waar is en het tweede deel onwaar is. We noteren een uitspraak van deze vorm vaak met een enkele pijl:

$$\text{eerste uitspraak} \implies \text{tweede uitspraak}$$

Opmerking 5.1.2. Beschouw de uitspraak

Als Anthe jarig is, dan geef ik haar een cadeau.

Wanneer we weten dat Anthe jarig is, dan weten we ook dat ik haar een cadeau geef. Het feit dat Anthe jarig is, is dus een **voldoende voorwaarde** om te besluiten dat ik haar een cadeau geef.

Omgekeerd is het krijgen van een cadeau wel een **noodzakelijke voorwaarde** om jarig te zijn aangezien ik haar altijd een cadeau geef wanneer ze jarig is.

Voorbeeld 5.1.4. Beschouw de uitspraak:

Als een student regelmatig naar de les komt, dan slaagt de student voor het vak.

Deze uitspraak is onwaar zodra er één student bestaat die regelmatig naar de les komt maar niet slaagt voor het vak.

5.1.2.4 Contrapositie

Beschouw een uitspraak van de vorm:

Als een bepaalde voorwaarde vervuld is, **dan** treedt een bepaald gevolg op.

Dit is evenwaardig met:

Als het gevolg *niet* optreedt, **dan** was de voorwaarde *niet* vervuld.

Dit noemen we de **contrapositie**.

Voorbeeld 5.1.5. Beschouw de uitspraak:

Als een student afstudeert, dan heeft die alle opleidingsonderdelen succesvol afgelegd.

Dit is evenwaardig met:

Als een student niet alle opleidingsonderdelen succesvol heeft afgelegd, dan studeert die niet af.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Logisch redeneren

Oefening 5.1.6. Beschouw de uitspraak:

Als ik op alle vakken slaag, dan krijg ik een auto van mijn ouders.

Welke uitspraak is de contrapositie?

Meerkeuze:

(a) Als ik een auto van mijn ouders krijg, dan ben ik op alle vakken geslaagd.

(b) Als ik geen auto van mijn ouders krijg, dan ben ik niet op alle vakken geslaagd.

(c) Als ik niet op alle vakken geslaagd ben, dan krijg ik geen auto van mijn ouders.

5.1.2.5 Typische denkfouten

Voorbeeld 5.1.6. Beschouw de uitspraak:

Als iemand een universitair diploma heeft, dan heeft die hoger onderwijs gevolgd.

Hieruit mag je niet besluiten:

Als iemand hoger onderwijs heeft gevolgd, dan heeft die een universitair diploma.

Iemand kan hoger onderwijs gevolgd hebben zonder een universitair diploma te behalen.

Ook de volgende redenering is fout.

Voorbeeld 5.1.7. Beschouw de uitspraak:

Als iemand regelmatig sport, dan verbetert de conditie.

Hieruit mag je niet besluiten:

Als iemand niet regelmatig sport, dan verbetert de conditie niet.

De uitspraak zegt alleen wat er gebeurt wanneer iemand regelmatig sport. Ze zegt niets over mensen die niet regelmatig sporten. Hun conditie kan bijvoorbeeld verbeteren door fysiek werk of andere vormen van beweging.

Oefening 5.1.7. Beschouw de uitspraak:

Als de straat nat is, dan heeft het geregend.

Duid alle uitspraken aan die logisch equivalent zijn met deze uitspraak.

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) Als het geregend heeft, dan is de straat nat.

(b) Als de straat niet nat is, dan heeft het niet geregend.

CC BY-NC-SA 4.0

(c) Als het niet geregend heeft, dan is de straat niet nat.

(d) De straat is nat als en slechts als het geregend heeft.

5.1.2.6 Als en slechts als

Oefening 5.1.8. In de bibliotheek geldt de volgende regel:

Een bezoeker is een lid van de bibliotheek als en slechts als die een geldige lidkaart heeft.

Duid voor elke situatie aan of deze in overeenstemming is met de regel.

1. De bezoeker heeft een geldige lidkaart en is lid van de bibliotheek.

In overeenstemming met de regel	Niet in overeenstemming met de regel

2. De bezoeker heeft een geldige lidkaart, maar is geen lid van de bibliotheek.

In overeenstemming met de regel	Niet in overeenstemming met de regel

3. De bezoeker heeft geen geldige lidkaart, maar is toch lid van de bibliotheek.

In overeenstemming met de regel	Niet in overeenstemming met de regel

4. De bezoeker heeft geen geldige lidkaart en is geen lid van de bibliotheek.

In overeenstemming met de regel	Niet in overeenstemming met de regel

Definitie 5.1.5. Uitspraken kunnen verbonden worden met de woorden **als en slechts als**.

Een uitspraak van de vorm **als en slechts als** legt een wederzijdse voorwaarde op: telkens wanneer het eerste deel van de uitspraak waar is, moet ook het tweede deel waar zijn, en omgekeerd.

We noteren een uitspraak van deze vorm vaak met een dubbele pijl:

$$\text{eerste uitspraak} \iff \text{tweede uitspraak}$$

Voorbeeld 5.1.8. Beschouw de uitspraak:

Een bezoeker mag de bioscoopzaal binnen als en slechts als die een geldig ticket heeft.

Deze uitspraak betekent twee dingen tegelijk:

- Als een bezoeker de bioscoopzaal mag binnenkomen, dan heeft die een geldig ticket.
- Als een bezoeker een geldig ticket heeft, dan mag die de bioscoopzaal binnenkomen.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Logisch redeneren

Opmerking 5.1.3. Bij een uitspraak van de vorm **als en slechts als** is elke voorwaarde zowel **voldoende** als **noodzakelijk**.

In dit voorbeeld is een geldig ticket hebben voldoende om de bioscoopzaal binnen te mogen. Tegelijk is het ook noodzakelijk: zonder geldig ticket mag een bezoeker de bioscoopzaal niet binnen.

5.1.3 Uitspraken ontkennen

Een uitspraak ontkennen betekent aangeven dat ze onwaar is.

5.1.3.1 Niet "... en ..."

Oefening 5.1.9. Beschouw de uitspraak:

Een student heeft een studentenjob en doet vrijwilligerswerk.

Welke uitspraak betekent hetzelfde als de ontkenning van deze uitspraak?

Meerkeuze:

(a) De student heeft geen studentenjob of doet geen vrijwilligerswerk.

(b) De student heeft geen studentenjob en doet geen vrijwilligerswerk.

(c) De student heeft een studentenjob of doet vrijwilligerswerk.

Opmerking 5.1.4. Wanneer we een uitspraak met het woord **en** ontkennen, volstaat het dat minstens één van beide delen niet waar is.

De ontkenning van

De student heeft een studentenjob **en** doet vrijwilligerswerk.

is daarom

De student heeft *geen* studentenjob **of** doet *geen* vrijwilligerswerk.

Oefening 5.1.10. Formuleer de *ontkenning* van de volgende uitspraak.

Een student woont op kot en heeft een studentenjob.

5.1.3.2 Niet "... of ..."

Oefening 5.1.11. Beschouw de uitspraak:

Het museum is open of er is een tentoonstelling.

Welke uitspraak betekent hetzelfde als de *ontkenning* van deze uitspraak?

Meerkeuze:

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Logisch redeneren

(a) Het museum is niet open of er is geen tentoonstelling.

(b) Het museum is niet open en er is geen tentoonstelling.

(c) Het museum is open en er is een tentoonstelling.

Opmerking 5.1.5. Wanneer we een uitspraak met het woord **of** ontkennen, moeten beide delen niet waar zijn.

De ontkenning van

Het museum is open **of** er is een tentoonstelling.

is daarom

Het museum is *niet* open **en** er is *geen* tentoonstelling.

Oefening 5.1.12. Formuleer de *ontkenning* van de volgende uitspraak.

Een student woont op kot of pendelt dagelijks naar de campus.

5.1.3.3 Niet "alle"

Oefening 5.1.13. Onderzoekers beweren:

Alle studenten gebruiken sociale media.

De uitspraak blijkt *onwaar*. Wat volgt daaruit?

Meerkeuze:

(a) Geen enkele student gebruikt sociale media.

(b) De meeste studenten gebruiken geen sociale media.

(c) Er bestaat minstens één student die geen sociale media gebruikt.

Opmerking 5.1.6. Wanneer we een uitspraak die begint met **alle** ontkennen, vervangen we **alle** door **er bestaat minstens één** en ontkennen we de eigenschap die erop volgt.

De ontkenning van

Alle studenten gebruiken sociale media.

is daarom

Er bestaat minstens één student die *geen* sociale media gebruikt.

Om een uitspraak met **alle** onwaar te maken, volstaat dus één tegenvoorbeeld waarvoor de eigenschap niet geldt.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Logisch redeneren

Oefening 5.1.14. Formuleer de *ontkenning* van de volgende uitspraak.

Alle bezoekers hebben een ticket.

5.1.3.4 Niet "er bestaat"

Oefening 5.1.15. Beschouw de uitspraak:

Er bestaat een student die meer dan tien uur per dag studeert.

De uitspraak blijkt *onwaar*. Wat volgt daaruit?

Meerkeuze:

(a) Niet alle studenten studeren meer dan tien uur per dag.

(b) Geen enkele student studeert meer dan tien uur per dag.

(c) Alle studenten studeren hoogstens tien uur per dag.

(d) Geen enkele student studeert.

Opmerking 5.1.7. Wanneer we een uitspraak die begint met **er bestaat** ontkennen, vervangen we **er bestaat** door **alle** en ontkennen we de eigenschap die erop volgt.

De ontkenning van

Er bestaat een student die meer dan tien uur per dag studeert.

is daarom

Alle studenten studeren hoogstens tien uur per dag.

Om een uitspraak met **er bestaat** onwaar te maken, mag er dus geen enkel geval bestaan waarvoor de eigenschap geldt.

Oefening 5.1.16. Formuleer de *ontkenning* van de volgende uitspraak.

Er bestaat een student die meer dan één opleiding volgt.

5.1.4 Oefeningen

Oefening 5.1.17. Geef voor elke zin aan of het een uitspraak is.

1. Alle studenten zijn aanwezig.

Uitspraak	Geen uitspraak

2. Hoe laat begint de les?

Uitspraak	Geen uitspraak

3. Hopelijk wordt het morgen zonnig.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Logisch redeneren

Uitspraak	Geen uitspraak

4. Er is een student die meer dan drie talen spreekt.

Uitspraak	Geen uitspraak

Oefening 5.1.18. Duid telkens de correcte *ontkenning* aan.

1. Alle studenten hebben een laptop.

Geen enkele student heeft een laptop.	Er is minstens één student die geen laptop heeft.	Sommige studenten hebben een

2. Er is een student die dagelijks sport.

Niet alle studenten sporten dagelijks.	Geen enkele student sport dagelijks.	Alle studenten sporten dagelijks.

Oefening 5.1.19. Beschouw de uitspraak

Een student ontvangt het certificaat als die alle opdrachten maakt en slaagt voor de eindtoets.

Welke conclusie volgt zeker?

Meerkeuze:

(a) Wie het certificaat ontvangt, heeft alle opdrachten gemaakt of is geslaagd voor de eindtoets.

(b) Wie niet slaagt voor de eindtoets, ontvangt zeker geen certificaat en heeft de opdrachten niet gemaakt.

(c) Wie het certificaat niet haalt, heeft ofwel niet alle opdrachten gemaakt of is niet geslaagd voor de eindtoets.

Oefening 5.1.20. Beschouw de uitspraak

Een student krijgt een vrijstelling als die al werkervaring heeft of een eerder gelijkwaardig vak heeft afgelegd.

Welke conclusie volgt zeker?

Meerkeuze:

(a) Wie werkervaring heeft krijgt een vrijstelling.

(b) Wie een vrijstelling krijgt, heeft zowel werkervaring opgedaan als een gelijkwaardig vak afgelegd.

(c) Wie geen werkervaring heeft, krijgt geen vrijstelling.

(d) Wie werkervaring heeft, heeft ook een gelijkwaardig vak afgelegd.

Oefening 5.1.21. Beschouw de uitspraak

Als iemand een festivalticket heeft, dan mag die het festivalterrein betreden.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Logisch redeneren

Welke conclusie volgt zeker?

Meerkeuze:

(a) Wie het festivalterrein mag betreden, heeft een festivalticket.

(b) Wie het festivalterrein niet mag betreden, heeft geen festivalticket.

(c) Wie geen festivalticket heeft, mag het festivalterrein niet betreden.

(d) Wie een festivalticket heeft, blijft de hele dag op het festival.

Oefening 5.1.22. Beschouw de uitspraak

Een persoon staat ingeschreven voor de workshop als en slechts als die een bevestigingsmail heeft ontvangen.

Duid alle uitspraken aan die zeker waar zijn.

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) Als een persoon ingeschreven is voor de workshop, dan heeft die een bevestigingsmail ontvangen.

(b) Als een persoon een bevestigingsmail heeft ontvangen, dan is die ingeschreven voor de workshop.

(c) Sommige personen zonder bevestigingsmail zijn toch ingeschreven voor de workshop.

(d) Als een persoon geen bevestigingsmail heeft ontvangen, dan is die niet ingeschreven voor de workshop.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Volgorde van bewerkingen

Stel, je kookt een pasta. Eerst meng je de ingrediënten voor de saus en verwarm je ze, daarna gaat de saus bij de pasta en pas op het einde strooi je er wat kaas over. Als je die volgorde door elkaar haalt, loopt het mis:

- Als je de kaas al door de saus mengt voordat die warm is, smelt hij niet goed.
- Voeg je de pasta toe vóór je de saus hebt gemengd, dan krijg je ongelijk verdeelde smaken.

Bij rekenen werkt het net zo. De *volgorde van bewerkingen* bepaalt of je het juiste resultaat krijgt. Ken jij de correcte volgorde?

Oefening 5.2.1. Op sociale media duikt regelmatig een discussie op over de juiste uitkomst van onderstaande berekeningen. Wat denk jij?

1. $25 + 15 : 5 =$ | 8 | 40 | 28 | 10 |

2. $\sqrt{9+16} =$ | 5 | 7 | 13 | 25 |

3. $16 : 4 : 2 =$ | 8 | 4 | 2 | 1 |

4. $10 - 7 - 1 + 2 =$ | 0 | 2 | 3 | 4 |

5. $6 : 2 \cdot (1+2) + 3 =$ | 4 | 12 | 6 | 9 |

Eigenschap 5.2.1. Bij rekenen met meerdere bewerkingen geldt de volgorde van bewerkingen:

Haakjes $\longrightarrow$ Machten en Wortels $\longrightarrow$ Vermenigvuldigen en Delen $\longrightarrow$ Optellen en Aftrekken

Een ezelsbruggetje om deze volgorde te onthouden is *"Het Mannetje Won Van De Oude Aap."* waarbij elke eerste letter staat voor een stap.

Als er meerdere bewerkingen binnen dezelfde stap voorkomen, bijvoorbeeld meerdere vermenigvuldigingen en delingen, voer je ze *van links naar rechts* uit.

Voorbeeld 5.2.1. We rekenen $6 : 2 \cdot (1+2) + 3$ uit.
Stap 1: Haakjes uitwerken:

$$6 : 2 \cdot (1+2) + 3$$

Stap 2: Vermenigvuldigen en delen van links naar rechts

$$= 6 : 2 \cdot 3 + 3$$

$$= 3 \cdot 3 + 3$$

Stap 3: Optellen en aftrekken

$$= 9 + 3$$

$$= 12$$

Oefening 5.2.2.

1. $18 + 12 : 4 =$ ... ...

5.2 Volgorde van bewerkingen

2. $5 + (12 - 4) \cdot 3 = \ldots\ldots$

3. $\sqrt{16} + 18 : 6 = \ldots\ldots$

4. $-7^2 = \ldots\ldots$

5. $(-7)^2 = \ldots\ldots$

6. $40 : (5 + 3) = \ldots\ldots$

7. $100 : 5 + 2^3 = \ldots\ldots$

Oefening 5.2.3. Speel het volgende spel:

- Kies een getal.
- Vermenigvuldig het met 3.
- Tel er 6 bij op.
- Deel door 3.
- Trek je begingetal af.

Welk getal krijg je altijd? $\ldots\ldots$

Waarom is dat zo?

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Rekenen met haakjes

Voorbeeld 5.3.1 (Reisbudget omrekenen van dollar naar euro)**.**

Je maakt een rondreis door de Verenigde Staten en houdt je uitgaven per dag bij in dollar. Op een bepaalde dag heb je 5 uitgaven gedaan:

- \$40 voor eten
- \$55 voor een museumbezoek
- \$35 voor vervoer
- \$60 voor een concert
- \$20 voor souvenirs

Je wil weten hoeveel je die dag hebt uitgegeven in euro. De wisselkoers is €0.90 per dollar.
\$40 komt dus overeen met $0.90 \cdot 40 = 36$ euro.

Je totaal uitgegeven budget in euro kan je op twee manieren berekenen:

- **Methode 1:** Zet eerst elke uitgave om naar euro en tel op:

$$0.90 \cdot 40 + 0.90 \cdot 55 + 0.90 \cdot 35 + 0.90 \cdot 60 + 0.90 \cdot 20.$$

- **Methode 2:** Tel eerst alle uitgaven in dollar op en zet dan om naar euro:

$$0.90 \cdot (40 + 55 + 35 + 60 + 20).$$

Beide manieren geven hetzelfde resultaat. Dit komt door de *distributieve eigenschap*.

Eigenschap 5.3.1. Bij vermenigvuldigen en optellen (of aftrekken) geldt voor reële getallen a, b en c:

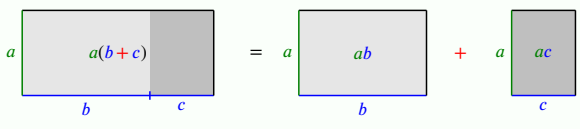
$$a\,(b+c) = ab + ac$$

en

$$a\,(b-c) = ab - ac$$

De factor buiten de haakjes wordt vermenigvuldigd met *elke* term binnen de haakjes.

Deze rekenregel kan je visueel voorstellen als de oppervlakte van een rechthoek met hoogte a en breedte $b+c$. De oppervlakte van deze rechthoek is dus $a(b+c)$.



We kunnen deze rechthoek opsplitsen in twee kleinere rechthoeken: één met breedte b en oppervlakte ab, en één met breedte c en oppervlakte ac. Daaruit volgt dat

$$a(b+c) = ab + ac$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Rekenen met haakjes

Voorbeeld 5.3.2.

$$-3(x+4) = -3x + (-3)\cdot 4 = -3x - 12$$

$$-2(7-x) = -2\cdot 7 - (-2)\cdot x = -14 + 2x$$

Voorbeeld 5.3.3 (Samen naar de film)**.**

Marlies en Lars gaan samen naar de film. Marlies betaalt het filmticket van €11 en de popcorn van €4 voor Lars. Na de film wil Lars zijn schuld terugbetalen. Hij kan dat op twee manieren bekijken:

- Het volledige bedrag in één keer terugbetalen:

$$-(11+4) = -15$$

- Of de kosten apart terugbetalen:

$$-11-4 = -15$$

Beide manieren geven hetzelfde resultaat.

Opmerking 5.3.1. Een minteken voor haakjes kun je zien als een vermenigvuldiging met -1. Bijvoorbeeld:

$$-(x+4) = -1(x+4) = -1\cdot x + (-1)\cdot 4 = -x - 4$$

$$-(7-x) = -1(7-x) = -1\cdot 7 - (-1)\cdot x = -7 + x$$

Oefening 5.3.1.

1. Dieter en Márcio gaan samen naar het casino en spelen roulette. Ze zetten allebei een bedrag in op zwart: Dieter zet €10 in en Márcio €4. Het balletje valt op zwart, dus hun inzetten worden verdubbeld.

Hoeveel geld hebben ze samen na het spel?

Ↄ … …

2. Werk uit: $-3(-2x+5) = \ldots\ldots$

3. Werk uit: $\frac{1}{2}(4x-6) = \ldots\ldots$

4. Emma gaat shoppen en koopt een broek van €25, een T-shirt van €12, schoenen van €40 en een pet van €8. Aan de kassa merkt ze dat ze haar portefeuille vergeten is, dus haar vriendin Aisha betaalt alles voor haar.

Eerder die week had Emma Aisha getrakteerd op een gemberthee van €3, die Aisha nog moet terugbetalen.

Hoeveel bedraagt de schuld van Emma?

€ … …

5. Werk uit: $(3-x)\cdot 5 = \ldots\ldots$

6. Werk uit: $5 + (3\cdot x) = \ldots\ldots$

7. Mila reist naar de Verenigde Staten en neemt daar deel aan drie loopwedstrijden. Ze loopt afstanden van 5 mijl, 10 mijl en 8.5 mijl. Om mijl om te zetten naar kilometer gebruik je dat 1 mijl ongeveer gelijk is aan 1.6 km.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/09H.34)

5.3 Rekenen met haakjes

Hoeveel kilometer heeft Mila in totaal gelopen?

…… km

8. Duid alle uitdrukkingen aan die gelijk zijn aan $-4(3x-5)$.

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $-12x-20$

(b) $-12x+20$

(c) $-4(-5+3x)$

(d) $(-4)\cdot 3x-(-4)\cdot 5$

(e) $(3x-5)(-4)$

9. Speel het volgende spel. Indien nodig kan je de module over volgorde van bewerkingen gebruiken.

- Kies een getal.
- Trek er 4 van af.
- Vermenigvuldig het resultaat met 5.
- Tel er 20 bij op.
- Deel door 5.

Noem het begingetal x. Welk getal krijg je altijd?

……

Waarom is dat zo?

Ook producten van uitdrukkingen tussen haakjes komen voor. In de uitweidingen hieronder zie je hoe je die uitwerkt.

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Breuken

Veel gegevens worden weergegeven als delen van een geheel: het aantal respondenten dat een antwoord kiest, de verdeling van een huishoudbudget of het aantal studenten dat een bepaalde studierichting volgt. Om zulke verhoudingen correct te interpreteren en ermee te rekenen heb je inzicht in breuken nodig. Ze zijn onmisbaar bij het analyseren van data, omdat ze verhoudingen duidelijk voorstellen en ons toelaten om gegevens correct te interpreteren.

Beantwoord de vragen in deze module zonder rekenmachine, tenzij dit uitdrukkelijk is toegestaan.

Voorbeeld 5.4.1. Volgens Statbel besteedden Belgische huishoudens in 2024 van hun totaal huishoudbudget gemiddeld ongeveer:

- $\frac{1}{3}$ aan hun woning (huur, water, gas, elektriciteit en andere brandstoffen),
- $\frac{1}{9}$ aan transport,
- $\frac{1}{7}$ aan voeding.

Bron: Statbel: Huishoudbudget https://statbel.fgov.be/nl/themas/huishoudens/huishoudbudget

1. Hoeveel van het budget is hiermee al besteed? Geef je breuk in met een schuine streep, dus bijvoorbeeld als 3/4. 37/63

2. Hoeveel van het budget is er dan nog over? 26/63

3. Hoeveel procent van het totale huishoudbudget vertegenwoordigen deze drie kostenposten samen? Rond af op een geheel percentage. Je mag hiervoor je rekenmachine gebruiken. 59

Om met zulke vragen aan de slag te gaan, moet je vlot met breuken kunnen rekenen. In de onderstaande video frissen we de rekenregels op.

Eigenschap 5.4.1.

- Een **breuk** heeft de vorm $\frac{a}{b}$, waarbij a en b reële getallen zijn. We noemen a de **teller** en b de **noemer**.

  $\frac{3}{4}$ is een breuk met teller 3 en noemer 4.

  Indien de noemer van een breuk 100 is, stelt de breuk een percentage voor. Zo is $29\% = \frac{29}{100}$.

- Een breuk **vereenvoudigen** betekent dat je een eenvoudigere, maar gelijke breuk zoekt. Je doet dit door een gemeenschappelijke deler van teller en noemer te vinden. Daarna deel je zowel de teller als de noemer door diezelfde deler.

  Een gemeenschappelijke deler van 18 en 24 is 6.

  $$\frac{18}{24} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{3 \cdot \cancel{6}}{4 \cdot \cancel{6}} = \frac{3}{4}.$$

  3 en 4 hebben geen gemeenschappelijke delers meer, dus de breuk is nu volledig vereenvoudigd.

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Breuken

- Twee breuken zijn **gelijk** als het kruisproduct gelijk is.

$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4} \quad \text{omdat} \quad 18 \cdot 4 = 72 = 24 \cdot 3.$$

- **Breuken optellen of aftrekken** doe je door ze op gelijke noemer te zetten.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \\ &= \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \\ &= \frac{3-2}{6} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- **Breuken vermenigvuldigen** doe je door de teller met de teller en de noemer met de noemer te vermenigvuldigen.

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} &= \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} \\ &= \frac{6}{35} \end{aligned}$$

- **Breuken delen** doe je door de eerste breuk te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede breuk.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{1}{5}} &= \frac{-3}{4} \cdot \frac{5}{1} \\ &= \frac{-3 \cdot 5}{4 \cdot 1} \\ &= \frac{-15}{4} \end{aligned}$$

Het is nu jouw beurt om je rekenvaardigheden met breuken extra in te oefenen. Geef bij onderstaande oefeningen een breuk telkens in met een schuine streep, dus bijvoorbeeld als 3/4.

Oefening 5.4.1. In recepten uit Engelstalige landen worden hoeveelheden vaak uitgedrukt in cups. Een *cup* is een volume-eenheid die overeenkomt met een maatbeker van 240 ml.

Hieronder zie je een recept voor een cake. Alle hoeveelheden staan in cups.

- $\frac{1}{2}$ cup suiker;
- 1 en $\frac{1}{4}$ cup bloem;
- $\frac{2}{3}$ cup melk;
- $\frac{3}{4}$ cup boter;
- $\frac{1}{3}$ cup cacaopoeder.

Hoeveel cups ingrediënten gebruik je in totaal? ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Breuken

Oefening 5.4.2. Voer de bewerking uit en geef een zo eenvoudig mogelijke breuk als resultaat. Geef je breuk in met een schuine streep, dus bijvoorbeeld als 3/4.

1. $\frac{21}{27} = \ldots\ldots$
2. $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \ldots\ldots$
3. $\frac{2+1}{5+1} = \ldots\ldots$
4. $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \ldots\ldots$

Oefening 5.4.3. Volgens Statbel werkte 1 op 3 van alle loontrekkenden in 2024 soms of regelmatig van thuis uit. Vooral in de publieke sector is thuiswerk helemaal ingeburgerd, met ongeveer de helft van de loontrekkenden. In de private sector gaat het om 28%. Na een boost in 2020 en 2021 door de COVID-19-crisis volgde een lichte daling. De afgelopen jaren blijven de resultaten vrij stabiel, zo meldt Statbel, het Belgische statistiekbureau.

Bron: Statbel: Thuiswerken https://statbel.fgov.be/nl/themas/werk-opleiding/arbeidsmarkt/thuiswerken

Bereken hoeveel *meer* thuiswerkers er zijn in de publieke sector dan in de private sector. Druk je antwoord uit als een geheel percentage.

…… %

Oefening 5.4.4. Voer de bewerking uit en geef een zo eenvoudig mogelijke breuk als resultaat. Geef je breuk in met een schuine streep, dus bijvoorbeeld als 3/4.

1. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{-2}{5}} = \ldots\ldots$
2. $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \ldots\ldots$
3. $\frac{\frac{5}{8}}{2} = \ldots\ldots$
4. $3 \cdot \frac{7}{12} = \ldots\ldots$

Oefening 5.4.5. In een onderzoek naar mediagebruik blijkt dat driekwart van de respondenten regelmatig sociale media gebruikt. Van deze groep geeft een derde aan dat ze ook dagelijks nieuws via sociale media volgt.

Hoe groot is het aandeel van alle respondenten dat regelmatig sociale media gebruikt én zo dagelijks het nieuws volgt?

……

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Breuken

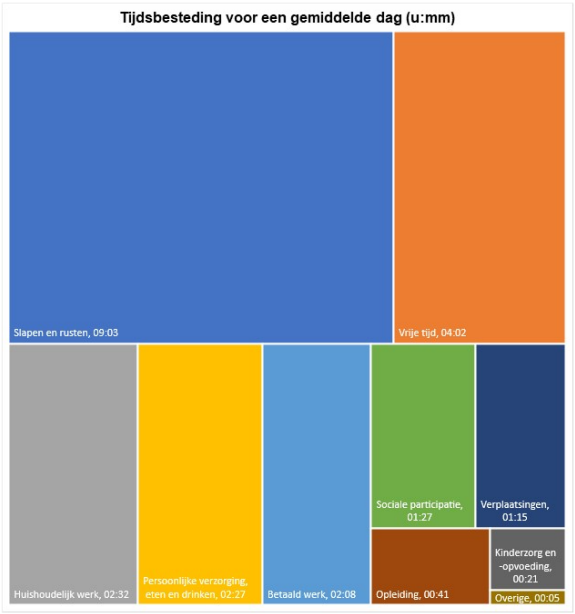
Oefening 5.4.6. Rangschik de volgende getallen van klein naar groot:

$$\frac{1}{5}, \quad \frac{5}{50}, \quad 5\%, \quad 0.4$$

Vul elk getal in op de juiste plaats. Noteer 5% als 5, zonder het procentteken.

…… < …… < …… < ……

Oefening 5.4.7. Statbel deed in 2013 een tijdbestedingsonderzoek om het alledaagse handelen van mensen in kaart te brengen. De resultaten worden weergegeven in onderstaande figuur. Je kan op de figuur klikken om deze te vergroten.



Bron: Statbel: Tijdsbudgetonderzoek https://statbel.fgov.be/nl/themas/huishoudens/tijdsbudgetonderzoek

1. Hoe groot is het aandeel van *slapen en rusten* en *vrije tijd* samen in een dag? Je mag de tijdsbesteding afronden naar gehele uren. Druk je antwoord uit als een breuk in zijn eenvoudigste vorm. …….

2. Meer dan een kwart van de dagelijkse tijdsbesteding gaat naar *persoonlijke verzorging, eten en drinken* en *sociale participatie* samen. Waar of onwaar?

Waar	Onwaar

3. *Verplaatsingen* komen overeen met 1.3% van de dagbesteding. Waar of onwaar?

Waar	Onwaar

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Percentages

Je komt percentages regelmatig tegen in je dagelijks leven. Denk maar aan:

- Korting in de winkel: "Nu 30% goedkoper"
- BTW op een product: "Prijs exclusief 21% BTW"
- Nieuwsberichten: "Het aantal werkzoekenden daalde met 12%"
- Enquêtes: "65% van de mensen vindt ..."

Percentages drukken *relatieve grootheden* uit: een deel van een geheel, een toename of een afname. Het woord *procent* komt van het Latijnse *pro centum*, wat *per honderd* betekent. Eén procent staat gelijk aan één honderdste: $1\% = \frac{1}{100}$.

Om goed te begrijpen wat zulke cijfers betekenen en om slimme keuzes te maken, is het belangrijk dat je met percentages kan berekenen in twee richtingen:

- Hoeveel procent is een deel van het geheel?
- Hoeveel is een percentage van een getal?

Hoeveel procent is een deel van het geheel?

Een percentage drukt uit welk *deel* iets is van een *geheel*, omgerekend naar honderdsten. Je berekent het percentage door het deel te delen door het totaal en dan te vermenigvuldigen met 100% . Zo is

$$10 \text{ van } 40 = \tfrac{10}{40} \cdot 100\% = 0.25 \cdot 100\% \quad = 25\%$$

$$8 \text{ van } 40 = \tfrac{8}{40} \cdot 100\% = 0.2 \cdot 100\% \quad = 20\%$$

$$0.4 \text{ van } 40 = \tfrac{0.4}{40} \cdot 100\% = 0.01 \cdot 100\% \quad = 1\%$$

$$40 \text{ van } 40 = \tfrac{40}{40} \cdot 100\% = 1 \cdot 100\% \quad = 100\%$$

$$80 \text{ van } 40 = \tfrac{80}{40} \cdot 100\% = 2 \cdot 100\% \quad = 200\%$$

Definitie 5.5.1. Als D een deel is van totaal T, dan is het percentage $= \left(\frac{D}{T}\right) \cdot 100\%$

Voorbeeld 5.5.1.

$$300 \text{ van } 1500 \text{ is } \frac{300}{1500} \cdot 100\% = 20\%.$$

$$600 \text{ van } 800 \text{ is } \frac{600}{800} \cdot 100\% = 75\%.$$

Oefening 5.5.1.

1. 1 van 50 is .....
2. 25 van 50 is .....
3. 5 van 50 is .....
4. 45 van 50 is .....
5. 20 van 50 is .....
6. 100 van 50 is .....

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Percentages

Hoeveel is een percentage van een getal?

Een bepaald *percentage* van een *totaal* kan je berekenen als volgt:

$$25\% \text{ van } 40 = \frac{25}{100} \cdot 40 = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10$$

$$20\% \text{ van } 40 = \frac{20}{100} \cdot 40 = \frac{1}{5} \cdot 40 = 8$$

$$1\% \text{ van } 40 = \frac{1}{100} \cdot 40 = \frac{40}{100} = 0.4$$

$$100\% \text{ van } 40 = \frac{100}{100} \cdot 40 = 40$$

$$200\% \text{ van } 40 = \frac{200}{100} \cdot 40 = 80$$

Definitie 5.5.2. $p\%$ van totaal $T = \left(\frac{p}{100}\right) \cdot T$

Voorbeeld 5.5.2. Een percentage *p van iets* is het *product* van dat *iets* met de factor $\frac{p}{100}$:

$$5\% \text{ van } 120 \text{ is } \frac{5}{100} \cdot 120 = \left(\frac{1}{20}\right) \cdot 120 = 6.$$

$$25\% \text{ van } 50 \text{ is } \frac{25}{100} \cdot 50 = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 150 = 12.5.$$

Oefening 5.5.2.

1. 20% van 100 is .....

2. 20% van 1 is .....

3. 20% van 20 is .....

4. 5% van 20 is .....

5. 100% van 20 is .....

6. 500% van 20 is .....

Combinatieoefeningen

Oefening 5.5.3.

1. Een student scoort 18 punten op een toets van 24 punten. Hoeveel procent heeft de student behaald?

2. Hoeveel punten op een toets van 40 punten zou de student hebben behaald bij een score van 60% heeft?

Oefening 5.5.4.

1. Een enquête toont dat 420 van de 700 ondervraagden tevreden zijn over een nieuwe maatregel. Hoeveel procent is dat?

2. Hoeveel mensen zouden tevreden zijn als dit percentage gold voor een groep van 1250 mensen?

Oefening 5.5.5. Lees onderstaand artikel en beantwoord de vragen.

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Percentages

> Griekenland heeft in 2017 in totaal 58.661 asielaanvragen geregistreerd, goed voor 8,5 procent van alle aanvragen in de Europese Unie (EU). De asieldienst van het land spreekt vrijdag van een "disproportioneel percentage". De cijfers maken van het land met 11 miljoen inwoners het EU-land met "het hoogste percentage asielzoekers per inwoner", stelt de asieldienst in een verklaring.
>
> De Syriërs waren in 2017 met bijna 17.000 aanvragen de grootste groep, gevolgd door de Pakistanen 8.923, die doorgaans geweigerd worden omdat ze als economische migranten beschouwd worden. Daarna volgen de Irakezen (7.924) en de Afghanen (7.567).

Bron: https://www.vrt.be/vrtnws/nl/2018/01/26/griekenland-heeft-bijna-60-000-asielaanvragen-geregis

1. Hoeveel procent van de asielaanvragers waren Pakistanen? Rond af op 2 decimalen. ... ...

2. Hoeveel asielaanvragen waren er in totaal in de EU in 2017? ... ...

Oefening 5.5.6. Lees onderstaand artikel en beantwoord de vragen.

> Hoe gaat het met de jeugd? Moeilijk om daar een eenduidig antwoord op te geven. De internationale studie "Jongeren en gezondheid" heeft 20.000 Vlaamse jongeren tussen 11 en 18 jaar vragen gesteld over hun mentale en fysieke welzijn. Globaal geven ze aan dat het best goed gaat, maar als je dieper kijkt hebben ze toch enkele opvallende mentale en fysieke klachten.
>
> ### Tevreden over leven, maar meer mentale klachten
>
> 9 op de 10 jongeren (90,6 procent) is tevreden over hun leven in 2022. Hoewel dat positief is, is er toch sprake van een daling van 2,2 procent ten opzichte van 2018. De zenuwachtigheid die jongeren steeds meer ervaren – een stijging van 10 procent ten opzichte van 2018 - kan daar iets mee te maken hebben. Ook voelen jongeren zich de afgelopen jaren steeds humeuriger, ongelukkiger en hebben ze meer moeite met inslapen.
>
> Er is ook een sterke toename in zelfmoordgedachten (van 17,6 procent naar 22,3 procent) en ook het percentage van jongeren dat aangaf zichzelf te beschadigen steeg met meer dan 4 procent. In de nasleep van de coronapandemie kampen 1 op de 6 jongeren met eenzaamheid.
>
> > Jongeren die nood hebben aan een luisterend oor kunnen terecht bij Awel op telefoonnummer 102, of via chat op awel.be . Ook Tele-onthaal biedt een luisterend oor voor jongeren, jongvolwassenen en (groot)ouders op het telefoonnummer 106 of via chat op tele-onthaal.be . Wie vragen heeft rond zelfdoding kan terecht op het nummer 1813 of op de website van de zelfmoordlijn .

Bron: https://www.vrt.be/vrtnws/nl/2023/05/08/welzijn-jongeren/

1. Hoeveel procent van de bevraagde jongeren geeft aan met eenzaamheid te kampen? Rond af op een geheel percentage. ... ...

2. Hoeveel jongeren, uitgedrukt in een absoluut aantal, zeggen tevreden te zijn over hun leven? ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Percentages

3. Veronderstel dat in 2018 ook 20 000 jongeren bevraagd werden. Hoeveel méér jongeren rapporteerden in 2022 zelfmoordgedachten dan in 2018? ... ...

Oefening 5.5.7. Een product kost €82 maar er komt nog 21% BTW bij. Bereken de verkoopprijs. Hoeveel bedraagt de BTW?

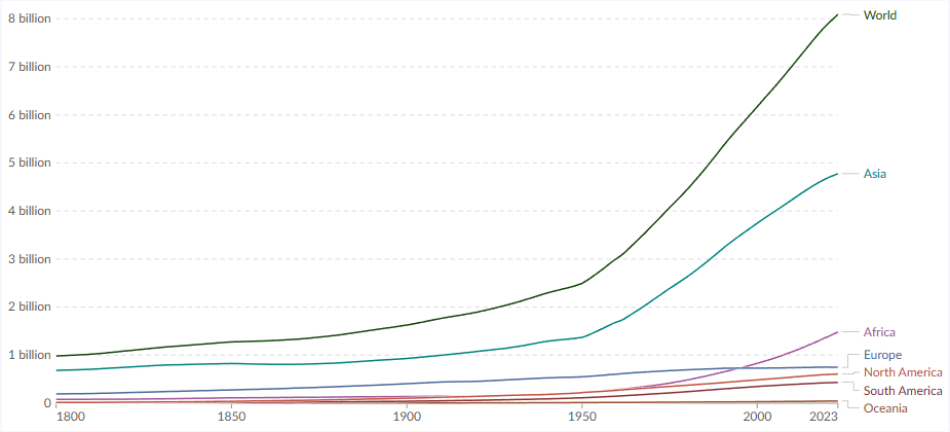
Oefening 5.5.8. De verkoopprijs van een product is 200 euro. Je krijgt echter een korting van 30%. Hoeveel moet je nog betalen? ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Machten

Voorbeeld 5.6.1 (Wereldwijd bevolkingsaantal)**.**

Onderstaande grafiek toont het wereldwijd bevolkingsaantal tussen 1800 en 2023.



Bron: Our World in Data: https://ourworldindata.org/grapher/population

1. Lees de wereldbevolking in 2023 af van de grafiek. Hoeveel mensen waren er toen ongeveer?

8 000 000 000

Bij het werken met data krijgen we vaak te maken met *heel grote* getallen. Denk maar aan bevolkingsaantallen per continent of per land, het aantal gebruikers op sociale media of geldbedragen uitgedrukt in miljarden euro. Het is onhandig om zulke getallen telkens volledig uit te schrijven.

Het getal uit de grafiek daarnet, $8\,000\,000\,000$, neemt veel plaats in en leest niet vlot. We gebruiken daarom in data-analyse vaak een verkorte notatie met *machten* van tien. Het miljard van hierboven kunnen we noteren als:

$$8\,000\,000\,000 = 8 \cdot 10^9.$$

Ook in de statistiek kom je regelmatig machten tegen, bijvoorbeeld bij spreidingsmaten. De standaardafwijking σ en de variantie σ^2 zijn direct met elkaar verbonden:

$$\text{Variantie} = (\text{Standaardafwijking})^2.$$

Wanneer je de standaardafwijking kent maar de variantie nodig hebt, kan je dit verband gebruiken. Als de standaardafwijking gelijk is aan 4, dan volgt dat de variantie 4^2 is oftewel 16.

Machten helpen in data-analyse dus niet alleen om grote getallen overzichtelijk te noteren, maar ook om formules eenvoudiger toe te passen. Het is daarom belangrijk goed te begrijpen wat een **macht** precies is, namelijk herhaald vermenigvuldigen.

Definitie 5.6.1. Voor een reëel **grondtal** $a(\neq 0)$ en een natuurlijke **exponent** n geldt

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ keer}}$$

$$a^0 = 1$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Machten

Voorbeeld 5.6.2.

- $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
- $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
- $2^1 = 2$
- $7^0 = 1$

Oefening 5.6.1.

1. $5^0 =$ ... ...

2. $5^1 =$ ... ...

3. $5^2 =$ ... ...

4. $-5^2 =$ ... ...

5. $(-5)^2 =$ ... ...

Als je moeite hebt met de laatste twee vragen, bekijk dan zeker de module over de volgorde van bewerkingen.

Oefening 5.6.2. Stel, je kiest een nieuwe pincode voor je bankkaart. Een pincode bestaat uit *vier cijfers*. Hoeveel verschillende pincodes zijn er mogelijk?

1. Hoeveel mogelijkheden zijn er voor één cijfer van de pincode?

. . . . . .

2. Hoeveel mogelijke viercijferige pincodes zijn er dan in totaal?

... ...

Oefening 5.6.3. In een enquête bij 850 studenten werd hun studiestress beoordeeld op een schaal van 0 tot 10. De standaardafwijking van de scores bedraagt 2.1.

1. Bereken de variantie. Je mag je rekenmachine gebruiken.

... ...

CC BY-NC-SA 4.0

5.7 Wortels

In de statistiek kom je regelmatig machten en wortels tegen, bijvoorbeeld bij spreidingsmaten. De standaardafwijking σ en de variantie σ^2 zijn direct met elkaar verbonden:

$$\text{Variantie} = (\text{Standaardafwijking})^2.$$

Voorbeeld 5.7.1 (Van variantie naar standaardafwijking)**.**

De *variantie* van een dataset is gelijk aan 9.

Vaak is het echter eenvoudiger om te werken met de *standaardafwijking*.

1. Wat is de standaardafwijking? 3

In dit voorbeeld vertrekken we van een kwadraat en zoeken we het oorspronkelijke getal. Bij machten betekent de uitdrukking a^2 dat we een getal met zichzelf vermenigvuldigen. De vraag die we nu stellen is: *kunnen we deze bewerking omkeren?*

Om deze vraag te beantwoorden gebruiken we **vierkantswortels**. In het voorbeeld hierboven kan je de standaardafwijking bepalen door de *wortel* van de variantie te nemen:

$$\text{Standaardafwijking} = \sqrt{\text{Variantie}}.$$

Definitie 5.7.1. Voor een positief reëel getal a is de **vierkantswortel** van a het getal $\sqrt{a}$ waarvoor geldt:

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \text{met} \quad \sqrt{a} \geq 0.$$

De vierkantswortel van een negatief getal bestaat niet binnen de reële getallen.

Voorbeeld 5.7.2.

- $\sqrt{9} = 3$, want $3^2 = 9$.
- $\sqrt{16} = 4$, want $4^2 = 16$.
- $\sqrt{1} = 1$, want $1^2 = 1$.
- $\sqrt{0} = 0$, want $0^2 = 0$.

Opmerking 5.7.1. Let op: hoewel zowel $3^2 = 9$ als $(-3)^2 = 9$, schrijven we:

$$\sqrt{9} = 3$$

en niet -3. De wortel $\sqrt{a}$ is per afspraak altijd *positief*.

Oefening 5.7.1.

1. $\sqrt{100} = \ldots\ldots$

2. $\sqrt{49} = \ldots\ldots$

3. $\sqrt{\frac{1}{4}} = \ldots\ldots$

4. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.7 Wortels

5. $\sqrt{0.36} = \ldots\ldots$

6. $\sqrt{14} \approx \ldots\ldots$

Rond af op twee decimalen.

Opmerking 5.7.2. Wortels komen meestal niet uit op een rond getal. Vaak moet je een benadering of afronding gebruiken.

Oefening 5.7.2.

1. In een enquête is de variantie van de scores gelijk aan 12.25.

Bereken de standaardafwijking. $\ldots\ldots$

Je mag je rekenmachine gebruiken.

2. Bereken: $\sqrt{36} + \sqrt{64} = \ldots\ldots$

Merk op: $\sqrt{36} + \sqrt{64} \neq \sqrt{36 + 64}$.

3. Bereken: $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = \ldots\ldots$

Merk op: $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{9 \cdot 16}$.

4. Een vierkant heeft een oppervlakte van 64 cm^2.

Hoe lang is de zijde van het vierkant? $\ldots\ldots$ cm

5. Je zet €1000 op een spaarrekening. Na 2 jaar staat er €1210 op je rekening.

Met hoeveel procent groeit je geld per jaar? $\ldots\ldots$ %

CC BY-NC-SA 4.0

5.8 Gelijkheden

Voorbeeld 5.8.1. Posters voor een fuif

Een jeugdbeweging organiseert een fuif en wil posters laten drukken. De drukker hanteert een vaste opstartkost van 20 euro en daarnaast kost elke poster 0.5 euro.

Noem het aantal posters x.

1. Hoe kan je de totale kostprijs in euro uitdrukken in functie van x? $0.5x + 20$

Uitwerking: De totale kostprijs bestaat uit een vaste kost van 20 euro en een variabele kost van 0.5 euro per poster.

Bij x posters is de variabele kost gelijk aan $0.5x$.

De totale kostprijs kan je dan schrijven als:

$$0.5x + 20.$$

2. De jeugdbeweging heeft een budget van 100 euro.

Welke vergelijking moet je oplossen om te bepalen hoeveel posters ze kunnen laten drukken? $0.5x + 20 = 100$

Uitwerking: We weten dat de totale kostprijs gegeven wordt door:

$$0.5x + 20.$$

Het budget is 100 euro. We moeten dus de kostprijs gelijkstellen aan 100:

$$0.5x + 20 = 100.$$

3. Hoeveel posters kan de jeugdbeweging maximaal laten drukken voor hun budget? 160

In bovenstaand voorbeeld heb je een **vergelijking** opgesteld. Met vergelijkingen vertalen we situaties uit het dagelijkse leven naar wiskunde, zodat we kunnen berekenen wat we willen weten.

Onderstaande video toont hoe je deze vergelijking stap voor stap oplost met de *weegschaalmethode*.

Eigenschap 5.8.1. Een gelijkheid kan je bekijken als een *weegschaal in evenwicht*. Als je aan beide kanten *dezelfde bewerking* uitvoert, blijft de gelijkheid behouden.

- Je mag aan beide kanten hetzelfde getal optellen of aftrekken.

$$\begin{aligned} & x + 3 = 7 \\ \iff \quad & x + 3 - 3 = 7 - 3 \\ \iff \quad & x = 4 \end{aligned}$$

- Je mag beide kanten vermenigvuldigen of delen door eenzelfde getal verschillend van nul.

$$\begin{aligned} & 2x = 10 \\ \iff \quad & \frac{2}{2}x = \frac{10}{2} \\ \iff \quad & x = 5 \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.8 Gelijkheden

Voorbeeld 5.8.2. Los de vergelijking $-2(x-3)+4=x+1$ op.

$$-2(x-3)+4=x+1$$

We werken eerst de haakjes uit. Weet je niet meer hoe dat moet? Bekijk dan zeker de module over rekenen met haakjes.

$$\begin{aligned} &\iff && -2x+6+4=x+1\\ &\iff && -2x+10=x+1 \end{aligned}$$

Vervolgens brengen we alle termen met x naar het linkerlid door x af te trekken. Merk op dat je er ook voor kan kiezen om alle termen met x naar het rechterlid te brengen om negatieve coëfficiënten te vermijden.

$$\begin{aligned} &\iff && -2x-x+10=x-x+1\\ &\iff && -3x+10=1 \end{aligned}$$

We brengen de constante termen naar het rechterlid door van beide leden 10 af te trekken.

$$\begin{aligned} &\iff && -3x+10-10=1-10\\ &\iff && -3x=-9 \end{aligned}$$

Ten slotte delen we beide leden door -3 om x vrij te maken.

$$\begin{aligned} &\iff && \frac{-3}{-3}x=\frac{-9}{-3}\\ &\iff && x=3 \end{aligned}$$

Merk op dat de gelijkheid behouden blijft wanneer je beide leden deelt door een negatief getal. Dit is anders bij ongelijkheden waar de ongelijkheidsrelatie omkeert.

Oefening 5.8.1. Los de volgende vergelijkingen op. Vul als antwoord de waarde voor x in.

1. $x-4=9 \iff x=\ldots\ldots$
2. $2x+3=11 \iff x=\ldots\ldots$
3. $\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}=\frac{7}{2} \iff x=\ldots\ldots$
4. $-3x+6=0 \iff x=\ldots\ldots$
5. $-2(x+4)+3=x-5 \iff x=\ldots\ldots$

Oefening 5.8.2. Een jobstudent verdient 12.5 euro per uur. Noem zijn aantal gewerkte uren x.

1. Hoe kan je het totale loon in euro uitdrukken in functie van x? $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.8 Gelijkheden

2. In juli werkte de student 96 uur. Hoeveel loon krijgt de student voor zijn prestatie? ... ... euro

3. De student wil een e-scooter kopen van 1750 euro. Welke vergelijking moet je oplossen om te bepalen hoeveel uren hij moet werken? ... ...

4. Hoeveel uren moet de student werken om 1750 euro te verdienen? ... ... uren

5. Voor overuren krijgt de student 50% meer betaald dan zijn normale uurloon.

Wat wordt de formule voor het loon in functie van x bij overuren? ... ...

Oefening 5.8.3. Los de volgende vergelijkingen op. Vul als antwoord de waarde voor x in.

1. $x + 5 = 12 \iff x = \ldots\ldots$

2. $3x = 15 \iff x = \ldots\ldots$

3. $4x - 5 = 11 \iff x = \ldots\ldots$

4. $2(x + 3) = 14 \iff x = \ldots\ldots$

5. $2(x - 3) + 4 = x + 1 \iff x = \ldots\ldots$

Oefening 5.8.4. In een winkel krijg je 30% korting op een T-shirt. Na de korting betaal je 24.5 euro. Je zoekt de oorspronkelijke prijs van het T-shirt.

Welke vergelijking stel je op? ... ...

Wat was de oorspronkelijke prijs van het T-shirt? ... ... euro

Oefening 5.8.5. (Uitdaging) Een moeder is vandaag 4 keer zo oud als haar dochter. Over 6 jaar zal ze 3 keer zo oud zijn als haar dochter.

Welke vergelijking stel je op? ... ...

Hoe oud zijn de dochter en de moeder nu? Dochter: ... ... jaar, moeder: ... ... jaar

CC BY-NC-SA 4.0

5.9 Ongelijkheden

Oefening 5.9.1.

Hoe geweld tegen vrouwen 'gewoon wordt': 7 op de 10 meisjes beschouwen mannelijk geweld als normaal

Diepgewortelde gendernormen wereldwijd zorgen ervoor dat 7 op de 10 meisjes mannelijk geweld als iets normaals ervaren. Dat blijkt uit nieuw onderzoek van Plan International. "Het rapport toont hoe meisjes opgroeien in een wereld die hén verantwoordelijk houdt voor het geweld dat ze meemaken", zegt de organisatie.

Voor het onderzoek volgde de ngo 142 meisjes uit 9 landen, vanaf hun geboorte tot hun 18e verjaardag. Het gaat dus om een uitzonderlijk langdurig onderzoek: het is erg zeldzaam dat meisjes gedurende hun volledige jeugd zo nauwgezet worden opgevolgd.

Volgens Isabelle Verhaegen, directeur van Plan International België, laten de resultaten weinig aan de verbeelding over. 9 op de 10 meisjes werden al minstens 1 keer slachtoffer van geweld, vaak zelfs op zeer jonge leeftijd.

Maar vooral de manier waarop meisjes dat geweld interpreteren, baart zorgen. 68 procent van de meisjes tussen 14 en 15 jaar ziet mannelijke agressie als "een onvermijdelijk onderdeel van het leven".

Bron: VRT NWS
https://www.vrt.be/vrtnws/nl/2025/11/25/7-op-de-10-meisjes-wereldwijd-beschouwen-mannelijk-geweld-

Lees bovenstaand artikel en geef aan of onderstaande stellingen juist of fout zijn.

1. De steekproefgrootte van het onderzoek is 9.

Juist	Fout

2. 75% van de meisjes ervaart mannelijk geweld als iets normaals.

Juist	Fout

3. 9 op de 10 meisjes werd al twee of meer keer slachtoffer van geweld.

Juist	Fout

4. Meer dan de helft van de meisjes tussen 14 en 15 jaar ziet mannelijke agressie als een onvermijdelijk onderdeel van het leven.

Juist	Fout

De laatste twee vragen van de vorige oefening gaan over het vergelijken van grootheden. Dat herken je aan woorden zoals "minstens" en "meer dan". Om zulke uitspraken precies te noteren, gebruiken we in statistisch onderzoek ongelijkheidstekens: $<, \leq, >$ en $\geq$.

Weet jij wat deze betekenen?

Oefening 5.9.2. Kies het juiste ongelijkheidsteken bij elke uitdrukking.

1. "Meer dan"

5.9 Ongelijkheden

$<$	$\leq$	$>$	$\geq$

2. "Minder dan of gelijk aan"

$<$	$\leq$	$>$	$\geq$

3. "Strikt minder dan"

$<$	$\leq$	$>$	$\geq$

4. "Niet meer dan"

$<$	$\leq$	$>$	$\geq$

5. "Minimaal"

$<$	$\leq$	$>$	$\geq$

Oefening 5.9.3. Kies alle uitdrukkingen die passen bij de ongelijkheid.

1. $x \leq 20$

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) x is kleiner dan of gelijk aan 20

(b) x is meer dan 20

(c) x is minder dan 20

(d) x is hoogstens 20

(e) x is maximaal 20

(f) x is minstens 20

2. $x > 5$

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) x is meer dan 5

(b) x is strikt groter dan 5

(c) x is hoogstens 5

(d) x is ten minste 5

(e) x is groter dan 5

(f) x is maximaal 5

CC BY-NC-SA 4.0

5.9 Ongelijkheden

Eigenschap 5.9.1. Bij het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden mag je aan beide kanten dezelfde bewerking uitvoeren.

- Je mag hetzelfde getal **optellen of aftrekken** aan beide kanten.

$$\begin{aligned} & x+7 \leq 10 \\ \Leftrightarrow \quad & x+7-7 \leq 10-7 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq 3 \end{aligned}$$

  Van beide leden wordt 7 afgetrokken en de ongelijkheid blijft onveranderd.

- Je mag beide kanten **vermenigvuldigen met of delen door** hetzelfde **positief getal**.

$$\begin{aligned} & 3x \leq 12 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{3}{3}x \leq \frac{12}{3} \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq 4 \end{aligned}$$

  Beiden leden worden gedeeld door $3 (> 0)$ en de ongelijkheid blijft onveranderd.

- Bij **vermenigvuldigen met of delen door** hetzelfde **negatief getal**, moet je het ongelijkheidsteken **omdraaien**.
  Zo is $2 > 1$, maar na vermenigvuldiging met -1 krijg je $-2 < -1$.

$$\begin{aligned} & -2x \leq -4 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{-2}{-2}x \geq \frac{-4}{-2} \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq 2 \end{aligned}$$

  Beiden leden worden gedeeld door -2 (< 0) en de ongelijkheid draait om.

Oefening 5.9.4.

1. Welke reële getallen x voldoen aan $x + 7 \leq 10$. Antwoord: ... ...

2. Welke reële getallen x voldoen aan $4 - 2x \geq 10$. Antwoord: ... ...

3. Welke reële getallen x voldoen aan $3x - 7 \leq 2x + 5$. Antwoord: ... ...

4. Welke reële getallen x voldoen aan $2x + 5 \geq 4x + 3$. Antwoord: ... ...

5. Welke reële getallen x voldoen aan $-x + 4 > 1$. Antwoord: ... ...

6. Welke reële getallen x voldoen aan $-5x + 8 > 3x - 4$. Antwoord: ... ...

7. Welke reële getallen x voldoen aan $0 < 3x + 9$. Antwoord: ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

5.10 Faculteit $n!$

Tijdens deze module mag je een rekenmachine gebruiken.

Voorbeeld 5.10.1 (24 urenloop)**.** In Leuven nemen elk jaar 21 studentenverenigingen deel aan de 24 urenloop. Na afloop krijgen ze allemaal een plaats in het eindklassement.

1. Op hoeveel verschillende manieren kan het eindklassement eruitzien?

Meer dan 1 000 000 000 000 000 000✓

Laten we stap voor stap nadenken over hoe het eindklassement tot stand komt.

- Voor de eerste plaats zijn er 21 mogelijke verenigingen.
- Daarna blijven er nog 20 over voor de tweede plaats.
- Daarna nog 19 voor de derde plaats.
- En zo gaat het verder tot alle plaatsen ingevuld zijn.

Het totaal aantal mogelijkheden is dus:

$$21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

De puntjes stellen de ontbrekende factoren voor. Je blijft telkens met één minder vermenigvuldigen tot je bij 1 komt.

Dit product is erg lang en onoverzichtelijk. Om dit compacter te noteren, gebruiken we de **faculteit**.

$$21! = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

De faculteit is dus een verkorte manier om zulke producten te noteren.

Hoe groot is dit getal eigenlijk?

$$21! = 51\,090\,942\,171\,709\,440\,000$$

Dat zijn meer dan 51 triljoen of 51 miljard miljard mogelijke eindklassementen.

Om een idee te krijgen: als je elke seconde één mogelijk klassement zou bekijken, dag en nacht, dan zou je meer dan een miljoen jaar nodig hebben om alle mogelijkheden te overlopen.

Definitie 5.10.1 (Faculteit)**.** De **faculteit** van een natuurlijk getal n is het product van alle natuurlijke getallen van 1 tot en met n:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

We spreken dit uit als *n faculteit*.

Daarnaast spreken we af:

$$0! = 1.$$

Opmerking 5.10.1. Op je rekenmachine kan je zulke producten zelf ingeven, maar dat kan veel werk zijn. De meeste rekenmachines hebben ook een knop voor de faculteit, aangeduid met !. Vind je die niet meteen terug? Dan kan je online opzoeken hoe dit werkt voor jouw rekenmachine.

CC BY-NC-SA 4.0

5.10 Faculteit $n!$

Voorbeeld 5.10.2.

1. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

2. $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

3. $1! = 1$

Oefening 5.10.1.

1. Bereken:

$$2! = \ldots\ldots$$

2. Bereken:

$$3! = \ldots\ldots$$

3. Bereken:

$$6! = \ldots\ldots$$

Oefening 5.10.2.

1. Tijdens een groepswerk moeten 5 studenten een presentatie geven. Ze spreken af dat ze na elkaar presenteren, elk precies één keer.

Op hoeveel verschillende manieren kan de volgorde van de sprekers bepaald worden? $\ldots\ldots$

2. Een museum maakt een nieuwe tentoonstelling met 7 verschillende schilderijen. De curator wil de werken naast elkaar ophangen aan één lange muur.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen de schilderijen opgehangen worden? $\ldots\ldots$

Voorbeeld 5.10.3. In de vorige oefening waren er 7 verschillende schilderijen die allemaal een plaats kregen aan de muur. Er waren dus 7! mogelijke opstellingen.

Stel nu dat de curator slechts 4 van de 7 schilderijen wil ophangen en dat de volgorde van belang is. Er kan dan voor de eerste plaats gekozen worden uit 7 schilderijen, voor de tweede nog 6, daarna 5 en ten slotte 4.

Het aantal mogelijkheden is dus

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

We kunnen dit ook schrijven met faculteiten. Er zijn drie schilderijen die niet gekozen worden. We delen daarom 7! door 3!:

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

We kunnen $\frac{7!}{3!}$ interpreteren als het aantal manieren om 4 schilderijen te kiezen uit 7, waarbij de volgorde van belang is.

We zien hier ook dat een breuk met faculteiten vaak sterk vereenvoudigd kan worden doordat veel factoren wegvallen.

Oefening 5.10.3.

CC BY-NC-SA 4.0

5.10 Faculteit $n!$

1. Gebruik je rekenmachine om onderstaande breuk te berekenen.

$$\frac{100!}{98!} = \ldots\ldots$$

Je rekenmachine kan de berekening in bovenstaande oefening waarschijnlijk niet uitvoeren, maar jij kan dat wel! Je hebt er zelfs geen rekenmachine voor nodig. Onderstaande video laat je zien hoe je een breuk met faculteiten kan vereenvoudigen.



Voorbeeld 5.10.4.

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Oefening 5.10.4. Bereken onderstaande breuken.

1.

$$\frac{8!}{6!} = \ldots\ldots$$

2.

$$\frac{205!}{202!} = \ldots\ldots$$

3.

$$\frac{1234!}{1233!} = \ldots\ldots$$

Oefening 5.10.5. Voor een onderzoek worden 200 personen geselecteerd. Uit deze groep worden 3 deelnemers gekozen voor een diepte-interview. Op hoeveel verschillende manieren kan deze groep van 3 personen samengesteld worden?

Je herinnert je hopelijk uit het secundair onderwijs dat het kiezen van 3 personen uit 200 overeenkomt met een *combinatie van 3 uit 200*. Daarvoor gebruiken we de formule:

$$C_3^{200} = \binom{200}{3} = \frac{200!}{3! \cdot 197!}.$$

Bereken dit aantal. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.11 Het sommatieteken: De basis

Voorbeeld 5.11.1. Geboortecijfers in de 21ste eeuw
We willen de geboortecijfers van het begin van de 21ste eeuw in een specifieke stad bestuderen. We beperken ons in eerste instantie tot de jaargangen 2000 tot en met 2003.

We hebben volgende tabel met geboortecijfers:

Jaar	Jongens	Meisjes
2000	100	90
2001	111	81
2002	102	92
2003	123	93

Van 2000 tot en met 2003 zijn er $100+111+102+123$ jongens geboren en $90+81+92+93$ meisjes.

Voor een kleine dataset zoals deze kun je de som gemakkelijk uitschrijven. Maar stel dat je cijfers hebt van 1900 tot 2003, dan wordt deze som veel te lang. In zo'n geval gebruik je beter het **sommatieteken** $\sum$, de Griekse hoofdletter Sigma. Die betekent "som" en laat je toe om lange optellingen kort en overzichtelijk te noteren.

Later tonen we hoe je het sommatieteken in deze context kunt gebruiken.

Het gebruik van het sommatieteken wordt ook uitgelegd in volgend filmpje:

Definitie 5.11.1 (Het sommatieteken)**.**

Voor elk natuurlijk getal n en reële getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definiëren we:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{\text{notatie}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Je leest $\sum_{i=1}^{n} a_i$ als "de som van (de) a_i voor i gaande van 1 tot en met n". Hierbij is

- i de **sommatie-index** (Dit kan ook een andere letter zijn, bijvoorbeeld j of k.)
- a_i de **algemene term**
- 1 de **ondergrens** (de startwaarde van i. Dikwijls start je bij 1, maar er mag ook een ander getal staan.)
- n de **bovengrens** (de eindwaarde van i. Die moet groter dan of gelijk aan de ondergrens zijn.)

Men noteert $\sum_{i=1}^{n} a_i$ soms ook als $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Bij het werken met data kom je regelmatig een sommatieteken tegen. Om je hierop voor te bereiden focussen we hier op wat een sommatieteken betekent. Hoe zet je zo'n notatie om in een gewone som?

Voorbeeld 5.11.2.

5.11 Het sommatieteken: De basis

- We willen de som $\sum_{i=1}^{6} a_i$ uitschrijven.

  De index i loopt van 1 tot en met 6. We gaan zes termen optellen, voor $i = 1, 2, 3, 4, 5$ en 6:

$$\sum_{i=1}^{6} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6.$$

- De som $\sum_{i=1}^{4} 2i$ kunnen we uitschrijven als

$$\sum_{i=1}^{4} 2i = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 2 + 4 + 6 + 8.$$

Oefening 5.11.1. Schrijf de volgende sommen uit zonder sommatieteken.

1. $\sum_{i=1}^{4} a_i =$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3$	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$a_2 + a_3 + a_4 + a_5$	$a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

2. $\sum_{i=1}^{4} (i + 2) =$

$2 + 3 + 4 + 5$	$3 + 4 + 5 + 6$	$1 + 2 + 3 + 4$	$4 + 5 + 6 + 7$

3. $\sum_{i=1}^{3} 3i =$

$3 + 6 + 9 + 12$	$1 + 2 + 3$	$3 + 6 + 9$	$3 + 6 + 9 + 12 + 15$

Opmerking 5.11.1.

Over haakjes gelden de volgende afspraken:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i + 4 \overset{\text{afspraak}}{=} \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \right) + 4 = a_1 + a_2 + a_3 + 4$$

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i + 4) = (a_1 + 4) + (a_2 + 4) + (a_3 + 4) = a_1 + a_2 + a_3 + 12$$

Bij de sommatie van een *product* is het niet nodig (maar ook niet fout) om haakjes te zetten:

$$\sum_{i=1}^{3} 4a_i = 4a_1 + 4a_2 + 4a_3 = (4a_1) + (4a_2) + (4a_3) = \sum_{i=1}^{3} (4a_i)$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.11 Het sommatieteken: De basis

Oefening 5.11.2. Schrijf als een gewone som en reken uit.

1. $\sum_{i=1}^{3}(i+5) = \ldots\ldots$
2. $\sum_{i=1}^{3} i+5 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.12 Het sommatieteken: Werken met data

Voorbeeld 5.12.1. Geboortecijfers in de 21ste eeuw
We willen de geboortecijfers van het begin van de 21ste eeuw in een specifieke stad bestuderen. We beperken ons in eerste instantie tot de jaargangen 2000 tot en met 2003.

We hebben de volgende tabel met geboortecijfers:

Jaar	Jongens	Meisjes
2000	100	90
2001	111	81
2002	102	92
2003	123	93

Van 2000 tot en met 2003 zijn er dus $100+111+102+123$ jongens geboren en $90+81+92+93$ meisjes.

We kunnen dit nu korter noteren met behulp van een sommatieteken. Hiervoor noemen we het aantal geboortes van jongens in het jaar i de naam a_i en voor de meisjes gebruiken we b_i.

Jaar	Jongens	Meisjes
2000	a_{2000}	b_{2000}
2001	a_{2001}	b_{2001}
2002	a_{2002}	b_{2002}
2003	a_{2003}	b_{2003}

Het aantal jongens geboren van 2000 tot en met 2003 noteren we met

$$\sum_{i=2000}^{2003} a_i = a_{2000}+a_{2001}+a_{2002}+a_{2003} = 100+111+102+123,$$

en het aantal meisjes geboren van 2000 tot en met 2003 is

$$\sum_{i=2000}^{2003} b_i = b_{2000}+b_{2001}+b_{2002}+b_{2003} = 90+81+92+93.$$

Als we het gemiddeld aantal geboren jongens van 2000 tot en met 2003 willen kennen, moeten we deze som delen door 4 omdat het hier over een periode van 4 jaren gaat. Dit doen we door $\frac{1}{4}$ voor het sommatieteken te plaatsen

$$\frac{1}{4}\sum_{i=2000}^{2003} a_i = \frac{1}{4}(a_{2000}+a_{2001}+a_{2002}+a_{2003}) = \frac{1}{4}(100+111+102+123).$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.12 Het sommatieteken: Werken met data

Oefening 5.12.1. Veronderstel dat bovenstaande tabel is uitgebreid met de gegevens vanaf 1900. Wat betekenen volgende uitdrukkingen? Omschrijf telkens de *betekenis* in een Nederlandse zin.

1. $\sum_{i=1900}^{1999} a_i$ Het totaal aantal jongens geboren van 1900 tot en met 1999.✓
2. $\frac{1}{10}\sum_{i=1901}^{1910} b_i$ Het gemiddeld aantal meisjes geboren per jaar van 1901 tot en met 1910.✓
3. $\sum_{i=1900}^{1999} a_i + \sum_{i=1900}^{1999} b_i = \sum_{i=1900}^{1999} (a_i + b_i)$

Uitwerking: Deze som is $a_{1900} + b_{1900} + a_{1901} + b_{1901} + \ldots + a_{1999} + b_{1999}$. Dit is de som van het aantal geboortes van jongens en van meisjes van 1900 tot en met 1999. Deze sommatie betekent dus "Het totaal aantal geboorten (jongens en meisjes samen) van 1900 tot en met 1999."

4. $\sum_{i=1900}^{2000} i$
5. $\frac{1}{50}\sum_{i=1901}^{1950} (a_i + b_i)$

Opmerking 5.12.1. We hebben hier gekozen om het aantal geboortes van jongens in jaar i aan te duiden met a_i en de meisjes met b_i. Er zijn ook nog andere mogelijkheden.

In de plaats van het aantal jongens geboren in 2000 te noteren met a_{2000} kan je bijvoorbeeld ook kiezen voor x_1 omdat 2000 het eerste gegeven is. Nog een andere optie is om J_0 te gebruiken: als we bij 0 beginnen, is het jaartal gemakkelijker af te lezen uit de index, terwijl de indices toch niet erg groot worden. Jaar 2002 komt bijvoorbeeld overeen met index 2.

Jaar	Jongens	Meisjes
2000	x_1	y_1
2001	x_2	y_2
2002	x_3	y_3
2003	x_4	y_4

Jaar	Jongens	Meisjes
2000	J_0	M_0
2001	J_1	M_1
2002	J_2	M_2
2003	J_3	M_3

Voorbeeld 5.12.2 (Reisbudget omrekenen van dollar naar euro)**.**

Je maakt een rondreis door de Verenigde Staten en houdt je uitgaven per dag bij in dollar. Op een bepaalde dag heb je 5 uitgaven gedaan.We noteren deze met a_i.

- $a_1 = \$40$ voor eten
- $a_2 = \$55$ voor een museumbezoek
- $a_3 = \$35$ voor vervoer
- $a_4 = \$60$ voor een concert
- $a_5 = \$20$ voor souvenirs

CC BY-NC-SA 4.0

5.12 Het sommatieteken: Werken met data

Je wil weten hoeveel je die dag hebt uitgegeven in euro. De wisselkoers is 0.90 euro per dollar. \$40 dollar komt dus overeen met $0.90 \cdot 40 = 36$ euro.

Je totaal uitgegeven budget in euro kan je op twee manieren berekenen:

- Eerst alle uitgaven in dollar omzetten naar euro en dan optellen:

$$0.90 \cdot 40 + 0.90 \cdot 55 + 0.90 \cdot 35 + 0.90 \cdot 60 + 0.90 \cdot 20 = \sum_{i=1}^{5} 0.90 \cdot a_i$$

- Eerst de totale uitgave in dollar berekenen en dan omzetten naar euro:

$$0.90 \cdot (40 + 55 + 35 + 60 + 20) = 0.90 \sum_{i=1}^{5} a_i$$

Beide manieren geven hetzelfde resultaat, dus:

$$\sum_{i=1}^{5} 0.90 \cdot a_i = 0.90 \cdot \sum_{i=1}^{5} a_i.$$

Deze eigenschap geldt niet enkel voor 0.90 maar voor elke constante c.

Eigenschap 5.12.1. Voor elke constante c (dus een getal dat niet afhangt van de sommatie-index), elk natuurlijk getal n en reële getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ geldt:

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Voorbeeld 5.12.3 (Totale kostprijs berekenen voor een eetstand)**.**

Je klas organiseert een eetstand op het schoolfestival. Jullie verkopen zelfgemaakte brownies en houden de kosten per ingrediënt bij. Voor elk ingrediënt noteer je:

- a_i: de prijs per kilogram (in euro)
- b_i: de hoeveelheid die je nodig hebt (in kilogram)

De gegevens staan in de volgende tabel:

Ingrediënt	a_i (euro/kg)	b_i (kg)	$a_i \cdot b_i$ (euro)
Bloem	1.20	5	6.00
Suiker	0.90	3	2.70
Boter	2.50	2	5.00
Chocolade	3.00	1	3.00
Noten	6.00	0.8	4.80
Totaal			21.50

Om de totale kostprijs te berekenen, vermenigvuldig je voor elk ingrediënt de prijs per kilogram met de hoeveelheid, en tel je alles op:

$$1.20 \cdot 5 + 0.90 \cdot 3 + 2.50 \cdot 2 + 3.00 \cdot 1 + 6.00 \cdot 0.8 = 21.50 \text{ euro}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.12 Het sommatieteken: Werken met data

Je kan deze som korter schrijven als:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot b_i$$

om de totale kostprijs van alle ingrediënten samen te berekenen.

Deze vorm van sommatie komt vaak voor als we werken met data.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Humane Wetenschappen

Module 6
Steekkaarten

(Versie 2026/09/09H.34)

Wat zijn data?

Begrippen

Variabele Een kenmerk dat tijdens een onderzoek gemeten wordt.

Data De resultaten van het meten of observeren van een variabele. Een dataset met n metingen noteren we vaak als $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Kwantitatieve data

Kwantitatieve data zijn numerieke gegevens waarmee je zinvol kunt rekenen. Ze zijn

- continu als elke waarde binnen een *interval* mogelijk is.
- discreet als slechts een *telbaar aantal waarden* mogelijk is.

Kwalitatieve data

Kwalitatieve data beschrijven categorieën of eigenschappen. Ze zijn

- nominaal als de categorieën *geen* natuurlijke *volgorde* hebben.
- ordinaal als de categorieën wel een natuurlijke *volgorde* hebben.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/09/08

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/09H.34)

Hoe stel je data voor?

Frequentietabel

Een **frequentietabel** is een tabel die toont hoe vaak (absoluut of relatief) bepaalde waarden of categorieën voorkomen in een dataset.

Voorbeeld

Type	Aantal studenten
GRAD	24 580
PBA	117 237
ABA	78 822
MA	54 720
Totaal	**275 359**

Kruistabel

Een **kruistabel** is een tabel die het samengaan toont van twee of meer discrete variabelen door hun gezamenlijke aantallen of frequenties weer te geven.

Voorbeeld

Type	Aantal mannen	Aantal vrouwen	Totaal
PBA	47 923	69 314	**117 237**
ABA	35 681	43 141	**78 822**
MA	23 321	31 399	**54 720**
Totaal	**106 925**	**143 854**	**250 779**

Histogram

Een **histogram** is een grafische voorstelling van kwantitatieve gegevens gegroepeerd in klassen. De verticale as telt het aantal gegevens in elke klasse.

Voorbeeld

Cirkeldiagram

Een **cirkeldiagram** is een grafische voorstelling van gegevens waarbij de verdeling van een geheel wordt weergegeven als sectoren van een cirkel.

Voorbeeld

Lijndiagram

Een **lijndiagram** is een grafische voorstelling van gegevens waarbij opeenvolgende meetpunten met een lijn verbonden worden en zo een evolutie weergeven.

Voorbeeld

Staafdiagram

Een **staafdiagram** is een grafische voorstelling van gegevens waarbij de frequentie van elke categorie wordt weergegeven met een afzonderlijke staaf.

Voorbeeld

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/09/03

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/09H.34)

Maatgetallen

Begrippen

Maatgetallen zijn getallen die een dataset samenvatten. We onderscheiden twee soorten maatgetallen.

Centrummaten	Maatgetallen die de *centrale* of *typische* waarde van een dataset beschrijven.
Spreidingsmaten	Maatgetallen die beschrijven hoe sterk de data rond het centrum *verspreid* liggen.

Centrummaten

Modus	De waarde die het vaakst voorkomt.
Mediaan	De middelste waarde van een geordende dataset. Bij een even aantal waarden neem je het gemiddelde van de twee middelste waarden.
Gemiddelde	De som van alle datawaarden gedeeld door het aantal waarden, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
Eerste kwartiel (Q_1)	De mediaan van de onderste helft van de data.
Tweede kwartiel (Q_2)	De mediaan van de volledige dataset.
Derde kwartiel (Q_3)	De mediaan van de bovenste helft van de data.

Spreidingsmaten

Variatiebreedte	Het verschil tussen de grootste en de kleinste waarde in de dataset, $R = \max(x_i) - \min(x_i)$.
Interkwartielafstand	Het verschil tussen het derde en het eerste kwartiel, $IQR = Q_3 - Q_1$.
Variantie	Het gemiddelde van de gekwadrateerde afwijkingen ten opzichte van het gemiddelde. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
Standaardafwijking	De vierkantswortel van de variantie. $\sqrt{\text{Variantie}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/09/03

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/09H:34)

Verbanden

Begrippen

Verband De *samenhang* tussen twee variabelen: hoe de waarde van de ene variabele verandert in functie van de andere.

Groei De *toename* van een grootheid *in de tijd*.

Lineaire verbanden

Een grafiek die een rechte lijn vormt, stelt een **lineair verband** voor tussen twee variabelen.

Een stijgende rechte wijst op een positief lineair verband, terwijl een dalende rechte wijst op een negatief lineair verband.

Gaat de lijn bovendien door de oorsprong, dan spreken we van een recht evenredig verband.

Positief *Negatief* *Recht evenredig*

Niet-lineaire verbanden

Er zijn ook **niet-lineaire** verbanden waarbij de grafiek geen rechte is. Enkele voorbeelden:

Lineaire groei

Bij **lineaire groei** neemt een hoeveelheid toe met een vast verschil per tijdseenheid. De grafiek is een rechte.

Exponentiële groei

Bij **exponentiële groei** neemt een hoeveelheid toe met een vaste vermenigvuldigingsfactor per tijdseenheid. De grafiek is een kromme die steeds steiler wordt.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/09/03

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/09H34)

Remediëring datageletterdheid
Humane Wetenschappen

6.9 Overzicht rekenen

Rekenen met data

Volgorde van bewerkingen

Bij rekenen met meerdere bewerkingen geldt de volgorde van bewerkingen:

1) Haakjes
2) Machten en Wortels
3) Vermenigvuldigen en Delen
4) Optellen en Aftrekken

Ezelsbruggetje: *"Het Mannetje Won Van De Oude Aap."*

Haakjes

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac \\ a(b-c) &= ab-ac \\ -(a+b) &= -a-b \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd \end{aligned}$$

Faculteit

De **faculteit** geeft het aantal manieren om n elementen te ordenen:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ met $0! = 1$.

Het **binomiaalcoëfficiënt** geeft het aantal mogelijke keuzes van k uit n:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Percentages

Percentage als getal	$p\% = \frac{p}{100}$
Percentage berekenen	$\frac{\text{deel}}{\text{totaal}} \cdot 100\%$
$p\%$ van een getal	$\frac{p}{100} \cdot \text{getal}$
Toename met $p\%$	$\cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$
Afname met $p\%$	$\cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$

Breuken

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\iff ad = bc \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{b} &= \frac{a+c}{b} \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \\ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bc} \end{aligned}$$

Gelijkheden

Weegschaalprincipe: Je mag op beide leden van de gelijkheid *dezelfde* bewerking uitvoeren.

Ongelijkheden

$>$ groter, $\geq$ groter of gelijk, $<$ kleiner, $\leq$ kleiner of gelijk

Indien je beide leden vermenigvuldigt met of deelt door een *negatief* getal **draait** de ongelijkheid **om**.

Wortels

De **vierkantswortel** van een positief reëel getal a is het getal $\sqrt{a}$ waarvoor geldt:

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ met $\sqrt{a} \geq 0$.

Er geldt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ en $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Machten

Een **macht** geeft een vermenigvuldiging van hetzelfde getal weer:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}$ met $a^0 = 1$.

Er geldt $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$,

$a^n b^n = (ab)^n$ en $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Sommatieteken

Het **sommatieteken** $\sum$ is een verkorte notatie om meerdere getallen op te tellen:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Er geldt $\sum c\,a_i = c \sum a_i$ en $\sum (a_i + b_i) = \sum a_i + \sum b_i$.

Logisch redeneren

Een **uitspraak** is een zin waarvan je kan bepalen of die waar of onwaar is. Een uitspraak met

en	is waar wanneer beide delen van de uitspraak waar zijn.
of	is waar wanneer minstens één van beide delen van de uitspraak waar is.
als..., dan...	is enkel onwaar wanneer het eerste deel waar is en het tweede deel onwaar is.
als en slechts als	is waar wanneer de eerste en tweede uitspraak dezelfde waarheidswaarde hebben.

KU Leuven CC BY-NC-SA 4.0, versie 2026/09/03

CC BY-NC-SA 4.0 KU Leuven (2026/09/09H.34)